Title	Bonnet Surfaces with Constant Curvature (Homogeneous Structures and Theory of Submanifolds)
Author(s)	藤岡, 敦; 井ノ口, 順一
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1069: 73-82
Issue Date	1998-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/62538
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1069巻 1998年 73-82

Bonnet Surfaces with Constant Curvature

金沢大学大学院自然科学研究科　藤岡 敦　(Atsushi Fujioka)
福岡大学理学部応用数学科　井ノロ 順一　(Jun-ichi Inoguchi)

Introduction

平均曲率一定曲面が随伴族をもつことは, 1867年の Bonnet の仕事 [4] にまで遡ることができる. 彼のこの仕事に因んで, 3次元空間形内の曲面で, 平均曲率を保ったまま等長的に変形できるものは, 現在, ボンネ曲面とよばれている. ただし, 変形といった場合, 空間形の等長変換の合成によって得られる自明なものは除外して考え, また, 曲面は十分滑らかで臍点をもたないとする.

ボンネ曲面に関する研究は現在に至るまで非常に多くなされている. (例えば, [1, 2, 5, 6, 7, 13, 14] 等を見よ.) 特に, 定曲率のボンネ曲面については, 以下に述べるような事実から期待されるように, 一般の場合よりも具体的な記述が可能であると思われる.

まず, Cartan [5] はその論文の中で, タイプ C に属するボンネ曲面のうち特別なものについて詳しく調べているが, その曲面は現在カルタン錐 ([2, 3]) とよばれる, ユークリッド空間 $\mathbf{E}^3$ 内の対数螺線上の柱面の変形によってえられる平坦なものである. Roussos [13] は $\mathbf{E}^3$ 内の平均曲率が一定でない平坦なボンネ曲面はカルタン錐か又は, 特定の測地的曲率をもつ球面曲線と原点とを結んでできる錐面の変形によってえられるものに限ることを示した. また, Colares-Kenmotsu [7] は $\mathbf{E}^3$ 内の定曲率ボンネ曲面

は平坦であることを示し, Roussos と同様の結果を得た. 更に, Takeuchi [14] 及び, Chen-Li [6] は定曲率 c の空間形内のボンネ曲面が定曲率 K をもつならば, K は c か 0 であることを示し, 同じ論文の中で Takeuchi は $K=c<0$ の場合の第 1 及び, 第 2 基本形式を計算した.

ここでは, 上に述べた結果を拡張し, 定曲率ボンネ曲面が 2 次元空間形内の特定の測地的曲率をもつ曲線によって parametrize されることを示す.

1 Preliminaries

$n=2,\,3,\ c=\pm1,\,0$ に対し, $\mathfrak{M}^n(c)$ を定曲率 c の単連結完備 n 次元空間形とする. $m=2,\,3,\,4,\ \nu=\pm1,\ a=(a_1,\cdots,a_m),\ b=(b_1,\cdots,b_m)\in\mathbf{R}^m$ に対し, $\mathbf{R}^m$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle_{m,\nu}$ を

$$\langle a,b\rangle_{m,\nu}=\nu a_1b_1+\sum_{k=2}^{m}a_kb_k$$

によって定めると, $\mathfrak{M}^n(c)$ は次のように表される.

$$\mathfrak{M}^n(1)=S^n=\left\{p\in\mathbf{R}^{n+1};\langle p,p\rangle_{n+1,1}=1\right\};\ n\text{ 次元球面}$$

$$\mathfrak{M}^n(-1)=H^n=\left\{p\in\mathbf{R}^{n+1};\langle p,p\rangle_{n+1,-1}=-1\right\}\text{ の連結成分;}$$

$$n\text{ 次元双曲型空間形}$$

$$\mathfrak{M}^n(0)=\mathbf{E}^n=(\mathbf{R}^n,\langle\ ,\ \rangle_{n,1});\ n\text{ 次元ユークリッド空間}$$

以下, 簡単のため $\langle\ ,\ \rangle_{4,1}=\langle\ ,\ \rangle_1,\ \langle\ ,\ \rangle_{4,-1}=\langle\ ,\ \rangle_{-1},\ \langle\ ,\ \rangle_{3,1}=\langle\ ,\ \rangle_0,$ $\langle\ ,\ \rangle_{2,1}=\langle\ ,\ \rangle$ とおく.

$\mathfrak{M}^3(c)$ 内の曲面は, リーマン面 M から $\mathfrak{M}^3(c)$ への共形的はめ込み $F:M\to\mathfrak{M}^3(c)$ として表される. このとき, F に対するガウス・コダッチの

方程式は

$$\begin{cases} 4|Q|^2 = e^{2u}(H^2 - K + c) \\ Q_{\bar{z}} = \frac{1}{2}H_z e^u \end{cases} \tag{GC$_c$}$$

である. ただし, z は M の局所正則座標, $e^u dz d\bar{z}$ は M の誘導計量, K は F の曲率で, N を F の単位法線ベクトルとしたとき, H, Q は $\langle F_{z\bar{z}}, N\rangle_c = \frac{1}{2}He^u$, $\langle F_{zz}, N\rangle_c = Q$ によって定められる. H, Qdz^2 はそれぞれ F の平均曲率及び, ホップ微分である.

Proposition (Graustein, Raffy [10, 12]) $F: M \to \mathfrak{M}^3(c)$ がボンネ曲面であることと次の (1), (2) は同値.

(1) F は isothermic 即ち, Q は適当な局所正則座標に関して実数値となる.

(2) $\frac{1}{Q}$ はその座標に関して調和. (F は臍点をもたないと仮定しているので, $Q \neq 0$ であることに注意.)

Definition Proposition で与えられる座標を isothermic coordinate とよぶ.

2 Bonnet surfaces with flat extrinsic curvature

Introduction で述べたように, $\mathfrak{M}^3(c)$ 内のボンネ曲面が定曲率 K をもつとすると, $K = c$ 又は, 0 となる. ここでは, $c = \pm 1$ として, $\mathfrak{M}^3(c)$ 内の定曲率 c のボンネ曲面 F についてしらべる. $z = x + \sqrt{-1}y$ を isothermic coordinate とし, $Q = \frac{1}{2}q$ とおくと (GC)$_c$ は次と同値である.

$$\begin{cases} q^2 = e^{2u}H^2 \\ q_{\bar{z}} = e^u H_z \end{cases}$$

簡単のため $q = e^u H$ の場合のみを考えると,

$$\frac{q_z - q_{\bar{z}}}{q} = u_z$$

となるから, u は y のみの関数である. 従って,

$$\frac{1}{q} = f(x)e^{-\frac{1}{2}u}$$

となる. ただし, f は x の実数値関数である. また, 曲率の条件, 及び, Proposition の (2) より,

$$\frac{d^2u}{dy^2} + 2ce^u = 0$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \left\{ ce^u + \frac{1}{4}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \right\} f = 0$$

となる. 最後の 2 式を解いて, $q = -e^u H$ の場合も合わせると次をえる.

Lemma 1

$$(u, q, H) = \left(u(\eta), \frac{e^{\frac{1}{2}u(\eta)}}{f(\xi)}, \frac{\varepsilon e^{-\frac{1}{2}u(\eta)}}{f(\xi)} \right)$$

$c = 1$ のとき

$$(u, f) = \left(\log \frac{\alpha^2}{\cosh^2(\alpha\eta + \beta)}, C_1 \cos \alpha\xi + C_2 \sin \alpha\xi \right)$$

$c = -1$ のとき

$$(u, f) = \begin{cases} \left(\log \dfrac{\alpha^2}{\sinh^2(\alpha\eta + \beta)}, C_1 \cos \alpha\xi + C_2 \sin \alpha\xi \right) \\ \left(\log \dfrac{\alpha^2}{\cos^2(\alpha\eta + \beta)}, C_1 e^{\alpha\xi} + C_2 e^{-\alpha\xi} \right) \\ \left(\log \dfrac{1}{(\eta + \beta)^2}, C_1\xi + C_2 \right) \end{cases}$$

ただし, $(\eta,\xi,\varepsilon)=(x,y,-1)$ 又は, $(y,x,1)$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbf{R}$, $(C_1,C_2)\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ である.

Lemma 1 よりガウス・ワインガルテンの方程式は次のようになる.

$$\begin{cases} F_{\eta\eta}-\dfrac{1}{2}\dfrac{du}{d\eta}F_\eta+ce^uF=0 \\ F_{\eta\xi}-\dfrac{1}{2}\dfrac{du}{d\eta}F_\xi=0 \\ F_{\xi\xi}+\dfrac{1}{2}\dfrac{du}{d\eta}F_\eta+ce^uF=2\varepsilon qN \end{cases}$$

$c=1$ のときのみ, これを実際に解いてみる. まず, 第 1 式より,

$$F=\frac{A+B\sinh(\alpha\eta+\beta)}{\cosh(\alpha\eta+\beta)}$$

となる. ただし, A, B は $\mathbf{R}^4$ に値をとる ξ の関数であるが, 第 2 式より, B は定数となる. 更に, $\langle F,F\rangle_1=1$, $\langle F_\xi,F_\xi\rangle_1=e^u$ より,

$$\langle A,A\rangle_1=\langle B,B\rangle_1=1,\ \langle A,B\rangle_1=0,\ \left\langle\frac{dA}{d\xi},\frac{dA}{d\xi}\right\rangle_1=\alpha^2$$

となるので, S^3 の等長変換を合成することにより, $B=(1,0,0,0)$ としてよい. このとき, A は S^2 内の曲線とみなせ, 第 3 式より,

$$\frac{d^2A}{d\xi^2}+\alpha^2A=\frac{2}{C_1\cos\alpha\xi+C_2\sin\alpha\xi}A\times\frac{dA}{d\xi}$$

となる. ただし, $A\times\frac{dA}{d\xi}$ は A と $\frac{dA}{d\xi}$ とのベクトル積である. $c=-1$ のときも同様の計算を行うことにより次をえる.

Theorem 1

$c=1$ のとき

$$F=\frac{A_1+B_1\sinh(\alpha\eta+\beta)}{\cosh(\alpha\eta+\beta)}$$

$c=-1$ のとき

$$F=\begin{cases}\dfrac{A_1+B_1\cosh(\alpha\eta+\beta)}{\sinh(\alpha\eta+\beta)}\\ \dfrac{A_{-1}+B_{-1}\sin(\alpha\eta+\beta)}{\cos(\alpha\eta+\beta)}\\ \dfrac{A_0+\frac{1}{2}B_0(\eta+\beta)^2}{\eta+\beta}\end{cases}$$

ただし，

$$\begin{cases}A_1=P\,(0,\gamma_1(\alpha\xi))\\ B_1=P(1,0,0,0)\end{cases}\qquad\begin{cases}A_{-1}=P\,(\gamma_{-1}(\alpha\xi),0))\\ B_{-1}=P(0,0,0,1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_0=P\left(\dfrac{\langle\gamma_0(\xi),\gamma_0(\xi)\rangle+1}{2},\dfrac{\langle\gamma_0(\xi),\gamma_0(\xi)\rangle-1}{2},\gamma_0(\xi)\right)\\ B_0=P(1,1,0,0)\end{cases}$$

P は $\mathfrak{M}^3(c)$ の等長変換，$\gamma_{c'}(t)$ は測地的曲率が

$$\begin{cases}\dfrac{2}{C_1\cos t+C_2\sin t} & c'=1\\ \dfrac{2}{C_1e^t+C_2e^{-t}} & c'=-1\\ \dfrac{2}{C_1t+C_2} & c'=0\end{cases}$$

であたえられる，$\mathfrak{M}^2(c')$ 内の単位速度をもつ曲線である．

3 Harmonic inverse mean curvature surfaces

平坦なボンネ曲面について調べるために，ここでは，harmonic inverse mean curvature surface（単に HIMC surface と書く）とよばれるものについて必要な事実のみを述べる．

1 次元リーマン多様体 I_c を

$$I_c=\begin{cases}(\mathbf{R},g_c) & c=0,1\\ (\mathbf{R}\setminus\{\pm1\},g_c) & c=-1\end{cases}\qquad g_c=\frac{1}{(1+cs^2)^2}ds^2$$

で定める.

Definition $F: M \to \mathfrak{M}^3(c)$ が HIMC surface であるとは, $\varphi = \frac{1}{H}: M \to I_c$ が調和, 即ち,

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{-1}(h-\bar{h})}{|h|^2 - c} \text{ 又は, } \dfrac{|h|^2 - c}{\sqrt{-1}(h-\bar{h})} & c = \pm 1 \\ \dfrac{\sqrt{-1}(h-\bar{h})}{|h|^2} & c = 0 \end{cases}$$

となることをいう. ただし, h は M 上の正則関数である.

以下,

$$\mathcal{C}_{h,c} = \left\{ H = \frac{|h|^2 - c}{\sqrt{-1}(h-\bar{h})} \text{ となる } \mathfrak{M}^3(c) \text{ 内の HIMC surface 全体} \right\}$$

とおく. 次の Lemma は Lawson [11] による異なる空間形内の平均曲率一定曲面の間の対応をあたえる, Lawson 対応とよばれるものの一般化といえる.

Lemma 2 (Lawson 対応) M が単連結とすると, $\mathcal{C}_{h,1} \cong \mathcal{C}_{h,-1} \cong \mathcal{C}_{h,0}$. この対応で平坦あるいは, isothermic といった性質は不変.

証明 $H = \dfrac{|h|^2 - c}{\sqrt{-1}(h-\bar{h})}$ $(c = \pm 1)$ として, (u, Q) を $(\mathrm{GC})_c$ の解とする.

$$e^{u'} = \left| \frac{h^2 - c}{h^2} \right|^2 e^u, \quad Q' = \frac{h^2 - c}{h^2} Q$$

とおくと, (u', Q') は $H = \dfrac{|h|^2}{\sqrt{-1}(h-\bar{h})}$ のときの $(\mathrm{GC})_0$ の解となる.

4 Flat Bonnet surfaces

最後に平坦なボンネ曲面について述べる. $F : M \to \mathfrak{M}^3(c)$ を平坦なボンネ曲面とし, §2 と同様の記号を用いると, $(\mathrm{GC})_c$ は次と同値となる.

$$\begin{cases} q^2 = e^{2u}(H^2 + c) \\ q_{\bar{z}} = e^u H_z \end{cases}$$

よって,

$$\frac{q_z}{q} = u_z + \frac{HH_z}{H^2 + c}$$

ここで, u 及び, $\frac{1}{q}$ は isothermic coordinate に関して調和だから,

$$\frac{|H_z|^2}{H^2 + c} = \left(\frac{HH_z}{H^2 + c}\right)_{\bar{z}}$$

となる. 従って, F は $H^2 + c > 0$ となる HIMC surface である.

Theorem 2 平坦なボンネ曲面は平坦な isothermic HIMC surface と一致する. S^3 又は, H^3 内の平坦なボンネ曲面は $\mathbf{E}^3$ 内の平坦なボンネ曲面から Lawson 対応によってえられる.

参考文献

[1] A. I. Bobenko, *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases*, Harmonic maps and Integrable Systems (A. Fordy and J. C. Wood, eds.), Aspects of Mathematics, Vieweg (1994), 83–127.

[2] A. Bobenko and U. Eitner, *Bonnet surfaces and Painlevé equations*, to appear in J. reine Angew. Math.

[3] A. Bobenko, U. Eitner and A. Kitaev, *Surfaces with harmonic inverse mean curvature and Painlevé equations*, Geom. Dedicata **68** (1997), 187–227.

[4] O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables*, J. Éc. Polyt. **42** (1867), 72–92.

[5] É. Cartan, *Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales*, Bull. Sci. Math. **66** (1942), 1–30.

[6] W. Chen and H. Li, *Bonnet surfaces and isothermic surfaces*, Results Math. **31** (1997), 40–52.

[7] A. G. Colares and K. Kenmotsu, *Isometric deformation of surfaces in $\mathbf{R}^3$ preserving the mean curvature function*, Pacific J. Math. **136** (1989), 71–80.

[8] A. Fujioka, *Surfaces with harmonic inverse mean curvature in space forms*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[9] A. Fujioka and J. Inoguchi, *Bonnet surfaces with constant curvature*, Results Math. **33** (1998), 288–293.

[10] W. C. Graustein, *Applicability with preservation of both curvatures*, Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1924), 19–23.

[11] B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3*, Ann. of Math. **92** (1970), (335–374).

[12] L. Raffy, *Sur une classe nouvelle des surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sons altèration des courbures principales*, Bull. Soc. Math. France **21** (1893), 70–72.

[13] I. M. Roussos, *Principal curvature preserving isometries of surfaces in ordinary space*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **18** (1987), 95–105.

[14] H. Takeuchi, *Isometric deformation of surfaces in the hyperbolic 3-manifold preserving the mean curvature*, Tokyo J. Math. **18** (1995), 247–258.