京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学
KYOTO UNIVERSITY

Title	信号函数の生成する再生核Hilbert空間 : スペクトル積分の構成 (再生核の理論とその応用)
Author(s)	梅垣, 壽春
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1067: 118-124
Issue Date	1998-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/62495
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
1067 巻 1998 年 118-124

信号函数の生成する再生核 Hilbert 空間
—スペクトル積分の構成—

東京工業大学名誉教授
梅垣壽春 (Hisaharu Umegaki)

§1. まえがき

再生核 RK (Reproducing Kernel) の理論は，それによって形成される Hilbert 空間 RKHS (= RK Hilbert Spaces) の構造，更に RKHS 上の作用素の解析等を含めて大変興味ある研究課題と思われる．特に Hilbert 空間 proper な見地に立っても，多くの問題をキャッチ出来そうな可能性がある．

当論文では，函数解析的見地に立って，情報理論に於ける基本函数である標本函数を核に置いて RKHS を構成し，周波数パラメータ λ を変動さすことによって得られる RKHS の one-parameter 族に対して，スペクトル解析の方法を論じようと思う．

今回の研究集会に参加出来たことは大変有意義なことで貴重な成果が得られたと思う．研究代表者斎藤三郎教授に感謝の意を述べさせて頂きたい．当論文を完成するに当たって信州大学の河邊淳氏に査読・構成等全般に亘って大変お世話になった．ここに謝意を表し度い．

§2. 再生核 Hilbert 空間 RKHS

空でない集合 Γ 上の複素数値函数からなる函数空間 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma)$ が再生核 Hilbert 空間 (RKHS と略記) であるとは，次の二つの条件を満たすときをいう:

《RKHS 1》 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma)$ は複素 Hilbert 空間である．ここで，内積は $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ノルムは $\|\cdot\|$ とするが，内積における係数は

$$\langle \alpha x, \beta y\rangle = \bar{\alpha}\beta \langle x, y\rangle \quad (x, y \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

とする．

《RKHS 2》 直積集合 $\Gamma \times \Gamma$ 上で定義される複素数値函数 $K = K(s,t)$ が存在して，$\forall t \in \Gamma$ に対して定まる Γ 上の函数 $K_t(\cdot) = K(\cdot, t)$ は $\mathcal{H}$ の要素 (i.e., $K_t \in \mathcal{H}$) であり，各函数 $x = x(\cdot) \in \mathcal{H}$ に対して

$$x(t) = \langle K_t, x\rangle, \quad t \in \Gamma. \tag{2.1}$$

この 2 変数函数 $K = K(\cdot,\cdot)$ を RKHS $\mathcal{H}$ の再生核 (RK と略記) といい，この $\mathcal{H}$ は函数 K を RK にもつ Γ 上の RKHS であるという．

RKHS $\mathcal{H}(\Gamma)$ においては RK $K = K(\cdot,\cdot)$ は一意である，つまり函数 $K' = K'(\cdot,\cdot)$ が RKHS $\mathcal{H}(\Gamma)$ の RK であるならば，$\forall t \in \Gamma$ に対して

$$\langle K'_t, x \rangle = x(t) = \langle K_t, x \rangle \quad \text{for } \forall x \in \mathcal{H}, \forall t \in \Gamma$$

が成り立つから $K'_t = K_t$. 従って

$$K'(s,t) = K'_t(s) = K_t(s) = K(s,t) \quad \text{for } \forall s,t \in \Gamma.$$

有用で興味ある RKHS の examples は多々あるが，その重要なものの一つを本論の目標とする所の標本函数の項 (§3，§4) で述べることにする．

以下，既知であるが，参考のために RK に関する基本定式を列挙する．RK $K = K(\cdot,\cdot)$ について

⟨RK 1⟩ $K(s,t) = \langle K_s, K_t \rangle = \overline{K(t,s)} \quad (\forall s,t \in \Gamma)$

⟨RK 2⟩ $\sum \bar{\lambda}_i \lambda_j K(t_i,t_j) \geqq 0 \quad (\forall t_1,\cdots,t_n \in \Gamma; \forall \lambda_1,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{C})$, i.e., $\{\alpha_{ij}\}$ $(\alpha_{ij} = K(t_i,t_j))$ は正の定符号行列．

⟨RK 3⟩ $\{K_t : t \in \Gamma\}$ は全空間 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma)$ を span する．

⟨RK 4⟩ $|K(s,t)|^2 \leqq K(s,s)\,K(t,t)$

⟨RK 5⟩ $\forall \{x_n\} \subset \mathcal{H}$ に対して

$$x_n \to x \text{ (弱)} \iff x_n(t) \to x(t) \ (\forall t \in \Gamma) \text{ 且つ } \|x_n\| \leqq M \ (\forall n)$$

⟨RK 5⟩ の ($\Leftarrow$) を示す．逆は自明．先ず，$\exists M_1 > 0 : \|x_n - x\| \leqq M_1 \ (\forall n)$，更に $\forall \varepsilon > 0, \forall y \in \mathcal{H}$ に対して，有限和 $\sum \alpha_j K_{t_j}$ が存在して $\left\| y - \sum \alpha_j K_{t_j} \right\| < \varepsilon$. 故に

$$|\langle x_n - x, y \rangle| \leqq \left| \left\langle x_n - x, y - \sum \alpha_j K_{t_j} \right\rangle \right| + \left| \left\langle x_n - x, \sum \alpha_j K_{t_j} \right\rangle \right|.$$

ここで Schwarz 不等式及び

$$\left\langle x_n - x, K_{t_j} \right\rangle = x_n(t_j) - x(t_j) \to 0 \quad (\forall j)$$

を用いれば結論を得る．

次の定理は容易であるが，函数解析上有効且つ重要であるので敢えてここに記載する:

《定理 2.1》 集合 Γ 上の複素数値函数からなる Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が RKHS であるための必要十分条件は

⟨RK 6⟩ 任意の $t \in \Gamma$ に対して $\mathcal{H}$ 上の函数 $\overset{\circ}{t}$ $(\overset{\circ}{t}(x) = x(t))$ は $\mathcal{H}$ 上の有界線形汎函数である (i.e., $\overset{\circ}{t} \in \mathcal{H}^*$).

これの証明は Hilbert 空間に於ける Riesz の表現定理 (どの教科書にも記載) を用いれば容易．以上，RKHS の解析に本論に於いて必要なものに限って列挙した．

§3. 部分空間BL_λの構成

ここで揚げたBL_λは本論説の主目標の一つであるHilbert空間RKHSであり(cf. §4), 同時にエネルギー有限な信号函数を数学的に解析するためのbaseとなる空間である．そこに於いて周波数帯域が限定される信号函数の数理的解析を行うことによって，数学の有効性が示される．

一般に，信号函数は$f, g, \cdots$ などで表す．これらは全てエネルギー有限，つまり$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$上で2乗可積分であるとする:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty.$$

数学的構成を幅広く行う関係上，$f, g, \cdots$ などはすべて複素数値なL^2–函数，つまり(複素) Hilbert空間$L^2(\mathbb{R})$に属するとする．各fのFourier変換は

$$\hat{f}(\omega) = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-T}^{T} f(t) e^{-2\pi i\omega t} dt \tag{3.1}$$

と記す．ここでl. i. m.はL^2–平均収束の記号．もしfが可積分(i.e., $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$)ならばl. i. m.をはずし，通常のLebesgue積分で行うが，L^2の場合もl. i. m.を省略して積分記号のみを用いることもある．

式(3.1)で変数$\omega \in \mathbb{R}$は周波数を表す．fの周波数帯域は$\hat{f}$のnon-zero変域を把握することによって得られる．Fourier解析がこの理論展開に主役となって登場する．

一般に，周波数が区間$[-\lambda, \lambda]$に限定されている信号函数(the functions of Bound Limited in $[-\lambda, \lambda]$)の全体をBL_λで表す:

$$BL_\lambda = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\omega) = 0 \text{ for } \omega\ (|\omega| > \lambda)\}.$$

このとき区間$[-\lambda, \lambda]$を周波数帯(bandwidth of frequency)と云う．この典型的な信号函数は次§の標本函数である．

《定理 3.1》 空間BL_λはHilbert空間$L^2(\mathbb{R})$の閉部分空間である．従って，BL_λ自身でHilbert空間と見做せる．

この定理はFourier変換の線形性とPlancherel定理より直ぐ云える．更に空間BL_λにconvolution積$f*g$, $*$-involution f^*などの構造を付与して，興味ある代数的性質を論ずることが可能であるが，本論ではその一部分のみをもちいるので，必要に応じて説明する．

§4. 標本函数とRKHS BL_λ

再生核Hilbert空間RKHSについては，その導入の部分を§2で述べたが，本論の核となっている空間BL_λが正にそのexampleとして興味が持たれる．§2に於いてbaseとなる集合を一般的にΓとしたが，ここでは

$$\Gamma = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \quad (\text{実数直線})$$

を採用する．ここで，このテーマの主役の一つである信号函数 $S_\lambda(\cdot)$ を与えよう:

標本函数 (Sampling function) $S_\lambda(\cdot)$ ($\lambda > 0$, fixed) とは，

$$S_\lambda(t) = \begin{cases} 2\lambda \dfrac{\sin 2\pi\lambda t}{2\pi\lambda t} & (t \neq 0, t \in \mathbb{R}) \\ 2\lambda & (t = 0) \end{cases} \tag{4.1}$$

によって定義される(これを $2\lambda\,\mathrm{sinc}(2\pi\lambda t)$ と略記することもある)．これのFourier変換は

$$\widehat{S_\lambda}(\omega) = 1_{[-\lambda,\lambda]}(\omega) \quad (\text{区間 } [-\lambda, \lambda] \text{ 上の定義函数}). \tag{4.2}$$

この函数 $S_\lambda(\cdot)$ の変数を $s \to s - t$ とするだけでRK $K(\cdot,\cdot)$ が直ぐに定義される．Kernel 函数 $K(\cdot,\cdot)$ は次のように与えられる:

$$K(s,t) = \begin{cases} 2\lambda \dfrac{\sin 2\pi\lambda(s-t)}{2\pi\lambda(s-t)} & (s \neq t) \\ 2\lambda & (s = t) \end{cases}$$

とおく，即ち函数 S_λ を用いて

$$K(s,t) = S_\lambda(s-t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

このとき次の定理が成立．

《定理 4.1》 (Yao)　Hilbert 空間 BL_λ は $K(\cdot,\cdot)$ をRKとするRKHSである，即ち

$$BL_\lambda = \mathcal{H}(K).$$

証明．空間 BL_λ の定義により，函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して次の関係が成立:

$$f \in BL_\lambda \Longleftrightarrow \hat{f}(\omega) = 0, \ \forall\omega \ (|\omega| > \lambda).$$

故に $K_t(s) = K(s,t)$ と置き，(4.2) を用いて，$\forall f \in BL_\lambda$ に対して

$$\widehat{S_\lambda}(\omega)\hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega) \quad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

従って，$\forall f \in BL_\lambda$，$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して，次の等式を得る

$$\langle K_t, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(s,t)} f(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_\lambda(s-t)} f(s) ds = (S_\lambda * f)(t) = f(t). \tag{4.4}$$

上記最後尾の等式は，等式 (4.3) の両辺の Fourier 逆変換 (ここも l. i. m. の演算が伴う) することによって得られる．

これに続く議論としてShannonの標本展開定理があるが，本論文の目標としていないので，ここでは触れない．

§5. RKHS の一径族 $\{BL_\lambda\}_{\lambda>0}$ と Spectral Resolution $\int \cdot\, dE_\lambda^S$

一般に Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 A に対してスペクトル測度 $\{E_\lambda^A\}$ が存在して積分表示

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^A \tag{5.1}$$

によって表される．ここで $\{E_\lambda^A\}$ はパラメータ $-\infty < \lambda < \infty$ (つまり $\lambda \in \mathbb{R}$) をもつ $\mathcal{H}$ 上の射影作用素族で次の条件を満たす: $E_{\lambda_1}^A \le E_{\lambda_2}^A \quad (\lambda_1 \le \lambda_2)$ かつ $\forall f \in \mathcal{H}$ で

$$\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda^A f = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda^A f = f, \quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} E_{\lambda+\varepsilon}^A f = E_\lambda^A f.$$

ここで lim は強収束の意味なり．この大定理は，初め Hilbert によって，更に，ここに論じている一般の重要な場合は von Neumann によってスペクトル定理として発見され完成された．それの具体的適用の一つは量子力学における運動量作用素 P と位置作用素 Q に対してである:

$$Pf = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}f, \quad (Qf)(t) = tf(t).$$

これら P, Q は非有界で且つ essentially s.a. であり，それらを extend して (同じ記号 P, Q を用いる) 自己共役に拡大したものが論じられる．従ってこれらは

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^P, \quad Q = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^Q \tag{5.2}$$

と表される．P と Q 及び各スペクトル測度 E_λ^P, E_λ^Q は $L^2(\mathbb{R})$ 上の Fourier 変換によって，次のように同値関係にある:

$$P = \mathcal{F}^{-1}Q\mathcal{F}, \quad Q = \mathcal{F}P\mathcal{F}^{-1}, \quad E^P = \mathcal{F}^{-1}E^Q\mathcal{F}, \quad E^Q = \mathcal{F}^{-1}E^P\mathcal{F}^{-1}. \tag{5.3}$$

ここで先に述べた一般の非有界 s.a. 作用素 A の議論に戻そう．P に対して $\{E_\lambda^P\}$ が対応すると同様に A には $\{E_\lambda^A\}$ が対応していた (cf. (5.1))．このとき $\forall\lambda \ge 0$ に対して，射影作用素 F_λ を次のように定める:

$$F_\lambda = E_{\sqrt{\lambda}}^A - E_{-\sqrt{\lambda}-0}^A \quad (\lambda \ge 0).$$

このとき $\{E_\lambda^A\}$ と同様に $\{F_\lambda\}_{\lambda\ge 0}$ もスペクトル測度となる．それによって

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 dE_\lambda^A = \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{+0}^{\infty}\right)\lambda^2 dE_\lambda^A \\ &= \int_0^\infty \lambda dE_{\sqrt{\lambda}}^A - \int_0^\infty \lambda dE_{-\sqrt{\lambda}-0}^A = \int_0^\infty \lambda dF_\lambda \end{aligned} \tag{5.4}$$

即ち

$$F_\lambda = E_\lambda^{A^2} \quad (\lambda \ge 0).$$

この結果を作用素 P, Q に当てはめる:
作用素 Q のスペクトル測度 E_λ^Q は，$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ 及び $-\infty < \forall\lambda < \infty$ に対して

$$\left(E_\lambda^Q f\right)(t) = 1_{(-\infty,\lambda]}(t) \cdot f(t) \quad \text{a.e. } t \in \mathbb{R}.$$

更にここで議論を標本函数 S_λ に戻そう．§4 の式 (4.2) によって $\widehat{S_\lambda} = 1_{[-\lambda,\lambda]}$ である．従って

$$(S_\lambda * S_\lambda)\hat{} = \widehat{S_\lambda} \cdot \widehat{S_\lambda} = \widehat{S_\lambda}.$$

Fourier 逆変換によって

$$S_\lambda * S_\lambda = S_\lambda = S_\lambda^*$$

(一般に $f^*(t) = \overline{f(-t)}$ とした)．一方 $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$E_\lambda^S f = S_\lambda * f \quad (\lambda \geq 0) \tag{5.5}$$

とおくと，E_λ^S は射影作用素である:

$$\left(E_\lambda^S\right)^2 f = E_\lambda^S(S_\lambda * f) = S_\lambda * S_\lambda * = S_\lambda * f = E_\lambda^S f,$$

$$\left\langle \left(E_\lambda^S\right)^* f, g \right\rangle = \langle f, E_\lambda^S g\rangle = \langle f, S_\lambda * g\rangle = \langle S_\lambda * f, g\rangle = \left\langle E_\lambda^S f, g\right\rangle.$$

一方，射影作用素 E_λ^S $(\lambda \geq 0)$ は Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を用い，(5.5) より

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(E_{\sqrt{\lambda}}^S f\right) &= \left(E_{\sqrt{\lambda}}^S f\right)\hat{} = (S_{\sqrt{\lambda}} * f)\hat{} = 1_{(-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda}]}\hat{f} \\
&= \left(1_{(-\infty,\sqrt{\lambda}]} - 1_{(-\infty,-\sqrt{\lambda})}\right)\hat{f} \\
&= \left(E_{\sqrt{\lambda}}^Q - E_{-\sqrt{\lambda}-0}^Q\right)\hat{f} \qquad (a.e.)
\end{aligned}$$

ここで，$\mathcal{F}^{-1}Q\mathcal{F} = P$ を適用して

$$\begin{aligned}
E_\lambda^S f &= \mathcal{F}^{-1}\left(E_{\sqrt{\lambda}}^Q - E_{-\sqrt{\lambda}-0}^Q\right)\mathcal{F}f \\
&= \mathcal{F}^{-1}E_{\sqrt{\lambda}}^Q\mathcal{F}f - \mathcal{F}^{-1}E_{-\sqrt{\lambda}-0}^Q\mathcal{F}f \\
&= E_{\sqrt{\lambda}}^P f - E_{-\sqrt{\lambda}-0}^P f \quad (\lambda \geq 0).
\end{aligned}$$

一般の作用素 A に対して行った等式 (5.4) に当てはめると

$$\int_0^\infty \lambda dE_\lambda^S f = \int_0^\infty \lambda d\left(E_{\sqrt{\lambda}}^P - E_{-\sqrt{\lambda}-0}^P\right) = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda^{P^2}.$$

斯くして次の結論に到着した:

《定理 5.1》 標本関数系 $\{S_\lambda;\ \lambda \geq 0\}$ から得られる連続パラメータをもつ $L^2(\mathbb{R})$ 上の射影作用素の族 $\{E_\lambda^S;\ \lambda \geq 0\}$ (= 標本函数系のスペクトル測度) は自己共役な微分作用素 P^2 のスペクトル測度と一致する，すなわち

$$E_\lambda^S = E_\lambda^{P^2}, \quad P^2 = \frac{-1}{(2\pi)^2}\frac{d^2}{dt^2} = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda^S.$$

上述の結果を Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を用いて位置作用素 Q^2 のスペクトル積分表示を行い，その square root をとって Q のスペクトル積分に導く議論が続くが，これは作用素解析として論ずる問題である．

Concluding Remarks.

各標本函数 $S_\lambda(\cdot)$ が RKHS BL_λ を形成し，而も函数 $S_\lambda(\cdot)$ そのものが convolution 積演算によって $L^2(\mathbb{R})$ 上で，BL_λ への射影作用素 E_λ^S となる．ここで，この周波数パラメータ λ を正の方向に変動さすことによって $\{E_\lambda^S\}$ が Spectral measure を形成し，これによる Spectral Integral が正しく微分作用素となるという結論で，標本函数の周波数の上限 λ を変数とし，$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ 上を run over さすという考え方が key-point である．更に続ければ，量子力学に於ける Shrödinger 対の解析にも発展する可能性がある．

最後に参考文献を列挙する．これは本論文にグローバルに関連する文献で，各々対応させなかったが，本文の項目毎にご参考願い度い．

参考文献

[1] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1950), 337-404.

[2] R. B. Ash, *Information Theory*, Interscience Publ., 1990.

[3] S. Ihara, *Information Theory for Continuous Systems*, World Scientific, 1993.

[4] M. Nakamura and H. Umegaki, *On von Neumann theory of measurements in quantum statistics*, Math. Japonica **7** (1962), 151-157.

[5] J. von Neumann, *Die Eindeutigkeit der Schrödingershen Operateren*, Math. Ann. **104** (1931), 570-578.

[6] J. von Neumann, *Mathematishe Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, 1932.

[7] S. Saito, *Theory of Reproducing Kerenels and its Applications*, πPitman Research Notes in Math. Series, Langman Sci. & Tech. **189**, 1989.

[8] S. Saito, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*, Ibid., **369**, 1997.

[9] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27** (1948), 379-423, 623-656.

[10] 梅垣・大矢・日合, 作用素代数入門, 共立出版, 1985.

[11] H. Umegaki, *A spectral property of one parameter family of sampling function, $QP - PQ$*, Quantum Probab. & Related Topics **9** (1993).

[12] 梅垣壽春, 情報数理の基礎, サイエンス社, 1995.

[13] K. Yao, *Applications of reproducing kernel Hilbert spaces*, Inform. Control **11** (1967), 427-444.