数理解析研究所講究録
990 巻 1997 年 82-91

漸化式を用いるベッセル関数$J_{\nu}(x)$の数値計算法の誤差解析

中部大学経営情報学部　吉田年雄　(Toshio Yoshida)

1．はじめに

mを適当に選ばれた正の偶整数とし，αを小さな任意定数とする．

$$F_{\nu+m+1}(x)=0,\ F_{\nu+m}(x)=\alpha \tag{1}$$

を出発値として，$J_{\nu}(x)$が満足する漸化式

$$F_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}F_{\nu}(x)-F_{\nu+1}(x) \tag{2}$$

を繰り返し使うことにより，$F_{\nu+m-1}(x), F_{\nu+m-2}(x), \cdots, F_{\nu}(x)$を順次，計算する．それを用いれば，ある$N(<m)$に対して，$n=0,1,\cdots, N$についての$J_{\nu+n}(x)$の近似式が次式で与えられる．

$$J_{\nu+n}(x)\approx F_{\nu+n}(x)/\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k F_{\nu+2k}(x) \tag{3}$$

ただし,

$$\varepsilon_k=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\frac{(\nu+2k)\Gamma(\nu+k)}{k!} \tag{4}$$

である．この$J_{\nu}(x)$の計算法については，$0\le\nu<1$の場合に対して，既に二宮[1)]，牧之内[2)]らによって誤差解析を含めて研究されている．特に，二宮

は計算値の誤差に対する有用な評価式を与えている．二宮による誤差解析における式変形では，かなり面倒な手続きを必要とするが，本稿で提案している方法では，式変形を比較的容易（機械的）に行うことができる．

2．誤差解析

nを正整数とする．関数$J_{\nu+n}(x)$および$Y_{\nu+n}(x)$は共に同じ漸化式(2)を満足する．逆に式(2)の一般解は

$$F_{\nu+n}(x)=\xi J_{\nu+n}(x)+\eta Y_{\nu+n}(x) \tag{5}$$

によって表わされる．ここでξおよびηは任意定数である．これらの任意定数は式(1)によって決定される．式(1)から次式が得られる．

$$F_{\nu+m+1}(x)=\xi J_{\nu+m+1}(x)+\eta Y_{\nu+m+1}(x)=0 \tag{6}$$

式(5)と(6)からηを消去すると次式を得る．

$$F_{\nu+n}(x)=\xi\left(J_{\nu+n}(x)-\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+n}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}\right) \tag{7}$$

上式と次の関係式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k J_{\nu+2k}(x)=1 \tag{8}$$

より

$$\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k\left(\frac{F_{\nu+2k}(x)}{\xi}+\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}\right)+\sum_{k=m/2+1}^{\infty}\varepsilon_k J_{\nu+2k}(x)=1 \tag{9}$$

が得られる．式(7)と(9)からξを消去すると次式が求められる．

$$J_{\nu+n}(x)=\frac{F_{\nu+i}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k F_{\nu+2k}(x)}(1-\Phi_{\nu,m}(x))+\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+n}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} \tag{10}$$

ここで，

$$\Phi_{\nu,m}(x)=\left(\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}+\sum_{k=m/2+1}^{\infty}\varepsilon_k J_{\nu+2k}(x)\right) \tag{11}$$

である．式(10)は，$J_{\nu+n}(x)$とその近似式との基本的な関係式である．

したがって，式(1)を出発値として，漸化式(2)を繰り返し適用することより得られた$F_{\nu+m-1}(x), F_{\nu+m-2}(x), \cdots, F_{\nu}(x)$を用いて，式(3)により，10進$p$桁の精度で$J_{\nu+n}(x)$が計算できるためには，

$$|\Phi_{\nu,m}(x)|<0.5\times10^{-p} \tag{12}$$

および

$$|\Theta_{\nu,m,n}(x)|<0.5\times10^{-p} \tag{13}$$

が成り立てばよい．ここで，

$$\Theta_{\nu,m,n}(x)=\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+n}(x)}{J_{\nu+n}(x)Y_{\nu+m+1}(x)} \tag{14}$$

である．

$J_{\nu+n}(x)$の近似式(3)の相対精度$E_{\nu,m,n}(x)$は，式(10)より，

$$E_{\nu,m,n}(x)=\frac{\Phi_{\nu,m}(x)-\Theta_{\nu,m,n}(x)}{1-\Phi_{\nu,m}(x)} \tag{15}$$

と表され，さらに，$|\Phi_{\nu,m}(x)|<<1$ならば，

$$E_{\nu,m,n}(x)\approx\Phi_{\nu,m}(x)-\Theta_{\nu,m,n}(x) \tag{16}$$

と表される．

3．$\Phi_{\nu,m}(x)$の変形

式(11)で表わされる$\Phi_{\nu,m}(x)$を変形しよう．

$$\Phi_{\nu,m}(x)=\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}+1-\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k J_{\nu+2k}(x)$$
$$=\frac{Y_{\nu+m+1}(x)+\dfrac{2}{\pi x}\displaystyle\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k R_{m-2k,+\nu 2k+1}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} \tag{17}$$

ただし,

$$R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)=\frac{\pi x}{2}(J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k}(x)-J_{\nu+2k}(x)Y_{\nu+m+1}(x))$$
$$=\sum_{i=0}^{m/2-k}\frac{(-1)^i(m-2k-i)!\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!(m-2k-2i)!\Gamma(\nu+2k+i+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k+2i} \tag{18}$$

はLommel多項式[3]である.

式(17)の右辺の分子の第1項$Y_{\nu+m+1}(x)$は,次式のように書き換えられる.

$$Y_{\nu+m+1}(x)=\frac{J_{\nu+m+1}(x)\cos(\nu+m+1)\pi-J_{-\nu-m-1}(x)}{\sin(\nu+m+1)\pi}$$
$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$
$$+\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1}\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\cos\nu\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k}}{k!\Gamma(\nu+m+k+2)}-\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k}}{(m+k+1)!\Gamma(-\nu+k+1)}\right\}\Big/\sin\nu\pi \tag{19}$$

また,式(17)の右辺の分子第2項は,次のように書き換えられる[4].

$$\frac{2}{\pi x}\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1}\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\sum_{i=0}^{m/2-k}\frac{(-1)^i(m-2k-i)!\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!(m-2k-2i)!\Gamma(\nu+2k+i+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}$$

(xの同じベキでまとめると)

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1}\sum_{l=0}^{m/2}\sum_{i=0}^{l}\varepsilon_{l-i}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\frac{(-1)^i(m-2l+i)!\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!(m-2l)!\Gamma(\nu+2l-i+1)}$$

(ε_{l-i}を具体的に書き入れると)

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\sum_{l=0}^{m/2}\frac{1}{(m-2l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$
$$\cdot\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i(\nu+2l-2i)(m-2l+i)!\Gamma(\nu+l-i)\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!(l-i)!\Gamma(\nu+2l-i+1)}$$

$(\sum_{i=0}^{l} \to \sum_{i=0}^{\infty}$ 無限級数にすると)

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \sum_{l=0}^{m/2} \frac{1}{(m-2l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i(\nu+2l-2i)(m-2l+i)!\Gamma(\nu+l-i)\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!(l-i)!\Gamma(\nu+2l-i+1)} \tag{20}$$

上式をPochhammerの記号

$$(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots\cdots(\alpha+i-1) = \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$(\alpha)_0 = 1 \tag{21}$$

で表示するため，公式

$$a-2i = a(1-a/2)_i/(-a/2)_i$$

$$\Gamma(a+i) = \Gamma(a)(a)_i$$

$$\Gamma(a-i) = (-1)^i\Gamma(a)/(1-a)_i \tag{22}$$

を使って，一般化された超幾何級数の形に書き換えると次のようになる．

$$\frac{2}{\pi x}\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\sum_{l=0}^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+l)\Gamma(\nu+m+1)}{l!\Gamma(\nu+2l)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(1-l-\nu/2)_i(m-2l+1)_i(-l)_i(-\nu-2l)_i}{i!(-l-\nu/2)_i(1-\nu-l)_i(-\nu-m)_i} \tag{23}$$

ここで，一般化された超幾何級数の和に関する定理[5]

$$ {}_4F_3\left(a,1+\frac{a}{2},b,-l;\frac{a}{2},1+a-b,1+a+l;-1\right) = \frac{\Gamma(a+l+1)\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(a-b+l+1)} \quad (l：正整数) \tag{24}$$

を用いれば，次式が得られる．

$$\frac{2}{\pi x}\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\sum_{k=0}^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{25}$$

このように，式の簡単化にとって，定理(24)が大きな手助けとなっている．文献4)では，この式の簡単化（級数の和を単項で表すこと）をさらに一般的に試みる方法について述べている．式(19)と(25)を式(17)に代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\Phi_{\nu,m}(x)=&\left[\frac{-1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\sum_{k=m/2+1}^{m}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right.\\&+\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1}\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\cos\nu\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k}}{k!\Gamma(\nu+m+k+2)}\right.\\&\left.\left.-\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k}}{(m+k+1)!\Gamma(-\nu+k+1)}\right\}\Big/\sin\nu\pi\right]\Big/Y_{\nu+m+1}(x)\end{aligned} \tag{26}$$

ここで，式(19)の第1の部分$(k=0,1,\cdots,m)$の一部と式(25)の右辺$(k=0,1,\cdots,m/2)$は相殺していることに注意しよう．この相殺により，$\Phi_{\nu,m}(x)$が小さくなり，式(12)を満たすことができるようになるのである．上式において，$\nu+m/2>>x/2$ならば，[ ]の第1の部分の$k=m/2+1$の項が主要項である．したがって，$\Phi_{\nu,m}(x)$に対する有用な評価式として，次式が得られる．

$$\Phi_{\nu,m}(x)\approx\frac{-\Gamma(\nu+m/2)}{\pi Y_{\nu+m+1}(x)(m/2+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+1} \tag{27}$$

式(26)および(27)は，二宮[1)]の結果と一致する．二宮は，式(17)の右辺の分子の第2項が式(25)の右辺の形になることを予想し，非常に面倒な式変形を行なって，数学帰納法により証明した．本稿での導出は，上述のように直接的であるが，それでも多少の面倒な式変形を必要とする．

4．数値例

表１と表2には，表題のxとm，表中のνとnの場合について，$J_{\nu+n}(x)$の近似式(3)の値，その相対誤差，$\Phi_{\nu,m}(x)$の値（式(11)の計算値），$\Phi_{\nu,m}(x)$の評価式(27)の値および$\Theta_{\nu,m,n}(x)$の値を示す．計算はFUJITSU M-1600を

表１　$x=5, n=0$の場合の$\Phi_{\nu,m}(x)$, $\Phi_{\nu,m}(x)$の評価式(27)および$\Theta_{\nu,m,n}(x)$

	$\nu=0.3 \quad m=20$	$\nu=0.7 \quad m=20$
Approximation (3)	$-2.96821101262\cdot10^{-1}$	$-3.57639916660\cdot10^{-1}$
Relative error of (3)	$1.31\cdot10^{-12}$	$9.80\cdot10^{-13}$
$\Phi_{\nu,m}(x)$	$1.31\cdot10^{-12}$	$9.80\cdot10^{-13}$
Estimate (27) of $\Phi_{\nu,m}(x)$	$1.24\cdot10^{-12}$	$9.27\cdot10^{-13}$
$\Theta_{\nu,m,n}(x)$	$-1.33\cdot10^{-22}$	$1.08\cdot10^{-25}$

表２　$x=10, n=0$の場合の$\Phi_{\nu,m}(x)$, $\Phi_{\nu,m}(x)$の評価式(27)および$\Theta_{\nu,m,n}(x)$

	$\nu=0.3 \quad m=26$	$\nu=0.7 \quad m=26$
Approximation (3)	$-1.94619215492\cdot10^{-1}$	$-6.80710012343\cdot10^{-2}$
Relative error of (3)	$1.78\cdot10^{-10}$	$1.34\cdot10^{-10}$
$\Phi_{\nu,m}(x)$	$1.78\cdot10^{-10}$	$1.34\cdot10^{-10}$
Estimate (27) of $\Phi_{\nu,m}(x)$	$1.54\cdot10^{-10}$	$1.17\cdot10^{-10}$
$\Theta_{\nu,m,n}(x)$	$1.83\cdot10^{-18}$	$2.09\cdot10^{-18}$

用い，倍精度演算で行った．これら$n=0$の場合には，$\Theta_{\nu,m,n}(x)$の値は$\Phi_{\nu,m}(x)$の値と比べて十分に小さいことが分かる．したがって，この場合には，$E_{\nu,m,n} \approx \Phi_{\nu,m}(x)$となっている．

表3 には，表題に記したν, xおよびmに対して，n=10,20および22の場合の$J_{\nu+n}(x)$の近似式(3)の値，その相対誤差，$\Phi_{\nu,m}(x)$の値,評価式(27)の値および$\Theta_{\nu,m,n}(x)$の値を示す．$\Phi_{\nu,m}(x)$はnには依存しないので，同一値であることは言うまでもない．n=10のときには，$\Theta_{\nu,m,n}(x)$の値は$\Phi_{\nu,m}(x)$の値と比べ十分に小さいので，$E_{\nu,m,n}(x) \approx \Phi_{\nu,m}(x)$となっているが，$n$=20のときには，$\Phi_{\nu,m}(x)$と$\Theta_{\nu,m,n}(x)$は同程度の大きさであるので，$E_{\nu,m,n}(x) \approx \Phi_{\nu,m}(x) - \Theta_{\nu,m,n}(x)$となっている．また，$n$=22のときには，$\Theta_{\nu,m,n}(x)$の値は$\Phi_{\nu,m}(x)$の値と比べ十分大きいので，$E_{\nu,m,n}(x) \approx -\Theta_{\nu,m,n}(x)$となっている．$n$=22の

表3　$\nu=0.3, x=10, m=26$の場合の$\Phi_{\nu,m}(x), \Phi_{\nu,m}(x)$の評価式(27)および$\Theta_{\nu,m,n}(x)$

	$n=10$	$n=20$	$n=22$
Approximation (3)	$1.80421140320 \cdot 10^{-1}$	$7.66189125055 \cdot 10^{-6}$	$4.49608402394 \cdot 10^{-7}$
Relative error of (3)	$1.78 \cdot 10^{-10}$	$-5.05 \cdot 10^{-10}$	$-1.76 \cdot 10^{-7}$
$\Phi_{\nu,m}(x)$	$1.78 \cdot 10^{-10}$	$1.78 \cdot 10^{-10}$	$1.78 \cdot 10^{-10}$
Estimate (27) of $\Phi_{\nu,m}(x)$	$1.54 \cdot 10^{-10}$	$1.54 \cdot 10^{-10}$	$1.54 \cdot 10^{-10}$
$\Theta_{\nu,m,n}(x)$	$4.99 \cdot 10^{-18}$	$6.84 \cdot 10^{-10}$	$1.76 \cdot 10^{-7}$

とき，近似式(3)の精度を高めるためには，mの値を大きくする必要がある．

5． $J_{\nu+n}(x)$の計算について

固定されたνおよびxに対して，式(12)（$\Phi_{\nu,m}(x)$として，式(11)あるいは，評価式(27)）を満足する最小のmをMとし，$|\Theta_{\nu,M,n}(x)|<0.5\times10^{-p}$を満足する非負の$n$が存在したとき，その最大値を$N$とすれば，$0\leq n\leq N$に対して，式(3)により10進$p$桁の精度で$J_{\nu+n}(x)$が計算できることになる（$n>N$に対しては，$|\Theta_{\nu,m,n}(x)|<0.5\times10^{-p}$を満足するように，$m$の値を$M$より大きく選ぶ必要がある）．$\nu$として，$0\leq\nu<1$の場合について，$M$を実際に求めると，$|\Theta_{\nu,M,n}(x)|< 0.5\times10^{-p}$を満足する非負の$n$は存在し，$N$の値は$M/2$〜$2M/3$程度であることが分かる．

参 考 文 献

1) 二宮市三：漸化式によるBessel関数の計算，電子計算機のための数値計算法II，pp.103-121，培風館，東京(1965).

2) 牧之内三郎：漸化式を用いる$J_\nu(x)$の近似計算，情報処理，Vol.6,No.4,pp.194-201(1965).

3) 森口繁一，宇田川銈久，一松信：数学公式III，p.225，岩波書店，東京(1968).

4) 吉田年雄：一般化された超幾何級数の和の定理の応用，情報科学リサーチジャーナル，Vol.2,pp57-60,中部大学情報科学研究所(1995).

5) Slater,L.J.： *Generalized Hypergeometric Functions,* pp.48-57,Cambridge University Press(1966).