数理解析研究所講究録
986 巻 1997 年 100-104

多変数 Puiseux 級数の演算及びその応用 II

筑波大学大学院数学研究科 片町 健太郎 (Kentaro Katamachi)
katamati@math.tsukuba.ac.jp

Abstract. 昨年は Puiseux 級数 (係数体が Puiseux 級数体でもよい) の四則演算及び、冪乗、指数関数などの初等演算を行なうための算法の紹介を行なったが、今回はその証明の修正および発展させた応用についても考察する。なお実際に実装する上では当然無限級数は扱えないので途中で打ち切った打ち切り Puiseux 級数を用いる。

1. 記法

$\mathbb{K}$	$\cdots$	標数 0 の体。
$\overline{\mathbb{K}}$	$\cdots$	$\mathbb{K}$ の代数的閉体。
$\mathbb{K}\langle\cdot\rangle$	$\cdots$	体 $\mathbb{K}$ 上の Puiseux 級数体。 即ち $\sum_{k=-k_0}^{\infty} a_k(\cdot^{\frac{1}{m}})^k,\quad a_k\in\mathbb{K},\quad 0<m\in\mathbb{Z},\quad m,k_0$ は有界 なる級数、つまり Puiseux 級数の全体がなす体。
$\mathbb{K}[\cdot]$	$\cdots$	体 $\mathbb{K}$ 上の 多項式環。
$\mathbb{K}\{\cdot\}$	$\cdots$	体 $\mathbb{K}$ 上の 冪級数環。
$\mathbb{K}\langle x,y\rangle$	$\cdots$	Puiseux 級数体 $\mathbb{K}\langle x\rangle$ 上の Puiseux 級数体 $\mathbb{K}\langle x\rangle\langle y\rangle$
$\mathrm{O}(f)$	$\cdots$	Puiseux 級数 f の最低次の次数。但し $f=0$ ならば ∞ とする。

2. 多変数 Puiseux 級数の単純な演算について

- $\mathbb{K}\{x\}$ なる冪級数の演算については $\mathbb{K}$ 上の演算により計算可能である事がよく知られているので省略する。
- $\mathbb{K}\langle x\rangle$ なる Puiseux 級数の演算については単純な式変形 (例えば $x\to x^n$ など) により冪級数の演算に帰着させる事により計算可能である。
- $\mathbb{K}\langle x,y\rangle$ なる 2 変数 Puiseux 級数の演算については単純な式変形により $\mathbb{K}\langle x\rangle\{y\}$ の演算に帰着できる。この演算は上述したように $\mathbb{K}\langle x\rangle$ 上の演算に帰着できるので計算可能である。
- $\mathbb{K}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ の場合も同様にして最終的には $\mathbb{K}$ 上の演算に帰着させて計算する事が出来る。

3. 代数方程式の求根

3.1. 単変数の場合

単変数代数方程式の根は 5 次以上ならば一般解が存在しないがそのような場合も数値解ならば DKA 算法 ([1] 参照) などを用いて容易に求める事が出来る。

3.2. 二変数の場合

二変数代数方程式の Puiseux 級数解は、よく知られている古典的 Newton-Puiseux 法 ([2] 参照) によって求める事が出来る。また、より効率的な算法として、佐々木・加古によって提案された拡張 Hensel 構成 ([3] 参照) がある。この算法は係数を浮動小数として扱っても問題がを生じないので正確な代数的数を必要としない場合などは係数を浮動小数として扱う事により、より高速に計算が出来る。

一般の二変数代数方程式、即ち $\mathbb{K}[x,y] \ni F(x,y)=0$ ではなく、

$$\overline{\mathbb{K}}\langle x\rangle[y] \ni F(x,y) = f_n(x)y^n + \cdots + f_1(x)y + f_0(x) \ (f_i(x) \in \overline{\mathbb{K}}\langle x\rangle,\ i=0,\ldots,n),$$
$$f_0(x) \neq 0, f_n(x) \neq 0 \quad (1)$$

の場合も y についての解を古典的 Newton-Puiseux 法を用いて同様に、解く事が出来る。この場合、$\overline{\mathbb{K}}\langle x\rangle[y]$ の根を$\overline{\mathbb{K}}[c]$ の根の計算に帰着させている事に注目して頂きたい。

3.2.1. Newton-Puiseux 法について

ここでは、古典的 Newton-Puiseux 法を簡潔に紹介することにする。式 (1) について、

$$g(x) = c_1x^{\gamma_1} + c_2x^{\gamma_2} + \cdots, \quad c_1 \neq 0, \gamma_i \in \mathbb{Q}, \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots$$

が $F(x,g(x))=0$ を満たすとする。この時$\mathrm{O}(f_i(x)) = \alpha_i$と置き、その係数部をそれぞれ a_i とする (即ち $f_i(x) = a_i x_i^{\alpha} + \cdots$)。さらに $g(x) = c_1x^{\gamma_1} + g_1(x)$ と置くと

$$\begin{aligned} F(x,g(x)) &= f_n(x)(c_1x^{\gamma_1} + g_1(x))^n + \cdots + f_1(x)(c_1x^{\gamma_1} + g_1(x)) + f_0(x) \\ &= c_1^n f_n(x)x^{n\gamma_1} + \cdots + c_1 f_1(x)x^{\gamma_1} + f_0(x) + h(x,g_1(x)) \end{aligned}$$

となる。$F(x,g(x))=0$ より少なくとも形式的な最低次の項の和が 0 にならなければならない。$\mathrm{O}(g_1) = \gamma_2 > \gamma_1$ であるから最低次の項は $c_1^n f_n(x)x^{n\gamma_1} + \cdots + c_1 f_1(x)x^{\gamma_1} + f_0(x)$ の中に含まれる。非零の要素の和が 0 にならなければいけないので形式的な最低次数の項の数は少なくとも二つはなくてはならない。この事から以下の条件が要求される。

1. ある j と k $(j \neq k)$ が存在して

$$\alpha_j + j\gamma_1 = \alpha_k + k\gamma_1 \leq \alpha_i + i\gamma_i \quad (i=0,1,\ldots,n)$$

2. 上記の j に対して $\Lambda = \{h | \alpha_h + h\gamma_1 = \alpha_j + j\gamma_1\}$ と置くと

$$\sum_{h\in\Lambda} a_h c_1^h = 0$$

これらの条件を満たすように γ_1, c_1 を決定すればよい。γ_1 を決定するには **Newton 多角形** と呼ばれる図形を利用する。平面上に点 $P_i = (i, \alpha_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ を$\alpha_i = \infty$ なものを除いて描き、それらの点を含む下に凸な最小の閉領域を考える。この閉領域を **Newton 多角形** という。ここで条件.1 はある直線 L を考えた時にすべての P_iが L 上あるいは L の上方にあって、さらに少なくとも二つの点が L 上になければならないことを示している。であるから Newton 多角形の境界をみることにより、このような直線が決定でき、この直線の傾きが $-\gamma_1$ となる。このように γ_1 を決めた時に直線 L 上にのっている P_h をすべて考え、条件.2 を満たすように c_1 を決定すればよい。(即ち $\overline{\mathbb{K}}[c_1] \ni f(c_1) = 0$ を解けばよい。) このようにして γ_1, c_1 が定まったので次に

$$y_1 = y - c_1 x_1^{\gamma}$$

とおいて $F_1(x, y_1) = F(x, y_1 + c_1 x_1^{\gamma})$ に対して Newton 多角形を作り同様の操作により、γ_2, c_2 を求める事が出来る。以下この操作を順次繰り返す事により、$F(x, y) = 0$ の根 $g(x)$ を Puiseux 級数の形で求める事が出来る。

3.3. 多変数の場合

n 変数方程式 $(\in \overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle[x_n])$ の x_n に関する根を $n-1$ 変数 Puiseux 級数 $(\in \overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle)$ で表せる事を帰納法を用いて示す。

$n = 2$ の場合、即ち $\overline{\mathbb{K}}\langle x_1\rangle[x_2]$ なる方程式の x_2 に関する根は前節で述べた様に $\overline{\mathbb{K}}\langle x_1\rangle$ で表せる。

n 変数方程式 $(\in \overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle[x_n])$ の x_n に関する根を $n-1$ 変数 Puiseux 級数 $(\in \overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle)$ で表せる時に $n+1$ 変数方程式 $(\in \overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[x_{n+1}])$ の x_{n+1} に関する根を n 変数 Puiseux 級数 $(\in \overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ で表せる事を示す。

$n+1$ 変数方程式 $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0$ の根を求めるには、まず $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = g(x_n, x_{n+1}) \in \overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle\langle x_n\rangle[x_{n+1}]$ 即ち、体 $\overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ 上の 2 変数方程式だと考える事にする。するとこの方程式の根の計算は上述の 2 変数の場合と同様に古典的 Newton-Puiseux 法を用いる事により、Newton 多角形より導かれる方程式 $(\in \overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle[c])$ を解く事に帰着される。一方、この方程式は帰納法の仮定より解く事ができるので結果として、求める方程式の根を$\overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle\langle x_n\rangle = \overline{\mathbb{K}}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ の形で表す事が出来る。

これによって任意の多変数の場合も根を Puiseux 級数で表せる事が示せた。

例 3..1 (3 変数多項式の例)

$$F(x, y, z) = x^3 + y^2x^2 - (y + y^4 + z^2)x + 2y^3 + y^2 + z$$

$F(x, y, z) \in \mathbb{C}\langle y\rangle[x, z]$ として考えると Newton 多角形より得られる方程式は $F(c_1, y, 0) = 0$ の形になるのでこの根を求める。

$$\begin{cases} f_{10}(y) = y + 3y^2 + 10y^3 + 62y^4 + \cdots \\ f_{20}(y) = y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^{\frac{3}{2}} - 2y^2 - \cdots \\ f_{30}(y) = -y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^{\frac{3}{2}} - 2y^2 + \cdots \end{cases}$$

次に $F_1(x_1, y, z) = F(x_1 + f_{i0}(y), y, z)$ についても同様にNewton多角形から得られる以下の方程式

$$\begin{cases} (-y + 3y^2 + 20y^3 + 92y^4 + \cdots)c_2 + 1 = 0 \\ (2y - 3y^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}y^2 - \frac{71}{8}y^{\frac{5}{2}} - 10y^3 - \cdots)c_2 + 1 = 0 \\ (2y + 3y^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}y^2 + \frac{71}{8}y^{\frac{5}{2}} - 10y^3 + \cdots)c_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

をそれぞれ c_2 について解く事により、次の結果を得る。

$$\begin{cases} f_{11}(y) = y^{-1} + 3 + 29y + 239y^2 + 2145y^3 \cdots \\ f_{21}(y) = -\frac{1}{2}y^{-1} - \frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} - \frac{161}{32}y^{\frac{1}{2}} - \frac{29}{2}y - \cdots \\ f_{31}(y) = -\frac{1}{2}y^{-1} + \frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} + \frac{161}{32}y^{\frac{1}{2}} - \frac{29}{2}y + \cdots \end{cases}$$

同様にして $F_2(x_2, y, z) = F_1(x_2 + f_{i1}(y), y, z)$ のNewton多角形から導かれる式を解く事により

$$\begin{cases} f_{12}(y) = 3y^{-2} + 37y^{-1} + 461 + 5388y + 59835y^2 + \cdots \\ f_{22}(y) = -\frac{3}{8}y^{-\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}y^{-2} - \frac{315}{64}y^{-\frac{3}{2}} - \frac{37}{2}y^{-1} - \frac{68053}{1024}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{461}{2} - \cdots \\ f_{32}(y) = \frac{3}{8}y^{-\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}y^{-2} + \frac{315}{64}y^{-\frac{3}{2}} - \frac{37}{2}y^{-1} + \frac{68053}{1024}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{461}{2} - \cdots \end{cases}$$

を得る。

よって $F(x, y, z) = 0$ の根は

$$\begin{cases} G_1(z) = f_{10}(y) + f_{11}(y)z + f_{12}(y)z^2 + \cdots \\ G_2(z) = f_{20}(y) + f_{21}(y)z + f_{22}(y)z^2 + \cdots \\ G_3(z) = f_{30}(y) + f_{31}(y)z + f_{32}(y)z^2 + \cdots \end{cases}$$

と表現出来る。

4. 応用

このように単純な演算や代数方程式の求根などをPuiseux級数体上で行なう事が出来るので複素数体上などの算法がそのままPuiseux級数体上の算法に適用出来る場合が多いので応用範囲はかなり広いと考えられる。

4.1. 行列

行列に対する算法では基本的なガウスの消去法、LU分解などは、そのままPuiseux級数体上で、即ち行列の要素が多変数Puiseux級数であっても適用可能である。LU分解の結果を用いて行列式などを求め、その結果を元にして固有値を求める事も出来る。さらには与えられた行列 A に対して e^{At} を固有値を元にして計算する事も可能である。

例 4..1 (2変数多項式行列の演算例) 二変数多項式行列 $A(x, y)$ を以下の様に与える。

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y & xy \\ x + y & y \end{pmatrix}$$

すると特性多項式は $\det(sI - A(x)) = s^2 - (x^2 + 2y)s + y^2 - xy^2$ となる。これを s について解くと

$$\begin{cases} \lambda_1(x,y) = y - yx^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + 8y^{-1}x^{\frac{5}{2}} - \cdots \\ \lambda_2(x,y) = y + yx^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - 8y^{-1}x^{\frac{5}{2}} + \cdots \end{cases}$$

となる。これを元に Sylvester の補間公式を用いて $e^{A(x,y)t}$ を以下の様に計算する事ができる。

$$e^{A(x)t} \equiv A_1 e^{(y - yx^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2)t} + A_2 e^{(y + yx^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2)t} \pmod{x^{\frac{2}{5}}}$$

但し、

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y^{-1}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}y^{-2}x^{\frac{5}{2}} & -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 4y^{-1}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}y^{-2}x^{\frac{5}{2}} \\ -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}y^{-2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{16}y^{-3}x^{\frac{5}{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-1}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}y^{-2}x^{\frac{5}{2}} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-1}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}y^{-2}x^{\frac{5}{2}} & \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}y^{-1}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}y^{-2}x^{\frac{5}{2}} \\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}y^{-1}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}y^{-2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{16}y^{-3}x^{\frac{5}{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y^{-1}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}y^{-2}x^{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

5. まとめ

本稿では多変数 Puiseux 級数を Puiseux 級数体を係数体とする Puiseux 級数として考えることにより、各種の演算が容易に多変数 Puiseux 級数に拡張されるという事と、一般の多変数多項式の根を Puiseux 級数で表せる事を示せた。この多変数多項式の Puiseux 級数根を用いる事により、複数のパラメータを含んだ線形微分方程式なども解け、多方面に応用できると期待出来る。

参考文献

[1] 名取亮, "数値解析とその応用", コロナ社, pp.81–83.

[2] R.J.Walker. "Algebraic Curves," Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.

[3] T.Sasaki and F.Kako "Solving Multivariate Algebraic Equation by Hensel Construction," preprint (Univ. of Tsukuba and Nara Women Univ.), 22 pages, Jan. 1993.

[4] 秋月康男, 中井喜和, 永田雅宜 "代数幾何学", 岩波書店,1987.