数理解析研究所講究録
946 巻 1996 年 161-166

関数空間上の Subnormal operator について

東京理科大学 理学部　　　斉藤 功

H を separable complex Hilbert space, $B(H)$ を H 上の bounded linear operator の全体とする。$A \in B(H)$ が pure であるとは A の reducing subspace M で $A|M$ が normal となるものが $\{0\}$ のみであることをいい、$S \in B(H)$ が subnormal であるとは H を含む Hilbert space K と normal operator $N \in B(K)$ が存在して

$$NH \subseteq H, \ S = N|H$$

となることである。

いま、$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator,

$$N = \begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T^* \end{pmatrix} \text{ on } K = H \oplus H^{\perp}$$

を S の minimal な normal extension とする。このとき N は S により unitary 同型の意味で一意に定まる。よって T も S により unitary 同型の意味で一意に定まる。

J. B. Conway [2] はこの T を S の dual と定めた。このとき T も pure subnormal operator となり S が T の dual となることが知られている。そして $S \cong T$ のとき、S を self-dual subnormal operator とした。

T_ϕ を 定数でない symbol $\phi \in H^\infty$ をもつ H^2 上の analytic Toeplitz operator とすると、T_ϕ は pure subnormal operator となり、T_{ϕ^*} が S の dual となる。ただし $\phi^*(z) = \overline{\phi(\bar{z})}$ とする。また L^2 上の ϕ の掛け算作用素 M_ϕ が、T_ϕ の minimal normal extension であることが知られている。また C. R. Putnam は、次のことを示した。

<u>定 理 (Putnam [4])</u>

$\phi \in H^\infty$ が定数でなく $(T_\phi{}^*T_\phi - T_\phi T_\phi{}^*)^{1/2}$ が trace class operator とする。$\mathrm{Re}(M_\phi)$ の absolutely continuous part を $(\mathrm{Re}(M_\phi))_a$ とすると、

$$(\mathrm{Re}(M_\phi))_a \cong \mathrm{Re}(T_\phi) \oplus \mathrm{Re}(T_\phi)$$

となる。ただし $\mathrm{Re}(S) = (1/2)(S + S^*)$ とする。

そして Morrel–Clancey は 次のことを示した。

定 理 (Morrel–Clancey [3])

$S^*S - SS^*$ が 1 次元である pure subnormal operator S は、

$$S \cong T_{az+b},\ a > 0$$

となる。

ここでは、operator–値 の analytic な symbol をもつ Toeplitz operator について考える。∂D を単位円周とし、$F = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{ik\theta} \in H^\infty(\partial D, B(H))$ とする。$L^2(\partial D, H)$ 上の operator M_F と $H^2(\partial D, H)$ 上の operator T_F が $f(e^{i\theta}) \longmapsto F(e^{i\theta})f(e^{i\theta})$ で定義される。$S = T_{az+b},\ a > 0$ であるとき

$$\begin{aligned} a &:= (S^*S - SS^*)^{1/2}|\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*), \\ \overline{b} &:= S^*|\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*) \end{aligned}$$

となる。では、 pure subnormal operator $S \in B(H)$ に対し

$$\begin{aligned} A &:= (S^*S - SS^*)^{1/2}|\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*), \\ B &:= S^*|\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*). \end{aligned}$$

とするとき B が normal で $AB = BA$ ならば $S \cong T_{Az+B^*}$ となるだろうか。以下、そうなることと S が self–dual なら $AB = BA$ の条件はいらないことを示す。そのためには S を 上の A, B で表現できればよいが、S の dual の dual が S であることを考えると S の dual T が A, B で表現できればよい。S の dual T を得るには、S の minimal normal extension が構成できればよい。これは、S から S の normal extension を構成した Ando の結果を用いて *minimal* normal extension が得られる。

H 上の self–adjoint operator T に対し ran $T \oplus$ ker T から H への densely defined operator T^{-1} を $T^{-1}T = P, T^{-1}(I - P) = 0$ で定義する。ただし、P は H から cl ran T への orthogonal projection とし、cl ran T は、T の range の closure とする。この T^{-1} を T の partial inverse と呼ぶ。また densly defined operator S が bounded なとき、その bounded extension も同じ記号 S で表す。

Ando の 定 理 [1]

$S \in B(H)$ を subnormal operator とする。次の式より、$A_n, S_n \in B(H)$ を帰納的に定義する。

$$A_0 = 0, \quad S_0 = S,$$

$$\begin{aligned} A_n &= (A_{n-1}^2 + S_{n-1}^* S_{n-1} - S_{n-1} S_{n-1}^*)^{1/2}, \\ S_n &= A_n S_{n-1} A_n^{-1}, \end{aligned}$$

ただし、A_n^{-1} は、A_n の partial inverse とする。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$A_{n-1}^2 + S_{n-1}^* S_{n-1} - S_{n-1} S_{n-1}^* \geq 0,$$

$$S_n A_n = A_n S_{n-1}$$

が、成立し $A_n S_{n-1} A_n^{-1}$ は、有界となる。そして $H \oplus H \oplus H \oplus H \oplus \cdots$ 上の operator

$$N := \begin{pmatrix} S & A_1 & & & \\ & S_1 & A_2 & & \\ & & S_2 & A_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

は、bounded normal operator となり、ノルムは $\|S\|$ と等しい。つまり、N は、S の normal extension となる。

上の N は、一般に minimal ではないが Ando の行列を使って、pure subnormal operator の *minimal* normal extension が得られ、よって dual が得られる。ただし、A, B は前述のものとする。

定　理

$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator, そして次の式より、$C_n, D_n \in B(H)$ を帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} C_1 &= A, \quad D_1 = AB^* A^{-1}, \\ C_n &= (C_{n-1}^2 + D_{n-1}^* D_{n-1} - D_{n-1} D_{n-1}^*)^{1/2}, \\ D_n &= C_n D_{n-1} C_n^{-1}, \end{aligned}$$

ただし、C_n^{-1} は、C_n の partial inverse とする。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$C_{n-1}^2 + D_{n-1}^* D_{n-1} - D_{n-1} D_{n-1}^* \geq 0,$$

$$D_n C_n = C_n D_{n-1}$$

が、成立し $C_n D_{n-1} C_n^{-1}$ は、有界となる。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$\begin{aligned} \operatorname{cl\,ran} D_n &\subseteq \operatorname{cl\,ran} C_n, \\ \operatorname{cl\,ran} C_{n+1} &\subseteq \operatorname{cl\,ran} C_n \end{aligned}$$

が成立する。よって、各 $n \geq 1$ に対し、$\mathrm{cl\,ran}\, C_{n+1}$ から $\mathrm{cl\,ran}\, C_n$ への operator $\hat{C}_{n+1}$ を C_{n+1} の制限として定義でき、$\mathrm{cl\,ran}\, C_n$ から $\mathrm{cl\,ran}\, C_n$ への operator $\hat{D}_n$ を D_n の制限として定義できる。
このとき、$\mathrm{cl\,ran}\, C_1 \oplus \mathrm{cl\,ran}\, C_2 \oplus \mathrm{cl\,ran}\, C_3 \oplus \cdots$ 上の operator

$$\begin{pmatrix} \hat{D}_1^* & & & & \\ \hat{C}_2^* & \hat{D}_2^* & & & \\ & \hat{C}_3^* & \hat{D}_3^* & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

は、S の dual である。

S は、S の dual の dual であるので次が得られる。

<u>**定　理**</u>

$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator, そして次の式より、$E_n, F_n \in B(H)$ を帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} E_1 &= A, \quad F_1 = B, \\ E_n &= (E_{n-1}^2 + F_{n-1}^* F_{n-1} - F_{n-1} F_{n-1}^*)^{1/2}, \\ F_n &= E_n F_{n-1} E_n^{-1}, \end{aligned}$$

ただし、E_n^{-1} は、E_n の partial inverse とする。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$E_{n-1}^2 + F_{n-1}^* F_{n-1} - F_{n-1} F_{n-1}^* \geq 0,$$

$$F_n E_n = E_n F_{n-1}$$

が、成立し $E_n F_{n-1} E_n^{-1}$ は、有界となる。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$\begin{aligned} \mathrm{cl\,ran}\, F_n &\subseteq \mathrm{cl\,ran}\, E_n, \\ \mathrm{cl\,ran}\, E_{n+1} &\subseteq \mathrm{cl\,ran}\, E_n \end{aligned}$$

が成立する。よって、各 $n \geq 1$ に対し、$\mathrm{cl\,ran}\, E_{n+1}$ から $\mathrm{cl\,ran}\, E_n$ への operator $\hat{E}_{n+1}$ を E_{n+1} の制限として定義でき、$\mathrm{cl\,ran}\, E_n$ から $\mathrm{cl\,ran}\, E_n$ への operator $\hat{F}_n$ を F_n の制限として定義できる。このとき、S は、$\mathrm{cl\,ran}\, E_1 \oplus \mathrm{cl\,ran}\, E_2 \oplus \mathrm{cl\,ran}\, E_3 \oplus \cdots$ 上の operator

$$\begin{pmatrix} \hat{F}_1^* & & & & \\ \hat{E}_2^* & \hat{F}_2^* & & & \\ & \hat{E}_3^* & \hat{F}_3^* & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

とユニタリ同型となる。

これらを使って、次が得られる。

命　題

$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator とするとき、S が self-dual subnormal operator となる必要十分条件は、$\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*)$ 上の unitary operator U が存在して

$$\begin{aligned} U^*AU &= A, \\ U^*BU &= AB^*A^{-1}, \end{aligned}$$

となることである。ただし、A^{-1} は A の partial inverse とする。

よって pure subnormal operator $S \in B(H)$ に対し B が normal で $AB = BA$ ならば $\hat{E}_n = A$, $\hat{F}_n = B$ となるので、次が得られる。

命　題

$S \in B(H)$ を pure subnormal operator とする。このとき

$$\begin{aligned} A &:= (S^*S - SS^*)^{1/2} | \mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*), \\ B &:= S^* | \mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*). \end{aligned}$$

とすると B が normal で $AB = BA$ ならば $S \cong T_{Az+B^*}$ となる.

また、S が self–dual subnormal operator であるとき、上より unitary operator U が存在して

$$\begin{aligned} U^*AU &= A, \\ U^*BU &= AB^*A^{-1}, \end{aligned}$$

となる。Radjavi, Rosenthal の定理 [5] を用いると B が subnormal operator であるとき、B が normal operator となり $AB = BA$ となることがわかる。よって

命　題

$S \in B(H)$ を self–dual subnormal operator とする。このとき B が subnormal ならば $S \cong T_{Az+B^*}$ となる。

また 次が成立する。

命 題

$F = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{ik\theta} \in H^\infty(\partial D, B(H))$ を各 A_k が互いに可換な normal operator で、各 $j \geq 1$ に対し A_j が compact で、 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \ker A_k = (0)$ となるものとする。そのとき、M_F は、pure subnormal operator T_F の minimal normal extension となる。また $(T_F{}^* T_F - T_F T_F{}^*)^{1/2}$ が trace class operator ならば $\mathrm{Re}(M_F)$ の absolutely continuous part は $\mathrm{Re}(T_F) \oplus \mathrm{Re}(T_F)$ と unitary 同型 となる。

命 題

$A_0, A_1, A_2 \in B(H)$ を互いに可換な normal operator で $\ker A_2 = (0)$ となるものとする。$G = A_0 + A_1 e^{i\theta} + A_2 e^{2i\theta} \in H^\infty(\partial D, B(H))$ と定義するとき、M_G は、subnormal operator T_G の minimal normal extension となる。

参考文献

[1] T. Andô, *Matrices of normal extensions of subnormal operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **24** (1963), 91–96.

[2] J. B. Conway, The dual of a subnormal operator, J. Operator Theory, **5**, no.2, (1981), 195-211.

[3] B. B. Morrel, A decomposition for some operators, Indiana Univ. Math. J., **23**, (1973), 497-511.

[4] C. R. Putnam, Analytic Toeplitz operators with self–commutators having trace class square roots, J. Operator Theory, **13**, (1987), 133-138.

[5] Radjavi, R. and P. Rosenthal, *On roots of normal operators*, J. Math. Anal. Appl. **34** (1971), 653–664.

[6] I. Saito, *On self-dual subnormal operators*, Integral Equations and Operator Theory, **15** (1992), no.5, 864–878.

[7] I. Saito, *Andô's matrices for normal extensions of subnormal operators and their applications*, SUT Journal of Mathematics, **28** (1992), no.2.

[8] I. Saito, *The minimal normal extensions of some Toeplitz operators with operator-valued analytic symbols*, SUT Journal of Mathematics, **28** (1992), no.2.

[9] I. Saito, *On a pure operator that is the sum of mutually commutative normal operator and a quasinormal operator* , Acta Sci. Math. (Szege) **59** (1994), 129–141