

Title	Painleve IV型方程式の多変数化(パンルヴェ函数と漸近解析)
Author(s)	川向, 洋之
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 931: 37-44
Issue Date	1995-12
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/59959">http://hdl.handle.net/2433/59959</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## Painlevé' IV 型方程式の多変数化

東京大学数理解析研究所 02 川向 洋之 (KAWAMUKO, Hiroyuki)

Painlevé' 6 型方程式の多変数化として Garnier system がある。また、木村 [1] では、2 変数の Garnier system を与える線型方程式を退化させ、I 型から V 型までの 2 変数化を与えている。特に、IV 型の拡張は Riemann 図式が

$$\left( \begin{array}{cccc} x=0 & x=\lambda_1 & x=\lambda_2 & \overbrace{x=\infty} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ 0 \ 0 \ -\kappa_\infty \\ \kappa_0 & 2 & 2 & \frac{1}{3} \ t_0 \ t_1 \ \kappa_\infty - \kappa_0 + 1 \end{array} \right)$$

↑

(ただし、 $x=\lambda_1, \lambda_2$  は互いの特異点で、 $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ )

で与えられる線型方程式の Isomonodromic deformation を使って得られることが記されている。

この原稿では、上記の Riemann 図式を参考にして、3 変数以上の Painlevé' IV 型方程式を定義し、3 変数の場合の特殊解を記す。

### 0. 記号の約束

$q, \kappa_0$  は初めから与えられる数字で、 $q$  は自然数、 $\kappa_0$  は非整数とする。

$$\sum_{(i)} := \sum_{i=1}^q, \quad \sum_{(i)}^{(j)} := \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^q, \quad \prod_{(i)} := \prod_{i=1}^q, \quad \prod_{(i)}^{(j)} := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^q$$

$$t_0 := \kappa_0 - 1$$

$$t_{q+1} := 1$$

$$t_N := 0 \quad (\text{if } N < 0 \text{ or } N > q+1.)$$

$$\Lambda(x) := \prod_{(i)} (x - \lambda_i) \quad \Lambda'(\lambda_k) := \frac{d}{dx} \Lambda(x) \Big|_{x=\lambda_k}$$

$$\sigma_j := \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} \prod_{(i)} (1 + \lambda_i x)$$

$$\sigma_{k,j} := \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} \prod_{(i)}^{(k)} (1 + \lambda_i x)$$

Rem  $\sigma_j = 0$  if  $j < 0$  or  $j > g+1$

### 1. Isomonodromic deformation

次の Riemann 四式を持つ線型常微分方程式を考える。

$$(R) \quad \left( \begin{array}{cccccccccccc} x=0 & x=\lambda_1 & \dots & x=\lambda_g & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x=\infty \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\kappa_\infty \\ \kappa_0 & 2 & \dots & 2 & \frac{1}{g+1} & \frac{t_g}{g} & \frac{t_{g-1}}{g-1} & \dots & \frac{t_g}{2} & t_g & \kappa_\infty - \kappa_0 + 1 \end{array} \right)$$

ただし、 $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$  で、 $x = \lambda_k$  ( $k=1, \dots, g$ ) は見かけの特異点とする。

Prop

Riemann 四式 (R) を持つ方程式は、次の様になる。

$$\frac{d^2}{dx^2} y + p_1(x,t) \frac{d}{dx} y + p_2(x,t) y = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$p_1(x,t) := \frac{1-\kappa_0}{x} - \sum_{k=1}^{g+1} t_k x^{k-1} - \sum_{(k)} \frac{1}{x-\lambda_k}$$

$$p_2(x,t) := -\frac{1}{x} \sum_{(k)} a_k(t) x^{k-1} + \kappa_\infty x^{g-1} + \sum_{(k)} \frac{\lambda_k \mu_k}{x(x-\lambda_k)}$$

$$a_j(t) := (-1)^{g-j} \sum_{(i)} \frac{1}{\Lambda'(\lambda_i)} \left[ \lambda_i \sigma_{i,g-j} \mu_i^2 - \sigma_{i,g-j} \left( \lambda_i^{g+1} + \sum_{(k)} t_k \lambda_i^k + \kappa_0 \right) \mu_i + \kappa_\infty \lambda_i^g \sigma_{i,g-j} \right]$$

$$- (1 - \delta_{j,g}) \sum_{(i)} \sum_{k=0}^{g-j-1} (-1)^k \sigma_{i,k} \lambda_i^{g-j-k} \frac{\mu_i}{\Lambda'(\lambda_i)}$$



Thm

 $\sigma_k, \rho_k \in$  $\sigma_k :=$  "  $\lambda$  に關する基本対称式 "

$$\rho_k := (-1)^{k-1} \sum_{(e)} \frac{\lambda^e \rho^{g-k}}{\lambda^{e(\lambda e)}} \mu^e$$

とおく。  $\tilde{K}_j$  は  $\sigma_k, \rho_k, t$  の多項式として表される。さらに、  $(\lambda, \mu, \tilde{K}, t) \longrightarrow (\sigma, \rho, \tilde{K}, t)$  は正準変換、即ち  $\lambda_j = \lambda_j(t), \mu_j = \mu_j(t)$  の Hamiltonian system (2) をみたすから  $\sigma_k = \sigma_k(t), \rho_k = \rho_k(t)$  也。

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t_j} = \frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial \rho_i}, \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t_j} = - \frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial \sigma_i}$$

をみたす。——

参考のため、  $g=3$  の  $a_1, a_2, a_3$  を記しておく。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 & \sigma_2 \sigma_3 \\ 1 & -\sigma_2 + \sigma_1^2 & -\sigma_1 \sigma_3 \\ 0 & -\sigma_1 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1^2 \\ \rho_2^2 \\ \rho_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\sigma_3 & 2\sigma_1 \sigma_3 \\ 2\sigma_1 & 0 & -2\sigma_3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \rho_2 \\ \rho_1 \rho_3 \\ \rho_2 \rho_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_0 - 2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_3 t_3 & -(\kappa_0 + 1) \sigma_1 - \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 t_2 & -\kappa_0 \sigma_2 - \sigma_3^2 - \sigma_3 t_1 \\ -\sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 - t_1 + \sigma_2 t_3 & \kappa_0 + 1 + \sigma_2^2 - \sigma_1 t_1 - \sigma_2 t_2 + \sigma_3 t_3 & \kappa_0 \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 t_2 \\ \sigma_2 - \sigma_1^2 - t_2 - \sigma_1 t_3 & \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_2 + t_1 - \sigma_2 t_3 & -\kappa_0 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_3 t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}$$

$$+ \kappa_0 \begin{pmatrix} \sigma_3 \\ -\sigma_2 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}$$

Hamiltonian  $\tilde{K}$  は、これらの和で表される。

3.  $\tau$  函数と特殊解.

ここで  $g=3$  の場合について話す.

まず天降り的に次の Lem1 を挙げる.

Lem 1

$$t_1 = \xi_1 - 2\xi_2\xi_3 + \xi_3^3$$

$$t_2 = -2\xi_2 + 3\xi_3^2$$

$$t_3 = 3\xi_3$$

$$\sigma_1 = \delta_1 - 2\xi_3$$

$$s_1 = p_1 + \xi_3 p_2$$

$$\sigma_2 = \delta_2 + \xi_3^2 - \delta_1 \xi_3 - \xi_2$$

$$s_2 = p_2$$

$$\sigma_3 = \delta_3$$

$$s_3 = p_3$$

$$H_1 = \tilde{K}_3 (= a_3)$$

$$H_2 = -t_3 \tilde{K}_1 - 2\tilde{K}_2 + t_3 \tilde{K}_3 + p_2 (= -a_2 + t_3 a_3 + p_2)$$

$$H_3 = t_2 \tilde{K}_1 + 2t_3 \tilde{K}_2 + 3\tilde{K}_3 + 2s_1 + \sigma_1 p_2 (= a_1 + 2s_1 + \sigma_1 p_2)$$

とすると,  $(\sigma, p, \tilde{K}, t) \rightarrow (s, p, H, \xi)$  は正準変換で,  $H_j$  は次の様になる.

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_1 & \delta_3 \\ -1 & \delta_2 - \xi_2 - \delta_1^2 & \delta_3(\delta_1 - \xi_3) \\ 0 & \delta_3 & \delta_3(\delta_2 - \delta_1 \xi_3 - \xi_2 + \xi_3^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2\delta_1 & 0 & 2\delta_3 \\ 0 & 2\delta_3 & 2\delta_3(\delta_1 - \xi_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 p_2 \\ p_1 p_3 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} \theta_2 - \theta_1^2 + \xi_2 & , & \theta_3 - \theta_2 \theta_1 + \theta_1 \xi_2 + \xi_1 \\ \theta_3 - \theta_2 \theta_1 + \theta_1 \xi_2 + \xi_1 & , & -\theta_3 \xi_3 - \theta_2^2 + \theta_1 \xi_1 + \xi_2^2 - \chi_0 \\ -\theta_3 \theta_1 - \theta_3 \xi_3 - \chi_0 & , & -\theta_3 \theta_2 + \theta_3 \xi_3^2 - \theta_1 \chi_0 + \xi_3 \chi_0 - \theta_3 \xi_3 \end{pmatrix} \\
& \qquad \qquad \qquad \begin{pmatrix} -\theta_3 \theta_1 - \theta_3 \xi_3 - \chi_0 \\ -\theta_3 \theta_2 + \theta_3 \xi_3^2 - \theta_1 \chi_0 + \xi_3 \chi_0 - \theta_3 \xi_3 \\ -\theta_3^2 - \theta_3 \xi_3^3 + 2\theta_3 \xi_2 \xi_3 - \theta_3 \xi_1 - \theta_2 \chi_0 + \theta_1 \xi_3 \chi_0 + \xi_2 \chi_0 - \xi_3^2 \chi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\
& \qquad \qquad \qquad + \chi_0 \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 - \xi_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lem 2

Hamiltonian  $H_j$  ( $j=1,2,3$ ) に対し、 $H_i$  と  $H_j$  の Poisson bracket  $\{H_i, H_j\}$  は 0.

また、 $(\frac{\partial}{\partial \xi_i}) H_j$  は  $\lambda_k, \epsilon, \mu_k$  を定数と思つて  $\xi_i$  について微分せよという意味とすると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) H_j = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) H_i \quad - (3)$$

が成立。——

Lem 1 の正準変換を行うのは Lem 2 の (3) が成り立つ様にするためである。

したがってこの等式から  $\int_{i=1}^3 H_i d\xi_i$  は closed であることがわかる。よつて南数  $\tau = \tau(\xi)$  を

$$d \log \tau := \int_{i=1}^3 H_i d\xi_i$$

で定義できる。また、

Lem 3

$$p_1 = \hat{p}_1 + \xi_1 + \theta_1^3 - 2\theta_1 \theta_2 + \theta_3$$

$$p_2 = \hat{p}_2 + \xi_2 - \theta_1^2 + \theta_2$$

$$p_3 = \hat{p}_3 + \xi_3 + \theta_1 + \frac{\chi_0}{\theta_3}$$

$$\bar{H}_1 = H_1 + g_1$$

$$\bar{H}_2 = H_2 + g_2$$

$$\bar{H}_3 = H_3 + g_3$$

よって、 $(g, p, H, \xi) \rightarrow (g, \hat{p}, \bar{H}, \xi)$  は正準変換で、Hamiltonian  $\bar{H}$  は、 $H \xi$

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = E_1 \begin{bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} p_1 p_2 \\ p_1 p_3 \\ p_2 p_3 \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \chi_{\infty} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 - \xi_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

と表わした時、

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \\ \bar{H}_3 \end{bmatrix} = E_1 \begin{bmatrix} \hat{p}_1^2 \\ \hat{p}_2^2 \\ \hat{p}_3^2 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \hat{p}_2 \\ \hat{p}_1 \hat{p}_3 \\ \hat{p}_2 \hat{p}_3 \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} + \chi_{\infty} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 - \xi_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

となる。——

⇒ Lem から、関数  $\bar{c} = \bar{c}(\xi)$  を  $d \log \bar{c} = \sum_{i=1}^3 \bar{H}_i d \xi_i$  で定義する。

$$d \log \frac{\bar{c}}{c} = g_1 dt_1 + g_2 dt_2 + g_3 dt_3$$

となることに注意。

最後に、次の Prop を挙げ、この原稿を終ることにする。

Prop.

$u = \bar{c}/c$ ,  $\chi_{\infty} = 0$ ,  $p_j = 0$  ( $j=1,2,3$ ) とする。Hamiltonian system

$$\frac{\partial g_k}{\partial \xi_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \quad \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} = - \frac{\partial H_i}{\partial g_k}$$

は、次の様になる。



$$\partial_1^2 U = \partial_2 U + \xi_2 U$$

$$\partial_1 \partial_2 U = \partial_3 U + \xi_1 \xi_3 \partial_1 U$$

$$\partial_1 \partial_3 U = -\xi_3 \partial_3 U - \chi_0 U$$

$$\partial_2^2 U = -\xi_3 \partial_3 U + \xi_1 \partial_1 U + \xi_2^2 U - \chi_0 U$$

$$\partial_2 \partial_3 U = \xi_3^2 \partial_3 U - \chi_0 \partial_1 U + \chi_0 \partial_3 U - \xi_3 \partial_3 U$$

$$\begin{aligned} \partial_3^2 U = & -\xi_3^3 \partial_3 U + 2\xi_2 \xi_3 \partial_3 U - \xi_1 \partial_3 U - \chi_0 \partial_2 U \\ & + \chi_0 \xi_3 \partial_1 U + \chi_0 \xi_2 U - \chi_0 \xi_3^2 U \end{aligned}$$

$$\left( \text{ただし } \partial_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

### 参考文献

- [1] H. Kimura., The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure, Ann. Mat. Pura. Appl., CLV (1989), P. 25-34
- [2] D. Liu., Holonomic deformation of linear differential equation of the  $A_3$  Type, preprint