

Title	双曲型空間の極小曲面の表現公式について(部分多様体論とその周辺)
Author(s)	國分, 雅敏
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 907: 12-21
Issue Date	1995-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/59481">http://hdl.handle.net/2433/59481</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 双曲型空間の極小曲面の表現公式について

東京都立大 理 國分雅敏 (MASATOSHI KOKUBU)

### §0. 序

$E^3$  の minimal surface を具体的に記述する表現公式として、Weierstrass の公式がよく知られている。また、 $E^3$  の平均曲率一定な曲面の表現公式として、Kenmotsu 氏によるものがある。([Ke] では、より一般に、与えられた関数を平均曲率にもつ曲面の表現公式が得られている。) Kenmotsu の公式は、単連結 Riemann 面から 2 次元球面  $S^2$  への harmonic map が与えられたときに、それを Gauss map とする平均曲率一定な曲面の immersion を記述するものである。

一方、Bryant [B] は、 $H^3(-1)$  (断面曲率が  $-1$  の 3 次元双曲型空間) の平均曲率が恒等的に  $1$  の曲面 (CMC-1 曲面) の表現公式を与えた。Bryant の公式は、Weierstrass の公式に似たもので、任意の CMC-1 曲面は、Riemann 面上の有理型関数と正則 1 次微分形式の組から得られる、と主張するものである。

以下では、双曲型空間の極小曲面の表現公式に関する、[Ko] で得られた結果を述べる。 $n$  次元双曲型空間のモデルとして、ある Lie 群  $G$  に左不変計量  $g_c$  を入れたものを使った (cf. §1)。このモデルを使うことの利点として次があげられる。

- (1)  $G$  は、微分可能多様体として  $\mathbf{R}^n$  である。よって、 $G$  への写像が  $n$  個の関数の組で与えられ、扱いやすい。
- (2)  $(G, g_c)$  は定曲率  $-c^2$  をもち、とくに  $(G, g_0)$  は、ちょうど Euclid 空間  $E^n$  である。得られた結果はその場合を含む ( $c \neq 0$  を仮定する命題もあるが)。すなわち、 $E^n$  の minimal surface の Weierstrass formula を含む。
- (3) §4 で normal Gauss map を定義するが、その幾何学的意味を  $G$  の左移動を用いて明確にすることができる。

## §1. 双曲型空間のひとつのモデル

$\mathbf{R}^n$  上に、次式で定義される Riemann 計量  $g_c$  を考える。

$$g_c := (dt)^2 + e^{-2ct} \{(dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2\}$$

ここで  $(t, x^2, \dots, x^n)$  は  $\mathbf{R}^n$  の標準的な座標系、 $c$  は実定数。このとき、Riemann 多様体  $(\mathbf{R}^n, g_c)$  は、断面曲率が  $-c^2$  の空間形である。(  $c=0$  のときは明らかで、 $c \neq 0$  のときは、 $y = e^{ct}$ ,  $\tilde{x}^j = cx^j$  ( $j = 2, \dots, n$ ) で定義される微分同相写像  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+^n$  により、双曲型空間の上半空間モデルに等長的である。) さらに、

**Proposition 1.1.**  $G_c$  を次で定義される Lie 群とする。

$$G_c := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & & t \\ & e^{ct} & & x^2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & e^{ct} & x^n \\ & & & & 1 \end{bmatrix}; (t, x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n \right\} \subset GL(n; \mathbf{R})$$

このとき、 $(\mathbf{R}^n, g_c)$  は  $G_c$  に、ある左不変計量を入れたものに等長的である。

*Proof.* 任意の  $\tilde{a} = (a, a^2, \dots, a^n) \in G_c$  に対し、 $L_{\tilde{a}}$  を  $\tilde{a}$  による左移動としたとき、 $L_{\tilde{a}}(t, x^j) = (t + a, e^{ca}x^j + a^j)$  で、

$$\begin{aligned} L_{\tilde{a}}^* g_c &= \{d(t+a)\}^2 + e^{-2c(t+a)} \sum \{d(e^{ca}x^j + a^j)\}^2 \\ &= dt^2 + e^{-2ct} \sum (dx^j)^2 = g_c \end{aligned}$$

である。□

$\mathfrak{g}$  を  $G_c$  の Lie 環、 $\langle, \rangle$  を同一視  $\mathfrak{g} \cong T_e G$  により  $g_c$  から引き起こされる  $\mathfrak{g}$  上の内積とする。 $\mathfrak{g}$  の正規直交基底  $\{e_1, \dots, e_n\}$  を次のように選ぶ。

$$(1.1) \quad e_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & c & & \\ & & \ddots & \\ & & & c \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad e_j = E_{jn} \quad (j = 2, \dots, n)$$

ここで  $E_{jn}$  は、 $(j, n)$ -成分が 1、その他の成分が 0 である行列単位。Lie bracket は、

$$(1.2) \quad [e_1, e_j] = ce_j, \quad [e_j, e_k] = 0 \quad (j, k = 2, \dots, n).$$

と計算される。また、 $X \in \mathfrak{g}$  に対して、 $\text{ad}(X)^* \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  を、任意の  $Y, Z \in \mathfrak{g}$  に対し

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle Y, \text{ad}(X)^*(Z) \rangle$$

が成り立つものと定義し、 $\mathfrak{g}$  上の対称2次形式  $U$  を

$$U(X, Y) = \frac{1}{2} \{ \text{ad}(X)^*(Y) + \text{ad}(Y)^*(X) \}$$

で定義する。このとき、次のように計算される。

$$\begin{aligned} U(e_1, e_1) &= 0, \quad U(e_1, e_j) = U(e_j, e_1) = \frac{c}{2} e_j \\ U(e_j, e_k) &= -c \delta_{jk} e_1 \end{aligned}$$

ここで、 $j, k = 2, \dots, n$  で、 $\delta_{jk}$  は Kronecker のデルタ。

## §2. $\varphi : \Omega \rightarrow G$ に対する調和写像の方程式

$\Omega$  を複素平面  $\mathbb{C}$  の領域とし、 $z = u + iv$  を  $\Omega$  の座標とする。 $(G, ds_G^2)$  を左不変計量の備わった Lie 群とし、 $\langle, \rangle$  を  $G$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  の、 $ds_G^2$  に同調した内積とする。滑らかな写像  $\varphi : \Omega \rightarrow G$  が harmonic map とは、 $\varphi$  がエネルギー汎関数  $E(\varphi) = (1/2) \int_{\Omega} |d\varphi|^2 dV$  の臨界点であることであつた。その Euler-Lagrange 方程式を求めることにより次を得る。

**Lemma 2.1.** 滑らかな写像  $\varphi : \Omega \rightarrow (G, ds_G^2)$  が調和写像であるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \\ - \text{ad} \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^* \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) - \text{ad} \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^* \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つことである。

*Proof.* 簡単のため  $G$  は行列群とする。

$\varphi_t, -\varepsilon < t < \varepsilon$  を  $\varphi = \varphi_0$  の変分で  $\varphi_t|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$  なるものとする。

$$\Lambda = \frac{d}{dt} (\varphi^{-1} \varphi_t)|_{t=0} : \Omega \rightarrow \mathfrak{g}$$

と置く。

また  $\varphi$  の energy density  $e(\varphi)$  は

$$e(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \left| \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|^2 + \left| \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|^2 \right)$$

であるので、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E(\varphi_t)|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \left\langle \frac{d}{dt} \left( \varphi_t^{-1} \frac{\partial \varphi_t}{\partial u} \right) \Big|_{t=0}, \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt} \left( \varphi_t^{-1} \frac{\partial \varphi_t}{\partial v} \right) \Big|_{t=0}, \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle \right\} dudv \end{aligned}$$

であることと

$$\frac{d}{dt} \left( \varphi_t^{-1} \frac{\partial \varphi_t}{\partial u} \right) \Big|_{t=0} = \left[ \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \Lambda \right] + \frac{\partial \Lambda}{\partial u}, \quad \frac{d}{dt} \left( \varphi_t^{-1} \frac{\partial \varphi_t}{\partial v} \right) \Big|_{t=0} = \left[ \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \Lambda \right] + \frac{\partial \Lambda}{\partial v}$$

であることより、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E(\varphi_t)|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \left\langle \left[ \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \Lambda \right] + \frac{\partial \Lambda}{\partial u}, \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \left[ \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \Lambda \right] + \frac{\partial \Lambda}{\partial v}, \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle \right\} dudv \\ &= \int_{\Omega} \left\langle \Lambda, \text{ad} \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^* \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \right\rangle dudv - \int_{\Omega} \left\langle \Lambda, \frac{\partial}{\partial u} \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \right\rangle dudv \\ &+ \int_{\Omega} \left\langle \Lambda, \text{ad} \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^* \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right\rangle dudv - \int_{\Omega} \left\langle \Lambda, \frac{\partial}{\partial v} \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right\rangle dudv \quad \square \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  を  $\mathfrak{g}$  の複素化とし、 $U$  も  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  上の 2 次形式に拡張すると、(2.1) は、

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right) - 2U \left( \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right) = 0$$

と書ける。

$\theta = \varphi^{-1} d\varphi = Adz + \bar{A}d\bar{z}$  を  $G$  の Maurer-Cartan 形式の  $\varphi$  による引き戻しとする。

(2.2) は、

$$(2.3) \quad A_{\bar{z}} + \bar{A}_z = 2U(A, \bar{A})$$

と書ける。一方、Maurer-Cartan の方程式より、

$$(2.4) \quad A_{\bar{z}} - \bar{A}_z = [A, \bar{A}]$$

が成り立つ。また、(2.3) と (2.4) は、次のひとつの式に同値である。

$$(2.5) \quad A_{\bar{z}} = U(A, \bar{A}) + \frac{1}{2}[A, \bar{A}]$$

(2.4) は微分方程式  $\varphi^{-1} d\varphi = Adz + \bar{A}d\bar{z}$  の完全積分可能条件であった。したがって、単連結 Riemann 面  $\Sigma$  から  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  への写像  $A$  で (2.5) を満たすものが与えられたときに、 $\varphi^{-1} d\varphi = Adz + \bar{A}d\bar{z}$  の解  $\varphi$  が存在し、それは  $\Sigma$  から  $G$  への harmonic map である。

## §3. 双曲型空間の極小曲面

この節では、前の節の結果を使って、harmonic map、minimal immersion  $\varphi : \Sigma \rightarrow (\mathbf{R}^n, g_c)$  を考察する。

$\varphi : \Sigma \rightarrow (\mathbf{R}^n, g_c)$  を  $\varphi(z) = (t(z), x^j(z))$  と書くことにする。このとき、

$$A = t_z e_1 + \sum e^{-ct} x_z^j e_j$$

であり、

$$Adz = \xi \otimes e_1 + \sum \omega^j \otimes e_j$$

とおくと、(2.5) は次の (3.1) と同値である。

$$(3.1) \quad \begin{cases} \bar{\partial}\xi = c \sum \omega^j \wedge \bar{\omega}^j \\ \bar{\partial}\omega^j = c\bar{\omega}^j \wedge \xi \end{cases}$$

したがって、次を得る。

**Theorem A.**  $\Sigma$  を単連結 Riemann 面とする。  $\Sigma$  上の (1,0)-form の  $n$  個の組  $(\xi, \omega^j)$  が (3.1) を満たすならば、

$$(3.2) \quad (t(z), x^j(z)) = \left( 2 \int_{z_0}^z \operatorname{Re} \xi, 2 \int_{z_0}^z e^{ct(z)} \operatorname{Re} \omega^j \right)$$

は  $\Sigma$  から  $(\mathbf{R}^n, g_c)$  への harmonic map を与える。さらに、次の条件を満たすとき、

$$(3.3) \quad \xi \cdot \xi + \sum \omega^j \cdot \omega^j = 0$$

上の写像は  $(\mathbf{R}^n, g_c)$  の branched minimal surface を与える。さらに、

$$(3.4) \quad \xi \cdot \bar{\xi} + \sum \omega^j \cdot \bar{\omega}^j \neq 0$$

を満たすならば、branch point はない。すなわち、regular minimal surface である。

逆に、任意の  $\Sigma$  から  $(\mathbf{R}^n, g_c)$  への harmonic map および (branched) minimal immersion は、このようにあらわせる。

*Proof.* (3.2) が harmonic map を与えることは、上に述べたことによる。(3.3) は、(3.2) で与えられる写像が weakly conformal であることを意味するから、したがってそれは、branched minimal immersion である。(cf.[G-O-R])

逆は、上に述べたことから明らか。□

**Proposition 3.1.**  $c \neq 0$  とする。regular minimal surface が (3.2) の形で与えられているとする。このとき、 $\xi$  と  $\bar{\partial}\xi$  が共に 0 となる点は存在しない。

*Proof.* そのような点  $p$  が存在したとする。  $\bar{\partial}\xi = c \sum \omega^j \wedge \bar{\omega}^j$  より、  $\sum \omega^j \wedge \bar{\omega}^j|_p = 0$  が成り立つ。ゆえに  $\omega^j|_p = 0$  が  $j = 2, \dots, n$  に対して成り立つ。したがって、  $(\xi \cdot \bar{\xi} + \sum \omega^j \cdot \bar{\omega}^j)|_p = 0$ 。これは regular であることに矛盾する。  $\square$

**Lemma 3.2.**  $c \neq 0$  ならば、(3.1)、(3.2)、(3.3) は次に同値。

$$(3.5) \quad \begin{cases} \xi \cdot \bar{\xi} + \sum \omega^j \cdot \bar{\omega}^j = 0, \\ \xi|_p = 0 \text{ かつ } \bar{\partial}\xi|_p = 0 \text{ なる点 } p \in \Sigma \text{ は存在しない,} \\ \bar{\partial}\omega^j = c \bar{\omega}^j \wedge \xi \quad (j = 2, \dots, n) \end{cases}$$

*Proof.*  $\xi = f dz, \omega^j = h^j dz$  とおく。(3.5) の 1 番目の条件より、  $f^2 + \sum (h^j)^2 = 0$ 。 $\bar{z}$  で微分して、  $ff_{\bar{z}} + \sum h^j h_{\bar{z}}^j = 0$ 。(3.5) の 3 番目の条件より、

$$\begin{aligned} f\bar{\partial}\xi &= ff_{\bar{z}}d\bar{z} \wedge dz = -\sum h^j h_{\bar{z}}^j d\bar{z} \wedge dz \\ &= -\sum h^j \bar{\partial}\omega^j = -\sum h^j c \bar{\omega}^j \wedge \xi \\ &= c \sum h^j f dz \wedge \bar{\omega}^j = cf \sum \omega^j \wedge \bar{\omega}^j \end{aligned}$$

ゆえに、

$$(3.6) \quad \bar{\partial}\xi = c \sum \omega^j \wedge \bar{\omega}^j$$

が  $f$  の零点の外で成り立つ。第 2 の条件より、  $f$  の零点集合は内点をもたないことがわかるから、(3.6) が  $\Sigma$  上成り立つ。最後に、  $\xi \cdot \bar{\xi} + \sum \omega^j \cdot \bar{\omega}^j \neq 0$  を示す。  $\xi|_p \neq 0$  ならば  $(\xi \cdot \bar{\xi} + \sum \omega^j \cdot \bar{\omega}^j)|_p \neq 0$  であることは自明である。  $\xi|_p = 0$  とする。(3.5) の第 2 の条件より、  $\bar{\partial}\xi \neq 0$ 、ゆえに、(3.6) により  $(\sum \omega^j \wedge \bar{\omega}^j)|_p \neq 0$ 。したがって、  $\omega^j|_p$  の少なくともひとつは non-zero である。以上より、  $(\xi \cdot \bar{\xi} + \sum \omega^j \cdot \bar{\omega}^j)|_p \neq 0$ 。  $\square$

したがって、次を得たことになる。

**Theorem B.**  $c \neq 0$  とする。  $\Sigma$  を単連結 Riemann 面とする。  $\Sigma$  上の (1,0)-forms の  $n$  個の組  $(\xi, \omega^j)$  が (3.5) を満たすならば、

$$(t(z), x^j(z)) = \left( 2 \int_{z_0}^z \operatorname{Re} \xi, \quad 2 \int_{z_0}^z e^{ct(z)} \operatorname{Re} \omega^j \right)$$

は  $(\mathbf{R}^n, g_c)$  の regular minimal surface を与える。逆に、任意の  $(\mathbf{R}^n, g_c)$  内の regular minimal surface は、このようにあらわせる。

## §4. 3次元の場合

$n = 3$  の場合を考える。今、branched minimal surface が (3.2) の形で与えられているとし、 $\xi = fdz, \omega^j = h^j dz$  とする。 $F, G$  を

$$F = h^2 - ih^3, \quad G = \frac{f}{h^2 - ih^3}$$

とおく。正確には  $G$  は関数ではないが、Riemann 球  $S^2$  への写像である。この写像  $G$  を *normal Gauss map* と呼ぶことにする。共形性  $(f)^2 + (h^2)^2 + (h^3)^2 = 0$  より、

$$f = FG, \quad h^2 = \frac{1}{2}F(1 - G^2), \quad h^3 = \frac{i}{2}F(1 + G^2)$$

となる。条件 (3.1) は、

$$(4.1) \quad F_{\bar{z}} = -c|F|^2|G|^2\bar{G}, \quad G_{\bar{z}} = \frac{c\bar{F}}{2}(|G|^4 - 1)$$

となる。計算により、 $(F, G)$  が (4.1) の解ならば、 $G$  は次の微分方程式を満たすことがわかる。

$$(4.2) \quad (|G|^4 - 1)G_{z\bar{z}} = 2|G|^2\bar{G}G_zG_{\bar{z}}$$

逆に次の補題が成り立つ。

**Lemma 4.1.**  $G$  を (6.2) の解で、正則でないものとする。このとき関数  $F$  で、 $G$  とあわせて、(4.1) を満たすものが存在する。

*Proof.*  $F = 2c^{-1}\bar{G}_z/(|G|^4 - 1)$  とおくと、

$$F_{\bar{z}} = \frac{2\bar{G}_{z\bar{z}}(|G|^4 - 1) - \bar{G}_z(2GG_{\bar{z}}\bar{G}^2 + 2G^2\bar{G}\bar{G}_{\bar{z}})}{c(|G|^4 - 1)^2}$$

(4.2) を使って、 $F_{\bar{z}} = -c|F|^2|G|^2\bar{G}$  を得る。□

したがって、次の結果が示された。

**Theorem C.**  $\Sigma$  を単連結 Riemann 面とし、 $G: \Sigma \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を (4.2) の解 (但し、正則写像ではない) とする。このとき、 $\Sigma$  から 3次元双曲型空間への branched minimal immersion で、その normal Gauss map が  $G$  であるものが存在する。

第1基本形式  $ds_{\Sigma}^2$  と、第2基本形式の複素化の (2,0)-part  $(II^{\mathbb{C}})^{2,0}$  (これは Hopf differential と呼ばれている) は次のようになる。

$$ds_{\Sigma}^2 = |F|^2(1 + |G|^2)^2 dzd\bar{z}, \quad (II^{\mathbb{C}})^{2,0} = FG_z dzdz$$



minimal surface の Hopf differential が正則な 2 次微分であることが知られていて、この場合も (4.1)、(4.2) から確かめられる。Gauss 曲率  $K$  は

$$K = -c^2 - 4 \frac{|G_z|^2}{|F|^2(1+|G|^2)^4}$$

で与えられる。

2 つの例について述べる。簡単のため、 $c = 1$  の場合について述べる。

*Example 4.2.*  $\Sigma = \{z = u + iv \in \mathbf{C}; u > 0\}$  とし、

$$\xi = \frac{dz}{z + \bar{z}}, \quad \omega^2 = \frac{idz}{z + \bar{z}}, \quad \omega^3 = 0$$

とする。このとき、 $(\xi, \omega^2, \omega^3)$  は (4.3) をみたし、得られる曲面は totally geodesic である。

$$\begin{aligned} t(z) &= \int_1^z \frac{dz + d\bar{z}}{z + \bar{z}} = \log(z + \bar{z}) = \log(2u), \\ x^2(z) &= \int_1^z e^{\log 2u} \left( \frac{idz - id\bar{z}}{z + \bar{z}} \right) = \int_1^z 2u \frac{-2dv}{2u} = -2v, \\ x^3(z) &= \text{constant} \end{aligned}$$

*Example 4.3.*  $\rho(u)$  を常微分方程式

$$\frac{d\rho}{du} = (e^{-2\rho} - a^2 e^{2\rho})^{\frac{1}{2}}$$

( $a$  は実定数。) の解とする。 $uv$ -平面の適当な領域  $\Sigma$  上で、

$$\rho = \rho(u) = \rho((z + \bar{z})/2)$$

$$G = \left( \frac{e^{-\rho} + ae^{\rho}}{e^{-\rho} - ae^{\rho}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく。このとき、 $G$  は (4.2) を満たす。Lemma 4.1 より、 $F = (e^{-\rho} - ae^{\rho})/2$  と計算される。

したがって、

$$\xi = \frac{1}{2}(e^{-2\rho} - a^2 e^{2\rho})^{\frac{1}{2}} dz, \quad \omega^2 = \frac{1}{2} a e^{\rho} dz, \quad \omega^3 = -\frac{i}{2} e^{-\rho} dz$$

は (3.5) を満たし、minimal surface は、

$$\begin{aligned} t(z) &= \rho(u), \\ x^2(z) &= a \int e^{2\rho(u)} du, \\ x^3(z) &= v \end{aligned}$$

で与えられる。第1基本形式、Hopf differential、Gauss 曲率は、それぞれ、

$$ds_{\Sigma}^2 = e^{-2\rho} dzd\bar{z}, \quad (II^{\mathbf{C}})^{2,0} = \frac{a}{2} dzdz, \quad K = -(1 + a^2 e^{2\rho})$$

である。

#### §5. NORMAL GAUSS MAP の幾何学的意味

$\varphi: \Sigma \rightarrow (\mathbf{R}^n, g_c)$  を Weierstrass data  $(\xi, \omega^j)$  で与えられている minimal surface とする。局所座標  $z$  を使って、 $\xi = f dz$ 、 $\omega^j = h^j dz$  と置く。

$\mathbf{P}(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$  を  $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$  内の複素直線からなる複素射影空間とする。 $Z = [Z_1; \dots; Z_n]$  にて、 $\sum_{\alpha=1}^n Z_{\alpha} e_{\alpha}$  により張られる複素直線 ( $\{e_k\}$  は (2.1) で選んだ正規直交基底) を表す。写像  $\Phi: \Sigma \rightarrow \mathbf{P}(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$  を

$$\Phi(p) = [A|_p] = [\xi|_p; \omega^2|_p; \dots; \omega^n|_p] = [f(p); h^2(p); \dots; h^n(p)]$$

と定義する。 $\Phi$  は実際、hyperquadric  $\mathbf{Q}_{n-2} = \{Z \in \mathbf{P}(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}); \sum_{\alpha=1}^n (Z_{\alpha})^2 = 0\}$  に値をとる。hyperquadric  $\mathbf{Q}_{n-2}$  は  $\mathfrak{g}$  内の向き付けられた 2-plane のつくる Grassmann 多様体  $Gr_2(\mathfrak{g})$  に微分同相だから、 $\Phi(p)$  は、 $\varphi^{-1}(\varphi_*(\partial/\partial v|_p)) \wedge \varphi^{-1}(\varphi_*(\partial/\partial u|_p)) \in Gr_2(\mathfrak{g})$  に同一視される。したがって、 $\tilde{\Phi}: \Sigma \rightarrow Gr_2(\mathfrak{g})$  を  $p \in \Sigma$  に対して  $\mathfrak{g}$  の向き付けられた 2-plane  $L_{\varphi(p)^{-1}*}(\varphi_* T_p \Sigma)$  を対応させる写像とすると、 $\Phi$  と  $\tilde{\Phi}$  は本質的に同じものである。つまり、左移動の微分写像により接空間を単位元の接空間に移す写像である。これは、 $\mathbf{E}^n$  の曲面に対する Gauss map の一般化になっている。

#### REFERENCES

- [B] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque 154-155 (1987), 321-347.
- [G-O-R] R. D. Gulliver II, R. Osserman, and H. L. Roydon, *A theory of branched immersions of surfaces*, Amer. J. Math. 95 (1973), 750-812.

- [Ke] K. Kenmotsu, *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann. 245 (1979), 89–99.
- [Ko] M. Kokubu, *Weierstrass representation for minimal surfaces in a hyperbolic space*, preprint.