数理解析研究所講究録
1516巻 2006年 1-8

野海・山田系に付随する代数方程式系について

青木貴史 (Takashi AOKI)
近畿大学理工学部

本多尚文 (Naofumi HONDA)
北海道大学大学院理学研究科

表題の野海・山田系とはアフィン・ワイル群の対称性を持つ微分方程式系として Noumi and Yamada [NY1], [NY2] で与えられた方程式系を意味する. 本稿では完全 WKB 解析の枠組みで考察するため Takei [T] に従って大きなパラメータ η を導入して若干の書き換えを行った非線型微分方程式系を対象とする. これらの方程式系は次数の偶奇により形が異なる. 偶数次系は次で与えられる:

$$(NY)_{2m} \qquad \eta^{-1}\frac{du_j}{dt} = [u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \cdots - u_{j+2m}) + \alpha_j]$$

$(j = 0, 1, 2, \ldots, 2m)$, ここで α_j は定数で

$$(1) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{2m} = \eta^{-1}$$

を満たし, 独立変数 t と未知関数 u_j は関係式

$$(2) \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_{2m} = t$$

を満足すると仮定する. これを正規化条件と呼ぶ. 添字 j は $2m+1$ を法として考える. すなわち $u_{j+2m+1} = u_j$ である. 未知関数の個数は $2m+1$ であるが正規化条件により実質の個数は $2m$ となる. 正規化条件の下で $(NY)_{2m}$ では $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$ について方程式を考えればよい.

奇数次系は次で与えられる:

$$(NY)_{2m+1} \quad \eta^{-1}\frac{t}{2}\frac{du_j}{dt} = \left[u_j \sum_{1\le r\le s\le m}(u_{j-1+2r}u_{j+2s} - u_{j+2r}u_{j+1+2s}) + \frac{t\alpha_j}{2}\right]$$

$(j = 0, 1, 2, \ldots, 2m+1)$, ここで α_j は定数で

$$(3) \qquad \alpha_0 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2m} = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2m+1} = \frac{\eta^{-1}}{2}$$

を満たし，独立変数 t と未知関数 u_j は正規化条件

$$u_0 + u_2 + \cdots + u_{2m} = u_1 + u_3 + \cdots + u_{2m+1} = \frac{t}{2} \tag{4}$$

を満足しているとする．添字 j は $2m+2$ を法として考える．

$(NY)_n$ の完全 WKB 解析を行う際に出発点となるのは

$$\hat{u}_j = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k} u_{j,k}(t) \tag{5}$$

という展開をもつ形式解である．これらを方程式に代入して η^0 の項を見ると主部 $u_{j,0}$ が満たすべき代数方程式系が得られる．偶数系の場合は

$$(NY)^0_{2m} \left\{ \begin{array}{rcl} u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \cdots - u_{j+2m}) + \alpha_j &=& 0 \ (0 \le j \le 2m-1), \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{2m} &=& t \end{array} \right.$$

となる．ただし，$u_{j,0}$ を u_j と，また，α_j の (η^{-1} についての展開における) 主部を α_j と略記し，$j = 2m$ に対応する方程式は正規化条件 (2) で置き換えた．形式解 (5) を構成するためには，まずこれらの代数方程式系を解かなければならない．次数が低い場合に消去法によりこれらの代数方程式系が有限個の解を有することをは確かめられている [T]．本稿では一般の $(NY)^0_{2m}$ について解の有限性を考察する．

1 正則列と穏正則列

X を n 次元複素多様体，$x_0 \in X$ とする．また，X 上の正則関数の層を $\mathcal{O}$ で表す．まず局所的な正則列の定義を復習する：

定義 1 $f_0, f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_{x_0}$ とし，x_0 は $f_0, f_1, \ldots, f_l$ の共通零点であると仮定する．任意の $k = 0, \ldots, l$ に対し f_k は $\mathcal{O}_{x_0}/(f_0, \ldots, f_{k-1})$ 上零因子でない，すなわち

$$f_k \cdot : \mathcal{O}_{x_0}/(f_0, \ldots, f_{k-1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{x_0}/(f_0, \ldots, f_{k-1})$$

は単射であるとき，$f_0, f_1, \ldots, f_l$ は x_0 において正則列であるという．ただし，$(f_0, \ldots, f_{k-1})$ は $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ が生成するイデアルを表す．

$V(x_0, f_0, \ldots, f_k)$ により $f_0, f_1, \ldots, f_k$ の共通零点集合のなす解析多様体の点 x_0 での germ を表す．$\mathcal{O}_{x_0}$ は Cohen-Macaulay 環であるので次が成り立つ：

定理 1 $f_0, f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_{x_0}(l < n)$ であるとし，x_0 は $f_0, f_1, \ldots, f_l$ の共通零点とするとき，以下の 3 条件は同値である．

1. $f_0, f_1, \ldots, f_l$ は x_0 における正則列である．
2. 任意の $k = 0, 1, \ldots, l$ に対し $\dim V(x_0, f_0, \ldots, f_k) = n - k - 1$ である．
3. $\dim V(x_0, f_0, \ldots, f_l) = n - l - 1$ である．

従って局所的には正則列であるか否かは列 $f_0, f_1, \ldots, f_l$ の順番に依存しない．そこで正則列の概念を少し変える．

定義 2 $f_0, f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_{x_0}$ とする．任意の $k = 0, \ldots, l$ と任意に $f_0, f_1, \ldots, f_l$ から $k+1$ 個選び出した組 $f_{l_0}, f_{l_1}, \ldots, f_{l_k}$ に対して f_{l_k} は $\mathcal{O}_{x_0}/(f_{l_0}, \ldots, f_{l_{k-1}})$ 上零因子ではないとき $f_0, f_1, \ldots, f_l$ は x_0 において穏正則列であるという．

この定義において x_0 は $f_0, f_1, \ldots, f_l$ の共通零点でなくともよいことに注意する．正則列の場合と同様に次が成り立つ：

定理 2 $f_0, f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_{x_0}$ であるとする．次の 2 条件は同値である．

1. $f_0, f_1, \ldots, f_l$ は x_0 において穏正則列である．
2. 任意の $k = 0, \ldots, l$ と $f_0, f_1, \ldots, f_l$ から任意に $k+1$ 個選び出した組 $f_{l_0}, f_{l_1}, \ldots, f_{l_k}$ に対し $V(x_0, f_{l_0}, \ldots, f_{l_k})$ は空集合であるかまたは $\dim V(x_0, f_{l_0}, \ldots, f_{l_k}) = n - k - 1$ が成り立つ．

穏正則列と Koszul 複体には次の関係がある：

定理 3 ([S], Appendix B. 4) $f_0, f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_{x_0}$ を x_0 における穏正則列とすると，$\mathcal{O}_{x_0}$ を係数として作った Koszul 複体は最高次数以外完全列となる．

また，最高次数より 1 小さい部分を見ると次のことがわかる：

定理 4 $f_0, f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_{x_0}$ に対し $\mathcal{O}_{x_0}$ を係数として作った Koszul 複体が最高次数以外完全ならば，f_l は $\mathcal{O}_{x_0}/(f_0, \ldots, f_{l-1})$ 上零因子ではない．

定理 3, 4 を併せると次が得られる：

定理 5 $f_0, f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_{x_0}$ とするとき次の 2 条件は同値である.

1. $f_0, f_1, \ldots, f_l$ は x_0 における穏正則列である.

2. 任意の $k = 0, \ldots, l$ と $f_0, f_1, \ldots, f_l$ から任意に $k+1$ 個選び出した組 $f_{l_0}, f_{l_1}, \ldots, f_{l_k}$ に対し $\mathcal{O}_{x_0}$ を係数として作った Koszul 複体は最高次数以外完全である.

次に大域的な正則列，すなわち通常の環論における正則列の概念を復習する ([M] 参照). R を可換環とする.

定義 3 環 R の元の列 $a_0, a_1, \ldots, a_l$ が正則列であるとは次の 2 条件を満たすことをいう：

1. 任意の $k = 0, \ldots, l$ に対して a_k は $R/(a_0, \ldots, a_{k-1})$ 上で零因子でない.

2. $R(a_0, \ldots, a_l) \neq R$

正則列の概念は $a_0, a_1, \ldots, a_l$ の順番に依存することに注意する.

定義 4 $a_0, a_1, \ldots, a_l \in R$ が穏正則列であるとは，任意の $k = 0, \ldots, l$ と $a_0, a_1, \ldots, a_l$ から任意に選んだ $k+1$ 個の元 $a_{l_0}, a_{l_1}, \ldots, a_{l_k}$ に対して a_{l_k} は $R/(a_{l_0}, \ldots, a_{l_{k-1}})$ 上で零因子ではないことをいう.

この定義は正則列の定義と比較して強い部分（順番に依らないこと）と弱い部分（共通零点の存在を仮定しない）の両面があることに注意する. やはりこの場合も Koszul 複体の言葉で言い換えられる：

定理 6 $a_0, a_1, \ldots, a_l \in R$ とするとき次の 2 条件は同値である.

1. $a_0, a_1, \ldots, a_l$ は穏正則列である.

2. 任意の $k = 0, \ldots, l$ と $a_0, a_1, \ldots, a_l$ から任意に $k+1$ 個選び出した組 $a_{l_0}, a_{l_1}, \ldots, a_{l_k}$ に対し R を係数として作った Koszul 複体は最高次数以外完全である.

以上から局所と大域を結びつけることが可能となる：

定理 7 多項式環 $R = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ の元 $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ に対して次の 2 条件は同値である.

1. $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ は R における穏正則列である.

2. $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ は $\mathbb{C}^n$ の各点 x_0 において穏正則列である.

証明 $1 \Rightarrow 2$ は自明である. 逆は Koszul 複体に対して緩増大度を持った大域的切断を取る函手を施せばよい.

多項式 $f \in R = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ に対して $\sigma(f)$ により f の最高次数(通常の次数で)部分を表し, f の主表象と呼ぶ. $\mathcal{D}$ 加群の包合基底に関する定理 ([S, Prop. 4.1.5]) の証明と同様の方法により次が示される:

定理 8 $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \in R = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ に対して, もし $\sigma(f_0)$, $\sigma(f_1), \ldots, \sigma(f_{n-1})$ が R において穏正則列であるならば $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ は R において穏正則列をなす.

2 $(NY)^0_{2m}$ と正則列

前節の議論を元に代数方程式系 $(NY)^0_{2m}$ が正則列であることを示そう. 環 $R = \mathbb{C}[u_0, u_1, \ldots, u_{2m}, t]$ において $(NY)^0_{2m}$ の主表象(上の意味で)を取った方程式

$$(6) \quad \begin{cases} u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \cdots - u_{j+2m}) = 0 \quad (0 \le j \le 2m-1), \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{2m} - t = 0 \end{cases}$$

を考える.

定理 9 多項式 f_j $(0 \le j \le 2m)$ を次により定める:

$$(7) \quad \begin{cases} f_j = u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \cdots - u_{j+2m}) \quad (0 \le j \le 2m-1), \\ f_{2m} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2m} - t. \end{cases}$$

このとき $f_0, \ldots, f_{2m}$ は $\mathbb{C}^{2m+2}$ の各点において穏正則列である. したがって $\mathbb{C}[u_0, u_1, \ldots, u_{2m}, t]$ において穏正則列である.

証明 $0 \le j \le 2m-1$ に対して $g_j = u_{j+1} - u_{j+2} + \cdots - u_{j+2m}$ とおくと「$f_j = 0$」は「$u_j = 0$ または $g_j = 0$」と同値である. まず, すべて g_j を選んだ場合を考える. 偶数番目の未知数 u_{2k} を $-u_{2k}$ に置き換えて連立

1 次方程式の係数行列を考える．以下，見やすくするために $m=2$ すなわち $(NY)_4$ の場合について説明する．この場合，係数行列は

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\tag{8}
$$

となる．幾つかの j について $g_j=0$ は選ばずに単項式側，すなわち $u_j=0$ を選んだ場合はそれに応じて行列 (8) から対応する行と列を抜いたものが係数行列となる．例えば，1 つだけ単項式を選ぶと

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
* & * & * & 1 & 1
\end{pmatrix}
\tag{9}
$$

となる．ここで $*$ は 1 または -1 を表す．この行列の階数が 4 であることを見る．第 5 列を除いた小行列

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 \\
* & * & * & 1
\end{pmatrix}
\tag{10}
$$

を考え，基本変形を行うと，この行列は

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
* & * & * & 1
\end{pmatrix}
\tag{11}
$$

の形にできる．ここで $*$ は 0 または 2 である．この行列の行列式は整数値であるが決して 0 にはならない．最終列に関する展開を行えば，この行列式が奇数の値を取ることがわかるからである．

以上より，$f_0,\ldots,f_{2m}$ から任意に l 本選んで作った方程式系の共通零点の既約成分（各は線形多様体）の次元は $2m+1-l$ となる．よって定理 2 より $f_0,\ldots,f_{2m}$ は $\mathbb{C}^{2m+2}$ の各点において穩正則列である．

したがって定理 7, 8 を適用すると次が得られる：

定理 10 多項式 F_j $(0 \le j \le 2m)$ を次により定める：

$$(12)\quad \begin{cases} F_j = u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \cdots - u_{j+2m}) + \alpha_j \quad (0 \le j \le 2m-1), \\ F_{2m} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2m} - t. \end{cases}$$

このとき $F_0, \ldots, F_{2m}$ は $\mathbb{C}[u_0, \ldots, u_{2m}, t]$ おいて穏正則列である.

さらに $(NY)^0_{2m}$ は無限遠に解を持たないことがわかる. したがって次が得られた：

定理 11 定理 8 と同じ記号のもとに, $F_0, \ldots, F_{2m}$ は $\mathbb{C}[u_0, \ldots, u_{2m}, t]$ おいて正則列である.

上の議論から, 明らかに t を任意に固定した場合, $F_0, \ldots, F_{2m}$ は $\mathbb{C}[u_0, \ldots, u_{2m}]$ の正則列となる. さらに t が適当な条件を満たせば $(NY)^0_{2m}$ の解の個数を数えることも可能であり, 一般的には 2^{2m} 個となることがわかる. 奇数次系の場合は若干状況が異なる. この場合, 対応する代数方程式系が定める代数多様体は $t = 0$ を既約成分に持つので $\mathbb{C}[u_0, \ldots, u_{2m+1}, t]$ においては正則列とはならない. 上の議論をそのまま適用することはできない. これらについては別の機会に論じる.

参考文献

[M] 松村英之 可換環論 共立出版 1980

[NY1] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, *Funkcial Ekvac.*, **41** (1998), 245-260.

[NY2] ______, Symmetry in Painlevé equations, in: C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei eds., *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 245-260.

[S] P. Schapira, Microdifferential Systems in the Complex Domain, Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1985.

[T] Y. Takei, Toward the exact WKB analysis for higher-order Painlevé equations – The case of Noumi-Yamada Systems –, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **40** (2004), 709-730.