UNA APROXIMACIÓ A L'OBRA D'ARISTARC DE SAMOS (ca. 310 aC - 230 aC)

M. ROSA MASSA ESTEVE
CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA, DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *Aristarc de Samos, astronomia grega, trigonometria, «Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna»*

An approach to the work of Aristarchus of Samos (ca. 310 BC - 230 BC)

Summary: *Aristarchus, known as the ancient Copernicus by his heliocentric ideas, was the author of the work: «On the sizes and distances of the Sun and Moon». In this text Aristarchus could be seem as a pioneer of Greek astronomy. He reckoned the sizes of the Sun and the Moon and compared them with the Earth and the distances of these asters to the Earth. After the publication of my Spanish translation of this text (2007), the aim of this paper is to provide some mathematical features deduced from the analysis of the work of Aristarchus.*

Key words: *Aristarchus of Samos, Greek astronomy, trigonometry, «On Sizes and Distances of the Sun and Moon»*

Idees astronòmiques abans d'Aristarc

Per situar històricament l'obra d'Aristarc mencionarem algunes idees rellevants de la història de l'astronomia d'aquella època.[1] La història

1. La bibliografia sobre la història de l'astronomia grega és molt extensa. Destaquem com a obres interessants per proporcionar una visió de conjunt: Dreyer (1953), Berry (1961), Neugebauer (1969), Heath (1981a i 1981b), Tannery (1990 i 1995-96) i Puig Pla (1996).

DOI: 10.2436/20.2006.01.101

de l'astronomia grega probablement va començar ensems amb la història de la filosofia grega, de manera que els primers grans filòsofs van ser també a la vegada els primers astrònoms. Així, podem citar Tales (aprox. 624-547 aC), Pitàgores (aprox. 572-497 aC), Eudoxe (aprox. 408-355 aC) i Aristòtil (aprox. 384-322 aC), entre d'altres.[2]

Tales, conegut com a astrònom i que va predir i explicar les causes d'un eclipsi[3] de Sol, entenia la Lluna i el Sol com discos o cilindres curts que flotaven a l'aigua. Tannery compara aquesta visió del món de Tales amb la que es troba en els papirs egipcis (Tannery, 1990: 74).

Algunes idees diferents van ser enunciades per Pitàgores i els seus seguidors, així van reconèixer que la Terra era una esfera i que Venus, l'estel vespertí, era el mateix planeta que Venus, l'estel matutí. El moviment de la Terra així com el del Sol, la Lluna i els planetes al voltant d'un foc central va ser també una teoria atribuïda a un deixeble de Pitàgores, Filolau de Crotona (aprox. 470 aC) (Berry, 1961: 24-25).

Posteriorment, Eudoxe va proposar una teoria d'esferes homocèntriques per descriure el moviment dels cossos celestes. Va suposar que la Terra romania immòbil en el centre i que els planetes (incloent-hi el Sol i la Lluna) executaven moviments circulars al voltant d'ella. Eudoxe les va considerar esferes encaixades i concèntriques amb la Terra: tres esferes pel Sol, tres per la Lluna i quatre per cadascun dels altres planetes amb diferents velocitats de rotació i eixos de gir. També va construir un observatori a Cnido, va observar els estels i va escriure un llibre sobre la sortida i la posta de les constel·lacions.

Aristòtil, a través dels seus textos que van ser molt influents, va analitzar les realitats observables i va reconstruir la teoria del món integrant en la seva cosmologia moltes idees dels seus predecessors com ara el geocentrisme, el marc estructural de l'Univers de les dues esferes, el principi platònic del moviment circular i uniforme dels cossos celestes i, a més, es va apropiar de la teoria presocràtica dels quatre elements. Va establir les bases del que avui anomenem *física antiga* i les línies bàsiques de la seva doctrina van ser acceptades com un dogma durant seixanta generacions. Les fonts disponibles respecte als principis de filosofia natural d'Aristòtil són els vuit llibres de *Física*. Les qüestions astronòmiques es discuteixen sobretot en els quatre llibres del *De Caelo* i a la *Meteorologia*. De fet, la pràctica totalitat dels astrònoms grecs, àrabs i cristians van acceptar, de forma implícita o no, les premisses fonamentals de la cosmologia aristotèlica: el caràcter tancat i finit del cosmos, la immobilitat de la Terra en el centre del món i la diferència essencial entre les dues regions: la celeste (supralunar) i la terrestre (sublunar).

Aristarc de Samos, que va viure a l'època d'Euclides (aprox. 300 aC) i Arquimedes (287-212 aC), va ser una de les rares excepcions que va plantejar idees heliocèntriques de

2. En la introducció de Heath apareixen també Anaximandre de Milet (aprox. VI aC), Anaxímenes (aprox. VI aC), Xenòfanes (aprox, V aC), Heràclit (aprox. VI aC), Heràclides de Ponto (aprox. IV aC), Plató (aprox. IV aC), etc. (Heath, 1981a: 1-297).

3. Recentment Bowen i Goldstein (1994) han publicat un article amb comentaris astronòmics sobre els eclipsis solars a Aristarc, Tales i Heràclit.

l'Univers, com comentarem més endavant. Tanmateix, en la seva obra *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* va utilitzar la teoria geocèntrica. Aristarc va ser un dels pioners en escriure una obra que calculava les mides del Sol i la Lluna relacionant-les amb les de la Terra i les distàncies d'ells a la Terra.

Aristarc de Samos (ca. 310 - 260 aC)[4]

Aristarc, que va néixer el 310 aC a l'illa de Samos, va fer les seves observacions astronòmiques al Museu d'Alexandria amb Timocaris d'Alexandria (aprox. III aC) i Aristil·lo (deixeble de Timocaris).

No es coneix gairebé res de la seva vida. Les escasses informacions de què es disposa vénen donades per les cites trobades en textos posteriors i per l'obra que ens va deixar.

Claudi Ptolemeu (aprox. 85-165), a la seva obra *Almagest* (150), explica que Aristarc va observar el solstici d'estiu de l'any 280 aC. Ptolemeu, en l'apartat primer del llibre III de la seva obra, descriu també els procediments d'Aristarc per determinar la longitud de l'any solar (Ptolemy, 1984: 137-139).

Posteriorment, Nicolàs Copèrnic (1473-1543) a la seva obra *De Revolutionibus orbium coelestium libri VI* (1543) explica les observacions realitzades per Aristarc a Alexandria. Concretament, en el capítol II del tercer llibre, Copèrnic relata les observacions dels equinoccis i solsticis i cita Aristarc i Timocaris; en el capítol VI d'aquest mateix llibre, torna a descriure els moviments regulars de la precessió dels equinoccis, citant de nou a Aristarc, Timocaris i Aristil·lo;[5] finalment, en el capítol XIII del mateix llibre tercer, descriu els càlculs realitzats per diversos astrònoms, entre ells Aristarc, per determinar la magnitud de l'any solar (Copérnico, 1987: 151-154, 162-169 i 183-187).

Encara que Aristarc és reconegut com un astrònom, en la seva època va ser anomenat el «matemàtic», i va ser citat com un dels pocs homes que gaudien d'un profund coneixement de totes les branques de la ciència: geometria, astronomia, música... Així Vitruvi (s. I aC) el menciona en aquest sentit en la seva obra *De Architectura* (35-25 aC):

> Els que van rebre de la naturalesa tant talent, perspicàcia i memòria, que poden adquirir perfectament la Geometria, l'Astrologia, la Música, i altres disciplines, passen els límits d'arquitectes i es fan Matemàtics; amb el qual poden fàcilment gaudir d'aquestes ciències, participant així del coneixement de moltes altres. Però rares vegades es veuen tals subjectes, com en altres temps ho van ser Aristarc de Samos, Philolao i Architas de Tarento, Apoloni de Perga, Eratóstenes de Cyrene, i Arquimedes i Scopínas de Siracusa:

4. A part de les biografies clàssiques com la de Sthal (1971) del DSB, Wall (1975) ha publicat un article sobre la historiografia d'Aristarc de Samos.

5. Recentment Maeyama (1984) i Goldstein & Bowen (1991) han publicat articles on es descriuen les precises observacions dels estels realitzades pels astrònoms Timocaris, Aristil·lo i Aristarc, en el Museu d'Alexandria.

> els quals van deixar a la posteritat moltes invencions orgàniques i gnomòniques, trobades i explicades per càlcul numèric, i raons naturals.[6]

Que Aristarc era un geòmetra molt capaç, queda provat en el treball d'astronomia que ens ha llegat. A més, Aristarc és sobretot conegut com l'«antic Copèrnic». Hi ha unanimitat en afirmar que Aristarc va ser dels primers en presentar la hipòtesi heliocèntrica. Arquimedes, contemporani seu, en un passatge de la seva obra *Arenari* (216 aC) afirma que Aristarc suposava que les esferes de les estrelles i el Sol romanien en l'espai sense moure's i que la Terra girava al voltant del Sol,

> Ara bé tu recordes que pel terme *món* la majoria dels astrònoms designen l'esfera que té per centre el centre de la Terra i per radi la recta compresa entre el centre del Sol i el centre de la Terra, ja que ho hauràs après en les demostracions que escriuen els astrònoms. Tanmateix, Aristarc de Samos ha publicat algunes hipòtesis de les quals es dedueixen pel món dimensions molt més grans que les que acabem de mencionar. Efectivament, suposa que les estrelles fixes i el Sol resten immòbils, que la Terra gira al voltant del Sol sobre una circumferència de cercle, ocupant el Sol el centre d'aquesta trajectòria, i que l'esfera de les fixes, que s'estén al voltant del mateix centre que el Sol, té una mida tal que la raó del cercle sobre el que se suposa que la Terra gira, respecte a la distància de les estrelles fixes és comparable a la raó del centre de l'esfera respecte a la seva superfície. (Archimède, 1971: 135)

En aquest sentit també el cita Plutarc (ca. 46-125) en el seu llibre *Obres Morals,* més conegut com Moralia 923 A, en un tractat anomenat «Sobre la cara visible de la Lluna»:

> ...Oh Senyor, senzillament no ens acuseu d'impietat com Cleanthes que va creure que els grecs haurien d'haver presentat una acció per impietat contra Aristarc de Samos, sobre la base que estava desplaçant la Terra de l'Univers, perquè va intentar explicar els fenòmens suposant que els cels estan quiets mentre que la Terra gira al llarg de l'eclíptica i al mateix temps està girant sobre el seu propi eix. (Chermiss & Helmbald, 1957: 55)

---

6. «*Los que recibieron de la naturaleza tanto talento, perspicacia y memoria, que puedan adquirir perfectamente la Geometría, Astrología, Música, y demás disciplinas, pasan los límites de architectos, y se hacen Matemáticos; con lo cual pueden fácilmente disputar de estas ciencias, hallándose apercibidos con el conocimiento de otras muchas. Pero raras veces se ven tales sujetos, como en otros tiempos lo fueron Aristarco Samio, Philolao y Architas Tarentinos, Apolonio Pergéo, Eratóstenes Cyreneo, y Archimedes y Scopínas Siracusanos: los cuales dexaron a la posteridad muchas invenciones orgánicas y gnomónicas, halladas y explicadas por cálculo numérico, y razones naturales.*» Aquesta descripció es troba en el Capítol I del primer llibre de l'obra *De Architectura* titulat «De la esencia de la Arquitectura» (Vitruvio, 1787: 8).

Malgrat aquestes referències, Aristarc en la seva obra *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* no presenta la hipòtesi heliocèntrica. És probable que aquesta hipòtesi li vingués suggerida en comprovar, en aquesta obra, que el Sol és molt més gran que la Terra i la Lluna i que es troba molt més lluny de la Terra que la Lluna.

Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna. El text

L'obra *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*, segons explica Pappus, es trobava en un recull de textos anomenat *Petita Astronomia* juntament amb l'*Òptica* i els *Fenòmens* d'Euclides, les *Sphaericae* de Teodosio, *Sobre l'esfera en moviment* d'Autolico de Pitania i altres (Pappus, 1982: Vol. 2, 369).

La col·lecció de textos de la *Petita Astronomia* constituïa un curs d'introducció a la gran astronomia que, de fet, estava representada per l'obra *Almagest* de Ptolemeu. Tots aquests textos es trobaven escrits en grec i en àrab.

Una traducció del grec a l'àrab la va fer Luqa al-Balabakki que va morir el 912. Més tard, Nasir Al-din Al-Tusi (1201-1274) va fer una recensió de tots els llibres de *Petita Astronomia*. La primera edició de l'obra va ser una traducció llatina de George Valla el 1448 (amb una segona edició a Venècia el 1498) i, a partir d'aquesta data, es van succeir diverses traduccions, la llatina de Federico Commandino (1572), una edició grega de John Wallis (Oxford, 1688), una edició grecollatina de Fortia d'Urban (París, 1810), seguida per una traducció francesa del mateix autor el 1823 i a Oxford, el 1913, una edició grega amb la traducció anglesa de Thomas Heath. Aquesta és una traducció anglesa realitzada a partir d'un manuscrit grec del Vaticà, del text de Wallis i de la traducció francesa de Fortia d'Urban.

L'any 2007 s'ha publicat la primera traducció castellana d'aquest text clàssic del 230 aC. S'ha fet la traducció emprant l'edició llatina de Commandino i l'edició grecoanglesa de Heath. El text grec que apareix en la traducció de Heath ha estat emprat pel professor Joaquín Ritoré per revisar la traducció castellana. Per il·lustrar les proposicions s'han reproduït les figures que apareixen a l'edició llatina de Commandino que, en alguns casos, presenten lletres diferents del text grec publicat per Heath. Per la traducció dels comentaris de Pappus de la seva *Col·lecció Matemàtica* hem emprat la traducció francesa de Paul ver Eecke de 1982, revisant-la amb el text llatí de Commandino i amb la traducció anglesa de Heath.

Els objectius de la traducció són dos: per una banda, aportar un text que pugui ser útil per als investigadors en història de la ciència, per als matemàtics, per als astrònoms i per als amants de la ciència en general i, per altra banda, contribuir a la difusió d'una obra que permetrà conèixer millor la història de l'astronomia. De fet, és una de les poques obres clàssiques que ens ha arribat a nosaltres amb totes les proposicions, il·lustracions i demostracions.

Amb aquests objectius *in mente* hem procurat ser fidels al text però a la vegada ens hem permès algunes llicències per fer-lo més comprensible. Així, per exemple, hem afegit alguns connectors quan el text ho requeria. Per expressar els càlculs hem conservat l'estil retòric d'Aristarc, però hem afegit a peu de pàgina les operacions corresponents a aquests càlculs. Encara que Aristarc en el text grec no cita les seves fonts, ens ha semblat útil per al lector citar aquelles en les quals, al nostre entendre, podria haver-se basat per al desenvolupament de les demostracions, quasi sempre els *Elements* d'Euclides. Respecte a l'estil literari, atès que a vegades es podia optar per diverses opcions de traducció, hem triat la que, al nostre entendre, s'aproximava més al lector dels nostres dies, assenyalant a peu de pàgina l'expressió literal original.

Figura 1. Portada de la traducció castellana.

El llibre que conté la traducció (vegeu la portada a la figura 1) consta d'un pròleg del professor Cándido Martín, director del Secretariat d'Extensió Universitària de la Universitat de Cadis; d'una introducció on analitzo el contingut matemàtic de l'obra; de la meva traducció castellana amb notes de l'obra d'Aristarc; de la meva traducció castellana del fragment que tracta de l'obra d'Aristarc de la *Col·lecció Matemàtica* de Pappus, i d'un facsímil de la traducció llatina de l'obra d'Aristarc de Commandino (1572) que es troba al Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando.

Contingut de l'obra *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*

Una valoració integral d'aquesta obra d'astronomia ha de considerar l'estreta relació que van tenir els inicis de l'astronomia amb els orígens de la trigonometria,[7] aspecte, aquest, que contribueix a la seva millor comprensió. En el text, Aristarc es planteja problemes de geometria plana tallant les esferes del Sol i de la Lluna en cercles màxims. Per resoldre els problemes geomètrics, recorre a relacions, considerades avui com a trigonomètriques, entre angles i costats d'un triangle. Els angles els expressa com a fraccions d'angle recte i escriu les raons trigonomètriques com a raons entre els costats dels triangles; així pot determinar les cotes superiors i inferiors del valor que busca. Les proposicions geomètriques que Aristarc empra es troben majoritàriament en els *Elements* d'Euclides. La teoria de proporcions d'Eudoxe del llibre V dels *Elements* és utilitzada constantment i les seves propietats d'invertir, alternar, compondre i multiplicar són aplicades tant per a proporcions d'igualtat com de desigualtat. Aristarc es basa també implícitament en altres relacions, que per a nos-altres són trigonomètriques, com si les conegués o les considerés trivials.

Aristarc parteix de sis hipòtesis sobre les mides i les distàncies als astres, i a través de divuit proposicions, demostra tres tesis. Les hipòtesis de les quals parteix es poden agrupar en dos blocs: un per a les tres primeres, que són descriptives, i altre per a les tres restants, que són a més quantitatives. El contingut de les tres primeres podríem enunciar-lo així: la primera afirma que la Lluna rep la seva llum del Sol, la segona explica que la Terra representa el centre de l'esfera en la qual es mou la Lluna, i la tercera ens descriu que el cercle màxim que delimita les parts de foscor i claredat en la Lluna està en el camp de visió del nostre ull. Aquestes hipòtesis, doncs, no aporten cap angle, cap mesura, sinó que descriuen les posicions dels astres. Les altres tres hipòtesis proporcionen mesures obtingudes probablement per observació. Així, la quarta implica que quan la Lluna forma angle recte amb el Sol i la Terra, l'angle de visió de la Lluna des de la Terra és de 87º, ja que l'altre angle del triangle rectangle mesura una trentena part (1/30) d'un quadrant (90º), és a dir, 3º; la cinquena ens proporciona la grandària de l'ombra de la Terra, que és dues vegades la Lluna, i la sisena i última ens explica que la Lluna és vista des de la Terra, formant un con, amb un angle de 2º, que és una quinzena part d'un signe del zodíac (30º).

7. El meu interès per l'obra d'Aristarc prové d'un projecte, del qual sóc la investigadora principal, sobre els orígens de la trigonometria. Aquest estudi té com a objectiu seleccionar textos històrics per utilitzar a l'aula i així facilitar l'ensenyament de la trigonometria. El marc teòric d'aquest projecte va ser publicat a Massa (2003) i un resum sobre l'obra d'Aristarc i el dossier per a l'ensenyament es troben a Massa (2005).

Les tres tesis, que enuncia al principi del llibre, són: la primera, la distància al Sol des de la Terra és més gran que 18 vegades, però més petita que 20 vegades, la distància a la Lluna des de la Terra; la segona, el diàmetre del Sol està en la mateixa raó que el diàmetre de la Lluna, i la tercera, el diàmetre del Sol té respecte al diàmetre de la Terra una raó més gran que la de 19 a 3 però més petita que la de 43 a 6. Aquestes tres tesis les demostra en les proposicions núm. 7, núm. 9 i núm. 15, respectivament. A tall d'exemple, analitzarem la demostració de la proposició núm. 7, que és el pilar d'aquesta obra, ja que les altres dues tesis es basen en el resultat demostrat en aquesta proposició.

La proposició núm. 7 afirma que la distància al Sol des de la Terra és més gran que 18 vegades, però més petita que 20 vegades la distància a la Lluna des de la Terra [Aristarco, 2007: 49-53]. Aristarc construeix (vegeu la figura 2) un triangle rectangle amb vèrtexs en els centres de la Terra (B), de la Lluna (C) i del Sol (A) amb angles donats, o sigui coneguts, per observació. Com que la Lluna se'ns mostra partida en dues, l'angle BCA és recte, l'angle ABC és de 87º (per observació) i el CAB és de 3º. De fet, demostra que:

$$1/18 > \text{sinus } 3^{\circ} = CB : AB > 1/20,$$

sent CB la distància Lluna-Terra, AB la distància Sol-Terra i interpretant aquí la raó de les distàncies com el sinus de l'angle complementari al comprès entre elles.

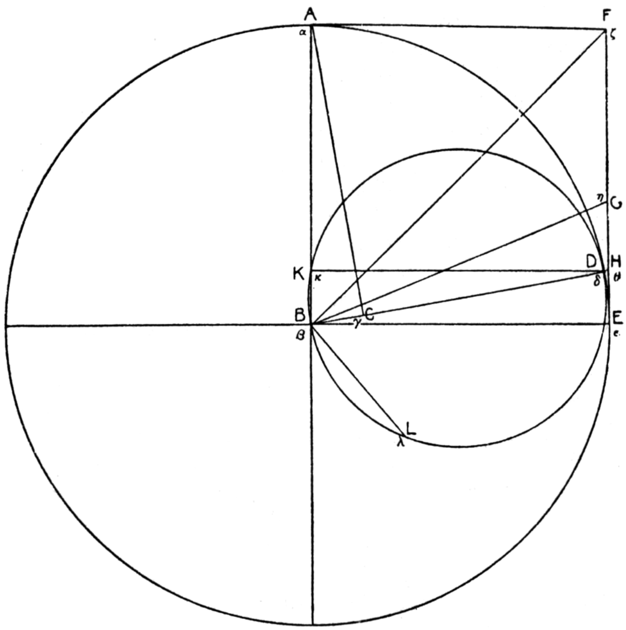

Figura 2. Figura corresponent a la proposició núm. 7 (Aristarco, 2007: 109).

Primer demostrarem la primera desigualtat: 1/18 > CB : AB o sigui AB > 18CB.

Aristarc empra quatre estratègies matemàtiques en la demostració de la primera desigualtat. Traslladar el problema del triangle Sol-Terra-Lluna a un triangle semblant construint una circumferència adequada; utilitzar, com si fos trivial, la relació entre les tangents (expressió actual) i els angles (tg α : tg $\beta > \alpha : \beta$, amb α, β angles del primer quadrant); emprar la proporció establerta entre els segments que determinen la bisectriu d'un angle d'un triangle i els seus costats i, l'última, aproximar l'arrel de 2 per 7/5. Al final Aristarc trasllada el resultat obtingut en el triangle semblant, al triangle ABC inicial, Sol-Terra-Lluna i conclou que AB > 18 CB. Veiem el desenvolupament de la demostració.

Sigui A el centre del Sol; B, el centre de la Terra, i C, el centre de la Lluna quan se'ns mostra partida per la meitat, llavors CB representa la distància a la Lluna des de la Terra i AB representa la distància al Sol des de la Terra. Per la hipòtesi núm. 4, l'angle BAC és 3º, llavors l'angle ABC que mesura l'allunyament de la Lluna al Sol és 87º, ja que BCA és recte. Tot seguit Aristarc dibuixa una circumferència de centre B i radi AB i estudia el problema en BHE (primera estratègia), triangle semblant construït de costats perpendiculars al donat, o sigui que l'angle DBE val 3º. A més completa el quadrat de costats AB, BE amb els costats AF i FE.

Sigui doncs l'angle FBE igual a 45º i l'angle GBE la meitat, o sigui 90/4. Fent la raó entre els dos angles GBE i DBE, que val 3, dóna 15 és a 2.

Diu Aristarc que (segona estratègia), com que sabem que la raó entre els costats oposats a aquests angles és més gran que la raó entre ells, podem escriure que:

GE : HE > (GBE) : (DBE) = 15 : 2.

Ara aplicant el Teorema de Pitàgores al triangle isòsceles (BE = FE) format per la meitat del quadrat es compleix que: $FB^2 = 2\ BE^2$. A continuació aplica proporcions als triangles semblants (tercera estratègia), arribant a la conclusió que $FG^2 = 2\ GE^2$.

L'estratègia que usa tot seguit és utilitzar la raó 50 : 25 = 2 > 49 : 25 (quarta estratègia). Llavors escriu: $FG^2 : GE^2 = 2 > 49 : 25$. Traient l'arrel quadrada queda FG : GE > 7 : 5. Component la raó (*componendo*), FG + GE = FE (Euclides, 1956: 114-115) resulta

FE : GE > 12 : 5 = 36 : 15.

Però com que abans havia demostrat que GE : HE > 15 : 2, fent el producte de les dues raons (*ex aequali*), FE : GE amb GE : HE, resulta FE : HE > 36 : 2 = 18 : 1.

O sigui que FE > 18 HE, però com que FE = BE llavors BE > 18 HE. Sabem també que BH que és la hipotenusa és més gran que BE que és un catet, llavors BH > 18 HE.

Ara escriu aquest resultat en el triangle semblant a aquest, és a dir, la demostració que ha fet en el triangle BHE l'expressa en el triangle ortogonal ABC mitjançant la proporció: BH : HE = AB : CB i conclou que AB > 18 CB. O sigui que la distància al Sol des de la Terra (AB) és més gran que divuit vegades la distància a la Lluna des de la Terra (CB).

Per a la segona desigualtat (AB < 20CB), Aristarc treballa també amb el triangle semblant anterior i construeix una nova circumferència prenent la hipotenusa com a diàmetre. Utilitza el costat d'un hexàgon inscrit en la circumferència per relacionar el seu arc de circumferència amb el de la corda determinada pel costat oposat a l'angle de 3º. En aquest cas té en compte que l'angle inscrit val la meitat de l'arc que abasta i així pot establir una proporció de desigualtat entre els arcs de circumferència i les cordes. Destaquem que de nou està suposant certa una relació trigonomètrica entre els angles i els seus sinus ($\alpha : \beta > \sin \alpha : \sin \beta$, con a, b angles del primer quadrant). Novament trasllada el resultat obtingut en el triangle semblant al triangle ABC inicial, Sol-Terra-Lluna, i conclou que AB < 20 CB.

Reflexions finals

El text constitueix una col·lecció coherent de proposicions, amb una descripció correlativa de les idees que vol mostrar, tenint sempre presents els seus objectius, és a dir, calcular les mides i les distàncies dels astres. Les proposicions constitueixen exercicis matemàtics amb operacions entre raons, amb construccions geomètriques singulars que ens mostren la gran qualitat d'Aristarc. És un text ric i ben estructurat i, al nostre entendre, les seves demostracions són impecables pel que fa al rigor.

Tanmateix el rigor en el seu raonament no va ser acompanyat d'observacions correctes, així Aristarc va observar un angle de 87º, quan en realitat és quasi de 90º. Pappus, en el seu comentari (que es troba traduït a Aristarco, 2007: 73-76), reivindicant aquesta obra, explica que Aristarc diu que es dedueixen aquestes mides de les seves suposicions, llavors evidentment si fossin unes altres suposicions serien uns altres resultats.

A més, l'obra d'Aristarc conté demostracions, com les que hem analitzat, que serveixen per a l'ensenyament de la trigonometria. El text permet remarcar fonamentalment dues idees: l'aplicació de la trigonometria al càlcul de distàncies i el lligam de la trigonometria amb la seva eina base: la geometria. Més de 2.000 anys després, els procediments d'Aristarc segueixen sent en certa manera útils.

Bibliografia

ARCHIMÈDE (1971), *Des spirales, De l'équilibre des figures planes, L'arénaire, La quadrature de la parabole*, trad. de C. Mugler, Paris, Les Belles Lettres.

ARISTARCO DE SAMOS (2007), *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*, trad. de M. R. Massa-Esteve, Cádiz, Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

BERRY, A. (1961, 1a ed. John Murray, 1898), *A Short History of Astronomy*, Nova York, Dover.

BOWEN, A. C.; GOLDSTEIN, B. R. (1994), «Aristarchus of Samos, Thales and Heraclitus on Solar Eclipses: An Astronomical Commentary on P. Oxy. 53.3710 cols. 2.33-3.19». *Physis*, **31.3**, 689-729.

COPÉRNICO, N. (1987), *Sobre las revoluciones*, trad. de C. Mínguez Pérez, Madrid, Editorial Tecnos S.A.

CHERMISS, H.; HELMBALD, W. (1957), *Plutarch's Moralia*, Londres, Cambridge-Mass.

DREYER, J. L. E. (1953, 1a ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1906), *A History of Astronomy from Thales to Kepler*, Nova York, Dover Publications.

EUCLIDES (1991-1994-1996), *Elementos. Vol. 1, libros I-IV.* Int. de Luis Vega. Trad. y notas de M. L. Puertas Castaños, Madrid, Gredos. *Vol. 2, libros V-IX*. Trad. y notas de M. L. Puertas Castaños, Madrid, Gredos. *Vol. 3, libros X-XIII.* Trad. y notas de M. L. Puertas Castaños, Madrid, Gredos [edició anglesa HEATH, T. L. (ed.) (1956), *The Elements*, vol. 2, Nova York, Dover].

GOLDSTEIN, B. R.; BOWEN, A. C. (1991), «The introduction of dated observations and precise measurement in Greek astronomy», *Arch. Hist. Exact Sci.*, **43** (2), 93-132.

HEATH, T. L. (1981a, 1a ed. Oxford, Clarendon Press, 1913), *Aristarchus of Samos. The Ancient Copernichus*, Nova York, Dover Publications.

HEATH, T. L. (1981b, 1a ed. Oxford, Clarendon Press, 1921), *A History of Greek Mathematics*, I-II, Nova York, Dover Publications.

MAEYAMA, Y. (1984), «Ancient stellar observations: Timocaris, Aristilo, Hipparcus, Ptolemy –the date and accuracies». *Centaurus*, **27** (3-4), 280-310.

MASSA-ESTEVE, M. R. (2003), «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de les matemàtiques», *Biaix*, **21**, 4-9.

MASSA-ESTEVE, M. R. (2005), «L'Ensenyament de la trigonometria. Aristarc de Samos (310-230 aC)». A: GRAPI, P.; MASSA, M. R. (ed.), *Actes de la I Jornada sobre Història de la Ciència i Ensenyament «Antoni Quintana Marí»*, Barcelona, 95-101.

NEUGEBAUER, O. (1969), *The Exact Sciences in Antiquity*, Nova York, Dover Publications.

PAPPUS D'ALEXANDRIE (1982), *La Collection Mathématique*, 2 vol., trad. de P. V. Eecke, Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

PTOLEMY'S (1984), *Almagest*, trad. de G. J. Toomer, Nova York, Springer-Verlag.

PUIG PLA, C. (1996, 1a ed. 1993), *El geocentrisme i la física antiga*, Barcelona, Edicions UPC.

STHAL, W. H. (1971), «Aristarchus of Samos». A: GILLISPIE, C. C. (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, Nova York, 246-250.

TANNERY, P. (1990, 2a ed. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1930), *Pour l'histoire de la Science Hellène. De Thalès a Empedocle*, Paris, Éditions Jacques Gabay.

TANNERY, P. (1995-1996, 1a. ed. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1912-1950), *Mémoires Scientifiques*, 6 vols., ed. de J. L. Heiberg i H. G. Zeuthen, Paris, Éditions Jacques Gabay.

VITRUVIO (1787), *Los diez libros De Architectura de M. Vitruvio Polion*, trad. De J. Ortiz Sanz, Madrid, Imprenta Real.

WALL, B. E. (1975), «The Historiography of Aristarchus of Samos», *Studies in the History and Philosophy of Science*, **6**, 201-228.