

ESTRUCTURA I CONTEXT EN UNA COL·LECCIÓ DE PROBLEMES DE GEOMETRIA DEL SEGLE XVI: LES «DEMANDAS» DE JUAN PÉREZ DE MOYA

JOSEP M. NÚÑEZ ESPALLARGAS; JORDI SERVAT SUSAGNE
UNIVERSITAT DE BARCELONA.
jnunes@ub.edu; jservat@ub.edu

Paraules clau: *problemes matemàtics, geometria, Juan Pérez de Moya, segle XVI*

Structure and Context in a Collection of Geometry Problems of the 16th Century: the «demandas» of Juan Pérez de Moya

Summary: *At the paper we explained about the didactic utilization of old geometric problems in the mathematical education. An example of this question is studied in the formation of primary education teachers with the geometric «demandas» (problems) of Juan Pérez de Moya. We show how the structure and the context of these «demandas» are a reflection of the mathematical interests of the citizens in the 16th century. The mathematical resources used by Pérez de Moya in the resolution of the problems that he proposes allow to make a comment of the historical evolution of the concepts and basic methods of the mathematical science, through a comparison with the ones current methods. Finally, we point out how some of the problems picked up in this collection offer suggestions and ideas that they can be from interest for the teacher of mathematics.*

Key words: *mathematical problems, geometry, Juan Pérez de Moya, 16th century*

L'objectiu d'aquest treball és mostrar les possibilitats que ofereix la utilització didàctica de problemes extrets d'antigues col·leccions de textos matemàtics a l'aula de matemàtiques. Tot i que l'experiència que descriurem ha estat una activitat preparada amb alumnes de formació del professorat, en línies generals, i amb algunes modificacions, també pot ser útil en altres col·lectius d'alumnes, com els de secundària i batxillerat.

Amb freqüència fem ús dels recursos històrics a les nostres classes de didàctica de les matemàtiques; amb això pretenem que els futurs mestres coneguin, encara que només sigui superficialment, les principals etapes de l'evolució dels conceptes i els mètodes matemàtics bàsics. Per assolir aquest propòsit, no solament incloem les habituals referències amb comentaris històrics, sinó que plantegem i analitzem amb algun detall qüestions, problemes o desenvolupaments presos directament de textos antics.

En el cas que comentarem l'activitat es proposa en ocasió de l'estudi didàctic dels problemes geomètrics, quan ja s'han tractat i discutit les seves tipologies, els estils més usuals, les diferents estratègies resolutives i els contextos habituals, entre altres qüestions bàsiques.

Tot i que, per a aquest important tema del programa, presentem als futurs professors de primària exercicis presos de textos de diferents èpoques, els que aquí comentarem corresponen a la col·lecció més antiga que utilitzem. Concretament es tracta d'un conjunt de problemes geomètrics que Juan Pérez de Moya proposa en dues de les seves obres.

Abans de continuar, convé situar breument l'autor en la seva època, recordant alguns dels fets més destacats de la seva biografia. Juan Pérez de Moya va ser un notable humanista, professor de matemàtiques a la Cort i a la Universitat de Salamanca i autor de diversos llibres sobre filosofia, història i matemàtiques. Va néixer el 1513 a Santisteban del Puerto (Jaén) i va dur a terme els seus estudis a Salamanca i a Alcalá de Henares. Es va ordenar sacerdot el 1536, i al cap de poc temps es va fer càrrec d'una capellania a la seva terra natal. Devia ser una persona reservada i poc donada a la intriga, si jutgem pel que ell mateix escriu en una carta adreçada a un dels seus escassos amics: «paso la vida leyendo libros... no visito a nadie, ni conozco oidor ni caballero, si no a dos o tres personas del vecindario...» (*Epistolario Español*, 1917: 39). El 1590, aproximadament sis anys abans de la seva mort, va ser nomenat canonge de la catedral de Granada.

L'obra de Pérez de Moya resulta més interessant que la seva biografia. Tot i que la seva producció matemàtica és la que motiva la nostra atenció en aquest autor, hem d'assenyalar que fora d'aquest àmbit també és molt conegut per diferents obres filosòfiques i històriques, però especialment per la seva *Philosophia secreta*, una obra que intenta recuperar el record dels principals mites clàssics, grecs i romans, desposseint-los de l'aparença pagana, per mostrar el missatge o la doctrina moral que, segons el seu parer, amaguen i que els fa aptes per ser llegits amb diversió i també amb profit per part dels lectors cristians.

Però la major part dels escrits de Pérez de Moya estan dedicats a la matemàtica. Si bé la crítica científica rigorosa afirma, amb fonamentada raó, que no s'hi troben aportacions teòriques de rellevància, l'opinió dels historiadors de l'ensenyament de la matemàtica és ben

diferent, per a aquests l'obra matemàtica de Pérez de Moya és de notable interès, ja que és un autor que té l'extraordinària habilitat de fer accessibles al gran públic molts dels avenços que les ciències exactes havien assolit en la seva època, la qual cosa va permetre un millorament del nivell matemàtic de la societat en general, que els textos d'altres autors, més àrids i adreçats als iniciats en aquest saber, no podien aconseguir.

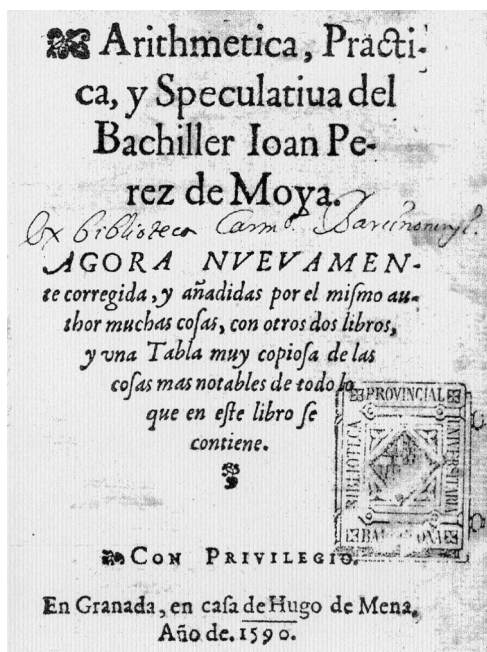


Figura 1.

De tots els textos matemàtics que Pérez de Moya va escriure el que, sens dubte, li va proporcionar major fama va ser l'*Arithmetica Practica y Speculativa*. Prova d'aquest èxit van ser les més de trenta edicions que en podem comptabilitzar des de 1562, any que va veure la llum per primera vegada, fins a finals del segle XVIII, quan va deixar de publicar-se. El mateix Simón Stevin va lloar aquest manual. En aquest manual, segons el seu títol anuncia, l'autor s'ocupa d'exposar els fonaments del càlcul aritmètic amb els símbols aràbics i els seus algorismes, aplicant-lo a nombroses situacions pràctiques del comerç i de les activitats econòmiques en general. Però, a més, aquest text conté dos capítols de notable importància històrica i que han ocupat l'interès dels estudiosos. En un s'introdueix l'àlgebra per primera vegada en un text d'aquestes característiques i en un altre s'empra la matemàtica recreativa en un famós diàleg per defensar la important funció de la matemàtica en la societat. Ambdós capítols havien estat ja publicats anteriorment per Pérez de Moya d'una manera independent, però va tenir el gran encert d'incorporar-los a la seva aritmètica, fent d'aquesta

obra un llibre nou, alhora que didàctic i entretingut. Tot això és ben conegut per l'especialista, però aquí utilitzarem les seves obres geomètriques, menys conegudes i estudiades, perquè no presenten el caràcter innovador que tenen les de caràcter aritmètic, ja que segueixen amb fidelitat major o menor els *Elements* d'Euclides.

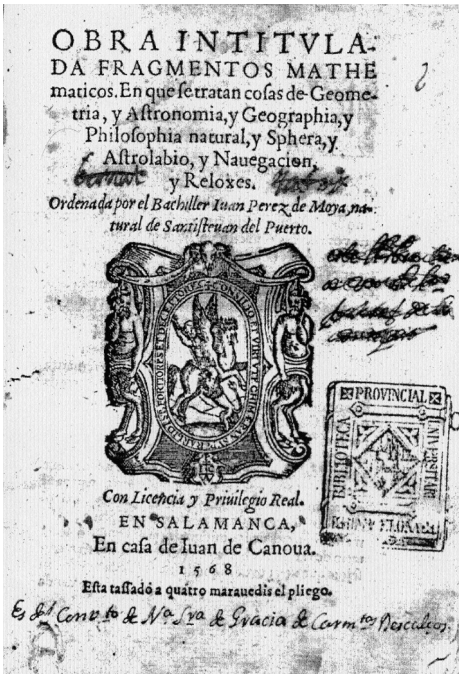


Figura 2.

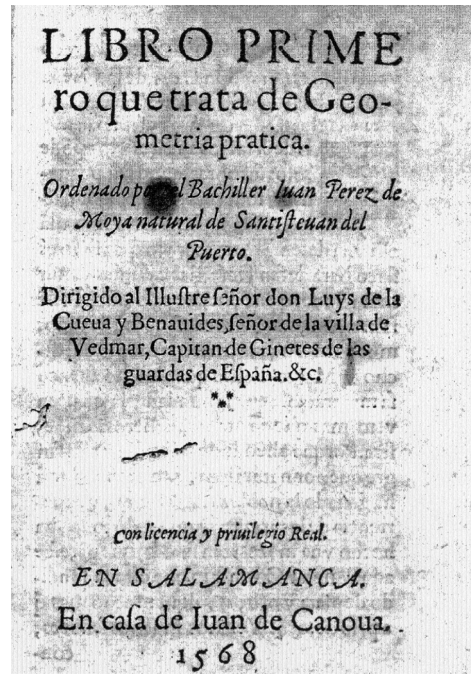


Figura 3.

Va publicar també Pérez de Moya, a més de l'obra que acabem d'esmentar, uns *Fragmentos Mathematicos* (1567-1568), en dos volums, i un *Tratado de Mathematicas* (1573), en tres, que no van arribar a aconseguir l'extraordinari èxit de la seva *Arithmetica*. En aquestes dues obres, hi trobem tractada l'aritmètica i la geometria junt amb altres sabers que, en l'època, anaven també associats a les matemàtiques. En concret, el Llibre I dels *Fragmentos* i el II del *Tratado* s'ocupen de la geometria. En aquests llibres, el seu autor desenvolupa la matèria amb la mateixa claredat expositiva i didàctica que en tots els seus escrits, i reuneix al final d'ambdós llibres sengles col·leccions de «demandas» o problemes pràctics, on el lector pot assajar els coneixements geomètrics assolits a les pàgines anteriors. La major part dels problemes es refereixen a qüestions relacionades amb el càlcul d'àrees i de volums de figures i cossos geomètrics.

Per a aquells que puguin estar interessats en les obres citades, fem l'observació que hi ha edicions d'aquests llibres en el fons antic de la Biblioteca de la Universitat de Barcelona, Secció Reserva, que ens ha facilitat gentilment l'obtenció de còpies de les seves pàgines.

Quan el grup amb què es treballa és avançat o ens trobem en un seminari més especialitzat ens agrada presentar directament les còpies del text original del segle XVI. Aquest procedir ens permet fer alguns comentaris sobre els caràcters tipogràfics de l'època, l'ús d'abreviatures o l'aparició de paraules o termes desconeguts o en desús en l'actualitat. El mateix terme «demanda» és un sinònim de problema. També són interessants els girs i expressions emprats per Pérez de Moya, ja que amb la seva riquesa són un contrapunt del vocabulari tan restringit emprat en els moderns textos escolars. Òbviament, amb altres alumnes poden o han de presentar-se versions més o menys simplificades, segons el criteri del professor.

Tornant a les dues obres que són objecte de la nostra selecció direm, en primer lloc, que el seu autor aprofita el material d'una per a l'altra, la qual cosa no ens pot estranyar, ja que amb prou feines cinc anys separen l'aparició d'ambdós textos. De les 28 demandes que trobem en els *Fragmentos*, 26 es reproduïxen gairebé idènticament al *Tratado*, i se'n rebutgen dues que plantegen situacions inverses a d'altres ja exposades. Com que en el *Tratado* trobem trenta-una demandes, això significa, òbviament, que Pérez de Moya afegeix cinc problemes nous en aquesta obra. Hi ha, a més, altres diferències entre ambdues col·leccions: la més notable és l'estructuració. Així com en els *Fragmentos* no sembla haver-hi un ordre definit, llevat del d'agrupar les demandes per la similitud del plantejament, al *Tratado* l'autor estableix una classificació en tres categories seguint un criteri matemàtic: càlcul de distàncies o altimetria (3 demandes), d'àrees o planimetria (17 demandes) i de volums o estereometria (11 demandes).

Resulta molt instructiu per als alumnes als qui es presenten aquestes col·leccions identificar alguns dels aspectes de més relleu que mostra una primera i superficial lectura. El primer d'aquests aspectes és la vinculació del context amb la realitat que presenten la majoria de les demandes plantejades (Núñez, 1995). Els contextos que apareixen, si els col·loquem en ordre de major a menor freqüència, són: sitges o graners on s'emmagatzemen els cereals, bótes o recipients per recollir el vi o l'aigua, construcció de murs o parets, càrrega suportada per les carretes, cenyidors per lligar feixos d'herba o llenya, sacs o costals per transportar grans o altres matèries, teles per a la confecció de vestits i cera per a la fabricació d'espelmes. En els cinc problemes que s'afegeixen al *Tratado* s'insisteix en el tema dels costals i se n'introdueix un de nou: els camps de cultiu. Tot això ens ve a mostrar les preocupacions més corrents d'una societat bàsicament agrària, a la qual precisament adreçava Pérez de Moya la seva geometria, de la mateixa manera que la seva aritmètica va enfocada a la compra-venda de productes, als complexos canvis entre els sistemes de mesures vigents als diferents llocs i a qüestions comercials en general.

Si ara ens endinsem en l'estil matemàtic de les demandes hi ha un fet que destaca i que no deixa de sorprendre els nostres alumnes: l'alt percentatge de problemes que podem denominar de construcció geomètrica. En ells es demana, per exemple, a partir d'un recipient (sitja, bóta, costal, etc.) d'una determinada forma i dimensions, construir-ne un altre de forma igual o diferent, però amb àrea o volum doble o triple. Buscant l'explicació a aquest fet, que no té correspondència amb el tipus de problemes geomètrics que solen plantejar-se en els textos

escolars actuals, suggerim donar una breu mirada a la situació econòmica, en general, i agrària, en particular, de la societat espanyola de finals del segle XVI. El notable increment de població que la caracteritza ve acompanyat i potenciat pel desenvolupament extensiu i intensiu del cultiu dels cereals i el cep. En la *Relación histórico-geográfica de los pueblos de España*, estudi encarregat per Felip II en l'últim terç del segle XVI, i que es conserva manuscrit en set volums a la Biblioteca d'El Escorial, es posa de manifest com en l'ancestral conflicte entre l'agricultor i el pastor, que durant l'edat mitjana i en el regnat d'Isabel I s'havia decantat clarament a favor del segon, amb Carles I i, sobretot, amb Felip II en sortia vencedor l'agricultor (Salomón, 1973: 68). També cal recordar que, a més de l'augment de població, les necessitats del nou mercat americà obligaven a augmentar la producció agrària. Aquest fet va ser especialment patent a Andalusia, on la puixança econòmica de Sevilla va fer que molts dels grans propietaris de terres invertissin en l'agricultura (Elliott, 1970: 147). Tot això havia de repercutir en la construcció i ampliació dels dipòsits i sitges per emmagatzemar els excedents de la producció. Creiem, per tant, que Pérez de Moya, en les seves demandes, no fa res més que donar resposta a una necessitat pràctica que es feia sentir en gran part del regne i especialment a les regions meridionals, que tan bé coneixia.

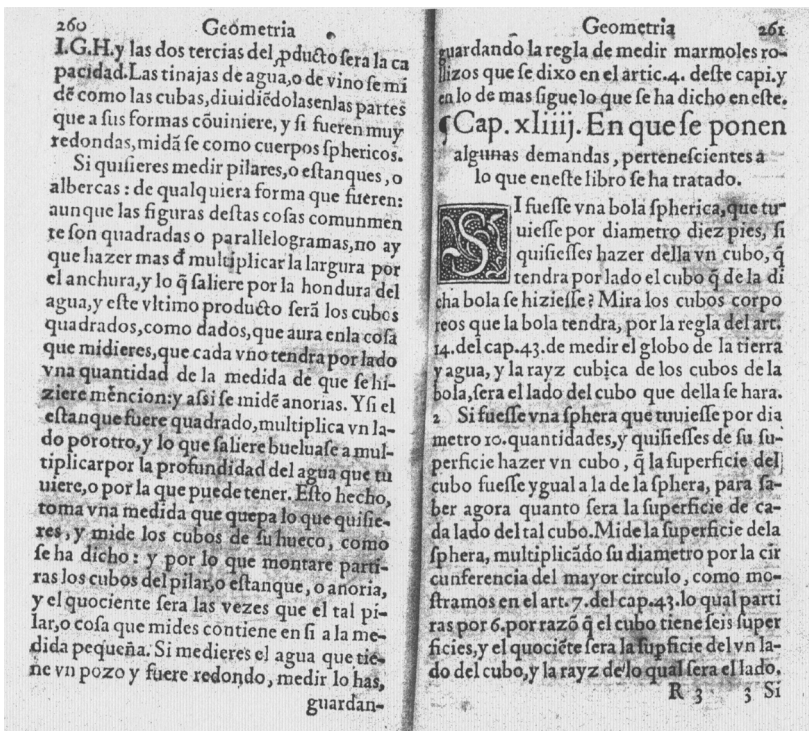


Figura 4.

La col·lecció de problemes geomètrics que estem comentant es pot adscriure també, en bona part, a la tipologia dels problemes de mesures, és per això que la presència dels sistemes d'unitats té aquí un paper molt important. Al lector modern, acostumat a les unitats del sistema mètric decimal i a la comoditat de les expressions decimals, el sorprèn la complexitat dels càlculs derivada de l'enrevessada i variada casuística dels antics sistemes d'unitats. Aquesta comparació és didàcticament útil, en especial si qui la fa és un futur professor de primària, per comprendre de primera mà els múltiples avantatges que aporta la unificació dels sistemes de mesura. Convé que puntualitzem que el nostre autor evita, en el desenvolupament de les solucions de les demandes, entrar en el detall dels canvis d'unitats, ja que, encara que no ho explicita, considera, sense cap dubte, que es tracta d'una qüestió ja coneguda pels lectors, per haver estat tractada àmpliament en la seva aritmètica. D'aquesta manera, intenta separar, amb una visió molt pedagògica, el problema geomètric que està analitzant del que seria una qüestió estrictament aritmètica, que ha de ser considerada d'una manera independent. A més, en moltes ocasions proposa en l'enunciat de la demanda unitats genèriques (parla de «*medidas*») que faciliten la resolució del problema geomètric, aïllant-lo de l'aritmètic.

Un aspecte que destaquen els nostres alumnes del llibre, en ser analitzat, és l'ús dels recursos de càlcul utilitzats en les demandes de Pérez de Moya. Per assenyalar només els més evidents, esmentarem, en primer lloc, la ubiqüitat de les fraccions, determinada pel desconeixement dels nombres decimals. Encara que, en teoria, tots sabem operar amb fraccions, quan hem de posar aquest coneixement en pràctica, sense poder utilitzar un altre recurs, ens adonem dels avantatges que ofereixen les expressions decimals en el càlcul.

Un altre recurs que el lector d'aquesta col·lecció troba a faltar és el del llenguatge algebraic, que permet simplificar i abreujar notablement l'escriptura, no solament de l'enunciat, sinó també de la resolució d'un problema. Aquí s'agraeix la ductilitat i fluïdesa lingüística de l'autor que intenta suavitzar la repetició tediosa de les descripcions. Notem que, si bé ja hem indicat una mica més amunt que Pérez de Moya és un dels primers en introduir en la seva *Arithmètica* un capítol dedicat a l'àlgebra, aquest concepte no s'utilitza fora d'aquest llibre. A les seves obres de geometria o d'altres matèries científiques l'àlgebra és completament ignorada.

Finalment, la col·lecció de demandes de Pérez de Moya ens resulta d'utilitat com a font d'inspiració d'activitats matemàtiques per fer a l'aula. Per exemple, la manera com aquest autor du a terme la determinació aproximada del volum d'una bóta, ens ha permès plantejar aquesta qüestió i analitzar els diferents enfocaments que admet aquest problema. Un altre exemple, també molt fructífer, és el càlcul estimatiu del volum ocupat pel munt que es crea sobre un recipient quan es pretén omplir-lo al màxim.

En conclusió, la utilització en l'ensenyament d'antigues col·leccions de problemes, com és el cas de la de Pérez de Moya, ens proporciona múltiples avantatges d'índole didàctica: permet obtenir informació indirecta sobre els interessos i preocupacions de l'època relacionades amb la matemàtica, comprendre millor l'evolució dels avenços teòrics i pràctics d'aquesta ciència, així com proporcionar-nos idees i suggeriments metodològics.

Bibliografía

ELLIOTT, J. H. (1970), *La España Imperial (1469-1716)*, Barcelona, Vicens Vives.

Epistolario Español (1917), Madrid, Biblioteca de Autores Españoles, Rivadeneyra. (Carta del bachiller Juan Pérez de Moya a Don Juan Vázquez del Mármol).

NÚÑEZ, J. M. (1995), «Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas. Una aproximación histórica», *Revista de Educación*, **306**, 293-314.

PÉREZ DE MOYA, J. (1567), *Obra intitulada fragmentos mathematicos: en que se tratan cosas de geometría y astronomía y geographia y philosophia natural y sphaera y astrolabio y nauegacion y relojes*, Salamanca, Juan de Canova, Libro *Primero*

(*que trata de la geometría practica*) (UB. Reserva 07 XVI-371-1).

PÉREZ DE MOYA, J. (1569), *Arithmética practica y speculatiua*, Alcalá de Henares, Andrés de Angulo (UB. Reserva 07 B-5/5/15).

PÉREZ DE MOYA, J. (1573), *Tratado de mathematicas: en que se contienen cosas de arithmetica, geometría, cosmographia y philophia natural: con otras varias materias necesarias a todas artes liberales y mecanicas...*, Alcalá de Henares, Juan Gracián. Libro Segundo (*Tratado de geometria practica y speculatiua*) (UB. Reserva 07 XVI-95-1).

SALOMÓN, N. (1973), *La vida rural castellana en tiempos de Felipe II*, Barcelona, Planeta.