# MATEMÀTICA CREATIVA? ELABORACIÓ DE RUTES MATEMÀTIQUES EN CENTRES EDUCATIUS

Antonio Israel Mercado Hurtado
Erundina Pérez Trigueros
José Juan Juárez Morgado
IES Sixto Marco (Elx)

## 1. Introducció

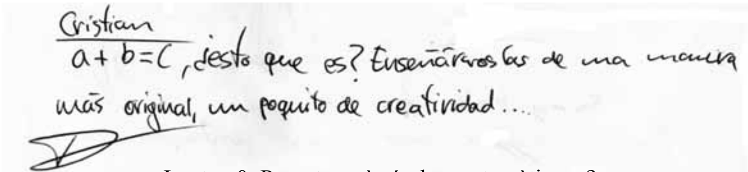
Si ens paràrem a pensar quantes matemàtiques existeixen en la nostra vida quotidiana, probablement quedaríem sorpresos per la quantitat i varietat d'aspectes matemàtics que ens envolten: l'hora prefixada al nostre despertador que ens avisa que el dia comença, la forma de l'enrajolat que trepitgem quan ens alcem del llit, el tipus d'envasos que usem per a desdejunar, la distribució dels semàfors que regulen el trànsit, la quantitat d'aliments que hem de digerir en qualsevol tipus de dieta, la informació que rebem a través de taules, gràfics, factures, etc.

En l'actualitat hi ha nombroses activitats on es plantegen una sèrie de qüestions matemàtiques mentre es du a terme un trajecte. Aquestes activitats van dirigides a conscienciar els participants sobre la realitat matemàtica que ens envolta. Són les anomenades *rutes matemàtiques*. Hi ha rutes matemàtiques per la casa, per la ciutat o, fins i tot, rutes matemàtiques comarcals. El desenrotllament d'aquestes depén del potencial matemàtic que tinga la zona en qüestió.

El fet d'estar envoltats de matemàtiques contrasta de forma molt cridanera amb la valoració que es fa d'aquesta ciència des d'un ampli sector de la població, i més concretament del col·lectiu estudiantil. Un centre educatiu és un lloc que es pot prestar a la realització d'una ruta matemàtica. Un aspecte important és l'interés intrínsec de l'edifici: es pot estudiar el plànol d'aquest, el tipus d'enrajolat que presenten les seues estances, les formes geomètriques que apareixen al pati, les diferents alçàries, àrees i volums dels mòduls que el constitueixen, etc. L'avantatge que presenta un centre educatiu és la possibilitat d'actuació per a crear una ruta matemàtica, convertint-se en un lloc amb unes potencialitats matemàtiques quasi il·limitades.

## 2. Creativitat en l'aula de matemàtiques?

Durant el curs 2008-09 l'IES Sixto Marco d'Elx va acollir l'exposició *El rostre humà de les matemàtiques*. Aquesta exposició itinerant realitzada per la Real Societat Matemàtica Espanyola (RSME) presenta en forma de caricatura als 30 matemàtics més influents de la història. Paral·lelament a aquesta activitat el Departament de Matemàtiques del centre va organitzar una sèrie d'activitats que van dinamitzar l'estada d'aquesta exposició. En una d'aquestes activitats es va preguntar al nostre alumnat la seua opinió sobre les matemàtiques. Les respostes van ser diverses, enriquidores i moltes d'elles requerien una reflexió profunda de la nostra tasca docent.




Imatge 0. Per a tu què són les matemàtiques?
Resposta d'un alumne de 3r d'ESO.

És possible la creativitat a l'hora d'ensenyar matemàtiques? *A priori* la tasca no ha de ser gens senzilla però segur que la creativitat és un bon vehicle per a aconseguir dos objectius plantejats des de fa temps pel grup de professors que impartim matemàtiques en l'IES Sixto Marco:

- Acostar la matemàtica al nostre alumnat.
- Acostar l'alumnat a la matemàtica.

Fruit d'aquestos fets i inquietuds sorgeix la creació d'una ruta matemàtica en el nostre centre.

## 3. Creació de rutes matemàtiques en centres d'educació secundària

Una ruta matemàtica en un centre d'educació secundària està composta per una sèrie d'espais matemàtics estables que sorgeixen optimitzant les característiques del centre. La quantitat d'aquestos espais i la temàtica tractada en ells depén dels interessos de l'equip educatiu que imparteix matemàtiques en aquest, així com de la idiosincràsia de l'edifici. Per a crear una ruta matemàtica només cal optimitzar les «possibilitats matemàtiques» dels diferents racons de l'institut.

Cadascun dels espais matemàtics estables respon a la consecució d'un projecte que s'executa en dos fases.

*1a fase: creació de l'espai matemàtic*. A cadascun dels espais que formen part de la ruta, sempre va associat un objecte matemàtic que ha de ser construït per un grup d'estudiants: un mural en una tàpia del centre, un mòbil que penge del sostre amb algun objecte matemàtic, una successió de fotografies que donen peu a treballar alguns conceptes, l'elaboració d'una maqueta que permeta treballar temes matemàtics associats, etc.

Assignar la realització de l'objecte matemàtic a un grup concret d'estudiants (coordinats pel professorat de matemàtiques) respon a la necessitat de fer-los partícips d'aqueix espai i canvia la posició del discent en el procés ensenyament-aprenentatge: passa de simple espectador a creador d'elements matemàtics. D'aquesta manera l'alumnat fa seu l'espai que serà creat. La realització de cadascun dels espais porta amb si un treball matemàtic que l'alumnat responsable del projecte ha de dur a terme. Aqueix treball canvia en funció de l'element que es va a crear i només serà realitzat per aqueix grup d'alumnes.

Normalment un bon moment per a dur a terme aquesta fase del projecte és durant la setmana cultural del centre o com a activitat extraescolar perquè la duració de l'execució d'aquesta pot allargar-se en el temps. Per l'envergadura que poden adquirir els objectes creats en els espais, la creació d'una ruta matemàtica en un centre és un projecte a mitjà termini.

*2a fase: utilització de l'espai matemàtic*. Una vegada creat un espai matemàtic estable, la utilització d'aquest es pot dur a terme en qualsevol moment i amb qualsevol grup del centre. Si l'espai així ho permet, es poden plantejar classes específiques fora de l'aula, donant lloc a treballs individuals o en grup. Els espais estables poden utilitzar-se com a llocs en què es dóna solució a un problema plantejat en l'aula, per a divulgar la matemàtica, enfocar-se a l'oci matemàtic o ser un espai en què es puga reflexionar sobre aspectes que no apareixen en el currículum oficial o també on es puga treballar el tractament d'errors que es produeixen amb una certa freqüència en un grup significatiu d'alumnat.

Quan en un centre hi ha diversos espais matemàtics és el moment d'utilitzar-los de forma conjunta per a programar activitats que facen que l'alumnat passe per cadascun d'ells. Aqueix és el moment d'engegar la ruta matemàtica en un centre educatiu.

## 4. La ruta matemàtica de l'IES Sixto Marco d'Elx

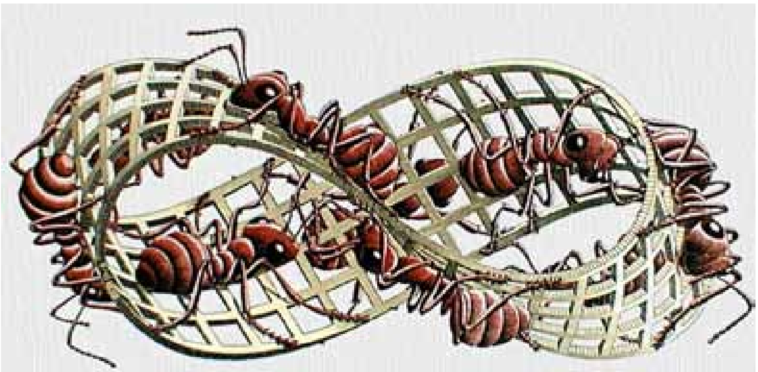
En l'IES Sixto Marco d'Elx portem diversos cursos creant la nostra ruta matemàtica. Pel seu especial interés divulgatiu hem procurat utilitzar les zones de pas per a situar alguns racons matemàtics. Altres espais utilitzats han sigut les tàpies del centre per a la creació de murals matemàtics. El tercer lloc en què hem centrat el nostre treball ha sigut en les aules temàtiques que gestiona el departament de matemàtiques.

A continuació es destaquen els espais matemàtics estables amb què comptem en l'actualitat, descrivint com s'han dut a terme i quin és el centre d'interés que es genera a partir d'ells.

### 4.1. Espai 1: la banda de Moebius. Matemàtiques i art

La matemàtica apareix relacionada amb els temes més insospitats. Un d'aquestos casos és la relació existent entre la matemàtica i la pintura. Hi ha molts punts en comú entre ambdues matèries, no obstant si haguérem de destacar un pintor que va plasmar en la seua obra conceptes matemàtics és el pintor holandés M. C. Escher.

Si prenem una tira llarga de paper i apeguem els extrems obtenim una superfície molt coneguda: un cilindre. Per a visualitzar aquest cilindre imaginem una llauna de refresc. Resulta evident que la llauna té dues cares. La cara interior, que està en contacte amb la beguda refrescant i la cara exterior que serà per on nosaltres agafarem la llauna. De la mateixa manera, el cilindre està limitat per dos corbes (circumferències) sobre les quals recolzar les tapes de la llauna: una per damunt que és on està l'anella d'obertura i l'altra per baix per a deixar la llauna sobre una taula. Què passaria si prenguérem una llarga tira de paper i apegàrem els extrems després d'haver donat mitja volta a un d'ells? El resultat és una Banda de Moebius. El pintor holandés M.C. Escher va plasmar aquest conjunt matemàtic en la seua obra *Formigues*.



Imatge 1: Cinta de Moebius (Formigues, M. C. Escher)

Va ser inventada pel matemàtic alemany A. F. Moebius i té unes característiques matemàtiques prou interessants: és una superfície tridimensional que té una sola cara i una única vora (partint d'una formiga es pot recórrer tota la banda d'un sol traç pel que no es pot discernir entre una part superior o inferior del conjunt de Moebius).

La banda de Moebius del nostre centre està penjada en una paret de l'escala. És un lloc de pas habitual dels alumnes i té suficient espai com perquè un grup d'alumnes puga congregar-se davall per a realitzar activitats relatives a ella (Granados: 2007).

Imatge 2: Cinta de Moebius de la ruta matemàtica.

### 4.2. Espai 2: el mural pitagòric. La importància de la demostració

Les demostracions sense paraules són dibuixos o diagrames que ajuden a veure perquè un resultat matemàtic és cert i, també, poden servir com a inspiració per a una demostració formal.

Crear un mural en què apareguen diverses demostracions sense paraules del teorema de Pitàgores es converteix en una activitat matemàtica de primer ordre. Existeixen més de 300 demostracions diferents d'aquest teorema. Alguna d'aquestes demostracions és anterior al propi matemàtic grec i inclús, Garfield, antic president dels EUA es va atrevir a donar la seua pròpia demostració.

El fet de crear un espai estable on apareguen demostracions d'aquest teorema respon a dos objectius fonamentals. El primer és tindre una ferramenta matemàtica útil que ens servisca per a la correcció d'errors molt comuns en un ampli nombre d'estudiants. El segon té a veure amb el fet que el nostre alumnat s'acoste al mètode de raonament deductiu amb què es justifiquen els resultats matemàtics. La manera d'aproximar-se és a través de l'ús de les demostracions formals.

El mural sobre el teorema de Pitàgores està compost per dues demostracions diferents. La primera és la dissecció de Perigal (s. XIX) i la segona és la descoberta en Xina en el text Txhou Pei Suan Txhing, en una època anterior a Pitàgores.

Imatge 3: Mural pitagòric de l'IES Sixto Marco (Elx)

### 4.3. Espai 3: l'omnipoliedre. Desenvolupament de la visió espacial

Un poliedre regular és un cos geomètric que tanca un volum finit, sent totes els seus cares polígons regulars d'un sol tipus. Existeixen només cinc poliedres regulars: tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre. L'omnipoliedre és la composició formada pels cinc poliedres regulars o sòlids platònics de manera que cadascun d'ells està inscrit en el següent.

En el nostre centre tenim un omnipoliedre estable, penjat del sostre del vestíbul. Aquest omnipoliedre ens serveix per a definir l'espai matemàtic en què treballarem els sòlids platònics. El treball amb els alumnes es du a terme amb un segon omnipoliedre desmuntable. Durant

Imatge 4: Alumnes construint l'omnipoliedre desmuntable.

el procés de muntatge d'aquest es treballen aspectes fonamentals en el desenvolupament del discent com és la visió espacial. D'altra banda el fet de fer matemàtiques manipulant un material es converteix en una activitat educativa de primer ordre.

### 4.4. Espai 4: mòbil arquimedià. La geometria que no apareix en el currículum

A partir de seccions dels poliedres regulars es poden obtenir altres poliedres anomenats *sòlids arquimedians*. Són poliedres formats per cares regulars de diversos tipus. Aquestos cossos geomètrics no apareixen ni en el currículum de secundària ni en el de batxillerat. No obstant el fet de situar un mòbil en una aula amb els 14 sòlids arquimedians respon a la necessitat d'ampliar la mirada matemàtica del nostre alumnat, en aquest cas des de la geometria.

### 4.5. Espai 5: espai catenari - espai Gaudí. Arquitectura i matemàtiques

L'arquitectura i les matemàtiques són dues disciplines que sempre han anat de la mà. Les matemàtiques que coneixien els

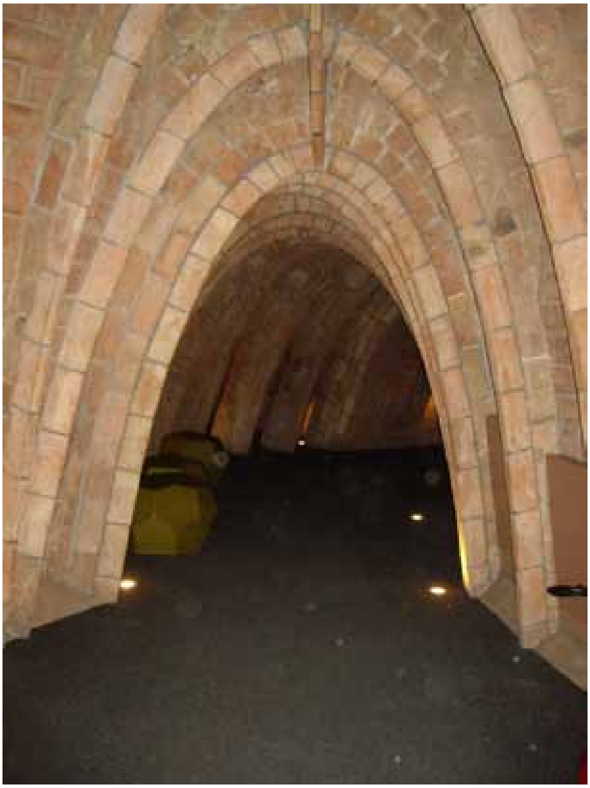
Imatge 5: Mòbil arquimedià ubicat en una aula del centre.

egipcis necessàriament van haver d'utilitzar-se en la construcció de les piràmides, els estudis en la proporció fets pels grecs apareixen en els seus edificis, etc. Aquesta relació històrica entre ambdues matèries arriba fins els nostres dies en l'obra modernista de Gaudí. L'arquitecte català utilitza dues ferramentes matemàtiques molt potents per a la construcció dels seus edificis: l'ús d'una corba estable, la *catenària*, i l'ús de superfícies corbes que es poden generar amb línies rectes, *les superfícies reglades*.

La *catenària* és la corba que descriu una cadena que està fixa pels seus dos extrems i no està sotmesa a altres forces distintes que el seu propi pes. Aquesta corba és estable i és utilitzada per l'arquitecte català en els arcs de La Pedrera ja que no necessitava contraforts. L'espai catenari està format per una planxa de metacrilat pegada a la paret sobre la qual se situa un llistó de fusta en què s'han clavats claus separats cada centímetre. En aqueix llistó podem penjar diferents cadenes que podran ser dibuixades sobre la planxa de metacrilat.

Les superfícies reglades són utilitzades per Gaudí ja que són superfícies corbes (característica essencial del modernisme) que es generen utilitzant rectes (els materials necessaris per a la construcció no difereixen dels clàssics).

L'últim espai que hem creat en la nostra ruta matemàtica fa referència a les maquetes invertides que utilitzava Gaudí per a la construcció dels seus edificis.



Imatge 6: arcs catenaris de La Pedrera

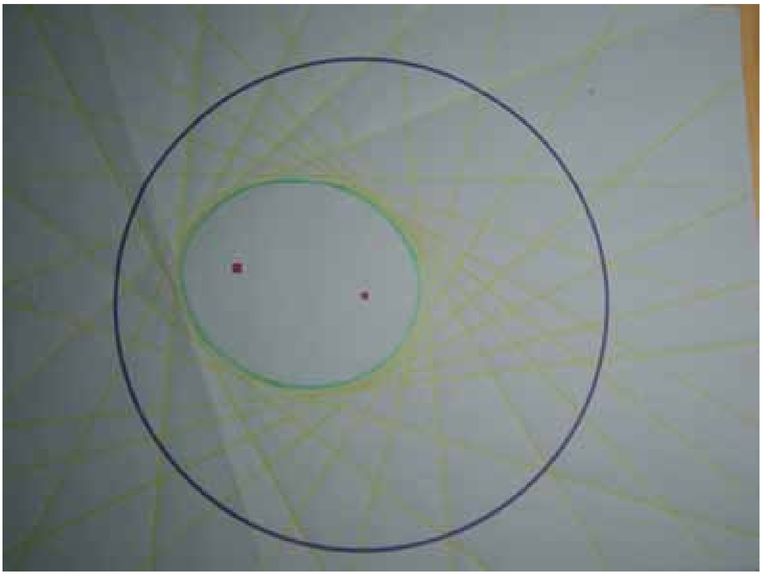
### 4.6. Espai 6: l'esponja de Menger. Espai de divulgació matemàtica

Un conjunt fractal és un objecte geomètric l'estructura bàsica del qual, fragmentada o irregular, es repeteix a diferents escales. Si intentàrem visualitzar el nostre sistema circulatori la imatge que possiblement obtindríem seria una xarxa de vasos sanguinis que arriben a qualsevol part del nostre cos ramificant-se a diferents escales. A més aqueixes ramificacions no podrien ocupar tot el volum del nostre cos ja que no quedaria «espai» per a teixits, òrgans, etc. Els conjunts fractals estudien precisament aqueix tipus de creixement reiteratiu, que presenta propietats tan interessants, com que omplin tota una superfície ocupant un volum molt xicotet.

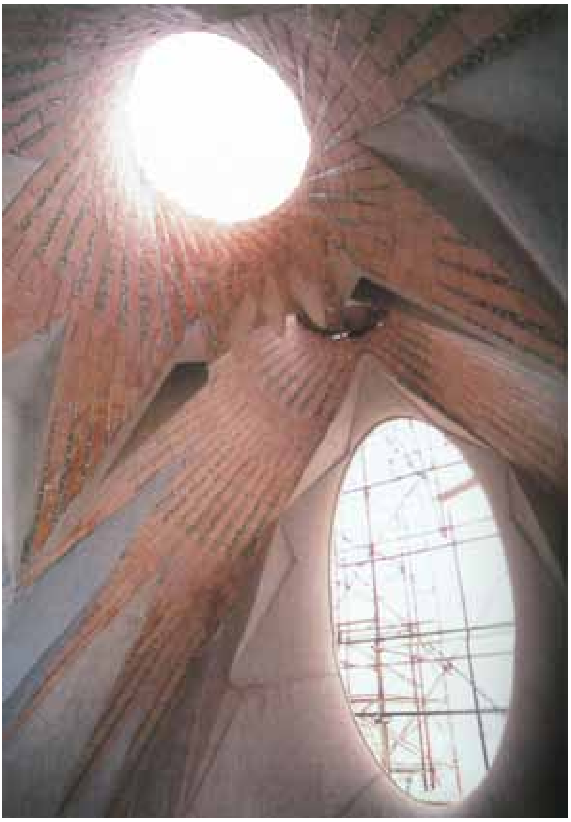
Un model fractal que té volum zero i àrea infinita és la «esponja de Menger». La seua construcció és molt senzilla partint d'un cub:

1) Es divideix cada aresta del cub en tres parts iguals El cub original queda dividit en 27 cubs més xicotets (igual que un

Imatge 7: alumna dibuixant catenàries



Imatge 8: construcció d'una corba (el·lipse) a partir de línies rectes.



Imatge 9: motiu de la cúpula de la Sagrada Família.

cub de Rubik). S'eliminen el cub central i el cub central de cada una de les cares.

2) Es repeteix el procés indefinidament amb cada un dels cub que van quedant.

La geometria fractal està fora dels aspectes matemàtics que es treballen en un centre de secundària. No obstant això, per les seues característiques, la geometria fractal està sent utilitzada en diferents camps per a buscar models matemàtics de creixement que responguen a característiques físiques i biològiques concretes: erosió del paisatge, creixement de tumors, evolució de borrasques, mesurament de costes, etc.

Una labor que s'ha de dur a terme des dels departaments de matemàtiques és la divulgació d'aquesta ciència. La geometria fractal és un camp molt interessant amb el que es pot desenrotllar aquesta tasca, d'ací la creació d'aquest espai en la nostra ruta matemàtica.

Imatge 10: espai catenari i maqueta invertida.

### 4.7. Espai 7: sèries numèriques. El concepte de l'infinit

És possible sumar una sèrie infinita de números i que el resultat siga 1? És possible sumar una quantitat infinita de números «xicotets» i que la suma siga infinita? El concepte matemàtic d'infinit no és un concepte senzill d'entendre. De fet en diferents camps de la matemàtica l'infinit pren diferents interpretacions. La creació d'un espai en què es puga treballar estos temes és necessària per la dificultat intrínseca que plantegen.

### 4.8. Espai 8: Porteria aleatòria. Com treballar tots els aspectes del currículum

El currículum oficial de matemàtiques en ESO és molt ampli. De fet la realitat demostra que hi ha aspectes que al llarg dels diferents cursos es treballen de manera molt succinta. És el cas de la probabilitat.

La porteria aleatòria és un espai estable on tots els anys es treballa la probabilitat en el nostre centre. Es tracta d'una porteria

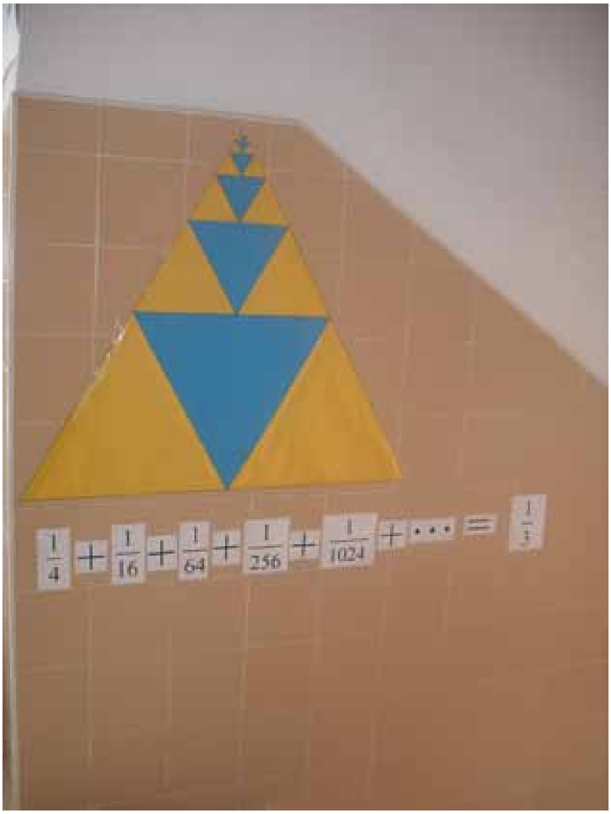
Imatge 11: Esponja de Menger de l’IES Sixto Marco.

dividida en diferents sectors. L’activitat fonamental que duem a terme en aquest espai és estudiar la possibilitat que al llançar una pilota sobre la porteria de manera aleatòria, aquesta impacte en cada un dels colors de la mateixa.

### 4.9. Espai 9: línia del temps. La importància de la història de les matemàtiques

Arquimedes, Apol·loni, Al-khowarizmi, Euler, Hilbert, Kovaleskaya, etc. Són noms d’eminents matemàtics i matemàtiques que han anat fent valuoses aportacions al llarg de la història d’aquesta disciplina. No sempre s’han resolt equacions de la mateixa manera, hi ha hagut èpoques històriques en què la matemàtica ha evolucionat més en alguns dels seus camps que en altres, existeixen en l’actualitat problemes que encara estan per resoldre i problemes que han tardat segles a ser resolts. Tots aquestos i molts altres temes es poden treballar amb un espai dedicat a la història de les matemàtiques.

La línia del temps és una selecció dels 30 matemàtics i matemàtiques més influents de la història, les seues vides i les seues aportacions. Aquesta selecció està exposada de forma permanent dins d’una aula gestionada pel departament.




Imatge 12: infinits números sumen una quantitat finita.

## 5. CONCLUSIONS

La creació d'espais estables on tractar diferents temes matemàtics en els centres de secundària és una activitat necessària a l'hora d'acostar la matemàtica de forma atractiva a l'alumnat. Els centres d'interés que poden donar lloc a un espai matemàtic estable són molt diversos. Siguen quins siguen els espais creats, seran una forma de canalitzar la tasca de divulgació matemàtica d'una manera creativa.

La col·laboració entre centres pròxims pot donar lloc a la creació d'una xarxa de rutes matemàtiques en una mateixa zona, afavorint l'intercanvi matemàtic i augmentant el nombre d'espais matemàtics estables dins d'una mateixa població.

El fet que la creació d'un espai matemàtic estable vaja a càrrec de l'alumnat del centre afavoreix la pròpia interrelació matemàtica entre alumnes. Resulta prou interessant observar com uns alumnes expliquen a altres què estan fent i quina és la utilitat matemàtica de l'espai que està sent creat.

Imatge 13: la porteria aleatòria.

Imatge 14: Alumnes treballant en la línia del temps matemàtica.

## Bibliografia

Bonet, J. (2006), *L'últim Gaudí*, Fundació Caixa Sabadell, Barcelona.

Corbalán, F. (2007), *Matemàtiques de la vida mateixa*, Grau, col. «Didàctica de les matemàtiques», Barcelona.

Granados, A. B., (2007), «La banda de Moebius: un camí que et portarà de cap», *Suma*, 54, p. 15-22.

Nelsen, R. (2001), *Demostracions sense paraules*, Projecte Sud, Granada.

M.C. Escher Foundation (2000), *La màgia de M. C. Escher*, Baar, Països Baixos.

Mercado, I (2008), «Creació de rutes matemàtiques», *U*, 49, p. 103-109.

Mora, J. A. (2000), *Construcció d'un omnipoliedre per a la muntanya Tossal (Alacant)*, Ajuntament d'Alacant.