

# ESTUDIO DEL PROBLEMA ELASTOPLÁSTICO CON DEFORMACIONES FINITAS MEDIANTE ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO Y DE DOMINIO

ANTOLÍN LORENZANA IBÁN  
y  
JOSÉ A. GARRIDO GARCÍA

*Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras  
Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, España*

## RESUMEN

En este estudio se aborda el problema de análisis de sólidos metálicos sometidos simultáneamente a no-linealidades materiales y geométricas. El comportamiento plástico elegido está basado en el criterio de plastificación de von Mises con ley de flujo asociada y endurecimiento isótropo, pudiendo ser las deformaciones plásticas finitas. La base del método numérico empleado es el Método de los Elementos de Contorno aunque, al no poderse trasladar todas las integrales que intervienen al contorno, es necesario discretizar también el dominio. Se ha adoptado una formulación material junto con un planteamiento lagrangiano actualizado y se utiliza el algoritmo de retorno generalizado para el cálculo de las deformaciones plásticas. Los gradientes de desplazamiento se obtienen indirectamente mediante derivación polinómica del campo de desplazamientos en el dominio, evitando así las singularidades que se presentan. El método global obtenido es incremental y en cada incremento se necesita un proceso iterativo. Se presenta un ejemplo que muestra la aplicabilidad del método propuesto.

## SUMMARY

This paper presents a formulation of the static problem of metallic solids undergoing both material and geometrical nonlinearities. The plastic constitutive relations are based on the von Mises yield criterion with associated flow rule and isotropic hardening. The plastic strains can be large. The numerical approach is based on the Boundary Element Method but, as it is not possible to take all the integrals to the boundary, domain discretization is needed as well as boundary discretization. A material description is adopted together with an updated Lagrangian approach. The generalized midpoint algorithm is used for the computation of the large scale plastic strains. The displacement gradients are obtained, in order to avoid singularities, from polynomial differentiation of the displacement field in each domain element from the nodal values. The resulting method is incremental and iterations are needed in each increment. An example is presented, showing the applicability of the proposed method.

Recibido: Junio 1995

## INTRODUCCIÓN

El análisis de sólidos bajo hipótesis de comportamiento lineal ha sido ampliamente estudiado tanto a nivel teórico como experimental. Las ecuaciones que gobiernan el problema están claramente planteadas y su resolución, aunque en la mayoría de los casos ha de ser realizada mediante métodos numéricos, no plantea grandes dificultades. En cambio, están menos extendidos los estudios sobre el comportamiento no-lineal, incluso a nivel teórico, debido, en parte, a la gran variedad de no-linealidades que pueden presentarse.

En este trabajo se desarrolla la formulación teórica y se plantea un método numérico para abordar el estudio de materiales metálicos en los que pueden ocurrir simultáneamente no-linealidades materiales y geométricas. La no-linealidad material que se trata es la debida al comportamiento plástico y la no-linealidad geométrica se debe, por una parte, a la existencia de grandes desplazamientos que hacen que haya que aplicar el equilibrio en la geometría deformada del sólido y, por otra, a la existencia de *grandes deformaciones* de manera que la relación entre los desplazamientos y las deformaciones no es lineal.

Existen muchas aplicaciones tecnológicas en las que los sólidos metálicos sufren deformaciones plásticas que no pueden considerarse infinitesimales. Éstas no se reducen a la industria del conformado en frío (laminación, extrusión, embutición etc.), sino que también en el campo estructural tiene sentido un estudio límite con deformaciones finitas, bien para predecir el comportamiento ante sobrecargas o para realizar un análisis plástico local (rótula plástica).

El método de análisis numérico que se va a usar está basado en el "Método de los Elementos de Contorno" (MEC). Aunque la aplicación de este método al problema en estudio exige discretizar también el dominio, todavía presenta ventajas con respecto al Método de los Elementos Finitos (MEF) ya que el orden del sistema de ecuaciones que permite conocer la solución en el contorno depende sólo de la discretización del contorno y sólo es necesario discretizar la porción de dominio afectada por las no-linealidades.

La aplicación del MEC a problemas materialmente no lineales está razonablemente bien establecida<sup>2,23,24</sup>. Sin embargo no fue hasta 1982 cuando aparecieron las primeras publicaciones relativas a su aplicación al tratamiento de la no-linealidad geométrica. Novati y Brebbia<sup>21</sup> plantean el problema de grandes deformaciones elásticas a nivel teórico bajo una formulación lagrangiana total. Chandra y Mukherjee<sup>8</sup> utilizan un planteamiento lagrangiano actualizado y llega a la formulación del MEC en forma incremental para problemas viscoelásticos y elastoplásticos, resolviendo varios ejemplos. Jin *et al.*<sup>13,14</sup> retoman el problema y presentan una formulación variacional con la que obtienen un sistema no-lineal que resuelven iterativamente, junto con otro procedimiento iterativo en cada incremento de carga que asegure que la solución está en equilibrio.

En este trabajo se plantea el MEC de forma similar a la desarrollada en las referencias 8 y 19 si bien se utilizan otros algoritmos con el objeto de abordar los principales inconvenientes que se presentan en las formulaciones anteriores. Éstos se centran en la evaluación de los coeficientes que intervienen por integración numérica, en la obtención de determinadas magnitudes mediante derivación polinómica, en la

determinación de las deformaciones plásticas y en el esquema general del proceso incremental-iterativo.

## ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD Y DE EQUILIBRIO

El sólido puede cambiar su forma y su posición debido a que sobre él pueden actuar acciones exteriores a lo largo del tiempo  $t$ . La región del espacio que ocupa en el instante inicial  $t_0$ , en el que comienza el estudio, se denomina configuración inicial o indeformada. Esta región es un dominio  $\Omega^0$  cerrado, con un contorno  $\Gamma^0$  que se supondrá suficientemente regular. Cada partícula en este instante está definida por su vector de posición  $\mathbf{X}$  con respecto al sistema de coordenadas cartesianas elegido, definido por la base  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Para describir el movimiento se adopta una formulación lagrangiana o material de forma que, en cualquier otro instante posterior, el sólido adopta la configuración denominada actual o deformada, en la que cada partícula está definida por el vector de posición  $\mathbf{x}$  referido al mismo sistema de coordenadas. Así, la configuración inicial es la que se toma como configuración de referencia.

Para cuantificar el cambio de situación relativa de dos partículas de un sólido entre dos configuraciones distintas se define el tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  mediante

$$F_{ij} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = x_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector desplazamiento. La función movimiento  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  se considera diferenciable con respecto a  $X_i$  tantas veces como sea necesario.

A partir de este tensor, y buscando magnitudes objetivas y con significado físico, se define el tensor de deformación material o de Lagrange  $\mathbf{E}$  mediante

$$E_{ij} \equiv \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (2)$$

La variación del gradiente de deformación  $\dot{\mathbf{F}}$  a lo largo del tiempo se puede relacionar con  $\mathbf{F}$  a través de un nuevo tensor  $\mathbf{L}$  denominado tensor gradiente de velocidad euleriano mediante

$$\dot{F}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial X_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = L_{ik}F_{kj} \quad (3)$$

y la variación del tensor de deformación material  $\dot{\mathbf{E}}$  está dada por

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{F}_{ij} + \dot{F}_{ji} + F_{ki}\dot{F}_{kj} + \dot{F}_{ki}F_{kj}) = F_{ki}D_{kl}F_{lj} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{D}$  es el tensor variación de deformación espacial  $\mathbf{D} \equiv 1/2(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$ .

Aplicando el Principio de conservación de la cantidad de movimiento se puede llegar a la fórmula de Cauchy  $\mathbf{p} = \mathbf{PN}$ , que permite representar el vector de tensión nominal  $\mathbf{p}$  en un punto en el instante actual  $t$ , con referencia a una determinada superficie de la configuración de referencia, en función de un tensor denominado tensor de tensión

nominal o primer tensor de tensión de Piola y Kirchhoff  $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$  y de la normal  $\mathbf{N}$  a dicha superficie. El tensor de tensión nominal  $\mathbf{P}$  está relacionado con el tensor de tensión de Cauchy  $\mathbf{T}$  mediante  $\mathbf{P} = \mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{F}^{T-1}$ , donde  $\mathbf{J} \equiv \det \mathbf{F}$ . La ecuación de equilibrio de fuerzas local e instantáneo de un sólido deformable en forma diferencial se puede expresar en función de este tensor mediante

$$\rho \ddot{x}_i - P_{ij,j} - b_i = 0 \quad (5)$$

donde además interviene la fuerza de inercia  $\rho \ddot{\mathbf{x}}$  y la fuerza por unidad de volumen  $\mathbf{b}$  en el instante actual pero referidas a la geometría de la configuración de referencia.

Aplicando el Principio de conservación del momento cinético, tras aplicar el teorema de la divergencia y operar se obtiene

$$P_{ik}F_{jk} = F_{ik}P_{jk} \equiv \tau_{ij} \quad (6)$$

que expresa que existe un tensor simétrico  $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{P}\mathbf{F}^T$  denominado tensor de tensión de Kirchhoff. Éste se usará seguidamente.

## RELACIONES DE COMPORTAMIENTO

Para el planteamiento completo del problema se han de incluir las relaciones de comportamiento. Para ello se define el tensor de tensión material  $\mathbf{S}$  o segundo tensor de tensión de Piola-Kirchhoff mediante

$$S_{ij} \equiv F_{ik}^{-1}P_{kj} = JF_{ik}^{-1}F_{jl}^{-1}T_{kl} \quad (7)$$

La relación de comportamiento material se establece entre este tensor y el tensor de deformación material  $\mathbf{E}$ , su variación  $\dot{\mathbf{E}}$  y su parte plástica  $\mathbf{E}^p$  de la forma

$$\mathbf{S} \equiv \hat{\mathbf{S}}[\mathbf{X}, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}, \mathbf{E}^p] \quad (8)$$

Se puede particularizar al caso elástico-lineal, obteniendo

$$S_{ij} = \lambda E_{kk}\delta_{ij} + 2GE_{ij} = [\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]E_{kl} \equiv \Sigma_{ijkl}E_{kl} \quad (9)$$

donde  $\boldsymbol{\Sigma}$  es el tensor de rigidez o tensor elástico de Cauchy y  $\lambda$  y  $G$  son las constantes elásticas de Lamé.

Como se aprecia, el tensor de rigidez  $\boldsymbol{\Sigma}$ , que relaciona el segundo tensor de tensión de Piola-Kirchhoff con el tensor de deformación de Lagrange, es el mismo (para materiales elásticos, lineales, homogéneos e isótropos) que el tensor de elasticidad para el caso de pequeñas deformaciones, que relaciona el tensor de tensión de Cauchy  $\mathbf{T}$  con el tensor de deformación infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Además, para el correcto planteamiento integral en forma incremental a partir del cual se obtendrá la ecuación de partida del MEC se utiliza una extensión del comportamiento elástico-lineal que se denomina comportamiento hipoeelástico. Según Truesdell y Noll<sup>25</sup>, se denomina material hipoeelástico a aquel material homogéneo e isótropo en el que, en ausencia

de deformaciones plásticas, existe una relación lineal entre la variación de Jaumann del tensor de tensión de Kirchhoff  $\tilde{\tau}$  y el tensor de deformación  $\mathbf{D}$  de la forma

$$\tilde{\tau}_{ij} \equiv \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2GD_{ij} \quad (10)$$

Para el planteamiento completo de la teoría elastoplástica se ha de definir, además de la relación entre tensiones y deformaciones en la fase elástica (ley hipoeástica), el criterio de plastificación que indique a partir de qué nivel tensional (tensión de límite elástico) comienza el comportamiento plástico y la relación entre tensiones y deformaciones en la fase plástica. Esta relación viene dada a través de la denominada ley de flujo. Además, debido al fenómeno de endurecimiento por deformación es necesario definir la relación entre la tensión de límite elástico y las deformaciones plásticas cuando éstas no son nulas. En este trabajo se ha elegido la ley de plastificación de von Mises, la ley de flujo asociada y objetiva dada por Green y Naghdi<sup>12</sup> y una ley de endurecimiento isótropo de tipo potencial dada por  $Y(\bar{E}^p) = K(\bar{E}^p + \bar{E}^e)^n$ , donde  $K$  y  $n$  son los coeficientes de endurecimiento.

Aunque el problema estático elastoplástico es independiente del tiempo, ha de ser resuelto de forma incremental, para saber a partir de que momento los distintos puntos del sólido plastifican y, por tanto, su ley de comportamiento cambia. Esta resolución incremental necesaria se materializa discretizando una magnitud pseudotemporal, denotada también por  $t$ , que hace referencia a la forma en la que se aplican las acciones exteriores sobre el sólido. En  $t = 0.0$  comienzan a actuar las acciones exteriores sobre el sólido y cuando  $t = 1.0$  éstas alcanzan el valor final. Las relaciones elegidas que describen el comportamiento plástico se exponen seguidamente.

- La variación del tensor de deformación material  $\dot{\mathbf{E}}$  se descompone aditivamente, siguiendo a Green y Naghdi<sup>12</sup>, en su parte elástica  $\dot{\mathbf{E}}^e$  y en su parte plástica  $\dot{\mathbf{E}}^p$

$$\dot{E}_{ij} = \dot{E}_{ij}^p + \dot{E}_{ij}^e \quad (11)$$

- El tensor de tensiones material depende sólo de las deformaciones elásticas a través del tensor de rigidez  $\Sigma$

$$S_{ij} = \Sigma_{ijkl} E_{kl}^e = \Sigma_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^p) \quad (12)$$

- La variación de deformación plástica está regida por el criterio de plastificación de von Mises y por la ley de flujo asociada. La condición de fluencia plástica se expresa mediante la ecuación

$$\|\dot{\mathbf{E}}^p\|(\bar{\sigma} - Y) = 0 \quad (13)$$

de manera que sólo existe variación de la deformación plástica si la tensión equivalente  $\bar{\sigma}$  en el punto considerado supera o iguala a la tensión de límite elástico  $Y(\bar{E}^p)$  en ese punto, que depende de la deformación plástica equivalente  $\bar{E}^p$  (endurecimiento por

deformación). Se puede definir de esta manera la denominada función de fluencia  $F_Y$  mediante

$$F_Y(\bar{\sigma}, \bar{E}^p) \equiv \bar{\sigma} - Y(\bar{E}^p) = 0 \quad (14)$$

La tensión y deformación plástica equivalentes se definen mediante

$$\bar{E}^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3} E_{ij}^p E_{ij}^p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|E_{ij}^p\| \quad \bar{\sigma} \equiv \sqrt{\frac{3}{2} S'_{ij} S'_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|S'_{ij}\| \quad (15)$$

La ley de flujo asociada establece que la variación de la deformación plástica es proporcional a la derivada de la función de fluencia con respecto a las tensiones materiales, que se puede expresar en función de las tensiones desviadoras  $\mathbf{S}'$  y de la tensión equivalente mediante

$$\dot{E}_{ij}^p \equiv \zeta a_{ij} \equiv \zeta \frac{\partial F_Y}{\partial S'_{ij}} = \zeta \frac{3 S'_{ij}}{2 \bar{\sigma}} \quad (16)$$

A continuación se va a operar con las expresiones anteriores para obtener otras equivalentes en una forma más operacional, con el objeto de ser tratadas de forma incremental. Cada incremento de tiempo  $\Delta t$  comienza en el instante  ${}^0t$  y acaba en el instante  ${}^1t = {}^0t + \Delta t$ . Los índices 0 y 1 situados en la parte superior izquierda harán referencia a estas situaciones.

- Se considerará un estado plásticamente admisible caracterizado por una deformación total  ${}^0\mathbf{E}$  y una deformación plástica  ${}^0\mathbf{E}^p$ , al que le corresponde una tensión  ${}^0\mathbf{S}$  de tal manera que se satisface

$${}^0\mathbf{E}, {}^0\mathbf{E}^p \Rightarrow {}^0\mathbf{S} = \Sigma({}^0\mathbf{E} - {}^0\mathbf{E}^p), \quad {}^0\bar{\sigma} \leq Y({}^0\bar{E}^p) = {}^0Y \quad (17)$$

- Dada una nueva deformación  ${}^1\mathbf{E}$ , se tiene que buscar la deformación plástica  ${}^1\mathbf{E}^p$  y la tensión  ${}^1\mathbf{S}$  para que se satisfaga

$${}^1\mathbf{E}, {}^1\mathbf{E}^p \Rightarrow {}^1\mathbf{S} = \Sigma({}^1\mathbf{E} - {}^1\mathbf{E}^p), \quad {}^1\bar{\sigma} \leq Y({}^1\bar{E}^p) = {}^1Y \quad (18)$$

- Para esta búsqueda se elige un estado de prueba (no necesariamente admisible) basado en la nueva deformación total  ${}^1\mathbf{E}$  pero todavía con la deformación plástica anterior  ${}^0\mathbf{E}^p$ , lo que equivale a suponer que todo el incremento de la deformación es elástico. A este estado le corresponde una tensión de prueba  $\hat{\mathbf{S}}$  que puede no cumplir el criterio

$${}^1\mathbf{E}, {}^0\mathbf{E}^p \Rightarrow \hat{\mathbf{S}} = \Sigma({}^1\mathbf{E} - {}^0\mathbf{E}^p), \quad \hat{\sigma} \stackrel{?}{\leq} Y({}^0\bar{E}^p) \quad (19)$$

- Si  $\hat{\sigma} \leq Y({}^0\bar{E}^p)$ , la variación de la deformación plástica en este incremento es nula y por lo tanto  ${}^1\mathbf{E}^p = {}^0\mathbf{E}^p$  y  ${}^1\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}$ . Pero si  $\hat{\sigma} > Y({}^0\bar{E}^p)$ , la partícula en consideración sigue fluyendo, la suposición de que todo el incremento de deformación era elástico no es correcta y habrá que encontrar el incremento de deformación plástica  $\Delta\mathbf{E}^p$  y a partir de éste calcular  ${}^1\mathbf{E}^p$  mediante, por ejemplo, el método de integración paso

a paso de Euler. Nótese que al existir  $\Delta \mathbf{E}^p \neq 0$ , la tensión de prueba  $\hat{\mathbf{S}}$ , que era una predicción elástica a  ${}^1\mathbf{S}$ , necesita ser corregida en  $d\mathbf{S} = -\Sigma \Delta \mathbf{E}^p$  (corrección plástica) y que el efecto de tal corrección, teniendo en cuenta (16) se dirige en la dirección normal a la superficie de fluencia (Figura 1).

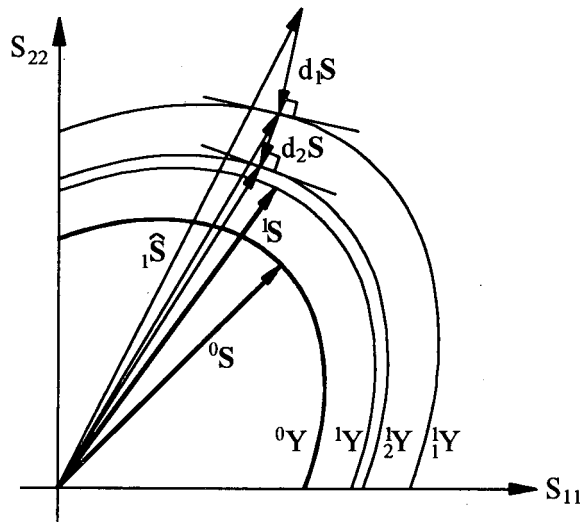


Figura 1. Algoritmo de retorno

Nótese también que en (16) se necesitan conocer las tensiones actuales  ${}^1\mathbf{S}$  que serán desconocidas mientras se desconozca  ${}^1\mathbf{E}^p$ , lo que hace que este método sea implícito y se necesite un proceso iterativo para acercar el estado de prueba al estado final (o solución aceptada dentro de una determinada tolerancia). El procedimiento que se va a seguir para este fin es el denominado algoritmo de retorno generalizado (A.R.G.), introducido por Ortiz y Popov<sup>22</sup>. Para su planteamiento se toma un parámetro de integración  $\alpha \in [0, 1]$  a través del cual poder expresar el incremento de la deformación plástica como

$$\Delta E_{ij}^p = \zeta [(1 - \alpha) {}^0 a_{ij} + \alpha {}^1 a_{ij}] \quad (20)$$

Para valores  $\alpha > 0.0$  el algoritmo es implícito, lo que puede suponer alguna desventaja (planteamiento iterativo) pero confiere una gran estabilidad y una buena velocidad de convergencia<sup>22</sup>. Adicionalmente si  $\alpha < 1.0$  el retorno no será exactamente ortogonal a la superficie de fluencia (retorno generalizado). Siguiendo un proceso análogo al desarrollado por Nikiskov y Atluri<sup>20</sup> para deformaciones infinitesimales se puede llegar a la siguiente ecuación escalar no lineal en  $\zeta$

$$f(\zeta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|S_{ij}^\alpha\| - 3G\alpha\zeta - Y \left( {}^0 \bar{E}^p + \zeta \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| (1 - \alpha) {}^0 a_{ij} + \alpha \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{S_{ij}^\alpha}{\|S_{ij}^\alpha\|} \right\| \right) = 0 \quad (21)$$

donde

$$S_{ij}^\alpha = \hat{S}'_{ij} - 2G\zeta(1 - \alpha) {}^0a_{ij} \quad (22)$$

La determinación del parámetro  $\zeta$  ha de ser abordada, en el caso general, numéricamente. Un método adecuado es el procedimiento iterativo de Newton-Raphson, que se aplica a la ecuación (21) de la forma

$${}^0\zeta = \Delta \bar{E}', \quad {}_i\zeta = {}_{i-1}\zeta - \frac{f({}_{i-1}\zeta)}{f'({}_{i-1}\zeta)} \quad (23)$$

donde  $f'(\zeta)$  es la derivada de la función  $f(\zeta)$  respecto a  $\zeta$  dada por

$$f'(\zeta) = -2\sqrt{\frac{3}{2}}G(1 - \alpha) {}^0a_{ij} \frac{S_{ij}^\alpha}{\|S_{ij}^\alpha\|} - 3G\alpha - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{dY}{d\bar{E}^p} \left\| (1 - \alpha) {}^0a_{ij} + \alpha \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{S_{ij}^\alpha}{\|S_{ij}^\alpha\|} \right\| \quad (24)$$

El índice situado en la parte inferior izquierda indica el número de iteración. El criterio de convergencia es

$$|f({}_i\zeta)| < \varepsilon Y(\bar{E}^p) \quad (25)$$

donde  $\varepsilon$  es la tolerancia relativa permitida. Generalmente de 2 a 4 iteraciones son suficientes para conseguir la convergencia con un valor de  $\varepsilon$  de  $10^{-6}$ .

## FORMULACIÓN INTEGRAL

El punto de partida del enfoque integral, que dará base al Método de los Elementos de Contorno, es el principio de reciprocidad o teorema de Maxwell y Betti. Éste se establece entre el problema elastoplástico con grandes deformaciones que se acaba de plantear y un determinado problema de referencia. Se elige como problema de referencia el de un sólido elástico, lineal, homogéneo e isótropo de extensión infinita que sufre deformaciones infinitesimales debidas a que actúa, sobre uno de sus puntos  $p$ , una determinada fuerza de volumen  $\rho F_i$  modelada matemáticamente mediante la Delta de Dirac. Las distintas variables relacionadas con este problema de referencia se denotarán con el superíndice  $\Psi$ . Al punto  $p$  de aplicación de la fuerza se le denomina punto de carga de coordenadas  $X_i(p)$ , mientras que al punto analizado  $q$  de coordenadas  $X_i(q)$  se le denomina punto de campo. Cuando estos puntos están situados en el contorno se les denota con las mismas letras pero en mayúsculas.

El principio de reciprocidad entre los dos problemas que se acaban de exponer se expresa de la forma

$$\int_{\Omega} \tilde{\tau}_{ij} \varepsilon_{ij}^{\Psi} dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\Psi} \dot{E}_{ij}^e dV \quad (26)$$

habiéndose realizado la aproximación  $\mathbf{D} \approx \dot{\mathbf{E}}$ , justificada seguidamente. La ecuación (26) está aplicada en cada instante  $t$ , por lo tanto el dominio de integración  $\Omega$  es



el dominio actual, todavía desconocido. Para poder abordar el problema se usará el Planteamiento Lagrangiano Actualizado<sup>18</sup>, por el cual se utiliza la configuración del sólido en el instante  $t$  como la configuración de referencia para conocer la solución en el instante  $t + \Delta t$ . Adoptando este tipo de planteamiento se simplifica mucho la formulación integral del problema; a cambio exige plantear el problema incrementalmente e ir actualizando la geometría y las variables en cada incremento  $\Delta t$ . Esta exigencia no complica adicionalmente el problema presentado, ya que el planteamiento incremental venía impuesto previamente por la existencia de la no-linealidad material.

Una consecuencia importante de la formulación lagrangiana actualizada es que en cada incremento de tiempo suficientemente pequeño el tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  es aproximadamente igual al tensor identidad  $\mathbf{I}$ , ya que la configuración actual del sólido al comienzo del incremento es tomada como la configuración de referencia. Otra consecuencia es que las derivadas, que hasta aquí siempre se han tomado con respecto a las coordenadas de referencia  $X_i$ , ahora se pueden aproximar por las mismas pero respecto a las coordenadas  $x_i$  de la configuración actual. Con éstas aproximaciones se puede poner

$$D_{ij} \approx \dot{E}_{ij} \approx \dot{\epsilon}_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (27)$$

Asimismo, la definición del tensor de Jaumann queda ahora como

$$\tilde{\tau}_{ij} \equiv \frac{D}{Dt} \tau_{ij} - W_{ik} \tau_{kj} + \tau_{ik} W_{kj} \approx \dot{\tau}_{ij} + \tau_{ik} \dot{\omega}_{kj} - \dot{\omega}_{ik} \tau_{kj} \quad (28)$$

ya que también se puede utilizar la aproximación

$$W_{ij} \equiv \frac{1}{2}(L_{ij} - L_{ji}) \approx \dot{\omega}_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (29)$$

Además se verifica también que  $\mathbf{L} \approx \dot{\mathbf{F}} \approx \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}$  y  $\boldsymbol{\tau} \approx \mathbf{T}$  y se puede llegar, junto con la derivada temporal de la ecuación (6) dada por  $\dot{\tau}_{ij} = \dot{\mathbf{P}}_{ik} \mathbf{F}_{jk} + \tau_{il} \mathbf{F}_{kl}^{-1} \dot{\mathbf{F}}_{jk}$ , a

$$\tilde{\tau}_{ij} \approx \dot{P}_{ij} + T_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} - \dot{\omega}_{ik} T_{kj} = \dot{P}_{ij} + \frac{1}{2}(T_{ik} \delta_{jl} + T_{i} \delta_{kj} - T_{lj} \delta_{ik} + T_{kj} \delta_{il}) \dot{u}_{k,l} = \dot{P}_{ij} + G_{ijkl} \dot{u}_{k,l} \quad (30)$$

Las modificaciones realizadas permiten expresar la ecuación (26) de la forma

$$\int_{\Omega^0} (\dot{P}_{ij} + G_{ijkl} \dot{u}_{k,l}) \epsilon_{ij}^{\Psi} dV = \int_{\Omega^0} \sigma_{ij}^{\Psi} \epsilon_{ij}^e dV \quad (31)$$

Si se introduce la solución del problema de referencia o solución fundamental y se opera convenientemente<sup>19</sup> se llega a

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(p) = & \int_{\Gamma^0} [\mathcal{V}_{ij}(p, Q) \dot{p}_i(Q) - T_{ij}(p, Q) \dot{u}_i(Q)] dS_Q^0 + \int_{\Omega^0} 2G \mathcal{V}_{ij,k}(p, q) \epsilon_{ik}^p(q) dV_q^0 + \\ & + \int_{\Omega^0} \mathcal{V}_{ij,m}(p, q) G_{mikl}(q) \dot{u}_{k,l}(q) dV_q^0 \end{aligned} \quad (32)$$

Esta ecuación es muy parecida a la que se obtiene para comportamiento elástico-lineal, pero en ella aparecen dos sumandos adicionales. Uno de ellos, el segundo sumando del segundo miembro, es debido a la no-linealidad material y el otro es el tercer sumando del segundo miembro, que proviene de la existencia de no-linealidad geométrica. Además existe otra diferencia importante que radica en la magnitud  $\dot{p}_i = n_j \dot{P}_{ji}$ . Ésta se puede expresar en función de las tensiones de Cauchy mediante

$$\dot{p}_i = n_j \dot{P}_{ji} = n_j \tilde{\tau}_{ji} - n_j G_{jikl} \dot{u}_{k,l} \approx n_j \tilde{T}_{ji} - n_j G_{jikl} \dot{u}_{k,l} = \dot{t}_i - n_j G_{jikl} \dot{u}_{k,l} \quad (33)$$

La aproximación utilizada se justifica en<sup>8,15</sup>.

Si en la ecuación (32) se hace tender el punto  $p \in \Omega$  del dominio al punto  $P \in \Gamma$  del contorno se llega a<sup>19</sup>

$$C_{ij}(P) \dot{u}_i(P) = \int_{\Gamma^0} [\mathcal{V}_{ij}(P, Q) \dot{p}_i(Q) \cdot \mathcal{T}_{ij}(P, Q) \dot{u}_i(Q)] dS_Q^0 + \int_{\Omega^0} 2G \mathcal{V}_{ij,k}(P, q) \varepsilon_{ik}^p(q) dV_q^0 + \int_{\Omega^0} \mathcal{V}_{ij,m}(P, q) G_{mikl}(q) \dot{u}_{k,l}(q) dV_q^0 \quad (34)$$

y derivando la ecuación (32) con respecto a las coordenadas  $x_l$  del punto interno en consideración, que es el punto de carga  $p$ , resulta

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \dot{u}_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Gamma^0} [\mathcal{V}_{ij}(p, Q) \dot{p}_i(Q) - \mathcal{T}_{ij}(p, Q) \dot{u}_i(Q)] dS_Q^0 + \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega^0} 2G \mathcal{V}_{ij,k}(p, q) \varepsilon_{ik}^p(q) dV_q^0 + \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega^0} \mathcal{V}_{ij,m}(p, q) G_{mikn}(q) \dot{u}_{k,n}(q) dV_q^0 \quad (35)$$

Los tensores que intervienen en estas ecuaciones, para el caso bidimensional que se va a tratar de deformación plana, son

$$\mathcal{V}_{ij}(p, q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)Ln(r)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}] \quad (36a)$$

$$\mathcal{T}_{ij}(p, q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ [(1-2\nu)\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (36b)$$

$$\mathcal{V}_{ij,k}(p, q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \frac{1}{r} [(3-4\nu)r_{,k}Ln(r)\delta_{ij} - r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{jk} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (36c)$$

En este punto se tiene resuelto, al menos matemáticamente, el problema de determinar desplazamientos, tensiones y deformaciones en un sólido con comportamiento elastoplástico y con posibilidad de deformaciones finitas. Para ello hay que resolver simultáneamente las ecuaciones (32), (34) y (35) en cada incremento e ir actualizando las variables obtenidas en los sucesivos incrementos hasta que esté aplicada la carga total. Existe un problema en la resolución de las ecuaciones anteriores ya que las incógnitas en desplazamientos no sólo ocurren en las integrales del contorno, sino también en las de dominio. Debido a que para calcular los desplazamientos en el dominio es necesario conocer previamente los desplazamientos en el contorno, el conjunto de ecuaciones anteriores da lugar a un sistema implícito que deberá ser resuelto mediante algún procedimiento iterativo.

## DISCRETIZACIÓN

Para poder realizar numéricamente las integraciones que aparecen en las ecuaciones (32), (34) y (35), extendidas sobre el contorno y sobre el dominio, es necesario discretizar el contorno del sólido en  $nE$  elementos de longitud  $\Delta S_E$  el dominio en  $nC$  celdas de superficie  $\Delta A_C$ . Cualquier variable  $\psi$  asociada al contorno o  $\phi$  asociada al dominio se interpola en cada elemento o celda mediante

$$\begin{aligned}\psi(\eta) &= \sum_{j=1}^{nE} \Psi_j(\eta) \psi_j & -1 \leq \eta \leq 1 \\ \phi(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{j=1}^{nC} \Phi_j(\xi_1, \xi_2) \phi_j & -1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\end{aligned}\tag{37}$$

donde  $\psi_j$ ,  $j = 1, \dots, nE$  y  $\phi_j$ ,  $j = 1, \dots, nC$  son los valores de dicha variable en los  $nE$  nodos del elemento o  $nC$  nodos de la celda. Se han elegido elementos de contorno curvos y continuos con interpolación cuadrática ( $nE = 3$ ) y celdas internas curvas y continuas correspondientes al elemento cuadrático de la familia serendípita ( $nC = 8$ ). Tanto en los elementos como en las celdas, los nodos están situados, en el dominio generalizado, en posiciones fijas de las coordenadas intrínsecas  $\eta$  y  $(\xi_1, \xi_2)$ . Además se ha optado por establecer una dependencia entre la discretización del contorno y del dominio que radica en el hecho de que cuando un nodo de los usados para definir una celda está situado en el contorno, éste se hace coincidir geoméricamente con el nodo del elemento de contorno correspondiente.

A partir de éste punto se puede desarrollar el planteamiento matricial usual del MEC y expresar las ecuaciones (34), (32) y (35) de la forma

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}} \underline{\dot{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \underline{\dot{\mathbf{p}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\dot{\mathbf{v}}}\tag{38}$$

$$\underline{\dot{u}}_k = \underline{\underline{\mathbf{G}}}' \underline{\dot{\mathbf{p}}} - \underline{\underline{\mathbf{H}}}' \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}' \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}' \underline{\dot{\mathbf{v}}}\tag{39}$$

$$\underline{\dot{u}}_k = \underline{\underline{\mathbf{G}}}'' \underline{\dot{\mathbf{p}}} - \underline{\underline{\mathbf{H}}}'' \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}'' \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}'' \underline{\dot{\mathbf{v}}}\tag{40}$$

En los vectores  $\underline{\dot{\mathbf{u}}}$  y  $\underline{\dot{\mathbf{p}}}$  se hallan todas las componentes de los vectores desplazamiento y tensión en los nodos situados en el contorno y en los vectores  $\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$  y  $\underline{\dot{\mathbf{v}}}$  todas las componentes de las deformaciones plásticas y gradientes de desplazamiento en todos los nodos. Finalmente  $\underline{\dot{u}}_k$  y  $\underline{\dot{v}}_k$  son los vectores variación de desplazamiento y su gradiente en el punto interno  $k$ .

### Estrategia de resolución

El integrando de los dos últimos sumandos de la ecuación (40) es singular y además hay que derivar con respecto a las coordenadas  $x_l$  del punto de campo, lo que eleva el orden de la singularidad. La contribución de la parte no singular al coeficiente que se trata de calcular ha de ser hallada cuidadosamente. Una posibilidad es calcular la

integral de volumen analíticamente desde un punto  $p$  arbitrario sobre una celda genérica  $\Delta A_C$  que incluya al punto  $p$  en el que el integrando se hace singular y luego derivar el resultado obtenido en el punto  $p$  respecto a las coordenadas  $x_l$ . A la complejidad propia del integrando se añaden las funciones de forma y los jacobianos de las transformaciones, lo que hace que sólo sea viable esta posibilidad para tipologías sencillas de celdas<sup>19</sup>. Otra posibilidad, más sistemática, es introducir la derivación espacial dentro del integrando y realizar la integral numéricamente, de donde se obtendrá el valor principal de Cauchy de la misma, al que habrá que sumar la aportación puntual correspondiente (término libre) ya que, al derivar, el orden de la singularidad aumenta (aparece una singularidad fuerte). Esta posibilidad es posible pero costosa computacionalmente<sup>7</sup>.

Sin embargo el principal inconveniente radica en que no es posible obtener una representación de la ecuación (40) en la que el punto de carga esté situado en el contorno, ya que en este caso se presentan singularidades esenciales o hipersingularidades inabordables desde el punto de vista matemático<sup>5</sup>. Nótese que en la ecuación (38) aparece  $\underline{\hat{p}}$  que depende de  $\underline{\hat{v}}$  en el contorno, que habrá de ser obtenido pues mediante algún procedimiento indirecto, bien sea por extrapolación al contorno de los valores de  $\underline{\hat{v}}$  en el dominio<sup>8</sup> o por derivación polinómica del campo de desplazamientos<sup>13</sup>. Procedimientos análogos han de ser usados para obtener el tensor de tensiones en el contorno.

Como el uso de estos procedimientos indirectos no se puede evitar, se puede plantear un método que prescindiera de la ecuación (40). Se desarrolla con este fin un procedimiento de derivación polinómica para calcular  $\underline{\hat{v}}_k$  y el tensor de tensiones no sólo en el contorno, sino también en el dominio a través del campo de desplazamientos en los nodos de cada celda calculado mediante (38) y (39). El modo de calcular  $\underline{\hat{v}}_k$  y a partir de  $\underline{\hat{u}}_k$  es a través de la expresión

$$\underline{\hat{v}}_k = \begin{bmatrix} \hat{u}_{1,1} \\ \hat{u}_{2,1} \\ \hat{u}_{1,2} \\ \hat{u}_{2,2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{u}_{i,1} \\ \hat{u}_{i,2} \end{bmatrix} := \frac{1}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (41)$$

El diagrama de flujo del proceso de resolución global se da en la Figura 2. En él se distinguen tres pasos:

**Paso 1:**

- Resolver elásticamente en el contorno mediante (38) con  $\underline{\hat{e}}^p$  y  $\underline{\hat{v}}$  nulos.
- Aplicar (39) con  $\underline{\hat{e}}^p$  y  $\underline{\hat{v}}$  nulos para conocer los desplazamientos de los nodos internos.
- Aplicar (41) en cada celda para obtener  $\underline{\hat{v}}_k$  en todos los nodos y por tanto el vector total  $\underline{\hat{v}}$ .
- Calcular las tensiones en todos los nodos mediante la ley de comportamiento.
- Calcular la tensión equivalente máxima  $\bar{\sigma}_{\max}$  y escalar la solución elástica para que no exista ningún nodo con tensión superior a la de fluencia. En este momento está aplicada una determinada fracción  $t_0$  de la carga total dada por  $t_0 := Y(0)/\bar{\sigma}_{\max}$ .

**Paso 2:** (Incremento número  $i$ )

- Aplicar un incremento de carga. Éste es una determinada fracción  $\Delta t$  de la carga total que resta desde la carga  $t_0$  con la que comenzó la plastificación, que se calcula mediante la expresión

$$\Delta t = t_i - t_{i-1}$$

$$t_i = t_0 + (1 - t_0) \left[ (1 - \varphi) \left( \frac{i}{nI} \right) + \varphi \left( \frac{i}{nI} \right)^2 \right], \quad \varphi \in (-1, 1) \quad (42)$$

- donde  $\varphi$  es un parámetro de densificación y  $nI$  es el número total de incrementos en los que se estudia el proceso plástico. Para facilitar la convergencia en los primeros incrementos es conveniente utilizar  $\varphi > 0$ .

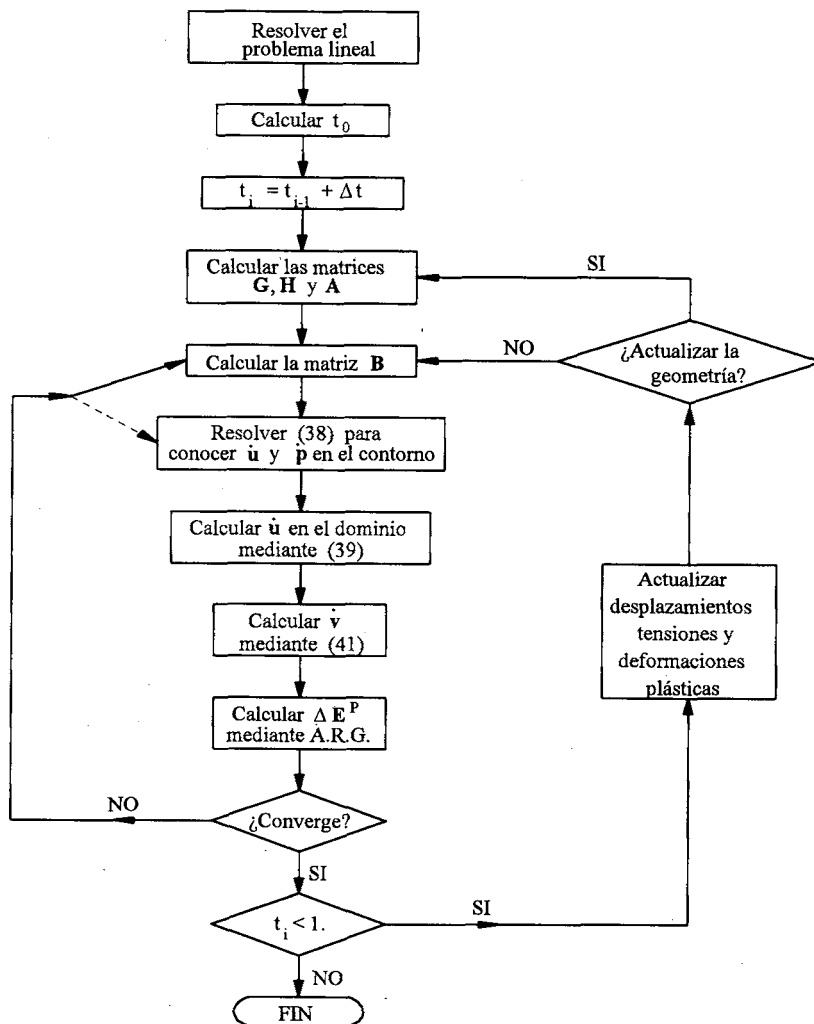


Figura 2. Diagrama de flujo del proceso general

- Aplicar (38) y (39) con  $\dot{\underline{\epsilon}}^p$  y  $\dot{\underline{v}}$  nulos y derivar polinómicamente (41) para obtener la primera ( $j = 0$ ) aproximación de  $\dot{\underline{v}}$  y aplicar la ley de comportamiento plástico para obtener la primera aproximación de  $\dot{\underline{\epsilon}}^p$ .
- Volver al paso anterior pero no con  $\dot{\underline{\epsilon}}^p$  y  $\dot{\underline{v}}$  nulos, sino con las aproximaciones obtenidas en el apartado anterior, denotadas ahora por  ${}_{j-1}\dot{\underline{\epsilon}}^p$  y  ${}_{j-1}\dot{\underline{v}}$ , de modo que se obtienen las siguientes aproximaciones  ${}_j\dot{\underline{\epsilon}}^p$  y  ${}_j\dot{\underline{v}}$ .
- Cuando las sucesivas aproximaciones se diferencien entre sí, en el nodo más desfavorable, en menos de una determinada tolerancia  $\kappa$  especificada de antemano

$$\max_{\text{nodos}} \left| 1 - \frac{\|{}_{j-1}\Delta\bar{\underline{E}}^p\|}{\|{}_j\Delta\bar{\underline{E}}^p\|} \right| < \kappa \quad (43)$$

- se da por concluido este proceso iterativo y se adopta como solución para el incremento número  $i$  la obtenida en la iteración número  $j$ .

### **Paso 3:**

- Conseguida la convergencia se procede a acumular los desplazamientos, tensiones y deformaciones plásticas y a actualizar la geometría si procede.
- Finalmente se vuelve al paso 2 hasta que toda la carga ( $t = 1$ ) haya sido aplicada.

El procedimiento de iteración directa aplicado no es ni mucho menos el más eficiente desde el punto de vista computacional, pero es el único que se puede emplear. Esto es debido a que no es posible obtener de forma explícita el sistema no-lineal al que se deben reducir las ecuaciones que gobiernan el problema. Por lo tanto no se pueden aplicar métodos de mayor orden de convergencia. Tampoco es posible aplicar técnicas de aceleración de la convergencia ya que no está garantizado que las sucesivas aproximaciones  ${}_j\dot{\underline{\epsilon}}^p$  converjan linealmente (en cada una de sus componentes) hacia la solución y estas técnicas sólo son aplicables bajo este requisito.

## **Evaluación de los coeficientes**

Uno de los aspectos esenciales para la aplicación del MEC es el cálculo preciso de los coeficientes del sistema de ecuaciones que resulta de la discretización del problema. Estos coeficientes se obtienen generalmente por integración numérica (integrando regular). Cuando el integrando se hace singular es necesario utilizar técnicas especiales. En algunos casos sencillos, es posible realizar la integración de forma analítica. Seguidamente se expone el modo de cálculo para cada uno de los casos que se presentan.

- Cuando el integrando es regular, la integración se realiza directamente por cuadratura de Gauss. Si la distancia entre el punto de colocación y el elemento es muy pequeña se obtienen, aún con un alto número de puntos de Gauss ( $nG$ ), resultados numéricos con una precisión baja, por lo que se llevan a cabo subdivisiones del elemento y se realiza la cuadratura de Gauss en cada uno de los subelementos obtenidos. El número de subelementos ( $nS$ ) se decide en función de un criterio de cercanía y posición relativa entre el punto de colocación  $p(\eta, \zeta)$  y el segmento  $\eta \in (-1, 1)$  que representa al elemento, ambos situados en el dominio normalizado  $(\eta, \zeta)$ . Cada subelemento  $j$  está definido por las coordenadas  $\eta_{\text{extr}}^{j+1}$  y

$\eta_{\text{extr}}^j$  y de sus extremos. La fórmula que da el coeficiente de integración y los jacobianos que intervienen son

$$\int_{\Delta S_E} f(x) d\Gamma = \sum_{j=1}^{nS} J_S \sum_{i=1}^{nG} f(x(\eta_i)) |J_{\Psi}(\eta_i)| \omega_i \quad (44)$$

$$J_{\Psi}(\eta_i) = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta_i}\right)^2} \quad J_S = \frac{\eta_{\text{extr}}^{j+1} - \eta_{\text{extr}}^j}{2} \quad (45)$$

De forma análoga, el cálculo de integrales sobre celdas se realiza también mediante cuadratura de Gauss mediante la fórmula

$$\int_{\Delta A_C} f(x) d\Omega = \sum_{i=1}^{nG} \sum_{j=1}^{nG} f(x(\xi_i, \xi_j)) |J_{\Phi}(\xi_i, \xi_j)| \omega_j \omega_i \quad (46)$$

Se han de usar más puntos de Gauss cuanto más cercano esté el punto de colocación a la celda. El número de puntos de Gauss ( $nG$ ) se elige en función de la relación entre la máxima distancia entre dos nodos de la celda sobre la que se integra  $l_{\text{max}}$  y la distancia entre el punto de colocación  $p$  y el centro de dicha celda  $d_{\text{cel}}$ . El esquema de integración elegido es

$nG = 4 \times 4$	si	$1_{\text{max}}/d_{\text{cel}} < 0,7$
$nG = 6 \times 6$	si	$0,7 \leq 1_{\text{max}}/d_{\text{cel}} < 1,25$
$nG = 8 \times 8$	si	$1,25 \leq 1_{\text{max}}/d_{\text{cel}}$

con el que se consigue, para el tipo de integrales de que se trata, y dado que, por la forma de discretizar, el punto de colocación nunca está excesivamente cercano a la celda sobre la que se integra, una precisión adecuada sin necesidad de realizar subdivisiones de celdas. Esta precisión se puede cuantificar en errores menores al 0.1 %, comparando con la solución obtenida al realizar la integral con un número elevado de subdivisiones y utilizando asimismo un alto número de puntos de Gauss.

- Cuando el punto de colocación pertenece al elemento o a la celda en consideración el integrando es singular y se necesita un especial cuidado para tratar la integral. Para el orden de aproximación elegido (cuadrático) es muy difícil desarrollar la integración analíticamente debido a la complejidad de la expresión del integrando, complicada aún más por el jacobiano que aparece de la transformación, por lo que es preciso abordar su cálculo mediante un algoritmo numérico de integración.

El integrando a partir del cual se han de obtener los coeficientes de la matriz  $\mathbf{H}$  es singular del orden de  $1/r$  y por tanto fuertemente singular. Para su obtención se puede calcular numéricamente su valor principal de Cauchy y añadir el término no integral o utilizar, como se hace en el presente trabajo, el usual procedimiento de movimiento de sólido rígido.

Los coeficientes de la matriz  $\mathbf{G}$  son débilmente singulares (del orden de  $\ln r$ ) y se calculan numéricamente mediante cuadratura de Gauss con subdivisión. Además

se realiza una transformación no lineal del intervalo de integración<sup>1</sup>, que conduce a integrandos mejor acondicionados, obteniéndose un resultado más preciso.

Para el tratamiento de las integrales singulares sobre celdas se dan los siguientes pasos:

- Se transforma la celda en el dominio  $x_1 - x_2$  en un cuadrado en el dominio normalizado  $\xi_1 - \xi_2$
- Este cuadrado es dividido en dos triángulos, si el punto de colocación está en un esquina, o en tres si está situado en un lado. En cada uno de ellos se aplica la transformación

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}_0 + \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}, \quad 0 \leq r \leq \bar{r}(\theta), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (47)$$

donde  $[\xi]_0$  son las coordenadas intrínsecas del punto de colocación y  $\bar{r}(\theta)$  y  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los límites de cada triángulo.

- Seguidamente el triángulo es transformado en un cuadrado en el dominio normalizado  $\eta_1 - \eta_2$  mediante

$$\begin{bmatrix} \theta \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(\theta_1 + \theta_2) + (\theta_2 - \theta_1)\eta_2]/2 \\ d(1 + \eta_1)/2 \cos(\theta - \alpha) \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \eta_1, \eta_2 \leq 1 \quad (48)$$

Sobre éste se aplica la cuadratura de Gauss. El jacobiano de la transformación de coordenadas entre  $x_1 - x_2$  y  $\eta_1 - \eta_2$  viene dado por

$$J(\eta_1, \eta_2) = r \left[ \frac{\partial r}{\partial \eta_1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta_2} - \frac{\partial r}{\partial \eta_2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \right] \left| \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} \right| = \frac{rd(\theta_2 - \theta_1)}{4 \cos(\theta - \alpha)} \left| \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} \right| \quad (49)$$

La presencia de  $r$  en el numerador de esta expresión hace que la evaluación de la integral singular por este método sea satisfactoria, ya que cancela numéricamente la singularidad del núcleo. Los resultados se mejoran si, para la coordenada  $r$ , en vez de la transformación dada por (48) se realiza la siguiente<sup>11</sup>

$$r(\eta_1, \eta_2) = \beta(1 + \eta_1)^2 + \frac{D - 4\beta}{8}(1 + \eta_1)^3 \quad D = \frac{d}{2 \cos(\theta(\eta_1, \eta_2) - \alpha)} \quad (50)$$

que, como se ve, cumple las condiciones requeridas en el contorno. Además su jacobiano es

$$J(\eta_1, \eta_2) = \frac{r \cdot (\theta_2 - \theta_1)}{2} \left( 2\beta(1 + \eta_1) + \frac{3(D - 4\beta)}{8}(1 + \eta_1)^2 \right) \left| \frac{\partial x_l}{\partial \xi_i} \right| \quad (51)$$

que tiende a cero en el entorno de la singularidad y por ello es una transformación adecuada para la evaluación de dicha integral.

Desde el punto de vista del coste computacional hay que destacar que los coeficientes de las matrices  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{G}'$ ,  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}'$  sólo necesitan ser recalculados cada vez que se actualice la geometría ya que sólo dependen de ésta. La conveniencia o no de actualizar la geometría se ha de evaluar en función de si han existido cambios significativos de la misma, aunque sólo sean locales. Los coeficientes de las matrices  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$ , al depender también de las tensiones, han de ser reevaluados en cada iteración. Se



puede realizar sin embargo una aproximación consistente en suponer que las variaciones incrementales de las tensiones en cada iteración no influyen significativamente en el nivel tensional total, y así evitar su cálculo (línea de puntos en la Figura 2), lo cual lleva a un gran ahorro computacional.

### EJEMPLO

En esta sección se aplica el método desarrollado al análisis de problemas de mecánica de sólidos con posibilidad de grandes deformaciones plásticas. Cuando se aplica dicho método a problemas en los que se cumple la hipótesis de pequeñas deformaciones, los resultados obtenidos (sin hacer uso de dicha hipótesis) se ajustan satisfactoriamente a la solución analítica<sup>15</sup>. El problema que se analiza a continuación, a pesar de no tener solución analítica, es suficientemente ilustrativo y ha sido ampliamente estudiado en la literatura, bajo distintas relaciones constitutivas, no solamente mediante el MEF<sup>18,26</sup>, sino también mediante el MEC<sup>3,8,13</sup>.

En la Figura 3 se presenta la geometría y discretización utilizada. La longitud  $L$  original es 0,6 m y el diámetro  $d$  del agujero es de 0,2 m. Las acciones exteriores consisten en un desplazamiento prescrito en la dirección  $X_2$  que provoca un aumento del 5 % de la longitud  $L$ . Las constantes elásticas del material son  $E = 206,8$  GPa y  $\nu = 0,3$ ; la tensión de límite elástico es  $Y(0) = 110,87$  MPa y los coeficientes de endurecimiento son  $K = 500,0$  MPa y  $n = 0,2$ .

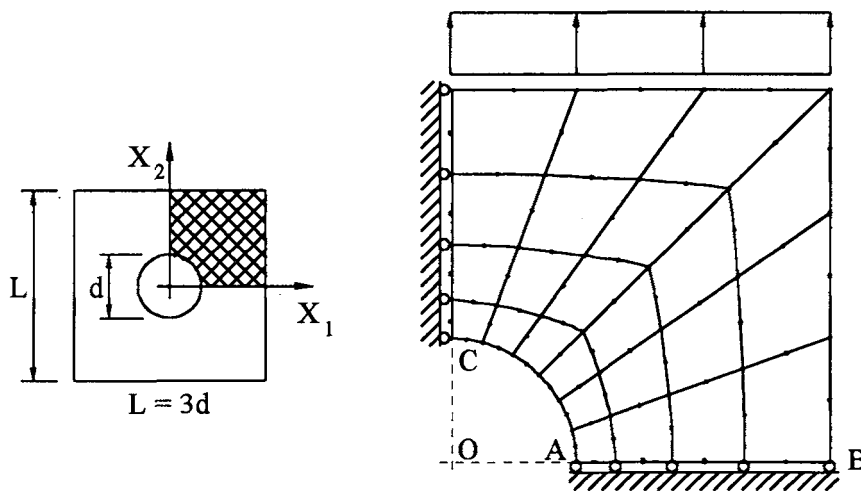
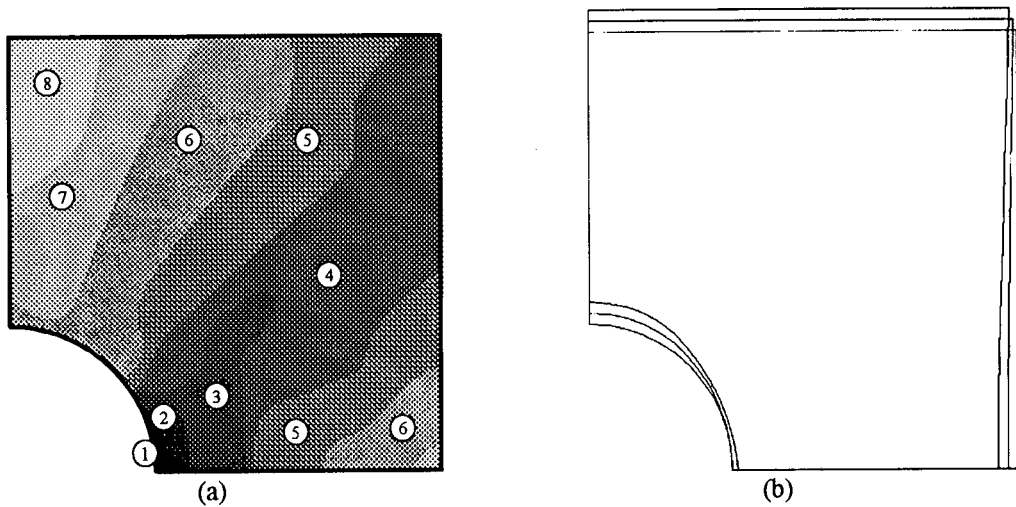


Figura 3. Definición del problema y discretización utilizada

Por simetría se discretiza sólo un cuarto y se hace con 20 elementos de contorno y 24 celdas, utilizándose en total 98 nodos, 53 de los cuales son internos. Los desplazamientos prescritos en cada incremento están dados por la expresión (42) en la que se ha tomado un valor para el parámetro  $\varphi$  de 0,5. Los resultados mostrados corresponden a una resolución del problema con 335 incrementos de carga y una tolerancia relativa de  $\kappa = 0,001$ .

La zona plástica aumenta rápidamente en las primeras etapas de la plastificación y para un alargamiento del 1,58 % todo el dominio está en régimen plástico. En la Figura 4a se ilustra la propagación de la zona plástica a medida que aumenta la carga. El valor de la carga que corresponde a las distintas zonas se muestra en la tabla que sigue en función del cociente  $T_{11}^{med}/Y(0)$ , donde  $T_{11}^{med}$  es la tensión normal media a lo largo de la línea AB. En la misma tabla se presenta también la deformación plástica equivalente media  $\bar{E}_m^p$  en las distintas zonas en el instante final de carga.



Zona	1	2	3	4	5	6	7	8
$T_{11}^{med}/\sigma_Y$	0,503	0,701	0,844	0,923	1,273	1,501	2,123	2,533
$\bar{E}_m^p$	0,193	0,0866	0,0573	0,0336	0,0241	0,00861	0,00552	0,00038

Figura 4. Deformación plástica equivalente media  $\bar{E}_m^p$  y configuración deformada

El número de iteraciones requerido para alcanzar la convergencia en cada incremento depende del tamaño del mismo y de la carga aplicada previamente. En las primeras etapas, a pesar de que el tamaño del incremento es pequeño ( $\varphi = 0,5$ ) y la pendiente elastoplástica es grande, se necesitan muchas iteraciones (entre 15 y 40), posiblemente debido a la fuerte variación en la distribución de tensiones en el entorno del agujero. Cuando la zona plástica ocupa la mayor parte del dominio se requieren usualmente menos de 20 iteraciones. Esta misma tendencia en cuanto al número de iteraciones se apunta también en la referencia 13. Naturalmente los mayores ajustes en las deformaciones plásticas se llevan a cabo en las primeras iteraciones de cada incremento.

En la Figura 4b se muestra la configuración deformada para dos etapas de carga (correspondientes a alargamientos del 2,5 % y 5 %). Los resultados obtenidos son similares a los presentados por Mukherjee y Chandra<sup>19</sup>.

La presencia de concentración de tensiones en el entorno del agujero causa grandes deformaciones plásticas en esa región. Éstas provocan una redistribución local de las tensiones como se ilustra en la Figura 5a. La primera de ellas ( $T_{11}^{med}/Y(0)=0,501$ ) corresponde a la carga máxima en régimen elástico. En la Figura 5b se representa la distribución de las deformaciones plásticas equivalentes en la línea AB en los distintos instantes de carga.

Finalmente, en la Figura 6 se realiza una representación de la tensión media y de la variación del diámetro del agujero en dirección horizontal y vertical (distancias OA y OC) frente al alargamiento. Nótese que en la dirección horizontal el diámetro primero disminuye ligeramente y luego aumenta con la deformación. Este comportamiento ha sido comprobado experimentalmente por Bourcier *et al.*<sup>6</sup>.

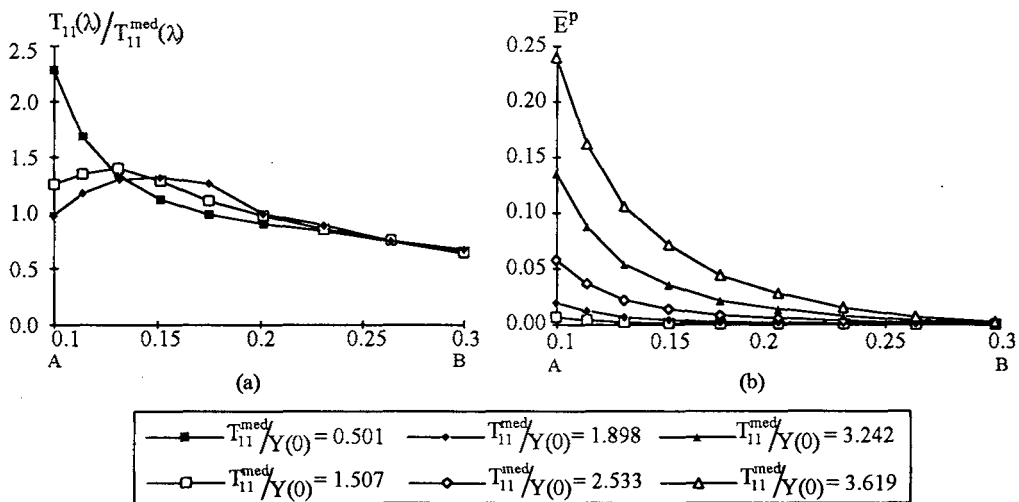


Figura 5. Tensiones normales y deformaciones plásticas equivalentes

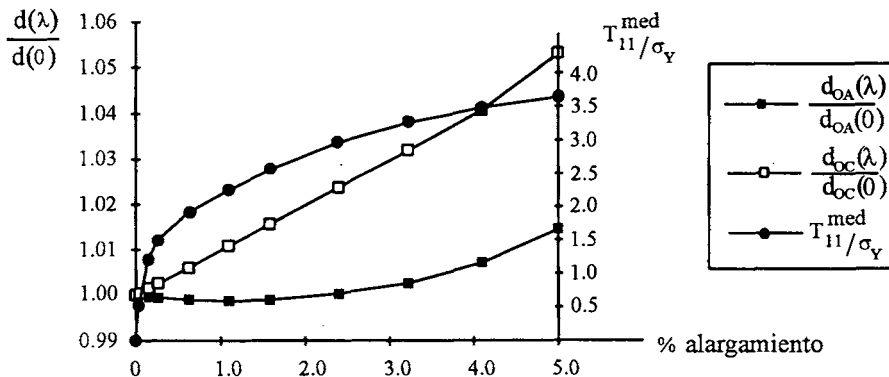


Figura 6. Tensión media y diámetro frente al alargamiento

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha mostrado que problemas inherentemente no-lineales pueden ser resueltos mediante un procedimiento basado en el MEC. Se ha incluido un algoritmo eficiente para la determinación de las deformaciones plásticas (A.R.G.) y para el cálculo de los gradientes de desplazamiento se ha propuesto un método indirecto de derivación polinómica con el que se obtiene una precisión suficiente como para hacer innecesario el empleo de métodos directos más complejos desde el punto de vista matemático y computacional.

La necesidad de discretizar e integrar sobre el dominio deteriora la principal ventaja del MEC sobre el MEF. No obstante, para el mismo grado de aproximación, el orden del sistema de ecuaciones resultante es menor (ya que depende sólo de la discretización de contorno realizada), lo cual resulta de interés en problemas como el estudiado, cuya resolución ha de ser incremental e iterativa.

Hay que destacar que, a pesar de que la solución obtenida puede ser computacionalmente costosa (por ser elevado el número de incrementos e iteraciones necesario para el correcto análisis) dicha solución satisface todas las leyes que rigen el problema de modo directo, sin necesidad de procesos externos adicionales como los empleados por otros autores<sup>13,14</sup>.

Adicionalmente sólo es necesario discretizar aquella zona del dominio afectada por las no-linealidades, lo que puede hacer especialmente adecuado este método para el estudio de problemas con no-linealidad local en los que las variables de interés estén asociadas al contorno. Dentro de este tipo de problemas se encuentra uno de alto interés como es el de contacto entre cuerpos con posibilidad de deformaciones plásticas finitas localizadas en la interfase de unión entre ambos. Cabe esperar que, como ocurre en problemas lineales, de los resultados numéricos que se puedan obtener del estudio de este problema, el MEC se presente como método alternativo al MEF también para problemas no-lineales de mecánica de sólidos.

## REFERENCIAS

1. E. Alarcón, M. Doblaré y J. Sanz-Serna, "Evaluación de integrales singulares y cuasisingulares en el método de los elementos de contorno bidimensionales mediante transformaciones no lineales", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 2, No. 7, pp. 123-137, (1991).
2. M. Alcantud, "Formulación y análisis del problema de contacto elastoplástico bidimensional mediante el método de los elementos de contorno", *Tesis Doctoral*, Universidad de Zaragoza, (1990).
3. P.K. Banerjee y S.T. Raveendra, "Advanced Boundary Element Analysis of Two - and Three-dimensional Problems of Elastoplasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 23, pp. 985-1002, (1986).
4. F.G. Benitez, E. Alarcón, C.A. Brebbia y J. Telles, "Tridimensional Plasticity Using BIEM", *Applied Mathematical Modelling*, No. 5, pp. 442-447, (1981).
5. J.F. Besseling y E. van der Giessen, "Mathematical Modelling of Inelastic Deformation", Chapman & Hall, (1993).

6. R. Bourcier *et al.*, "Deformation and Failure at Isolated Holes in Plane Strain Tension", *Proceedings of the 9th National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Cornell University, Ithaca, New York, (1982).
7. C.A. Brebbia, J.C.F. Telles y L.C. Wrobel, "*Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*", Springer-Verlag, Berlin (1984).
8. A. Chandra y S. Mukherjee, "Applications of the Boundary Element Method to Large Strain Large Deformation Problems of Viscoplasticity", *Journal of Strain Analysis*, No. 18, pp. 261-270, (1983).
9. J.H. Cheng y N. Kikuchi, "An Analysis of Metal Forming Processes Using Large Deformation Elastic-Plastic Formulation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, No. 49, pp. 71-108, (1985).
10. A. Curnier, "*Computational Methods in Solid Mechanics*", Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, (1993).
11. J. Dominguez, L. Gracia y M. Doblaré, "Evaluación de las integrales singulares del M.E.C. tridimensional mediante transformaciones no-lineales", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol 11, No. 1, pp. 61-70, (1995).
12. A.E. Green y P.M. Naghdi, "A General Theory of an Elastic-plastic Continuum", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, No. 18, 251-281, (1965).
13. H. Jin, K. Mattiasson, K. Runesson y A. Samuelsson, "On the use of the Boundary Element Method for Elastoplastic Large Deformation Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 25, pp. 165-176, (1988).
14. H. Jin, K. Runesson, y K. Mattiason, "Boundary Element Formulation in Finite Deformation Plasticity Using Implicit Integration", *Computers and Structures*, No. 31, pp. 25-34, (1989).
15. A. Lorenzana, "Formulación e implementación del problema elastoplástico con deformaciones finitas mediante ecuaciones integrales de contorno y de dominio", *Tesis Doctoral*, E.T.S. Ingenieros Industriales, Universidad de Valladolid, (1995).
16. J. Lubliner, "*Plasticity Theory*", Maxwell Macmillan International Editions, (1990).
17. J. Marsden y T.J.R. Hughes, "*Mathematical Foundations of Elasticity*", Prentice Hall, (1983).
18. R.M. McMeeking y J. R. Rice, "Finite-Element Formulations for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation", *Int. Journal of Solids and Structures*, No. 11, pp. 601-616, (1975).
19. S. Mukherjee y A. Chandra, "Boundary Element Formulations for Large Strain Large Deformation Problems of Plasticity and Viscoplasticity", in P.K. Banerjee y S. Mukherjee (eds.) "*Developments in Boundary Element Method-3*", Applied Science Publishers, pp. 27-58, London, (1984).
20. G.P. Nikishkov y S.N. Atluri, "Implementation of a Generalised Midpoint Algorithm for Integration of Elastoplastic Constitutive Relations for von Mises Hardening Material", *Computers and Structures*, No. 49, pp. 1037-1044, (1992).
21. G. Novati y C.A. Brebbia, "Boundary Element Formulation for Geometrically Nonlinear Elastostatics", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 6, pp. 136-138, (1982).
22. M. Ortiz y P. Popov, "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 21, pp. 1561-1576, (1985).
23. J.L. Swedlow y T.A. Cruse, "Formulation of Boundary Integral Equations for Three-dimensional Elastoplastic Flow", *International Journal of Solids and Structures*, No. 7, pp. 1673-1681, (1971).

24. J.C.F. Telles y C.A. Brebbia, "Viscoplasticity and Creep Using Boundary Elements", in "*Progress in Boundary Element Methods*", Vol. 2, C.A. Brebbia, (ed.), Pentech Press, pp. 200-215, London, (1983).
25. C. Truesdell, y W. Noll, "The Nonlinear Field Theories", in "*Handbuch der Physik*", (ed.) S. Flügge, Vol. III/3, Springer-Verlag, Berlin, (1965).
26. O.C. Zienkiewicz, S. Valliappan y I.P. King, "Elastic-plastic Solutions of Engineering Problems, Initial Stress, Finite Element Approach", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 1, pp. 75-100, (1969).