

## Generalización de elementos infinitos

Luis Gavete, Carlos Manzano, José Carlos Bellido y Antonio Ruiz

ETS Ingenieros de Minas  
Universidad Politécnica de Madrid  
Ríos Rosas 21, 28003 Madrid  
Tel.: 34-91-336 69 74, Fax: 34-91-336 70 51  
e-mail:gavete@dmami.upm.es

### Resumen

El objeto del presente trabajo es la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales empleando elementos infinitos en la modelización del dominio no acotado. Los elementos infinitos constituyen una forma económica de extender el método de elementos finitos al caso de trabajar con dominios no acotados. Este artículo muestra como generalizar el elemento infinito desarrollado por Zienkiewicz *et al.*<sup>19</sup> para conseguir interpolaciones de mayor orden y utilizar diferentes tipos de caída en el infinito. Se ha podido comprobar el buen comportamiento de los elementos utilizados, incluso en un caso de descomposición de dominios y un aumento en la exactitud de los resultados. Si comparamos estos elementos infinitos con sus anteriores tipos, la aproximación propuesta tiene mayor eficacia computacional, ya que el error relativo de los diferentes parámetros que afectan a estos elementos disminuye.

### GENERALIZATION OF INFINITE ELEMENTS

### Summary

The focus of the present work is the numerical solution of partial and ordinary differential equations by using infinite elements instead of finite domain truncation. Infinite elements are becoming increasingly popular as an economical means of extending the finite element method to deal with unbounded domains. This paper shows how to generalize the mapped infinite element of Zienkiewicz *et al.*<sup>19</sup> to higher order interpolations and to different decay rates at infinity. A good performance of the proposed infinite elements is seen, including a domain decomposition problem, with a significant improvement in the accuracy of the results. Compared to the previous mapped infinite elements, the present infinite elements are of higher efficiency in computation because the error related with the different parameters involved always decreases.

### INTRODUCCIÓN

En el medio físico existen muchos problemas definidos en dominios no acotados, por ejemplo un objeto en el mar que es golpeado por las olas, un avión en vuelo o la cimentación de una presa, donde la extensión del medio circundante es tan grande que debemos de alguna manera acotar el área de interés, en cuyo caso la condición de contorno del campo lejano no está claramente definida. En el desarrollo de la mecánica de medios continuos, la matemática aplicada ha preferido desde el principio tratar tales problemas como definidos en un medio no acotado.

La primera solución analítica de un problema en un medio no acotado fue dada por Kelvin<sup>1</sup>, quien consideró una carga puntual en un espacio elástico en  $\mathbb{R}^2$ . Luego surgieron muchas soluciones para problemas específicos incluyendo la solución de Boussinesq<sup>2</sup> para una carga puntual en un espacio elástico en  $\mathbb{R}^3$  y la solución de Stokes<sup>3</sup> para una esfera en movimiento lento uniforme en un fluido viscoso no acotado.

Uno de los primeros intentos para producir soluciones numéricas a los problemas idealizados como no acotados (un medio infinito) fue el análisis de diferencias finitas de Richardson<sup>4</sup> de una presa y su cimentación. En este caso la solución numérica próxima a la presa se igualó a la solución del semiplano de Boussinesq a una cierta distancia.

Otros problemas no acotados se han resuelto numéricamente, muy particularmente en los últimos años. Existen muchas posibilidades de aplicación de procesos numéricos esencialmente finitos en dominios no acotados. Mencionemos algunas de las técnicas que han sido utilizadas:

- ajuste de soluciones analíticas en la zona más alejada del dominio a estudiar<sup>5</sup>;
- transformación del dominio no acotado en uno acotado<sup>6</sup>;
- uso del método de la integral de contorno que es esencialmente no acotado<sup>7</sup>;
- transformación a coordenadas de tipo logarítmico<sup>8</sup>;
- métodos recurrentes con aumento progresivo del dominio a estudiar<sup>9,10</sup>.

Todos estos métodos tienen sus ventajas e inconvenientes, como puede verse en la referencia<sup>11</sup>.

La idea de los elementos infinitos lleva consigo la extensión de un dominio o elemento finito en otro no acotado. Esto requiere, en primer lugar, unas funciones de forma apropiadas que estén definidas en el infinito y que tiendan al valor finito adecuadamente, y en segundo lugar, un método de integración sobre el dominio no acotado<sup>12</sup>.

El primer elemento infinito que se desarrolló fue el de Ungless y Anderson<sup>13</sup> en 1973. El primer trabajo que apareció publicado sobre el tema de elementos infinitos fue un artículo de Zienkiewicz y Bettess<sup>14</sup> en 1975.

La formulación original de elementos infinitos de Bettess<sup>15,16</sup> fue bastante diferente. El dominio correspondiente a un elemento finito se extiende hasta el infinito, utilizando como base el elemento finito original. La función de forma se multiplica entonces por una función de caída que es apropiada para el tipo de problema en particular.

Las siguientes formulaciones de elementos infinitos han seguido dos líneas principales de desarrollo. La primera ha estado basada en algún tipo de transformación desde el dominio finito al infinito. La segunda ha sido el uso de funciones de caída junto con las funciones de forma ordinarias. Una descripción pormenorizada de las formulaciones de elementos infinitos puede consultarse en Bettess<sup>12</sup>.

Curnier<sup>17</sup> caracteriza ambos métodos citados como de función de caída y de transformación como "función de forma descendente y ascendente", respectivamente. Demuestra que los dos métodos se pueden hacer equivalentes, dependiendo de la elección de la función de forma. Sin embargo, el método de la transformación tiene la ventaja, como puede verse en Zienkiewicz *et al.*<sup>18,19</sup>, de conservar la regla de cuadratura del elemento finito.

Okabe<sup>20</sup> da varias funciones de forma posibles para dominios infinitos, basándose en lo que él llama "familia de Lagrange generalizada para el cubo". Esto parece ser un descubrimiento independiente de la transformación propuesta anteriormente por Zienkiewicz *et al.*<sup>18</sup>. Okabe comenta las ventajas de esta transformación. La forma en que la transformación de Zienkiewicz fue dada originalmente ha sido simplificada y sistematizada por Marques y Owen<sup>21</sup> que calcularon y tabularon las funciones de transformación para un amplio rango de elementos comúnmente utilizados.

### ELEMENTOS INFINITOS DE ALTO ORDEN

Consideremos un elemento infinito unidimensional con  $n$  nodos numerados como  $1, 2, \dots, n$  (Figura 1).

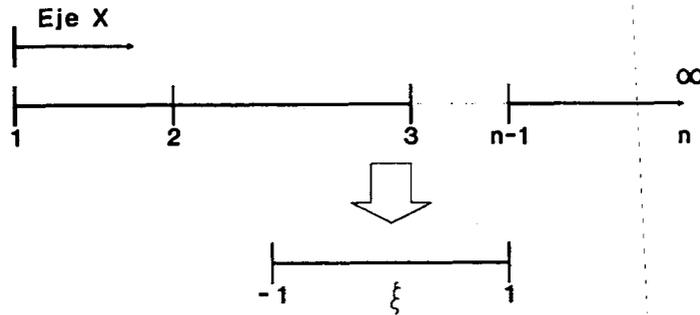


Figura 1

Se puede transformar el elemento infinito de coordenadas globales  $x_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) en el espacio de coordenadas naturales  $\xi$  con  $-1 \leq \xi \leq 1$  como

$$\xi = f(x) \tag{1}$$

o inversamente

$$x = g(\xi) \tag{2}$$

Con ello se realiza un cambio de variable que nos permite pasar de un dominio semiinfinito  $x_1 \leq x \leq x_n = \infty$  a un dominio finito  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

El cambio de variable (2), que no es único, transforma

$$\xi = -1 + \frac{2(i-1)}{n-1} \quad \text{en } x = x_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{3}$$

o también es posible emplear la siguiente transformación

$$\xi = 1 - \frac{2(i-1)}{n-1} \quad \text{en } x = x_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{4}$$

es decir, se puede elegir como transformación de  $x = \infty$  tanto  $\xi = -1$  como  $\xi = 1$  y asignar el resto de puntos según el orden correspondiente.

Para definir el cambio de variable (2) utilizaremos  $n-1$  funciones  $M_i$  que multiplicaremos por valores finitos de la función  $x$ , obteniendo por tanto

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i M_i \tag{5}$$

donde  $M_i$  son las funciones de base que poseen las siguientes propiedades

$$\sum_{i=1}^{n-1} M_i = 1; \quad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{dM_i}{d\xi} = 0 \tag{6}$$

Estas propiedades se originan al considerar que las funciones  $M_i$  de cada elemento infinito constituyen una partición de la unidad (ver Apéndice).

La función a aproximar  $u$  es interpolada como

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (7)$$

siendo  $u_i$  los valores obtenidos en los nodos del elemento y  $N_i$  las funciones de forma estándar. Sustituyendo (1) en (7), tendremos

$$u = h(x) \quad (8)$$

que es la función a aproximar mediante elementos infinitos.

Supongamos que deseamos obtener una función como  $u = \frac{1}{x-x_0}$ . En este caso es necesario fijar el punto  $x = x_0$  como el punto en el que los valores de  $u$  se hacen  $\infty$ . Este punto es denominado polo y debe encontrarse fuera del elemento infinito.

Para los elementos infinitos la transformación geométrica se debe a Zienkiewicz *et al.*<sup>19</sup> y en el caso unidimensional se puede escribir como

$$\xi = 1 - \frac{2a}{x - x_0} \quad a = x_1 - x_0 \quad (9)$$

o inversamente

$$x = x_0 + \frac{2a}{1 - \xi} \quad (10)$$

donde  $x_0$  es la coordenada del polo. Zienkiewicz ha aplicado esta transformación a elementos finitos de tipo lineal y cuadrático, pero su aplicabilidad a elementos de alto orden es evidente<sup>12,21,22</sup>.

La manera de representar la transformación geométrica para elementos de alto orden ( $n > 3$ ) usando la ecuación (5), viene dada en la Tabla I. En el Apéndice veremos como calcular las expresiones de la Tabla I. En la Tabla I damos, de acuerdo con las expresiones (1) a (8) y la Figura 1, las funciones de transformación (algunas previamente publicadas en<sup>12,21,22</sup>) y la relación entre las coordenadas en función de la colocación del polo. Las funciones resultantes, para elementos con cinco y seis puntos de soporte son fáciles de obtener. Barbier *et al.*<sup>23</sup> han publicado recientemente un artículo con la generalización automática de estas funciones.

Usando (1) y sustituyendo en las funciones de forma  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), se puede comprobar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} N_n = 1 \quad (11)$$

Otro aspecto importante de esta transformación son las propiedades de conservación. Como es conocido, la pendiente de cada función de base  $N_i$  en el sistema de coordenadas naturales en  $\xi = 1$  es no nula. Sin embargo, cuando se transforma en el espacio de las  $x$  y se acerca al infinito, tiende a cero<sup>24</sup>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dN_i}{dx} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

La extensión al caso bidimensional es sencilla empleando las transformaciones anteriores en la dirección  $\xi$  y las funciones estándar de Lagrange en la otra dirección. La extensión al caso tridimensional es también bastante sencilla, siguiendo el mismo procedimiento.

Puntos de soporte	Transformación de coordenadas	Posición del polo
3	$M_1 = \frac{-2\xi}{1-\xi}; \quad M_2 = \frac{1+\xi}{1-\xi}$ (Publicada en las referencias <sup>2,10</sup> )	$x_2 - x_1 = x_1 - x_0$
4	$M_1 = \frac{9\xi^2-1}{4(1-\xi)}; \quad M_2 = -\frac{(\xi+1)(3\xi-1)}{1-\xi}$ $M_3 = \frac{(\xi+1)(3\xi+1)}{4(1-\xi)}$ (Publicada en las referencias <sup>2,12</sup> )	$x_2 - x_1 = (x_1 - x_0)/2$ $x_3 - x_2 = x_2 - x_0$
5	$M_1 = -\frac{8\xi(\xi^2-\frac{1}{4})}{3(1-\xi)}; \quad M_2 = \frac{6\xi(\xi+1)(\xi-\frac{1}{2})}{1-\xi}$ $M_3 = -\frac{4(\xi+1)(\xi^2-\frac{1}{4})}{1-\xi}; \quad M_4 = \frac{2\xi(\xi+1)(\xi+\frac{1}{2})}{3(1-\xi)}$	$x_2 - x_1 = (x_1 - x_0)/3$ $x_3 - x_2 = (x_2 - x_0)/2$ $x_4 - x_3 = x_3 - x_0$
6	$M_1 = \frac{(25\xi^2-1)(25\xi^2-9)}{192(1-\xi)}$ $M_2 = -\frac{(25\xi^2-1)(5\xi^2+2\xi-3)}{12(1-\xi)}$ $M_3 = \frac{3(25\xi^2-9)(5\xi^2+4\xi-1)}{32(1-\xi)}$ $M_4 = -\frac{(25\xi^2-9)(5\xi^2+6\xi+1)}{24(1-\xi)}$ $M_5 = \frac{(25\xi^2-1)(5\xi^2+8\xi+3)}{192(1-\xi)}$	$x_2 - x_1 = (x_1 - x_0)/4$ $x_3 - x_2 = (x_2 - x_0)/3$ $x_4 - x_3 = (x_3 - x_0)/2$ $x_5 - x_4 = x_4 - x_0$

Tabla I. Funciones de transformación de elementos infinitos

### ESTUDIO DEL ERROR EN P-CONVERGENCIA

Lo esencial del método consiste en una transformación de un dominio no acotado (o una parte de él) en un nuevo dominio (acotado) empleando una transformación geométrica que cumple con las condiciones estándar dadas en<sup>15,16,27</sup>. Babuška y Oh<sup>27</sup> han demostrado que la técnica de transformación de los elementos finitos conduce a un tipo de convergencia exponencial para la ecuación de Laplace en la forma

$$\|u_0 - u_p\|_E \leq ce^{-\gamma\sqrt{N_p}} \tag{13}$$

siendo  $u_0$  la solución débil del problema,  $\| \|_E$  la norma de la energía o norma  $H_1$ ,  $p$  el grado de los elementos,  $c$  y  $\gamma > 0$  constantes independientes de  $p$  y  $N_p$  el número de grados de libertad.

Se han realizado estudios previos de la sensibilidad de los elementos infinitos<sup>22,28,29</sup>. Daremos a continuación algunos ejemplos con elementos infinitos de alto orden.

### Ejemplo 1. Ecuación diferencial ordinaria en un dominio no acotado

Consideremos primeramente la ecuación diferencial  $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$  en el dominio  $\Omega = [2, \infty[$  junto con las condiciones de contorno  $u(2) = 0,5$  y  $u(\infty) = 0$ .

La solución evidente del problema es  $u = \frac{1}{x}$  y esta será el tipo de caída a utilizar en el elemento infinito.

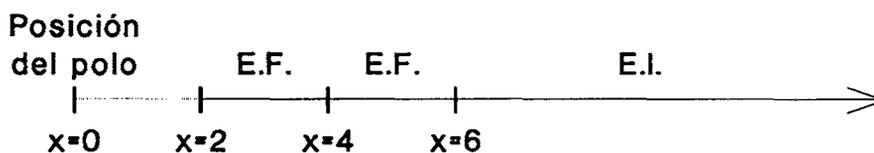


Figura 2

En la Figura 2 se puede ver el modelo sencillo que se ha empleado, con dos elementos finitos y un elemento infinito, todos ellos con el mismo número de nodos y tal como se han definido en la Tabla I. Podemos emplear las distintas funciones de transformación y realizar un estudio de  $p$ -convergencia, incrementando al mismo tiempo el orden de los elementos finitos e infinito.

Los parámetros que tienen influencia en los resultados serán: el orden de integración numérica, la posición del polo y el número de nodos de los elementos. Existen conclusiones teóricas sencillas acerca de la exactitud de la integración. En este ejemplo los términos típicos de la matriz y el correspondiente vector del elemento infinito son

$$K_{ij}^e = \int_{x_1}^{\infty} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \quad (14)$$

y

$$F_i^e = - \int_{x_1}^{\infty} \frac{2}{x^3} N_i dx \quad (15)$$

De la ecuación (10)

$$dx = \frac{2a}{(1-\xi)^2} d\xi \quad (16)$$

y la variable de integración puede cambiarse, resultando

$$K_{ij}^e = \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} \frac{(1-\xi)^2}{2a} d\xi \quad (17)$$

$$F_i^e = - \int_{-1}^1 \frac{1-\xi}{2a^2} N_i d\xi \quad (18)$$

Los integrandos son polinomios en  $\xi$  de grado  $2n-2$  y  $n$  respectivamente, donde  $n$  es el número de nodos del elemento. Es conocido que, si empleamos la cuadratura de Gauss, un polinomio de orden  $(2m-1)$  es integrado de forma exacta con sólo  $m$  evaluaciones de

la función. En general el orden apropiado de integración depende de la expresión que es evaluada y del elemento considerado. En la Tabla II se muestran los resultados obtenidos para este ejemplo.

Elementos infinitos (primer ejemplo)		
Número de nodos	$2n - 2$	Orden de integración
3	4	3
4	6	4
5	8	5
6	10	6

Tabla II Orden de integración numérica (primer ejemplo)

En este caso consideramos fija la posición de la interfase entre los elementos finitos e infinito, los resultados obtenidos se dan en la Figura 3, donde se ve el error en norma  $H_1$ ,  $[\int_{\Omega} (|u - u_p|^2 + |\frac{du}{dx} - \frac{du_p}{dx}|^2) dx]^{1/2}$  en el dominio en función del número de grados de libertad. La Figura 4 es similar a la Figura 3, pero considerando el  $H_1$ -error sólo en el elemento infinito.

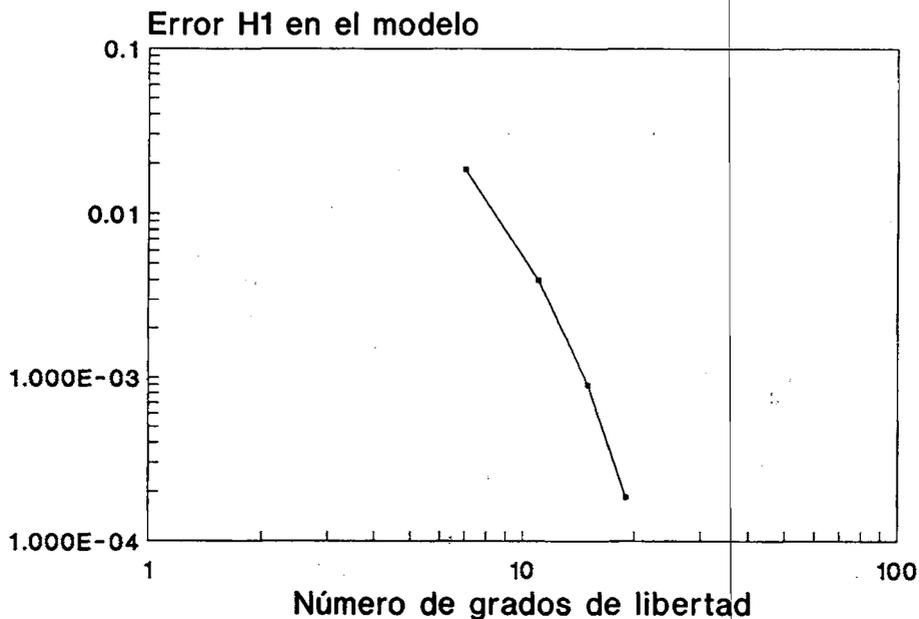


Figura 3

En la Figura 5 se relaciona el error en el elemento infinito con la posición del polo (la posición adecuada es  $x = 0$ ). Podemos ver que el error crece si se aleja el polo de  $x = 0$ . El error disminuye si empleamos mayor número de nodos en el elemento infinito y el orden de integración es el apropiado, el dado en la Tabla II. Asimismo, la influencia de la posición del polo disminuye cuando aumenta el orden del elemento infinito.

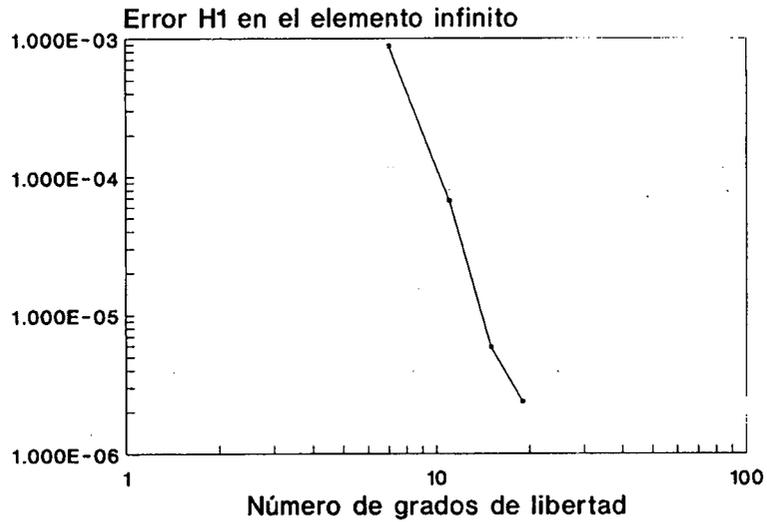


Figura 4

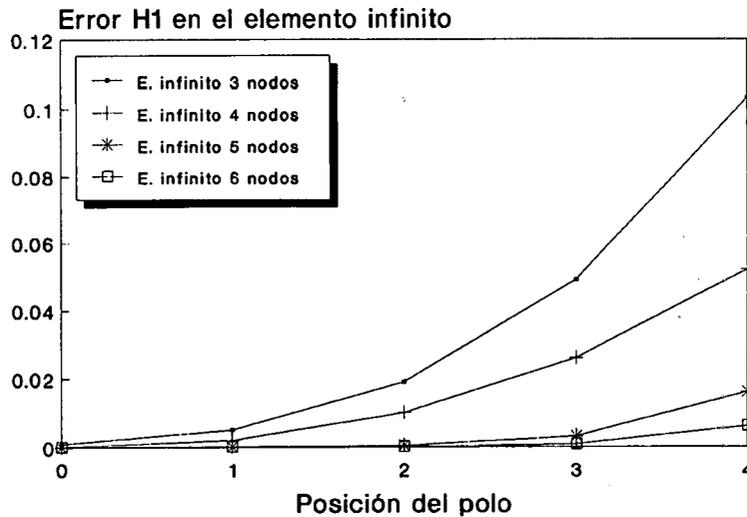


Figura 5

### Ejemplo 2. Ecuación diferencial ordinaria en un dominio no acotado, con solución en el campo complejo, resuelta por un método Petrov-Galerkin

Los anteriores parámetros que tienen influencia en los elementos infinitos han sido también estudiados en el caso de la ecuación usada por Bettess<sup>30</sup> para chequear sus teorías sobre elementos infinitos.

El problema a resolver es

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r}ik - k^2 \right] \phi \quad (19)$$

con las condiciones de contorno en  $\Omega = [1, \infty[$

$$\begin{aligned} \phi &= e^{ik} \quad \text{en } x = 1 \\ \phi &= 0 \quad \text{en } x = \infty \end{aligned}$$

La solución conocida es  $\phi = \frac{e^{ikr}}{r}$ , siendo  $k = 2\pi\lambda$  el número de onda,  $r$  el radio y  $\lambda$  la longitud de onda.

Tomaremos como funciones de forma para la aproximación de la solución en el dominio semiinfinito  $\Omega$

$$N_j = N_j e^{ikr} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (n = 4, 5, 6) \tag{20}$$

donde  $N_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) son las funciones de forma estándar de Lagrange con  $n$  puntos.

Las correspondientes funciones de peso son los complejos conjugados

$$W_j = N_j e^{-ikr} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (n = 4, 5, 6) \tag{21}$$

Es decir,  $W_j$  son los complejos conjugados de  $N_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Esta técnica ha sido aplicada por Astley<sup>31</sup> y Bettes<sup>30</sup> con elementos infinitos cuadráticos. Consideremos el modelo  $\Omega$  dado en la Figura 6.

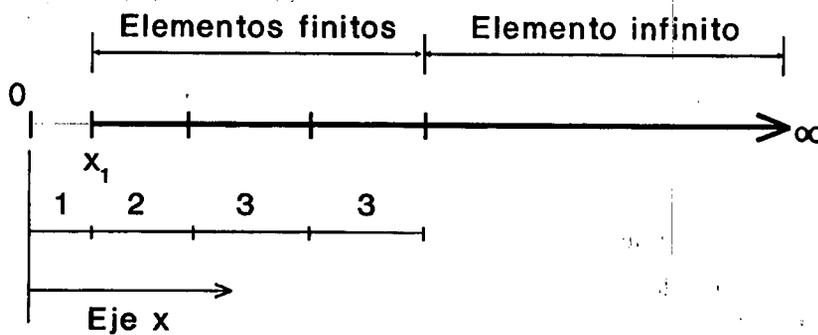


Figura 6

Primeramente,  $\phi$  se escribe en términos de los valores nodales de  $\phi$  y de las funciones de forma como

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i \tag{22}$$

Esta expresión se sustituye en la ecuación (19) multiplicada por las funciones de peso (21) (método Petrov-Galerkin) y se integra entre  $r = 1$  e  $\infty$ . Así tendremos

$$\sum_{j=1}^n \int_1^{\infty} \left[ W_i \frac{d^2 N_j}{dr^2} - W_i \left( \frac{2}{r^2} - \frac{2ik}{r} - k^2 \right) N_j \right] \phi_j dr = 0 \quad (23)$$

Integrando por partes

$$\sum_{j=1}^n \int_1^{\infty} \left[ \frac{dW_i}{dr} \frac{dN_j}{dr} - W_i N_j \left( \frac{2}{r^2} - \frac{2ik}{r} - k^2 \right) \right] \phi_j dr = 0 \quad (24)$$

Las funciones de forma y de peso se pueden expresar en términos de  $\xi$  y consecuentemente el ámbito de la integración será desde  $\xi = -1$  a  $\xi = 1$ . Tendremos entonces

$$\sum_{j=1}^n (K_{ij} + F_{ij}) \phi_j = 0 \quad (25)$$

siendo  $K_{ij}$

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{dW_i}{dr} \frac{dN_j}{dr} \frac{1}{|\text{JACOB}|} d\xi \quad (26)$$

y  $F_{ij}$

$$F_{ij} = \int_{-1}^1 W_i N_j \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{2ik}{r} - k^2 \right] |\text{JACOB}| d\xi \quad (27)$$

Resulta obvio que para calcular el Jacobiano emplearemos las funciones de forma estándar de Lagrange y para los elementos infinitos las funciones de transformación definidas anteriormente en la Tabla I.

Para resolver el problema es necesario considerar lo siguiente:

- el orden de integración numérica,
- la posición del polo,
- el tipo de elemento infinito,
- la colocación de la interfase entre los elementos finitos e infinitos.

Evidentemente, todos los términos exponenciales de las integrales (26) y (27) se eliminan, dejando únicamente polinomios en  $\xi$  para integrar, integrales que son sencillas de obtener y pueden ser evaluadas usando el método de Gauss-Legendre. En este ejemplo el término de mayor orden en  $\xi$  encontrado es el mismo que en el ejemplo anterior y se pueden aplicar los resultados de la Tabla II para elegir el orden de integración de los elementos infinitos.

Es interesante saber como varían los resultados cuando cambiamos la posición del polo. En la Figura 7 se muestra el error en los diferentes elementos infinitos cuando cambiamos la posición del polo. Se puede comprobar que el error disminuye cuando aumenta el orden del elemento infinito, es decir los elementos infinitos de alto orden son menos sensibles a cambios de la posición del polo.

En la Figura 8 se han representado los resultados del estudio de  $p$ -convergencia del modelo de la Figura 6. El número de nodos se aumenta al mismo tiempo en los elementos finitos e infinito.

La variación del error con el tipo de elemento infinito empleado puede verse en la Figura 9.

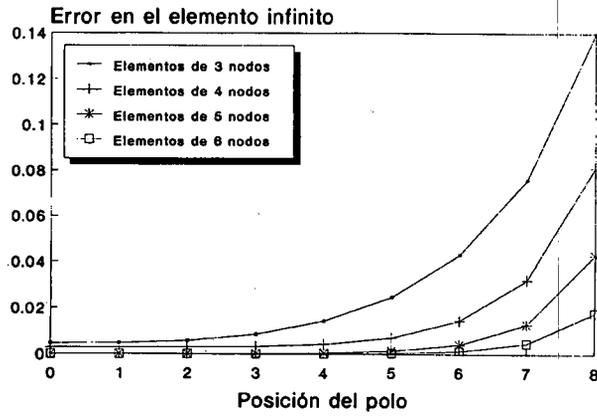


Figura 7

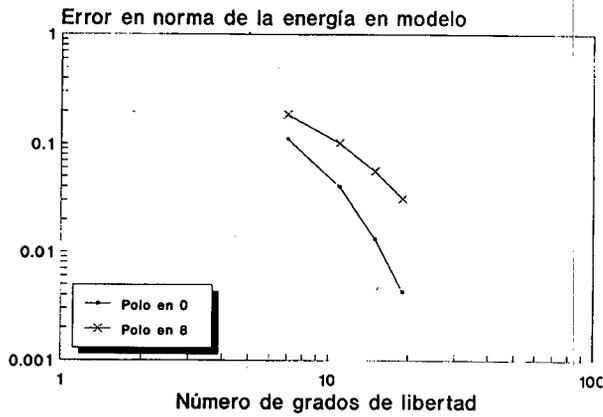


Figura 8

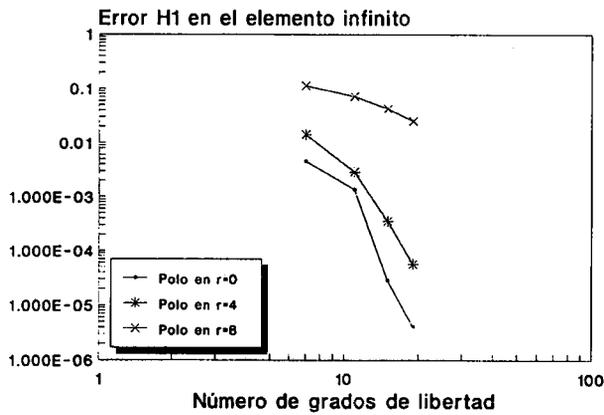


Figura 9

Como se puede ver, el error disminuye para cualquier posición del polo, cuando aumenta el número de nodos del elemento infinito. Similarmente el error disminuye cuando se traslada la posición del polo  $x_0$  a su ubicación correcta en el problema considerado.

Cuando se estima la necesidad de emplear elementos infinitos en un problema, es necesario decidir donde debe colocarse la interfase entre elementos finitos e infinitos. Por este motivo se han considerado en el modelo de la Figura 10 diferentes posiciones de la interfase para una posición fija del polo. Los resultados obtenidos dependen de la posición de la interfase. También es interesante conocer al mismo tiempo el efecto del cambio de la posición del polo. Definimos como "sensibilidad a la posición del polo" en un nodo I, para nuestro modelo de la Figura 10, como

$$|u_I \text{ polo en } (r = 0) - u_I \text{ polo en } (r = 6)|$$

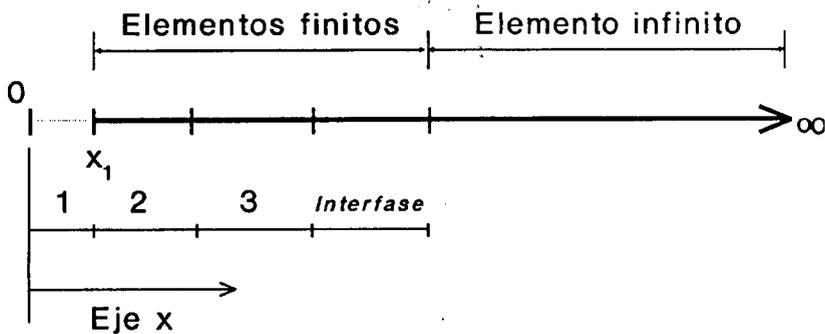


Figura 10

De acuerdo con la Figura 10 consideramos una zona cubierta por elementos finitos y cambiamos la posición de la interfase añadiendo más elementos finitos de longitud igual a tres.

En la Figura 11 podemos ver la representación de la sensibilidad a la posición del polo en el nodo inicial de la interfase en función de la posición de dicha interfase, para número de onda  $k = 1$

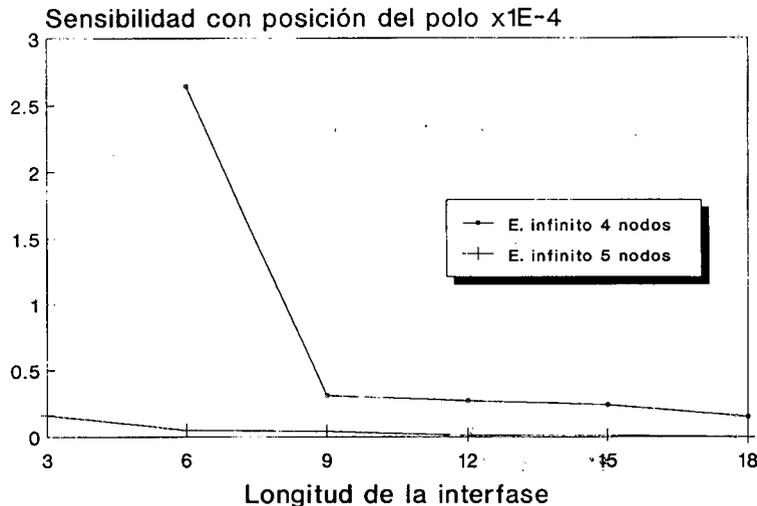


Figura 11

La sensibilidad a la posición del polo disminuye cuando aumenta la longitud de la interfase. Si aumentamos el orden del elemento infinito empleado, la variación de la sensibilidad a la posición del polo se hace menor.

La Figura 12 da el error en función del número de onda para distintos elementos infinitos, con el polo situado en  $x = 0$ . Para un cierto rango de valores del número de onda (entre 1 y 10) el error presenta alguna variación para todos los elementos considerados, pero la influencia es similar en todos los casos.

Las conclusiones extraídas de la Figura 12 son:

- a) El error disminuye cuando ese aumenta el número de nodos del elemento infinito.
- b) El error en función del número de onda es similar para todos los elementos considerados.

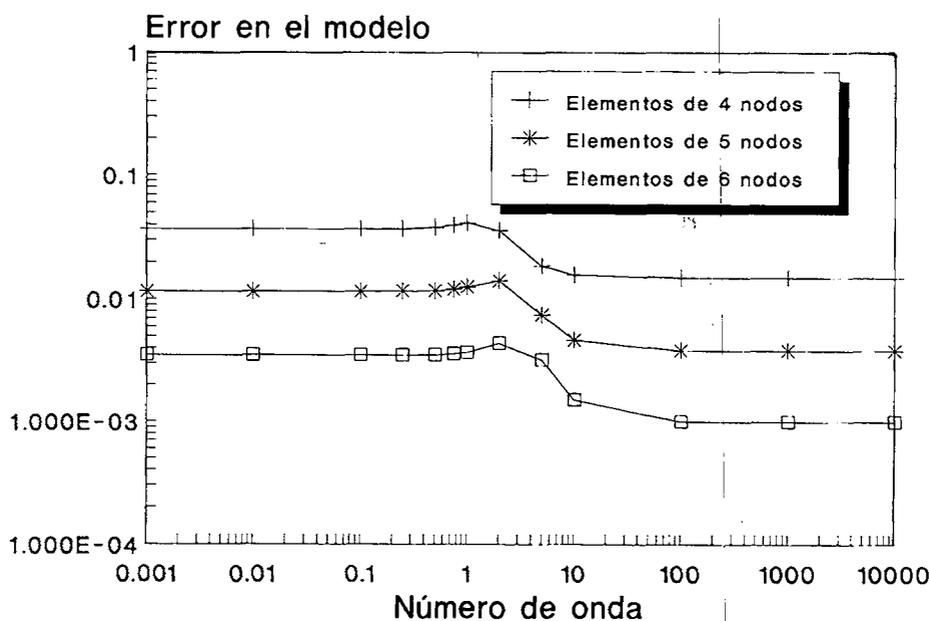


Figura 12

### Ejemplo 3. Ecuación de Laplace en un dominio no acotado

Consideremos como tercer ejemplo la ecuación de Laplace en el dominio  $\Omega = \{z: |z| \geq 1/2\}$ . Si  $\Omega_\infty = \{z: |z| \geq 1\}$ , la malla realizada se ve en la Figura 13. Impongamos la condición de contorno no homogénea de Dirichlet en la frontera  $\Gamma$ , dada por la solución del problema  $x(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ .

El error en norma de la energía y el tipo de convergencia exponencial se muestra en la Figura 14.

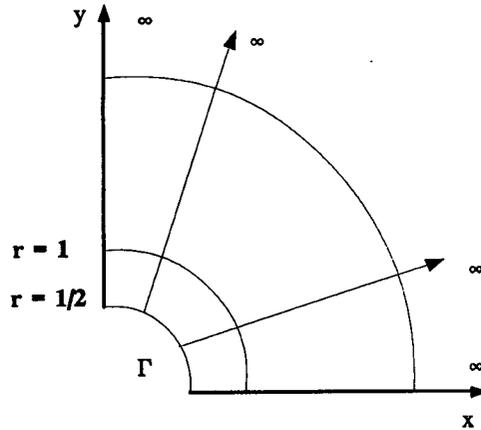


Figura 13

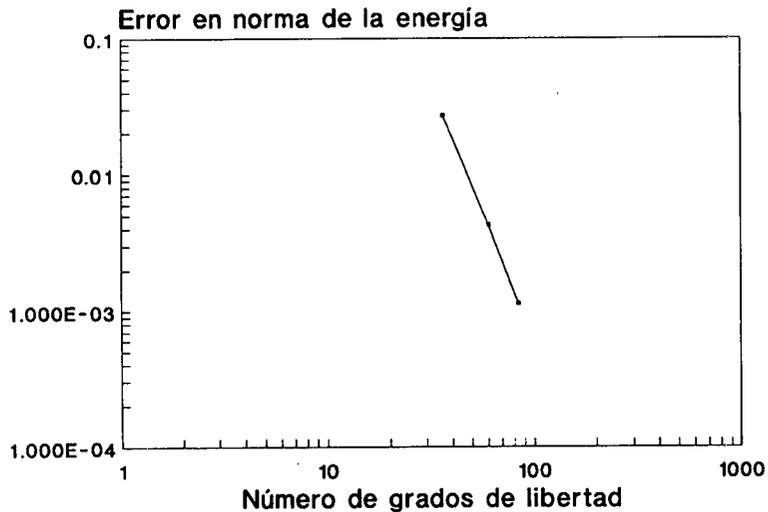


Figura 14

## OTROS TIPOS DE CAÍDA

Consideramos aquí otros tipos de caída para los elementos infinitos. Tipos de caída diferentes a  $1/r$  han sido utilizados por varios autores como Bettess<sup>16</sup>, Zienkiewicz *et al.*<sup>32</sup>, Gavete, Manzano y Ruiz<sup>28</sup> que incorporan tipos de caídas especiales. Otros autores que han obtenido elementos con diferentes tipos de caída son Honjo y Pokharel<sup>33</sup> quienes a su vez referencian en su artículo a otras publicaciones en este campo. Vamos a mostrar algunas funciones de transformación que pueden emplearse en orden a modelizar caídas del tipo  $1/r^\eta$  o  $1/r^{1/\eta}$ , siendo  $\eta$  un entero  $\eta \geq 1$ . Este tipo de caída aparece en la solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales planteadas en dominios no acotados.

El tipo de caída depende de la ecuación diferencial (EDP) que define el problema a resolver, siendo una solución particular de dicha ecuación. En la Tabla III se pueden ver

tipos de caídas o soluciones de algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Las soluciones dadas pueden aplicarse en problemas gobernados por ese tipo de ecuación.

Caída tipo	Ecuación de derivadas parciales
$1/r^\eta$	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \begin{cases} \frac{(\eta - 1) \partial \phi}{x \partial x} = 0 \\ \frac{(\eta - 1) \partial \phi}{y \partial y} = 0 \\ \frac{(\eta - 1) \partial \phi}{z \partial z} = 0 \end{cases}$ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{\eta+2}^2} = 0$
$1/r^{1/\eta}$	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \begin{cases} \frac{(\eta - 1) \partial \phi}{\eta x \partial x} = 0 \\ \frac{(\eta - 1) \partial \phi}{\eta y \partial y} = 0 \\ \frac{(\eta - 1) \partial \phi}{\eta z \partial z} = 0 \end{cases}$

Tabla III

La transformación geométrica<sup>19</sup> es fácilmente generalizable a tipos de caída  $1/r^\lambda$ , donde  $\lambda = \eta$  o  $\lambda = 1/\eta$ , siendo  $\eta$  un entero  $\eta \geq 1$ .

Consecuentemente la ecuación (11) puede escribirse como

$$x = x_0 + \frac{2^{1/\lambda} a}{(1 - \xi)^{1/\lambda}} \tag{28}$$

Si usamos esta transformación considerando un elemento cuadrático unidimensional con el tercer punto en el infinito, la transformación en el dominio  $-1 \leq \xi \leq 1$  (Figura 1 con  $n = 3$ ) es de la forma

$$x = M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2 \tag{29}$$

Las funciones de transformación se definen como sigue

$$M_1 = \frac{\alpha}{(1 - \xi)^{1/\eta}} - \alpha \quad M_2 = 1 - \frac{\alpha}{(1 - \xi)^{1/\eta} a} + \alpha \tag{30}$$

donde  $\alpha = \frac{2^{1/\eta}}{(1-2)^{1/\eta}}$  para la caída del tipo  $1/r^\eta$  y

$$M_1 = \frac{2^\eta}{2^\eta - 1} \left( 1 - \frac{1}{(1 - \xi)^\eta} \right) \quad M_2 = \frac{1}{2^\eta - 1} \left( \frac{2^\eta}{(1 - \xi)^\eta} - 1 \right) \tag{31}$$

para la caída del tipo  $1/r^{1/\eta}$  donde  $\eta$  es un entero  $\eta \geq 1$ .

Si consideramos el polo en  $x_0 \neq 0$ , la relación entre  $x_1$  y  $x_2$  es

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= (2^{1/\eta} - 1)(x_1 - x_0) \quad \text{para la caída de tipo } 1/r^\eta \\ x_2 - x_1 &= (2^\eta - 1)(x_1 - x_0) \quad \text{para la caída de tipo } 1/r^{1/\eta} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

La variable básica  $\phi$  puede ser interpolada usando las funciones estándar. Por ejemplo, si el elemento es isoparamétrico, tendremos

$$\phi = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)\phi_1 + (1 - \xi^2)\phi_2 + \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)\phi_3 \quad (33)$$

y resolviendo (29) para  $\xi$  y teniendo en cuenta (32), tendremos

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 1 - (2x_1^\eta/x^\eta) \quad \text{para la caída de tipo } 1/r^\eta \\ \xi &= 1 - (2x_1^{1/\eta}/x^{1/\eta}) \quad \text{para la caída de tipo } 1/r^{1/\eta} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

donde  $x$  indica la distancia al polo.

Sustituyendo (34) en (33), podemos expresar  $\phi$  en términos de la coordenada  $x$  global como sigue

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \beta_0 + \frac{\beta_1}{x^\eta} + \frac{\beta_2}{x^{2\eta}} \quad \text{para la caída de tipo } 1/r^\eta \\ \phi &= \beta_0 + \frac{\beta_1}{x^{1/\eta}} + \frac{\beta_2}{x^{1/2\eta}} \quad \text{para la caída de tipo } 1/r^{1/\eta} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

donde  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes. Este elemento reproduce la caída del tipo  $1/r^\eta$  o  $1/r^{1/\eta}$ , si la solución analítica del problema a resolver es  $1/x^\eta$  o  $1/x^{1/\eta}$  y la condición de contorno en el infinito es  $\phi = \beta_0$ .

La función de transformación (28) puede extenderse al caso de elementos infinitos de alto orden. Los resultados obtenidos para  $M_i(\xi)$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) pueden verse en la Tabla IV para la caída  $1/r^\eta$  y en la Tabla V para la caída  $1/r^{1/\eta}$ . En el Apéndice se muestra como calcular las expresiones de las Tablas IV y V.

Para estudiar la influencia del tipo de caída, consideramos un dominio no acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , que se corresponde con el modelo de la Figura 15 y consiste en un espacio elástico con un punto cargado. Boussinesq<sup>2</sup> dio una solución para este problema<sup>12</sup>. La superficie libre del semiespacio elástico es el plano  $xy$  y la dirección  $z$  es la vertical por debajo de dicho plano. La carga  $P$  actúa verticalmente hacia abajo en el origen.

El desplazamiento en la vertical por debajo del punto cargado viene dado por

$$(u_z)_{y=0} = \frac{(1 + \nu)(3 - 2\nu) P}{2\pi E} \frac{P}{z} \quad (36)$$

Es interesante conocer el efecto de usar diferentes tipos de funciones de caída en el elemento infinito. Si consideramos la misma posición del polo para todas las caídas, la posición de los nodos del elemento infinito depende del tipo de caída de acuerdo con las Tablas IV y V.

Los valores del desplazamiento obtenidos para los diversos tipos de caídas, así como la solución analítica del problema se muestran en la Figura 16.

Obviamente la mejor aproximación se obtiene para la caída del tipo  $1/r$ , que se corresponde con la solución analítica del problema.

Nodos	Funciones de transformación	Posición de nodos
4	$M_1 = \frac{[(1-\xi)^{1/\eta} - (\frac{4}{3})^{1/\eta}][(1-\xi)^{1/\eta} - (\frac{2}{3})^{1/\eta}]}{[1 - (\frac{2}{3})^{1/\eta}][2^{1/\eta} - (\frac{2}{3})^{1/\eta}](1-\xi)^{1/\eta}}$ $M_2 = \frac{[(1-\xi)^{1/\eta} - 2^{1/\eta}][(1-\xi)^{1/\eta} - (\frac{2}{3})^{1/\eta}]}{[1 - (\frac{2}{3})^{1/\eta}][1 - 2^{1/\eta}](1-\xi)^{1/\eta}}$ $M_3 = 1 - [M_1 + M_2]$	$x_2 - x_1 = \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^{1/\eta} - 1 \right] (x_1 - x_0)$ $x_3 - x_2 = (2^{1/\eta} - 1)(x_2 - x_0)$
5	$M_1 = \frac{2^{1/\eta}[2(1-\xi)]^{1/\eta} - 3^{1/\eta}[(1-\xi)^{1/\eta} - 1][2(1-\xi)]^{1/\eta} - 1}{(4^{1/\eta} - 3^{1/\eta})(2^{1/\eta} - 1)(4^{1/\eta} - 1)(1-\xi)^{1/\eta}}$ $M_2 = \frac{6^{1/\eta}[(1-\xi)^{1/\eta} - 2^{1/\eta}][(1-\xi)^{1/\eta} - 1][2(1-\xi)]^{1/\eta} - 1}{(3^{1/\eta} - 4^{1/\eta})(3^{1/\eta} - 1)(3^{1/\eta} - 2^{1/\eta})(1-\xi)^{1/\eta}}$ $M_3 = \frac{[(1-\xi)^{1/\eta} - 2^{1/\eta}][(2(1-\xi)]^{1/\eta} - 3^{1/\eta}][2(1-\xi)]^{1/\eta} - 1}{[2(2)^{1/\eta} - 1 - 4^{1/\eta}](2^{1/\eta} - 3^{1/\eta})(1-\xi)^{1/\eta}}$ $M_4 = 1 - [M_1 + M_2 + M_3]$	$x_2 - x_1 = \left[ \left(\frac{4}{3}\right)^{1/\eta} - 1 \right] (x_1 - x_0)$ $x_3 - x_2 = \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^{1/\eta} - 1 \right] (x_2 - x_0)$ $x_4 - x_3 = (2^{1/\eta} - 1)(x_3 - x_0)$
6	$M_1 = \frac{1}{[8(1-\xi)]^{1/\eta}} \prod_{i=1}^4 \frac{[(1-\xi)5]^{1/\eta} - (2i)^{1/\eta}}{5^{1/\eta} - i^{1/\eta}}$ $M_2 = \frac{(1-\xi)^{1/\eta} - 2^{1/\eta}}{[2(1-\xi)]^{1/\eta}(4^{1/\eta} - 5^{1/\eta})} \prod_{i=1}^3 \frac{[(1-\xi)5]^{1/\eta} - (2i)^{1/\eta}}{4^{1/\eta} - i^{1/\eta}}$ $M_3 = 1 - [M_1 + M_2 + M_4 + M_5]$ $M_4 = \frac{[5(1-\xi)]^{1/\eta} - 2^{1/\eta}}{[20(1-\xi)]^{1/\eta}(2^{1/\eta} - 1)} \prod_{i=3}^5 \frac{[(1-\xi)5]^{1/\eta} - (2i)^{1/\eta}}{2^{1/\eta} - i^{1/\eta}}$ $M_5 = \frac{2^{1/\eta}}{[5(1-\xi)]^{1/\eta}} \prod_{i=2}^5 \frac{[(1-\xi)5]^{1/\eta} - (2i)^{1/\eta}}{(1 - i^{1/\eta})2^{1/\eta}}$	$x_2 - x_1 = \left[ \left(\frac{5}{4}\right)^{1/\eta} - 1 \right] (x_1 - x_0)$ $x_3 - x_2 = \left[ \left(\frac{4}{3}\right)^{1/\eta} - 1 \right] (x_2 - x_0)$ $x_4 - x_3 = \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^{1/\eta} - 1 \right] (x_3 - x_0)$ $x_5 - x_4 = (2^{1/\eta} - 1)(x_4 - x_0)$

Tabla IV

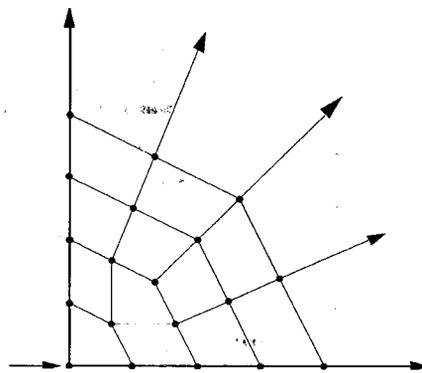


Figura 15

Nodos	Funciones de transformación	Posición de nodos
4	$M_1 = \frac{2^{\eta-1}(9\xi^2-1)}{4(1-\xi)^\eta}$ $M_2 = \frac{-(\frac{4}{3})^{\eta-1}(1+\xi)(3\xi-1)}{(1-\xi)^\eta}$ $M_3 = 1 - [M_1 + M_2]$	$x_2 - x_1 = [(\frac{3}{2})^\eta - 1] (x_1 - x_0)$ $x_3 - x_2 = (2^\eta - 1)(x_2 - x_0)$
5	$M_1 = -\frac{2^\eta \xi (4\xi^2 - 1)}{3(1-\xi)^\eta}$ $M_2 = (\frac{3}{2})^\eta \left[ \frac{4\xi(\xi+1)(\xi-\frac{1}{2})}{(1-\xi)^\eta} \right]$ $M_3 = -\frac{(\xi+1)(4\xi^2-1)}{(1-\xi)^\eta}$ $M_4 = 1 - [M_1 + M_2 + M_3]$	$x_2 - x_1 = [(\frac{4}{3})^\eta - 1] ((x_1 - x_0))$ $x_3 - x_2 = [(\frac{3}{2})^\eta - 1] (x_2 - x_0)$ $x_4 - x_3 = (2^\eta - 1)(x_3 - x_0)$
6	$M_1 = \frac{2^\eta(25\xi^2-9)(25\xi^2-1)}{384(1-\xi)^\eta}$ $M_2 = -\left(\frac{8}{5}\right)^{\eta-1} \frac{(25\xi^2-1)(5\xi^2+2\xi-3)}{12(1-\xi)^\eta}$ $M_3 = \left(\frac{6}{5}\right)^\eta \frac{5(25\xi^2-9)(5\xi^2+4\xi-1)}{64(1-\xi)^\eta}$ $M_4 = -\left(\frac{4}{5}\right)^{\eta-1} \frac{(25\xi^2-9)(5\xi^2+6\xi-1)}{24(1-\xi)^\eta}$ $M_5 = 1 - [M_1 + M_2 + M_3 + M_4]$	$x_2 - x_1 = [(\frac{5}{4})^\eta - 1] ((x_1 - x_0))$ $x_3 - x_2 = [(\frac{4}{3})^\eta - 1] (x_2 - x_0)$ $x_4 - x_3 = [(\frac{3}{2})^\eta - 1] (x_3 - x_0)$ $x_5 - x_4 = (2^\eta - 1)(x_4 - x_0)$

Tabla V

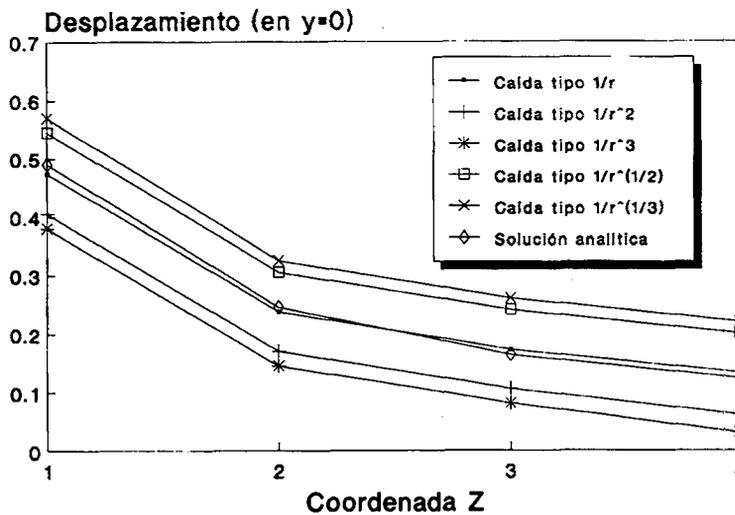


Figura 16

## CONCLUSIONES

Se ha propuesto una generalización de los elementos infinitos de Zienkiewicz *et al.*<sup>19</sup> que puede ser implementada fácilmente en los códigos existentes.

El esquema de generación de elementos infinitos mostrado da una forma más general de formulación de elementos infinitos. Por otra parte, el empleo de elementos infinitos de alto orden aumenta la exactitud de los elementos infinitos sustancialmente y disminuye la variación de los resultados debida a la influencia de los distintos parámetros estimados como la posición de la interfase o la posición del polo. Se ha visto el buen comportamiento de los elementos infinitos propuestos con una buena exactitud de los resultados.

También se han considerado distintos tipos de caída de forma que se pueden obtener resultados numéricos en un mayor tipo de ecuaciones diferenciales planteadas en medios no acotados.

## APÉNDICE

La transformación geométrica del presente artículo viene dada por la ecuación (5) donde  $M_i(\xi)$  son las funciones de transformación,  $x_i$  las coordenadas nodales y  $n$  el número de nodos del elemento infinito considerado. La Tabla I da las funciones  $M_i(\xi)$  y las relaciones entre las coordenadas nodales  $x_i$ , correspondientes a  $n = 3, \dots, 6$ .

Para obtener las funciones de transformación  $M_i(\xi)$  se deben cumplir las siguientes condiciones:

- $M_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ ,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ ,
- $x = \infty$  para  $\xi = 1$  usando la ecuación (5),
- $\sum_{i=1}^{n-1} M_i = 1$ .

Si consideramos las funciones  $M_i = \frac{P_i(\xi)}{1-\xi}$ ; ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), obtenemos las expresiones dadas en la Tabla I, y si consideramos  $M_i = \frac{Q_i(\xi)}{(1-\xi)^{1/n}}$  o  $M_i = \frac{R_i(\xi)}{(1-\xi)^n}$ ; ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), obtenemos las expresiones dadas en las Tablas IV y V respectivamente, siendo  $P_i(\xi)$ ,  $Q_i(\xi)$  y  $R_i(\xi)$ ; ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) polinomios.

Consideremos el caso  $n = 4$  (Tabla I)

Tendremos

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{A(\xi + 1/3)(\xi - 1/3)}{1 - \xi} \\ M_2 &= \frac{B(\xi + 1)(\xi - 1/3)}{1 - \xi} \\ M_3 &= \frac{C(\xi + 1)(\xi + 1/3)}{1 - \xi} \end{aligned} \quad (38)$$

y considerando la condición a) obtendremos  $A = 9/4$ ,  $B = -3$  y  $C = 3/4$ . La relación entre las coordenadas depende del tipo de caída (transformación  $\xi = f(x)$ ) que se haya considerado de acuerdo con la Tabla VII.

Caída tipo	Transformación $\xi = f(x)$	Tabla
$1/r$	$\xi = 1 - \frac{2(x_1 - x_0)}{x - x_0}$	I
$1/r^\eta$	$\xi = 1 - \frac{2(x_1 - x_0)^\eta}{(x - x_0)^\eta}$	IV
$1/r^{1/\eta}$	$\xi = 1 - \frac{2(x_1 - x_0)^{1/\eta}}{(x - x_0)^{1/\eta}}$	V

Tabla VII

## REFERENCIAS

- 1 Kelvin (Lord), "Note on the integration of the equations of equilibrium on an elastic solid", (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Feb. 1848), *Math. Phys. Papers*, Vol. 1, 97, (1882).
- 2 J. Boussinesq, "Équilibre d'élasticité d'un sol isotrop sans pesanteur, supportant différents poids", *Comp. Rend.*, Vol. 86, p. 1260, (1878).
- 3 G.G. Stokes, "On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums", *Trans. Cambridge R. Soc. IX*, Vol. 8-16 (1851) (Collected papers, Vol. 3, pp. 1-141).
- 4 L.F. Richardson, "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems insolving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam", *Trans. Cambridge R. Soc. IX*, A210, pp. 307-357, (1911).
- 5 S.F. Shen, "An aerodynamicist looks at the finite element method", *Finite Elements in Fluids*, Vol. 2, R.H. Galagher *et al.* (Eds.), Wiley, London, New York, pp. 179-204, (1975).
- 6 Y.L. Yang y P.A. Longwell, "Laminar flow in the inlet section of parallel plates", *J. Am. Inst. Chem. Engng.*, Vol. 10, 3, pp. 323-329, (1964).
- 7 M.A. Jaswon, "Integral equation methods in potential theory", *Proc. R. Soc.*, A275, pp. 25-32, (1963).
- 8 S.C.R. Dennis y J.D.A. Walker, "Steady flow past a sphere at low and moderate Reynold's numbers", *J. Fluid Mech.*, Vol. 48, pp. 771-189, (1971).
- 9 P.P. Silvester, D.A. Lowther, C.J. Carpenter y E.A. Wyatt, "Exterior finite elements for 2D field problems with open boundaries", *Proc. IEE*, Vol. 124, pp. 1267-1270, (1977).
- 10 R.W. Thatcher, "On the finite element method for unbounded regions", *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 15, 3, pp. 466-477, (1978).
- 11 D. Givoli, "Numerical methods for problems in infinite domains", Elsevier Science Publishers B.V., (1992).
- 12 P. Bettés, "Infinite elements", Penshaw Press, (1992).
- 13 R.L. Ungless, "An infinite finite element", MASc Thesis, University of British Columbia, (1973).
- 14 O.C. Zienkiewicz y P. Bettés, "Infinite elements in the study of fluid structure interaction problems", *Proc. 2 Symp. on Comp. Meth. Appl. Sci*, Versailles, (1975).

- 15 P. Bettles, "Infinite elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **11**, pp. 53-64, (1977).
- 16 P. Bettles, "More of infinite elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **15**, pp. 1613-1626, (1980).
- 17 A. Curnier, "A static infinite element", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **19**, pp. 1479-1488, (1983).
- 18 O.C. Zienkiewicz, P. Bettles, T.C. Chiam y C. Emson, "Numerical methods for unbounded field problems and a new infinite element formulation", *Comp. Fluid Dyn.*, Hermosa, Albuquerque, pp. 115-148, (1981).
- 19 O.C. Zienkiewicz, C. Emson P. Bettles, "A novel boundary infinite element", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **19**, pp. 393-404, (1983).
- 20 M. Okabe, "Generalised Lagrange family for the cube with special reference to infinite domain interpolations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **38**, 2, pp. 153-168, (1983).
- 21 J.M.M.C. Marques y D.R.J. Owen, "Infinite elements in quasi-static-materially non-linear problems", *Comp. and Structures*, Vol. **18**, pp. 739-751, (1984).
- 22 L. Gavete, C. Manzano y A. Ruiz, "On the use of mapped infinite elements in static problems", *Proc. Fifth Int. Symp. on Num. Meth. Engng.*, Springer-Verlag, Vol. **1**, pp. 525-530, (1989).
- 23 C. Barbier, P. Bettles y J. Bettles, "Automatic generation of mapping functions for infinite elements using REDUCE", *J. Symbolic Computation*, Vol. **14**, pp. 523-534, (1992).
- 24 J.M. Sullivan y K. O'Neill, "Application of infinite elements to phase change situations on deforming meshes", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **33**, pp. 1861-1874, (1992).
- 25 I. Babuška y B. Guo, "The  $h - p$  version of the finite element method for domains with curved boundaries", *Siam J. Numer. Anal.*, Vol. **25**, pp. 837-861, (1988).
- 26 B. Guo y I. Babuška, "The  $h - p$  version of the finite element method", Part 2: "General results and application", *Comput. Mech.*, Vol. **1**, pp. 203-220, (1986).
- 27 I. Babuška y Hae-Soo Oh, "The  $p$ -version of the finite element method for domains with corners and for infinite domains", *Numer. Meth. Partial Diff. Equations*, Vol. **6**, pp. 371-392, (1990).
- 28 L. Gavete, A. Ruiz y C. Manzano, "Elementos infinitos con caída  $1/r^{1/\eta}$ ", *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, Vol. **6**, 2, pp. 191-212, (1990).
- 29 C. Manzano, L. Gavete, A. Ruiz, y C. Bellido, "Higher order infinite elements for Helmholtz equation", *Proceeding of the Second Int. Conf. on Comp. Modelling in Ocean Engng.*, A.A. Balkema (Ed.), pp. 545-550, (1991).
- 30 P. Bettles, "A simple wave envelope element example", *Comm. Num. Meth. Engng.*, Vol. **3**, pp. 77-80, (1987).
- 31 R.J. Astley, "Wave envelope and infinite elements for acoustical radiation", *Int. J. Num. Meth. Fluids.*, Vol. **3**, pp. 507-526, (1983).
- 32 O.C. Zienkiewicz, K. Bando, P. Bettles, C. Emson y T. Chiam, "Mapped infinite elements for exterior wave problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **21**, pp. 1229-1251, (1985).
- 33 Y. Honjo y G. Pokharel, "Parametric infinite elements for seepage analysis", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. **17**, pp. 45-46, (1993).