

CONTRASTACION DE DIFERENTES CRITERIOS NUMERICOS PARA LA RESOLUCION DE FLUJOS POTENCIALES MEDIANTE EL EMPLEO DE COORDENADAS CURVILINEAS. Parte I: FUNCION DE CORRIENTE

C.D. PEREZ SEGARRA
A. OLIVA
y
M. COSTA

*Laboratori de Termodinàmica i Energètica,
Departament de Màquines i Motors Tèrmics,
E.T.S. d' Enginyers Industrials de Terrassa,
Universitat Politècnica de Catalunya.*

RESUMEN

En este trabajo se analizan y contrastan diferentes criterios numéricos para la resolución de flujos potenciales subsónicos compresibles mediante el empleo de la función de corriente.

Los dominios son discretizados en base a la generación de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos. Las ecuaciones de discretización son obtenidas a partir de la ecuación diferencial de la función de corriente, o bien de efectuar balances sobre volúmenes de control finitos asignados a los nodos de la malla.

A modo de ejemplo y para el estudio numérico se analizan dos situaciones concretas de flujos confinados; los resultados presentados ponen de manifiesto la influencia del tipo de malla generada y de los criterios numéricos utilizados en la discretización de las ecuaciones.

SUMMARY

In this paper we analyse and contrast different numerical criteria for the solution of subsonic potential flows using the stream function.

The domains are discretized on the basis of the generation of boundary fitted curvilinear coordinate systems. The discretized equations are obtained from the differential equation of the stream function, or from making balances on finite control volumes assigned to the nodes of the grid.

By way of example and for the numerical analysis we studied two concrete situations of confined flows; the results given show the influence of the type of grid and the numerical criteria employed in the discretization of the equations.

Recibido: Febrero 1989

INTRODUCCION: ECUACIONES CARACTERISTICAS. MALLAS ADAPTABLES A LOS CONTORNOS

El análisis de numerosos flujos de interés en la ingeniería (flujo en perfiles aerodinámicos, flujo en álabes de turbina, ...) puede ser realizado dividiendo el dominio por el que circula la corriente en dos zonas: a) por un lado unas delgadas regiones próximas a los contornos sólidos (denominadas capas límites) en donde los efectos de la fricción y de la transferencia de calor son condicionantes; b) de otro lado el resto del dominio (denominado zona no viscosa) en donde los efectos de la fricción y de la transferencia de calor pueden despreciarse.

La resolución de la región no viscosa se precisa no sólo como modelo estimativo del comportamiento del flujo en dicha región sino también como medio de acotación de las condiciones de contorno para las capas límites. La formulación de esta zona no viscosa puede realizarse, dependiendo de las hipótesis asumidas, mediante el empleo de la función de corriente o de la función potencial de velocidad. En este trabajo nos ocuparemos de la resolución numérica de flujos subsónicos compresibles formulados mediante el empleo de la función de corriente y en el supuesto de que se trate de gases perfectos en régimen permanente, bidimensional, irrotacional (o potencial) e isoentrópico.

Para la región no viscosa las ecuaciones de conservación vienen expresadas por las ecuaciones de Euler¹, en las que las variables dependientes son las velocidades, la presión y la temperatura. Bajo ciertas hipótesis es factible la descripción del flujo mediante el empleo de funciones escalares de punto; así, si suponemos que el flujo es permanente y bidimensional es posible definir una función de corriente adimensional ψ , tal que satisfaga la ecuación de conservación de la masa, en la forma¹:

$$v_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

En estas condiciones y para el caso del flujo de un gas perfecto supuesto irrotacional e isoentrópico, las ecuaciones gobernantes de la región no viscosa en términos de la variable dependiente ψ y en forma adimensional son¹:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2a)$$

$$\rho = \left[1 - \frac{(k-1)Mo^2}{2} (v^2 - 1) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (2b)$$

en donde la ecuación (2a), que denominaremos ecuación diferencial de la función de corriente, expresa la condición de irrotacionalidad del flujo.

Las condiciones de contorno necesarias para la integración de las ecuaciones indicadas, para un flujo confinado dado (Figura 1a), son del tipo:

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in C_e & \quad \psi(x, y) = \psi_e(x, y) \\
 (x, y) \in C_i & \quad \psi(x, y) = \psi_i \\
 (x, y) \in C_s & \quad \psi(x, y) = \psi_s \\
 (x, y) \in C_f & \quad \psi(x, y) = \psi_f(x, y), \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = f(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

en donde C_e y C_f representan, respectivamente, la zona de entrada y de salida del flujo; las líneas C_i y C_s simbolizan un contorno o canalización y coinciden, por tanto, con líneas de corriente de flujo.

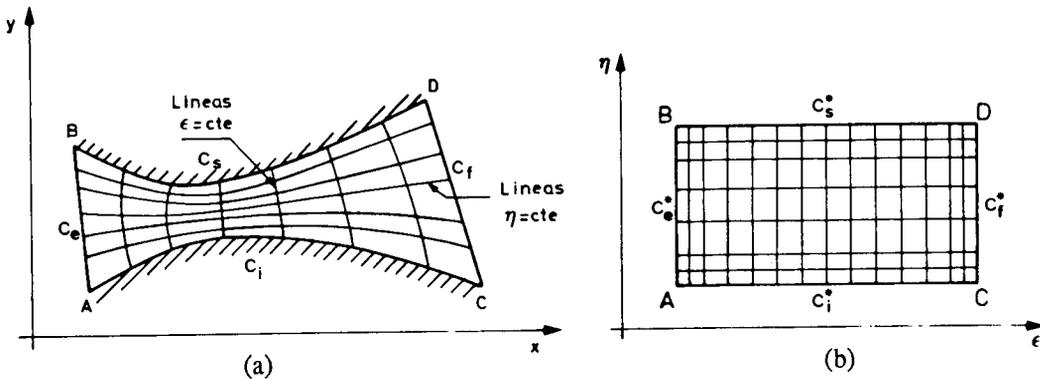


Figura 1. Geometría y malla generada en: (a) el plano físico (x, y) ; (b) el plano transformado (ϵ, η) .

La integración numérica de la ecuación diferencial de la función de corriente la efectuaremos en base a discretizar el dominio por el que circula el flujo mediante la generación de sistemas de coordenadas curvilíneas $[\epsilon = \epsilon(x, y), \eta = \eta(x, y)]$, de forma que los contornos del dominio coincidan con líneas coordenadas. Así, una geometría irregular dada en el plano físico (x, y) (Figura 1a) adquiere una forma regular en el plano transformado (ϵ, η) (Figura 1b); las ecuaciones características, escritas en dichas coordenadas curvilíneas, se resuelven de forma más conveniente en el plano transformado y según criterios de diferencias o incrementos finitos.

Los valores asignados a las coordenadas curvilíneas dentro del dominio son, en principio, arbitrarios; no obstante y en lo que sigue los supondremos uniformemente distribuidos entre 0 y 1. Así, las coordenadas curvilíneas correspondientes a un punto (i, j) de una malla de discretización constituida por $N + 1$ líneas $\epsilon = cte$ y $M + 1$ líneas $\eta = cte$ serán:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_i &= \frac{(i - 1)}{N}, & i &= 1, 2, \dots, N + 1 \\
 \eta_j &= \frac{(j - 1)}{M}, & j &= 1, 2, \dots, M + 1
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

De esta forma, la geometría irregular indicada en la Figura 1a es convertida, en el plano transformado, en un dominio cuadrado con una malla de discretización rectangular y uniformemente distribuida (Figura 2).

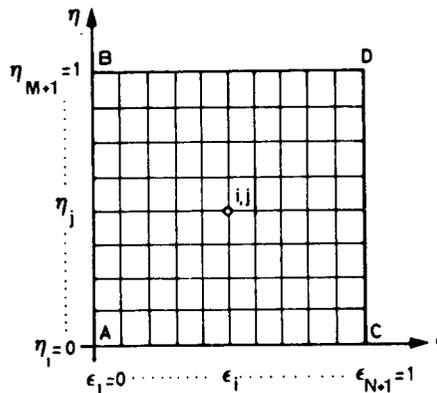


Figura 2. Malla de discretización en plano transformado y según expresión (4).

La complicación adicional que representa la integración de la ecuación de la función de corriente escrita en coordenadas curvilíneas, ecuación (5) o ecuación (15), respecto a su equivalente en coordenadas cartesianas, ecuación (2a), se ve compensada por la ventaja que se deriva de la eliminación de los problemas inherentes al tratamiento de contornos irregulares: intersecciones malla-contorno, aproximación numérica de las derivadas en los contornos, funciones de interpolación, etc.

El empleo de mallas adaptables a los contornos puede facilitar la concentración de la misma en las zonas de mayores gradientes. No obstante, el control de la malla en el interior del dominio no siempre es fácil pudiendo requerir el tipo de problema a resolver y la geometría implicada un estudio específico.

En lo que sigue se indicarán diferentes criterios numéricos para la resolución de flujos potenciales subsónicos compresibles formulados en base al empleo de la función de corriente y mediante la discretización del dominio por mallas adaptables a los contornos físicos. En un último apartado se contrastarán los resultados numéricos obtenidos para dos situaciones específicas de flujos confinados.

INTEGRACION NUMERICA

En este apartado indicaremos el proceso seguido para la resolución numérica del flujo potencial. Se obtendrán, según distintos criterios numéricos, las ecuaciones discretas correspondientes a las ecuaciones gobernantes; dichas ecuaciones de discretización (correspondientes a los puntos interiores de la malla y a los puntos del contorno) configuran un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales cuya resolución proporciona los valores de ψ y ρ en cada nodo de la malla. A partir de estos valores se determinan numéricamente las componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas

y/o en coordenadas curvilíneas; la distribución de presiones y temperaturas en el dominio se calculan en base a las relaciones isoentrópicas para un gas perfecto.

Análisis numérico de los puntos interiores de la malla

Las ecuaciones de discretización, para las zonas interiores del dominio, son obtenidas según tres criterios distintos:

- Esquema numérico FC-1: Las ecuaciones discretas son obtenidas de aproximar numéricamente, mediante desarrollos en series de Taylor, los términos de la ecuación diferencial de la función de corriente escrita en coordenadas curvilíneas. Dicha ecuación es obtenida a partir de la ecuación diferencial de la función de corriente en coordenadas cartesianas, ecuación (2a), efectuando los correspondientes cambios de variable.
- Esquema numérico FC-2: Las ecuaciones de discretización son obtenidas de aplicar la condición de irrotacionalidad a volúmenes de control finitos asignados a cada nodo de la malla y centrados, en el plano transformado, entre las líneas coordenadas.
- Esquema numérico FC-3: A diferencia del esquema FC-1, la ecuación diferencial de la función de corriente es obtenida de aplicar la condición de irrotacionalidad del flujo a elementos diferenciales en las coordenadas curvilíneas. Si bien la ecuación diferencial así obtenida es idéntica matemáticamente a la deducida en FC-1, los esquemas numéricos que se derivan de ambas son distintos.

Esquema numérico FC-1

Para el desarrollo de este primer esquema numérico partimos de la ecuación diferencial de la función de corriente (2a), expresando los diferentes términos de las derivadas parciales en función de las variables independientes $\epsilon = \epsilon(x, y)$ y $\eta = \eta(x, y)$. De efectuar los correspondientes cambios de variable, y de reordenar adecuadamente, se obtiene la siguiente ecuación diferencial de la función de corriente en coordenadas curvilíneas:

$$\begin{aligned}
 &g^{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon^2} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon \partial \eta} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + g^{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \\
 &(g^{11} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \epsilon} + g^{12} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta}) \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} + (g^{21} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \epsilon} + g^{22} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta}) \frac{\partial \psi}{\partial \eta}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

siendo los coeficientes métricos de la transformación:

$$\begin{aligned}
 g^{11} &= \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2, & g^{12} &= \epsilon_x \eta_x + \epsilon_y \eta_y, & \alpha &= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} \\
 g^{21} &= g^{12}, & g^{22} &= \eta_x^2 + \eta_y^2, & \beta &= \eta_{xx} + \eta_{yy}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

La ecuación de discretización correspondiente a la ecuación diferencial (5) se obtiene aproximando numéricamente las derivadas mediante desarrollos en series de Taylor considerando hasta los términos de segundo orden. A modo ilustrativo indicaremos, para el caso de una malla de discretización rectangular y uniformemente distribuida,

ecuación (4), algunas de las aproximaciones realizadas sobre el elemento discreto de la Figura 3:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}\right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta \epsilon} \tag{7a}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{(\Delta \epsilon)^2} \tag{7b}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon \partial \eta}\right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta \epsilon \Delta \eta} \tag{7c}$$

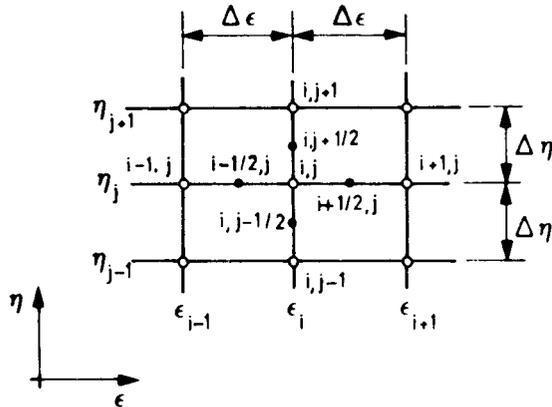


Figura 3. Elemento discreto, en plano transformado, correspondiente a la zona interior del dominio.

La densidad se calcula, en cada nodo (i, j) de la malla, mediante la ecuación (2b) previa determinación del módulo de la velocidad. La expresión del módulo de la velocidad, en términos de la función de corriente y en las coordenadas curvilíneas, viene dada por la ecuación (21), en la que las derivadas de la función de corriente son aproximadas numéricamente según el criterio indicado en la expresión (7a).

Los coeficientes métricos que aparecen en la ecuación (5) se evalúan para cada nodo (i, j) de la malla antes de iniciarse el proceso iterativo de resolución del sistema de ecuaciones discretas. El cálculo de dichos coeficientes se efectúa de forma más sencilla en el plano transformado; para ello se sustituye, efectuando los correspondientes cambios de variable, las derivadas respecto a las coordenadas cartesianas por derivadas respecto a las coordenadas curvilíneas:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{D^2} ; g^{22} = \frac{g_{11}}{D^2} ; g^{12} = -\frac{g_{12}}{D^2} \tag{8}$$

$$\alpha = -\frac{[(g_{22}x_{\epsilon\epsilon} + 2g_{12}x_{\epsilon\eta} + g_{11}x_{\eta\eta})y_{\eta} - (g_{22}y_{\epsilon\epsilon} + 2g_{12}y_{\epsilon\eta} + g_{11}y_{\eta\eta})x_{\eta}]}{D^3}$$

$$\beta = \frac{[(g_{22}x_{ee} + 2g_{12}x_{e\eta} + g_{11}x_{\eta\eta})y_e - (g_{22}y_{ee} + 2g_{12}y_{e\eta} + g_{11}y_{\eta\eta})x_e]}{D^3}$$

siendo:

$$g_{11} = x_e^2 + y_e^2 ; g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2 ; g_{12} = x_e x_\eta + y_e y_\eta ; D = x_e y_\eta - x_\eta y_e$$

Las derivadas respecto de las coordenadas curvilíneas son evaluadas numéricamente y según criterios análogos a los indicados en las ecuaciones (7) para la función de corriente.

Esquema numérico FC-2

Este segundo esquema numérico se basa en aplicar directamente sobre volúmenes de control (V.C.) finitos, asignados a cada nodo de la malla, la condición de irrotacionalidad del flujo. Los V.C. están formados por líneas coordenadas del sistema de coordenadas curvilíneas generado (Figura 4a); las caras del V.C. se hallan centradas, en el plano transformado, entre el nodo en cuestión y los nodos adyacentes (Figura 4b).

Según el teorema de Stokes, la integral de superficie de la componente normal del rotacional de la velocidad sobre cualquier área *A* cuyo contorno sea la trayectoria cerrada *C*, debe ser igual a la integral curvilínea de la componente del vector velocidad alrededor de dicha trayectoria. Para el caso de flujos rotacionales se sigue, por tanto, que la circulación Γ alrededor de cualquier curva cerrada *C* es nula:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{9}$$

Para un sistema dado de coordenadas curvilíneas $q^i (q^1 = \epsilon, q^2 = \eta)$, los vectores \mathbf{e}_i definidos por $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r} / \partial q^i$, se denominan vectores de la base local y son tangentes en cada punto a las líneas coordenadas; el vector diferencial de longitud sobre dichas líneas vendrá dado en la forma: $d\mathbf{l} = \pm \mathbf{e}_i dq^i$, en donde el signo + o - dependerá del sentido elegido para la circulación. Así, de aplicar la integral curvilínea (9) al contorno delimitado por el V.C. de la Figura 4a, se tiene:

$$\int_{\epsilon_{i-1/2}, \eta_{j-1/2}}^{\epsilon_{i-1/2}, \eta_{j+1/2}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 d\eta - \int_{\epsilon_{i-1/2}, \eta_{j+1/2}}^{\epsilon_{i+1/2}, \eta_{j+1/2}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 d\epsilon + \int_{\epsilon_{i+1/2}, \eta_{j+1/2}}^{\epsilon_{i+1/2}, \eta_{j-1/2}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 d\eta + \int_{\epsilon_{i+1/2}, \eta_{j-1/2}}^{\epsilon_{i-1/2}, \eta_{j-1/2}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 d\epsilon = 0 \tag{10}$$

Los productos escalares $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ definen las componentes covariantes de la velocidad V_i en la base local. En la expresión anterior la aproximación numérica de las integrales se realiza suponiendo que la componente covariante de la velocidad se mantiene uniforme a lo largo de la correspondiente cara del V.C.; la ecuación de discretización de la función de corriente se obtiene al expresar dichas componentes covariantes en términos de la función de corriente, ecuación (22), y al sustituir las derivadas por cociente de incrementos. Así, por ejemplo, para la primera de las integrales de la ecuación (10):

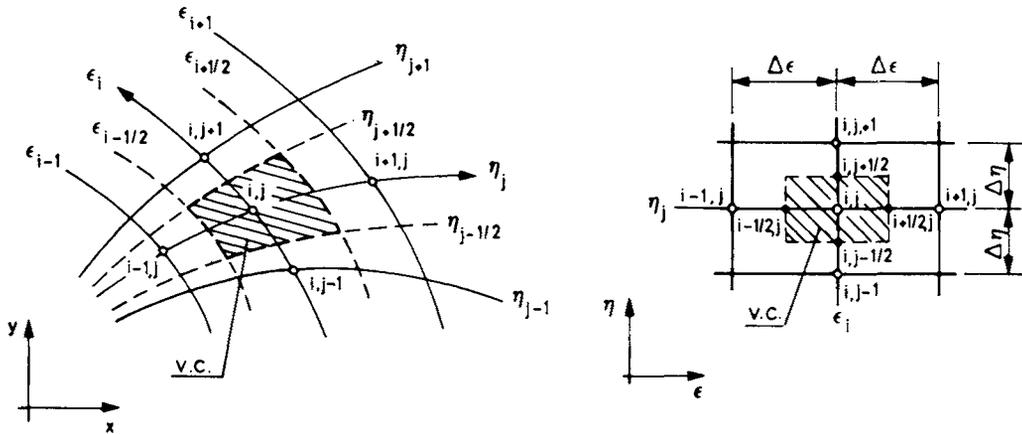


Figura 4. Volumen de control (V.C.) finito asignado al nodo (i, j) de la malla en: a) el plano fisico; b) el plano transformado.

$$\begin{aligned}
 \int_{\epsilon_{i-1/2}, \eta_{j-1/2}}^{\epsilon_{i+1/2}, \eta_{j+1/2}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 d\eta &= - \int_{\epsilon_{i-1/2}, \eta_{j-1/2}}^{\epsilon_{i+1/2}, \eta_{j+1/2}} \left(\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) d\eta \approx \\
 &\approx - \left(\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_{i-1/2, j} \Delta \eta \tag{11}
 \end{aligned}$$

en donde las aproximaciones numéricas de las derivadas son del tipo:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right)_{i-1/2, j} &\approx \frac{\psi_{i, j} - \psi_{i-1, j}}{\Delta \epsilon} \\
 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_{i-1/2, j} &\approx \frac{(\psi_{i-1, j+1} + \psi_{i, j+1}) - (\psi_{i-1, j-1} + \psi_{i, j-1})}{4 \Delta \eta} \tag{12}
 \end{aligned}$$

La densidad en las caras del V.C. se calculan promediando las obtenidas en los nodos adyacentes de la malla según la forma indicada en el esquema FC-1. Así por ejemplo: $\rho_{i+1/2, j} = \frac{(\rho_{i, j} + \rho_{i+1, j})}{2}$.

En la evaluación numérica de los coeficientes métricos en las caras del V.C. se han considerado dos criterios distintos: a) se promedian los obtenidos en los nodos adyacentes de la malla en la forma indicada en FC-1; b) se calculan directamente en la cara correspondiente del V.C., evaluándose las derivadas de las coordenadas según un criterio análogo al indicado en las ecuación (12) para la función de corriente. El empleo del primer o del segundo criterio se indicará, respectivamente, por la notación FC-2a o FC-2b. Como veremos más adelante, la evaluación numérica de los coeficientes métricos tiene una gran importancia en la precisión del esquema numérico.

Esquema numérico FC-3

Procederemos, en primer lugar, a la obtención de la ecuación diferencial de la función de corriente escrita en las coordenadas (ε, η) ; para ello aplicamos la condición de irrotacionalidad, expresada por la integral curvilínea (9), a un elemento diferencial de las coordenadas curvilíneas:

$$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 d\eta + \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 d\varepsilon + \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \right) d\eta - \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)}{\partial \eta} d\eta \right) d\varepsilon = 0 \quad (13)$$

Sustituyendo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ por V_i y desarrollando se tiene:

$$\frac{\partial V_2}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial V_1}{\partial \eta} = 0 \quad (14)$$

De expresar en la ecuación anterior las componentes covariantes de la velocidad en términos de la función de corriente, ecuación (22), se obtiene la siguiente ecuación diferencial de la función de corriente en coordenadas curvilíneas:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{g^{21}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{g^{22}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (15)$$

La aproximación numérica de esta ecuación diferencial (15) la realizaremos tomando los puntos medios entre nodos; dado que la malla es rectangular y está uniformemente distribuida (Figura 3), se tiene :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta \varepsilon} \left[\left(\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_{i+1/2, j} - \left(\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_{i-1/2, j} \right] + \\ & \frac{1}{\Delta \eta} \left[\left(\frac{g^{21}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{g^{22}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} - \left(\frac{g^{21}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{g^{22}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_{i, j-1/2} \right] \approx 0 \end{aligned} \quad (16)$$

De aplicar para la evaluación de las derivadas de la función de corriente criterios numéricos análogos a los indicados en las ecuaciones (12), resulta una ecuación discreta de la función de corriente equivalente a la que se deriva del esquema numérico anterior FC-2.

La densidad y los coeficientes métricos en los puntos medios entre nodos, $(i \pm 1/2, j \pm 1/2)$, se obtienen de la misma manera que la indicada en FC-2 para las caras del V.C.

En este apartado se han indicado tres esquemas numéricos para el tratamiento de los puntos interiores del dominio. El segundo de ellos, el FC-2, es de tipo integral mientras que el primero y el tercero, el FC-1 y el FC-3, son de tipo diferencial. Como consecuencia del empleo de mallas uniformemente distribuidas en el plano transformado y de los criterios utilizados en la aproximación numérica de las integrales y de las derivadas, se ha constatado la particularidad de que los esquemas FC-2 y FC-3 proporcionan unas ecuaciones de discretización equivalentes dando, por tanto, los mismos resultados numéricos.

Condiciones de contorno

En la zona de entrada del flujo (Figura 1a, contorno C_e) la distribución de velocidades es conocida. A partir de la componente normal de la velocidad al contorno se obtiene, por integración a lo largo de C_e , la distribución de la función de corriente.

Si $\psi(\varepsilon, \eta)$ es solución de la ecuación diferencial de la función de corriente, también lo será $\psi(\varepsilon, \eta) + K$ siendo K una constante arbitraria. Por tanto, es posible fijar el valor de la función de corriente en un punto cualquiera y referenciar el resto a dicho valor. En los ejemplos para la contrastación de resultados se ha tomado $\psi = 0$ en el punto $(i = 1, j = 1)$.

Los contornos laterales C_i y C_s representan zonas impermeables al flujo coincidiendo, por tanto, con líneas de corriente ($\psi = \text{cte}$); el valor de ψ en C_i y C_s coincide con los valores extremos de la función de corriente correspondientes al contorno C_e .

La densidad se determina de la ecuación (2b) una vez evaluado el módulo de la velocidad. Para la determinación de la velocidad en los puntos del contorno se han ensayado los dos siguientes criterios:

a) A partir de la ecuación (21) aproximando numéricamente las derivadas. Para la evaluación de las derivadas de la función de corriente en la dirección ε se ha utilizado el criterio indicado en la expresión (7a). Las derivadas en la dirección η se han evaluado en base a ajustes polinómicos de la función de corriente a los puntos adyacentes del contorno, ensayándose ajustes de primer y de segundo grado; así, por ejemplo, para el contorno inferior C_i :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_{i,1} \approx \frac{A\psi_{i,1} + B\psi_{i,2} + C\psi_{i,3}}{2\Delta\eta} \quad (17)$$

correspondiendo $A = -2$, $B = 2$, $C = 0$ al caso de ajuste a dos puntos, y $A = -3$, $B = 4$, $C = -1$ al caso en que el ajuste se realice a tres puntos. Para los coeficientes métricos, la aproximación numérica de las derivadas de las coordenadas se realiza de forma análoga a la indicada anteriormente para las derivadas de la función de corriente. Indicaremos mediante la notación $\underline{V-1}$ o $\underline{V-2}$ los resultados que se derivan del empleo de ajustes de primer o de segundo grado respectivamente para las derivadas en η .

b) Por extrapolación lineal de las velocidades. Indicaremos por P_1 al punto situado sobre el contorno y por P_2 y P_3 a los puntos adyacentes empleados en la extrapolación; así por ejemplo, para el contorno C_i dichos puntos corresponderán respectivamente a los nodos de la malla $(i, 1)$, $(i, 2)$ e $(i, 3)$. Se han ensayado tres diferentes criterios, indicados por Hung², según se extrapole: a) la componente contravariante tangencial de la velocidad V^1 ; b) la componente tangencial de la velocidad v_{p1} ; c) la componente de la velocidad en la dirección tangencial al contorno. Las expresiones correspondientes a los tres criterios son respectivamente:

$$(V^1)_{P_1} = 2(V^1)_{P_2} - (V^1)_{P_3} \quad (18a)$$

$$(v_{p1})_{P_1} = 2(v_{p1})_{P_2} - (v_{p1})_{P_3} \quad (18b)$$

$$(v_{p1})_{P1} = 2v_{P2} \cdot \left(\frac{e_1}{e_1}\right)_{P1} - v_{P3} \cdot \left(\frac{e_1}{e_1}\right)_{P1} \tag{18c}$$

Los resultados que se derivan del primer, segundo y tercer criterio los indicaremos por la notación E-1, E-2 y E-3.

Para la zona de salida (contorno *Cf*) podría darse el caso de que la distribución de velocidades fuese conocida; en esta situación (condición de contorno de Dirichlet), los valores de la función de corriente se determinarían por integración de la componente normal de la velocidad al contorno.

En el caso de que fuese conocida únicamente la componente tangencial de la velocidad (condición de contorno de Neumann), deberán especificarse las ecuaciones de discretización de la función de corriente correspondientes a dicho contorno. En los ejemplos que se presentan para la contrastación de resultados se ha supuesto que el flujo en *Cf* es normal al contorno; ello significa que la componente tangencial de la velocidad v_{p2} y, por tanto, la componente covariante de la velocidad V_2 serán nulas. Así pues, de (22) deberá verificarse:

$$\left(g^{11} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + g^{12} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)_{i=N+1,j} = 0 \tag{19}$$

El tratamiento de estos puntos del contorno *Cf* se ha realizado según dos criterios numéricos distintos:

a) La ecuación de discretización de la función de corriente se obtiene de la ecuación anterior, ecuación (19), al aproximar numéricamente las derivadas. En la evaluación de las distintas derivadas en ε (para la determinación de la ecuación de discretización, de la densidad y de los coeficientes métricos), se han utilizado ajustes a dos o tres puntos de forma análoga a los ya indicados en los contornos laterales. La notación empleada para indicar este criterio numérico será V-1 o V-2 según se utilice, respectivamente, el ajuste a dos o tres puntos.

b) Un segundo criterio numérico es obtenido al aplicar la condición de irrotacionalidad a volúmenes de control (V.C.) asignados a los nodos de la malla situados en *Cf*. El proceso seguido en la obtención de las ecuaciones de discretización es análogo al realizado para los puntos interiores según el esquema FC-2, teniendo en cuenta que la integral curvilínea a lo largo de la cara del V.C. coincidente con el contorno *Cf* es nula. Indicaremos este esquema numérico por la notación FC-2a o FC-2b según se evalúen los coeficientes métricos en las caras del V.C. mediante el criterio a) o b) indicado en el esquema numérico FC-2.

Este segundo tratamiento numérico de los puntos de contorno unifica la condición impuesta en la ecuación (19) con la condición de irrotacionalidad del flujo. La mayor información implícita en las ecuaciones de discretización hace que este esquema sea, en general, superior al primero.

En la evaluación de las derivadas en ε para el cálculo del módulo de la velocidad, emplearemos ajustes a dos o tres puntos indicando ambos criterios por la notación V-1 o V-2 respectivamente.

Un esquema numérico equivalente al expuesto puede ser obtenido a partir de la ecuación diferencial (14) si las derivadas de las componentes covariantes de la velocidad son aproximadas numéricamente en la forma:

$$\frac{(V_2)_{i,j} - (V_2)_{i-1/2,j}}{\Delta\varepsilon/2} - \frac{(V_1)_{i,j+1/2} - (V_1)_{i,j-1/2}}{\Delta\eta} \approx 0$$

Resolución del sistema de ecuaciones discretas

Del análisis anterior se tiene, para cada nodo de la malla de discretización, una ecuación discreta para la función de corriente y una para la densidad. La resolución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales así obtenido se ha realizado por métodos iterativos del tipo: a) Gauss-Seidel; b) Gauss-Seidel con resolución directa de las ecuaciones por un TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) columna a columna (TDMA_j), fila a fila (TDMA_i), o alternativamente fila a fila y columna a columna (TDMA_{i/j})³. Con el fin de acelerar la convergencia del método iterativo se han empleado técnicas de sobrerrelajación para la función de corriente.

Durante el proceso iterativo puede ocurrir que en ciertos puntos de la malla se den situaciones físicamente imposibles. Esto sucede cuando al calcular la densidad, ecuación (2b), la temperatura (término situado entre corchetes) toma valores negativos. Ello es debido a que en la evaluación numérica del término que representa el módulo de la velocidad, éste toma valores excesivamente elevados. La posibilidad de que aparezcan puntos en donde la temperatura sea menor que cero aumenta al aumentar el número de Mach y la densidad de la malla. Otros factores que influyen son la geometría de la malla, los valores supuestos de ψ y ρ para el inicio de las iteraciones, el esquema numérico empleado, etc.

Para evitar que al aparecer puntos con $T < 0$ el proceso iterativo se interrumpa, la densidad en dichos puntos se evalúa promediando la obtenida en los nodos adyacentes. Este criterio por sí solo no asegura la convergencia del método iterativo por lo que ha sido necesario emplear factores de subrelajación, fv , para las velocidades.

Determinación de las velocidades. Componentes covariantes y contravariantes

Una vez que se han obtenido los valores de la función de corriente y de la densidad en cada nodo de la malla, se procede a la determinación de las velocidades. En este apartado indicaremos las expresiones que definen las componentes de la velocidad en términos de la función de corriente, tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas curvilíneas.

Las componentes cartesianas de la velocidad, en términos de ψ y en función de las variables independientes ε y η , las obtendremos de las expresiones (1) efectuando los correspondientes cambios de variable:

$$v_x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} \varepsilon_y + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \eta_y \right) ; v_y = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} \varepsilon_x + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \eta_x \right) \quad (20)$$

De las componentes cartesianas de la velocidad se obtiene la siguiente expresión para el módulo de la velocidad:

$$v = \frac{1}{\rho} \left[g^{11} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right)^2 + 2g^{12} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + g^{22} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (21)$$

Las componentes covariantes V_i de la velocidad en la base local (o contravariantes en la base recíproca) vienen definidas en la forma $V_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$. De efectuar el producto escalar, considerando que $\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, y de realizar los correspondientes cambios de variable, se tiene:

$$V_1 = \frac{g^{21}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{g^{22}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad V_2 = -\frac{g^{11}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \frac{g^{12}}{\rho J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (22)$$

Las componentes contravariantes V^i de la velocidad en la base local (o covariantes en la base recíproca) vienen dadas por la expresión $V^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^i$, en donde los vectores de la base recíproca \mathbf{e}^i son normales a los vectores de la base local. De efectuar el producto escalar, considerando que $\mathbf{e}^i = \nabla q^i$, y de realizar los correspondientes cambios de variable, se tiene:

$$V^1 = \frac{J}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad V^2 = -\frac{J}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \quad (23)$$

Las componentes contravariantes de la velocidad en una base dada no coinciden, en general, con las componentes que resultan de descomponer el vector velocidad en las direcciones definidas por los vectores de dicha base. De igual forma, las componentes covariantes de la velocidad en una base dada no coinciden, en general, con la proyección ortogonal de la velocidad en las direcciones definidas por los vectores de dicha base. Ello es debido a que, en general, ni la base local ni la base recíproca son bases normalizadas; de otra parte nótese que en general las componentes contravariantes y covariantes no tienen, desde un punto de vista dimensional, un significado de velocidad.

A continuación relacionaremos las componentes físicas (i.e., componentes sobre vectores unitarios) del vector velocidad, con las correspondientes componentes contravariantes y covariantes.

Las componentes de la velocidad sobre las direcciones definidas por los vectores de la base local las representaremos por v^i mientras que la proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre dichas direcciones las representaremos por v_{pi} (Figura 5a). Si indicamos por $\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{e_i}$ a los vectores normalizados de dicha base se verifica que: $\mathbf{v} = \Sigma v^i \mathbf{b}_i$ y $v_{pi} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i$; desarrollando estas expresiones se tiene:

$$v^i = \sqrt{g_{ii}} V^i \quad ; \quad v_{pi} = \frac{V_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (24)$$

Representaremos por v_i a las componentes de la velocidad en las direcciones definidas por los vectores de la base recíproca, y por v^{pi} a la proyección ortogonal de \mathbf{v} en la dirección definida por el vector \mathbf{e}^i de la base recíproca (Figura 5b). De proceder de forma análoga a la indicada anteriormente:

$$v_i = \sqrt{g^{ii}} V_i \quad ; \quad v^{pi} = \frac{V^i}{\sqrt{g^{ii}}} \quad (25)$$

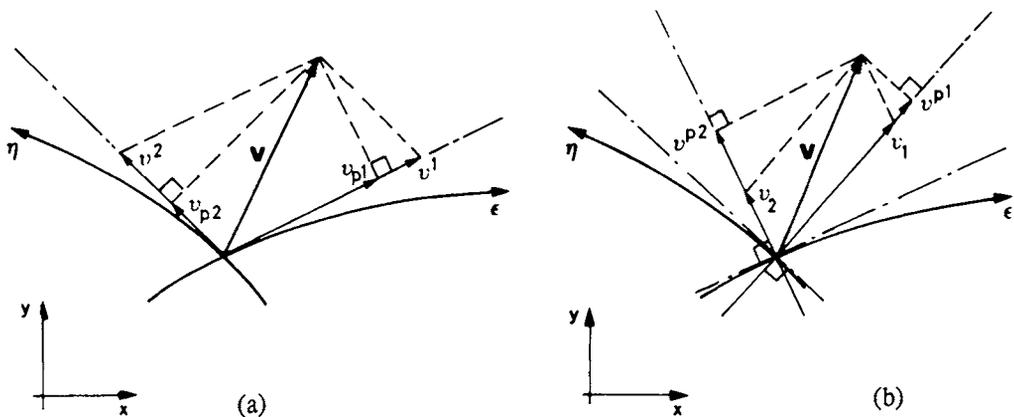


Figura 5. Componentes y proyecciones ortogonales de la velocidad en las direcciones definidas por los vectores de la base local (a) y de la base recíproca (b).

EJEMPLOS DE RESOLUCION NUMERICA. CONTRASTACION DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Con el fin de contrastar los resultados que se derivan de los diferentes esquemas numéricos considerados, se han propuesto⁴ dos casos de resolución numérica de flujos potenciales: a) flujo alrededor de un cilindro; b) flujo a través de una tobera convergente. En este apartado se especifica de una parte la geometría, las condiciones de contorno y el tipo de mallas de discretización generadas; de otra parte se exponen y comentan los resultados numéricos obtenidos.

Casos seleccionados para la resolución numérica

El primer caso seleccionado corresponde al flujo representado en la Figura 6a. Lo denominamos flujo alrededor de un cilindro puesto que los contornos laterales, inferior C_i y superior C_s , corresponden a líneas de corriente del flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro con velocidad uniforme aguas arriba⁴. La ecuación implícita que define ambos contornos es:

$$\psi = y - \frac{y}{(x - Ht)^2 + y^2} \quad (26)$$

siendo $\psi = 0$ para el contorno C_i , y $\psi = Ve - \frac{Ve}{Ht^2 + Ve^2}$ para el contorno C_s . Los resultados numéricos presentados se han obtenido para el caso de $He = 1.00$, $R = 1.00$ y $Ve = 0.25$.

Para el caso de flujo incompresible ($\rho = 1$ y $M = 0$ en todo el dominio), si en las zonas de entrada C_e y de salida C_f las condiciones del flujo son las que

corresponden al flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro con velocidad uniforme aguas arriba, la solución analítica de la ecuación diferencial de la función de corriente es conocida y es la indicada en la ecuación (26). Para esta situación, que denominaremos “flujo incompresible alrededor de un cilindro”, las condiciones de contorno especificadas son: en el contorno C_e la distribución de la función de corriente es la que se obtiene de la expresión (26); en el contorno C_f se especifica, únicamente, que la componente tangencial de la velocidad a dicho contorno es nula (condición verificada por la ecuación (26) al ser $v_y = \frac{-\partial\psi}{\partial x} = 0$ en $x = H_t$). De esta forma, los resultados obtenidos numéricamente pueden ser contrastados con los que se derivan de la solución exacta.

Para la situación de flujo compresible no se dispone de la solución exacta de las ecuaciones. Es por ello que en este caso hemos supuesto una distribución de velocidades uniforme a la entrada (contorno C_e), mientras que a la salida (contorno C_f) se supone que la componente tangencial de la velocidad es nula.

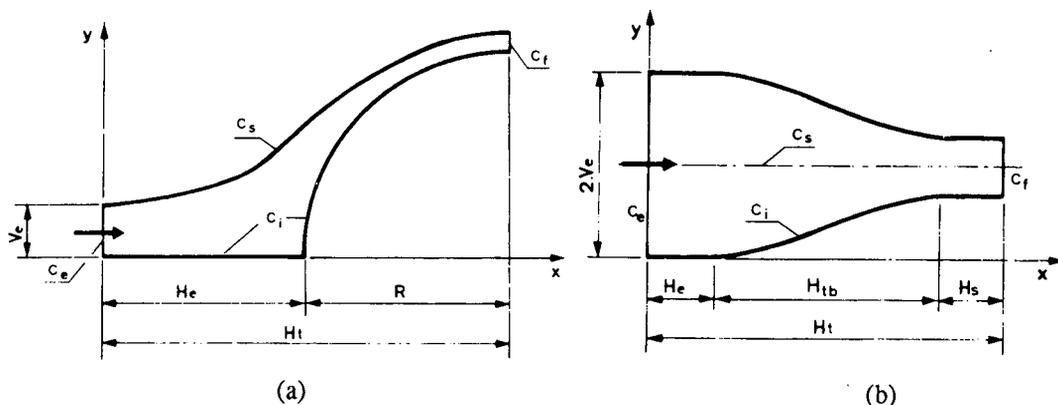


Figura 6. Geometrías seleccionadas: a) flujo alrededor de un cilindro; b) flujo a través de tobera convergente.

El segundo caso seleccionado corresponde al flujo a través de la tobera convergente, de sección transversal rectangular, representada en la Figura 6b. La tobera es simétrica; el perfil inferior en la zona convergente ($He < x < He + Htb$) viene dado por la expresión polinómica: $y = -0.03372 (x - He)^3 + 0.19724 (x - He)^2$. Los resultados numéricos presentados corresponden al caso de $He = 1.00$, $Hs = 1.00$, $Htb = 3.90$ y $Ve = 1.50$.

Para las condiciones de contorno se ha supuesto que la velocidad en la zona de entrada es uniforme, mientras que en la zona de salida la componente tangencial de la velocidad al contorno es nula.

Generación de las coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos

En la resolución numérica del flujo potencial alrededor de un cilindro mediante mallas de discretización adaptables a los contornos, se han empleado diferentes criterios de generación de coordenadas curvilíneas. Estos han sido:

a) Las coordenadas curvilíneas son generadas mediante la resolución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de tipo elíptico⁵:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} &= P(\varepsilon, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\varepsilon, \eta)\end{aligned}\quad (27)$$

en donde las funciones $P(\varepsilon, \eta)$ y $Q(\varepsilon, \eta)$ tienen como objeto el permitir un control del espaciado de la malla de discretización en el interior del dominio⁶. Las condiciones de contorno son de Dirichlet debiéndose especificar la localización en el plano físico de las líneas coordenadas ε y η .

La integración numérica del sistema de ecuaciones indicado y de sus condiciones de contorno se realiza, de forma más conveniente, en el plano transformado. De efectuar los correspondientes cambios de variable las ecuaciones (27) toman la forma:

$$\begin{aligned}g_{22}x_{\varepsilon\varepsilon} - 2g_{12}x_{\varepsilon\eta} + g_{11}x_{\eta\eta} &= -D^2(Px_{\varepsilon} + Qx_{\eta}) \\ g_{22}y_{\varepsilon\varepsilon} - 2g_{12}y_{\varepsilon\eta} + g_{11}y_{\eta\eta} &= -D^2(Py_{\varepsilon} + Qy_{\eta})\end{aligned}\quad (28)$$

En los contornos se especifican los valores de las coordenadas (x, y) correspondientes a la distribución elegida de las coordenadas curvilíneas.

El resultado de la integración numérica de las ecuaciones y de sus condiciones de contorno es una matriz de valores (x, y) , correspondientes a los puntos de intersección de las coordenadas curvilíneas en el plano físico. Para la resolución de las ecuaciones se ha empleado el método iterativo de Gauss-Seidel apoyado en un TDMA y en técnicas de sobrerrelajación.

Para la geometría especificada en este primer ejemplo de resolución la malla generada, según la distribución fijada de puntos en los contornos, se ha representado en la Figura 7a. Dicha malla corresponde al caso de $P(\varepsilon, \eta) = Q(\varepsilon, \eta) = 0$ y se la designará con la notación ZUEX. Una característica inherente a este método de generación de malla es la de que proporciona una distribución de líneas regular en el interior del dominio.

b) Las curvas correspondientes a las coordenadas curvilíneas son definidas por una expresión algebraica del tipo:

$$\varepsilon = \frac{x}{Ht} \quad ; \quad \eta = \frac{y - y_i(x)}{y_s(x) - y_i(x)}\quad (29)$$

en donde $y_s(x)$ e $y_i(x)$ son funciones que definen la geometría de los contornos laterales C_i y C_s respectivamente. La malla generada mediante la expresión anterior se ha representado en la Figura 7b y se la designará por la notación YUEX. Nótese que el método algebraico tiene la ventaja, respecto a métodos del tipo indicado anteriormente, de que la generación de las coordenadas curvilíneas se realiza con mínimo esfuerzo computacional; no obstante, y a diferencia del método anterior, las discontinuidades en los contornos son propagadas al interior de la malla.

c) Las coordenadas curvilíneas son generadas de forma que coinciden con las que serían líneas de corriente del flujo, supuesto éste incompresible, y con sus ortogonales. Para el caso que nos ocupa, la ecuación paramétrica de las líneas de corriente,

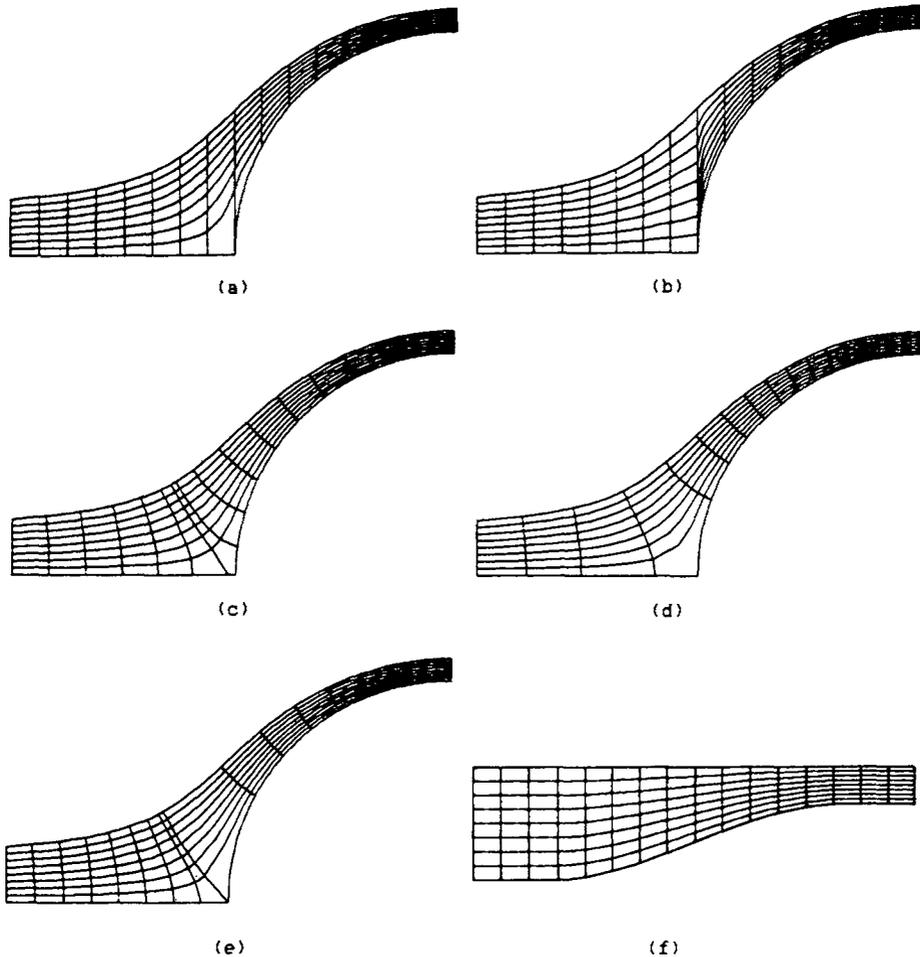


Figura 7. Coordenadas curvilíneas generadas para la resolución del flujo potencial alrededor de un cilindro (a,b,c,d,e) y del flujo potencial a través de una tobera convergente (f). Mallas tipo: (a) ZUEX; (b) YUEX; (c) XULT; (d) XUFI; (e) XUEX.

ecuación (26), y de sus ortogonales [líneas equipotenciales $\phi = x + (x - Ht)/[(x - Ht)^2 + y^2] + 1/Ht$] es conocida; la construcción del sistema de coordenadas se ha realizado a partir de dichas ecuaciones.

Para el estudio numérico hemos generado, basándonos en el criterio indicado, tres tipos de coordenadas curvilíneas ortogonales. En todos ellos, las líneas $\eta = cte$, correspondientes a las líneas de corriente, están distribuidas de forma que $\eta = \psi/\psi_s$, donde ψ está dada por la ecuación (26) y ψ_s por el valor de ψ en la línea del contorno C_s ; para el haz de curvas ortogonales, líneas $\epsilon = cte$, se han ensayado tres criterios:

- c1) Las líneas parten del contorno inferior C_i en puntos distribuidos de forma que la distancia medida sobre dicho contorno entre dos puntos consecutivos es constante. La malla generada se representa en la Figura 7c y se la designa por la notación XULT.
- c2) Las líneas se distribuyen de forma que $\epsilon = \phi/\phi_f$, indicando ϕ la función que

define las líneas equipotenciales del flujo incompresible alrededor de un cilindro¹ y siendo ϕ_f el valor de ϕ en el contorno C_f . La malla así generada se representa en la Figura 7d y se la designa por la notación XUFI. Nótese que esta malla, para la distribución de líneas dada en el contorno, resultaría de la resolución del sistema de ecuaciones elípticas (27) con $P = Q = 0$.

c3) Las líneas parten del contorno inferior C_i en puntos distribuidos de forma que la distancia medida sobre el eje z entre dos puntos consecutivos es constante. La malla generada es representada en la Figura 7e y se la designa por la notación XUEX.

Todas estas mallas generadas, XULT, XUFI y XUEX, son ortogonales geoméricamente no obstante, en la evaluación numérica de los coeficientes métricos, el valor de g^{ij} no es en general nulo para $i \neq j$.

Para el caso del flujo a través de una tobera convergente, la simetría del conjunto permite tomar como dominio para la resolución numérica el definido por el contorno inferior (contorno C_i) y por la línea de simetría (contorno C_s). En la Figura 7f se representa la malla de discretización generada mediante la ecuación (29).

Resultados numéricos y conclusiones

Para el primer caso seleccionado, flujo alrededor de un cilindro, los resultados numéricos obtenidos son los indicados en las Tablas I a IV y en las Figuras 8 y 9. Los resultados obtenidos para el segundo ejemplo, flujo a través de una tobera, son los indicados en la Tabla V y en la Figura 10.

En la Tabla I se indica, para el caso de flujo incompresible, el error de los distintos esquemas numéricos en la evaluación de la función de corriente según la densidad y el tipo de malla generada.

En todos los casos presentados, a excepción de los obtenidos con el esquema FC-1 para la malla XUEX, un incremento en la densidad de malla repercute en una mayor precisión en los resultados numéricos. Para el caso mencionado, esq. num. FC-1/malla XUEX, el incremento de densidad de malla no reduce el error; ello es debido, presumiblemente, a errores de truncamiento ocasionados por la distribución irregular de líneas $\varepsilon = \text{cte}$. Los esquemas del tipo FC-2 no presentan esta problemática y proporcionan, para este caso, unos resultados mucho más precisos.

En general, para una densidad y tipo de malla dado, el esquema numérico más preciso es el FC-2b. Los resultados obtenidos en base al empleo de mallas ortogonales son, a excepción de FC-1/XUEX, más precisos que los que se derivan del empleo de mallas no ortogonales; de entre estos últimos, los resultados más imprecisos han sido los obtenidos con la malla YUEX.

En las Figuras 8a,b,c,d se representa el error cometido en la evaluación numérica de las velocidades en el contorno lateral C_s ; la densidad de la malla empleada ha sido, en todos los casos, de 32×16 . Los resultados obtenidos con los distintos tipos de malla (ZUEX, YUEX, ...) y según los esquemas FC-1/V-2 y FC-2b/V-2 se representan respectivamente en las Figuras 8a y 8b. Los resultados obtenidos según los distintos criterios de evaluación de las velocidades en los contornos (E-1, E-2, E-3, V-1 y V-2) y según las mallas XULT y ZUEX se representan respectivamente en las Figuras 8c y 8d.

Tipo de malla	Criterio numérico	Densidad de la malla		
		16 × 8	32 × 16	64 × 32
ZUEX	FC-1	.015183 (9,3)	.006263 (17,3)	.002718 (33,2)
		.001131	.000330	.000079
	FC-2a	.020257 (9,3)	.008660 (17,3)	.003088 (33,3)
		.001575	.000452	.000102
	FC-2b	.015790 (9,3)	.006646 (17,3)	.002829 (33,2)
		.001176	.000323	.000072
YUEX	FC-1	.020399 (9,5)	.012637 (17,9)	.009072 (33,16)
		.002247	.000943	.000502
	FC-2a	.028761 (9,5)	.017406 (17,8)	.010695 (33,22)
		.001884	.000772	.000294
	FC-2b	.014749 (9,5)	.006839 (17,8)	.004045 (34,20)
		.001299	.000487	.000168
XULT	FC-1	.003768 (8,3)	.002458 (14,5)	.000779 (25,6)
		.000627	.000354	.000105
	FC-2a	.001434 (7,3)	.000765 (33,9)	.000411 (65,17)
		.000253	.000088	.000026
	FC-2b	.002426 (7,2)	.000785 (13,2)	.000204 (26,2)
		.000190	.000051	.000012
XUFI	FC-1	.001792 (5,4)	.002149 (7,3)	.000802 (14,2)
		.000184	.000116	.000021
	FC-2a	.007337 (4,4)	.002356 (7,7)	.002167 (14,6)
		.000633	.000189	.000066
	FC-2b	.003042 (5,4)	.002116 (8,4)	.000669 (13,4)
		.000210	.000088	.000020
XUEX	FC-1	.021776 (9,3)	.022632 (17,5)	.025197 (33,9)
		.002569	.002268	.002361
	FC-2a	.011099 (9,3)	.005160 (17,3)	.002296 (33,3)
		.000910	.000286	.000074
	FC-2b	.010490 (9,2)	.004998 (17,2)	.002292 (33,2)
		.000805	.000271	.000060

Tabla I. Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Se indica: - el valor absoluto de la diferencia máxima entre los valores de ψ obtenidos numéricamente y los que se derivan de la solución exacta así como el punto (i, j) de la malla en donde se ha producido; - el valor medio de las diferencias, en valor absoluto, entre los resultados obtenidos numéricamente y la solución exacta. En todo el dominio $0.00 \leq \psi \leq 0.1885$.

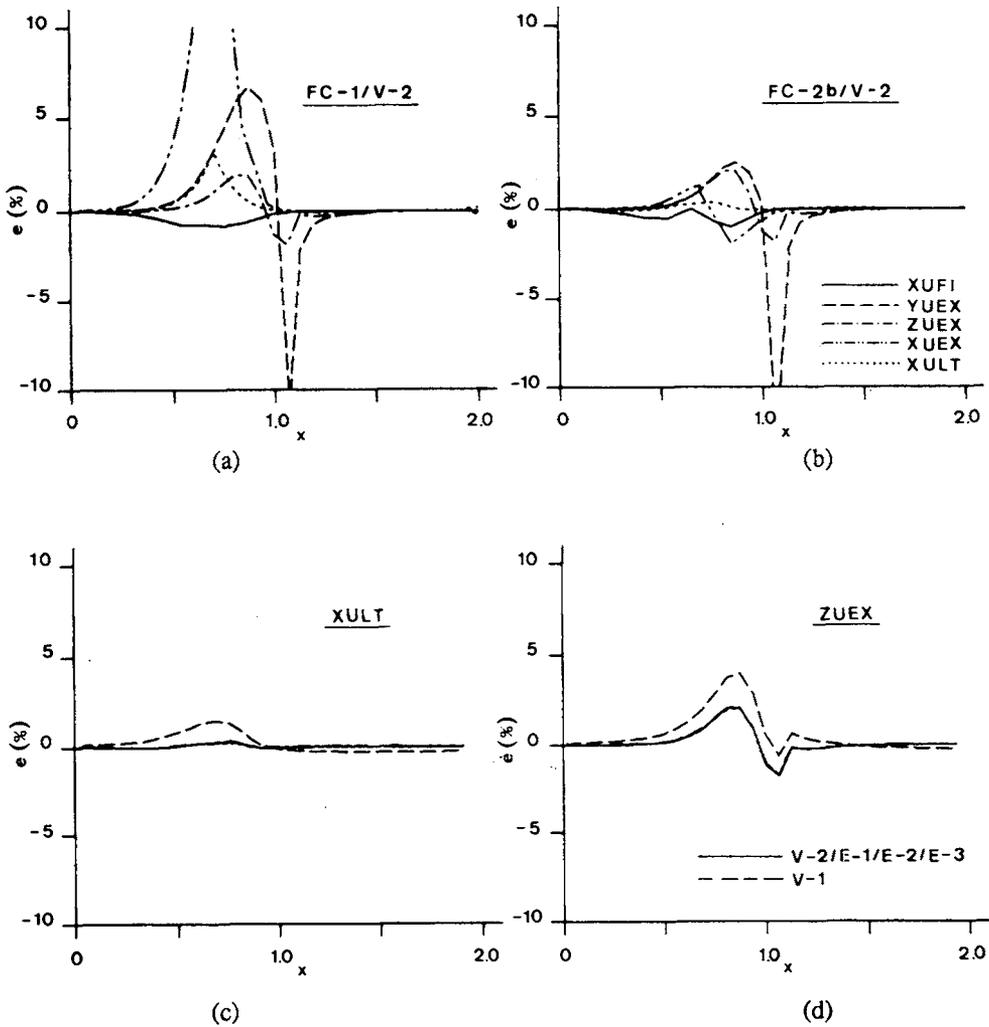


Figura 8. Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Porcentaje de error, e , de las velocidades obtenidas numéricamente respecto de la solución exacta en los contornos laterales.

Los resultados referentes a la influencia del esquema numérico y a la ortogonalidad o no de la malla confirman los ya comentados para la Tabla I. Referente a los criterios de evaluación de las velocidades en el contorno lateral C_s , el menos preciso ha sido el V-1; los resultados obtenidos con los criterios E-1, E-2, E-3 y V-2 han sido muy parecidos, no manifestándose ninguno de ellos claramente superior al resto.

En la Tabla II se indican, para el caso de flujo incompresible, el error cometido en la evaluación, según los distintos criterios numéricos, de las velocidades en el contorno de salida C_f . El esquema más preciso también ha sido el FC-2b; el empleo del criterio V-2 ha resultado más eficaz que el V-1.

En la Tabla III se indica para el caso de flujo incompresible, el número de iteraciones requerido para obtener una determinada precisión según distintos: métodos iterativos, factores de sobrerelajación f para la función de corriente, esquemas

Coord. <i>y</i>	Sol. exacta vel.	FC-1		FC-2a		FC-2b	
		V-1	V-2	V-1	V-2	V-1	V-2
1.099	1.8285	+58.8%	+1.49%	+1.34%	-0.06%	-0.83%	-0.03%
1.073	1.8686	+19.5%	+0.01%	+0.75%	-0.04%	-0.29%	-0.01%
1.048	1.9104	+8.44%	-0.00%	-0.26%	-0.00%	-0.29%	-0.00%
1.024	1.9542	+21.0%	-0.02%	-1.30%	+0.03%	-0.29%	+0.01%
1.000	2.0000	-157.7%	-1.46%	-1.86%	+0.10%	+0.29%	+0.03%

Tabla II. Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Se representa el porcentaje de error, e , de la solución numérica de las velocidades, en el contorno C_f , respecto de la solución exacta. Malla XULT de densidad 16×8 .

Esq. num.	Dens. malla	Gauss, f :			TDMA $_i$, f :			TDMA $_j$, f :				TDMA $_i/j$, f :		
		1.0	1.4	1.8	1.0	1.3	1.6	1.0	1.1	1.2	1.3	1.0	1.1	1.2
FC-1	16×18	63	27	47	49	24	35	24	17	16	30	32	25	19
	32×16	215	103	44	146	77	116	106	83	64	div	100	76	61
FC-2a	16×18	55	24	45	44	21	28	20	14	17	29	27	21	15
	32×16	152	75	42	111	59	64	68	53	76	div	73	56	67
FC-2b	16×8	56	24	44	41	20	34	23	17	15	25	29	23	19
	32×16	151	76	37	96	51	217	85	68	59	div	72	54	53

Tabla III. Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Se indica el número de iteraciones requerido para obtener una precisión de $\xi = .0000001$. Malla XULT.

numéricos y densidades de malla. Para el inicio de las iteraciones se ha tomado coma mapa inicial de la función de corriente el correspondiente a la solución analítica, ecuación (26). En la resolución por el método TDMA $_i/j$, se puede incrementar la rapidez de convergencia utilizando factores de sobrerrelajación diferenciados en ambas direcciones; así, si para la dirección i se emplea $f = 1.3$ y para la j $f = 1.1$, el número de iteraciones requerido con una malla de 32×16 y según los esquemas FC-1, FC-2a y

FC-2b son: 54, 42 y 38 iteraciones respectivamente. Para este tipo de malla se observa una mayor rapidez de convergencia con los esquemas FC-2b que con el esquema FC-1.

Mo	fv	$16 \times 8^{(1)}$		$32 \times 16^{(1)}$		$16 \times 8^{(2)}$		$32 \times 16^{(2)}$	
		XULT	ZUEX	XULT	ZUEX	XULT	ZUEX	XULT	ZUEX
.200	0.10	110	106	109	106	110	107	149	107
	0.25	35	34	70	35	41	42	150	47
	0.50	20	19	70	26	91	nc	183	513
	0.75	19	16	70	28	30	21	149	41
	1.00	20	20	70	61	30	22	150	62
.225	0.10	110	106	109	106	110	107	149	107
	0.25	57	52	73	53	54	63	nc	nc
	0.50	35	31	73	33	nc	nc	nc	nc
	0.75	25	23	78	74	32	72	148	98
	1.00	34	33	nc	nc	37	38	nc	nc

Tabla IV. Flujo potencial compresible alrededor de un cilindro. Número de iteraciones requerido para obtener una precisión de $\xi = .0000001$. Mapa inicial: (1)INlinc; (2)INlunif.

En la Tabla IV se indica, para el caso de flujo compresible alrededor del cilindro, el número de iteraciones requerido para la convergencia del método numérico a la precisión exigida en función de: el factor de subrelajación empleado para las velocidades; el número de Mach a la entrada del dominio; el mapa inicial de ψ y ρ para el inicio de las iteraciones; la densidad y el tipo de malla empleada. Estos resultados han sido obtenidos con el esquema numérico FC-2b/V-2 y con el método iterativo TDMAj. La notación 'nc' indica la no convergencia del método numérico. La notación INlinc e INlunif indican que para el inicio de las iteraciones se ha tomado como mapa inicial para la función de corriente y la densidad los valores correspondientes a la solución numérica del flujo con $Mo=.001$ (INlinc), o bien unos valores uniformes en todo el dominio de 0.1 para la función de corriente y 1.0 para la densidad (INlunif).

De los resultados obtenidos se sigue que, para los valores elevados del número de Mach, el empleo de adecuados factores de subrelajación para las velocidades reduce el número de iteraciones; también queda de manifiesto la importancia de iniciar el proceso iterativo con mapas próximos a la solución numérica.

En la Figura 9 se representa para el flujo compresible alrededor de un cilindro, la distribución del coeficiente de presión C_p en los contornos laterales C_i y C_s para diferentes valores del número de Mach a la entrada del dominio. Estos resultados han sido obtenidos con el esquema numérico FC-2b/V-2 y con una densidad de malla tal

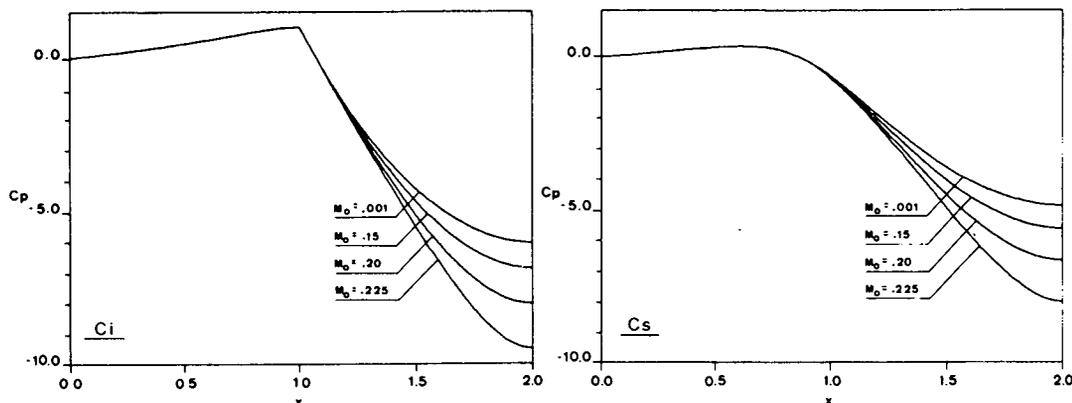


Figura 9. Flujo potencial compresible alrededor de un cilindro. Coeficiente de presión a diferentes Mo en los contornos laterales Ci y Cs .

Cont.	z	$Mo = .001$				$Mo = .190$			
		vel. ref.	FC-1	FC-2a	FC-2b	vel. ref.	FC-1	FC-2a	FC-2b
Ci	0.000	1.0000	0.00%	0.00%	0.00%	1.0000	0.00%	0.00%	0.00%
	0.738	0.9666	0.40%	1.32%	0.41%	0.9668	0.41%	1.35%	0.42%
	1.475	0.9081	-0.58%	-1.40%	-0.55%	0.9084	-0.58%	-1.40%	-0.54%
	2.213	1.0947	-0.25%	-0.38%	-0.24%	1.1018	-0.24%	-0.37%	-0.22%
	2.950	1.4623	-0.20%	-0.29%	-0.20%	1.4957	-0.17%	-0.27%	-0.17%
	3.688	2.0824	-0.16%	-0.23%	-0.16%	2.2265	-0.13%	-0.24%	-0.14%
	4.056	2.4918	-0.08%	-0.06%	-0.08%	2.7933	-0.09%	-0.16%	-0.11%
	4.425	2.8991	0.09%	0.58%	0.11%	3.5098	-0.07%	0.40%	-0.06%
	4.794	3.1319	0.84%	1.62%	0.86%	4.1616	1.18%	2.21%	1.28%
	5.162	3.0107	-0.23%	-0.95%	-0.23%	3.9922	-0.29%	-1.16%	-0.28%
5.900	3.0002	0.13%	-0.01%	0.00%	3.9874	0.12%	0.00%	0.00%	
Cs	0.000	1.0000	0.00%	0.00%	0.00%	1.0000	0.00%	0.00%	0.00%
	0.738	1.0244	-0.07%	-0.24%	-0.07%	1.0244	-0.07%	-0.26%	-0.07%
	1.475	1.0915	-0.08%	0.20%	-0.08%	1.0939	0.06%	0.22%	-0.07%
	2.213	1.2536	-0.07%	0.00%	-0.08%	1.2660	0.07%	0.00%	-0.08%
	2.950	1.5670	-0.03%	0.01%	-0.03%	1.6138	0.04%	0.01%	-0.04%
	3.688	2.0888	0.04%	0.06%	0.04%	2.2597	0.04%	0.08%	0.04%
	4.056	2.4176	0.05%	0.01%	0.05%	2.7459	0.07%	0.07%	0.07%
	4.425	2.7299	0.01%	-0.25%	0.00%	3.3355	0.05%	-0.19%	0.05%
	4.794	2.9296	-0.11%	-0.46%	-0.11%	3.8550	-0.39%	-0.84%	-0.42%
	5.162	2.9905	0.07%	0.38%	0.08%	3.9828	0.13%	0.52%	0.13%
5.900	2.9998	-0.07%	0.01%	0.00%	3.9874	-0.07%	0.00%	0.00%	

Tabla V. Flujo potencial a través de una tobera. Porcentaje de error, e , de las velocidades obtenidas numéricamente en Ci y Cs respecto de la solución numérica de referencia.

(128×64) que no hay prácticamente diferencias con los resultados que se obtienen con mallas de mayor densidad.

En la **Tabla V** se indican los errores cometidos, respecto a una solución numérica de referencia, en la evaluación de las velocidades en los contornos laterales C_i y C_s del flujo a través de una tobera según los distintos esquemas numéricos y para una malla relativamente poco densa: 16×8 . La solución numérica de referencia ha sido obtenida con el esquema numérico FC-2b/V-2 y para una malla de 128×64 ; mayor densificación de la malla no produce prácticamente alteración de estos resultados. Nótese que: los resultados obtenidos con $Mo = 0.001$ y $Mo = 0.190$ presentan un grado de error similar; no aparecen diferencias significativas entre los esquemas FC-2b/V-2 y FC-1/V-2; el esquema numérico FC-2a/V-2 es el que ha dado resultados algo menos precisos.

En la **Figura 10** se representa la distribución del coeficiente de presión C_p en los contornos laterales a diferentes números de Mach a la entrada de la tobera. Estos resultados han sido obtenidos con el esquema numérico FC-2b/V-1 y con una malla de 128×64 .

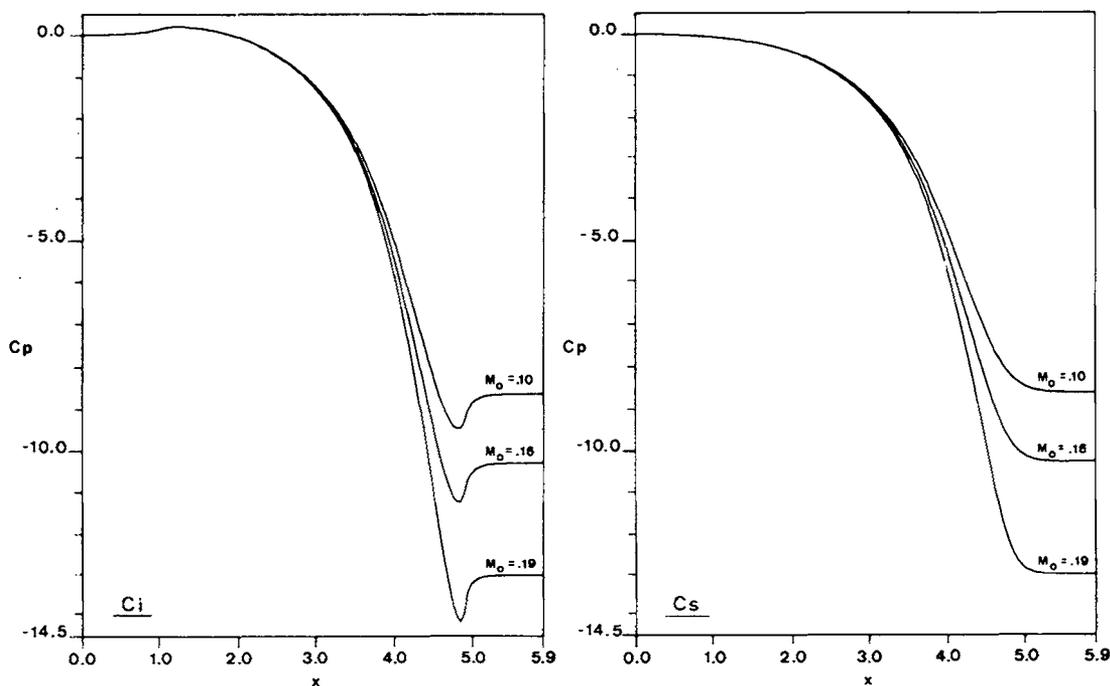


Figura 10. Flujo potencial a través de una tobera. Coeficiente de presión a diferentes Mo en contornos laterales C_i y C_s .

Conclusiones finales

En este artículo se han presentado diferentes esquemas numéricos para la resolución del flujo subsónico potencial mediante el empleo de mallas de discretización adaptables a los contornos del dominio. De los esquemas ensayados, el FC-2 es el que permite (seguido del FC-3) una más fácil interpretación física de los criterios numéricos

adoptados, así como un análisis más conveniente de las condiciones de contorno de tipo Neumann. Para el tratamiento de posibles puntos singulares (discontinuidades en el contorno, discontinuidades en puntos interiores de la malla generada, ...) el esquema más adecuado es el FC-2. Como consecuencia de los criterios numéricos empleados en la aproximación de las derivadas e integrales, se ha constatado que los esquemas FC-2 y FC-3 dan unas ecuaciones de discretización equivalentes y, por tanto, idénticos resultados numéricos.

Para el primer caso seleccionado (flujo alrededor de un cilindro) el esquema que ha dado, en general, mejores resultados ha sido el FC-2b; para el segundo caso seleccionado (flujo a través de una tobera) los esquemas FC-1 y FC-2b han dado unos resultados similares. De otra parte, el criterio numérico V-2 para la evaluación de las derivadas en el contorno se ha mostrado en general más eficaz que el V-1. Los resultados obtenidos han puesto además de manifiesto la influencia de: la geometría del flujo; el tipo de malla generada (distribución líneas, discontinuidades, ortogonalidad), los métodos iterativos, los factores relajación, etc.

APENDICE: TERMINOLOGIA

En este apéndice se relacionan aquellas variables no expresamente indicadas en el artículo así como expresiones matemáticas de interés.

- C_p Coeficiente de presión, $C_p = (\bar{p} - \bar{p}_o)/(0.5\bar{\rho}_o\bar{v}_o^2)$.
- e Porcentaje de error: $e = 100 \cdot (v_{\text{ref}} - v_{\text{num}})/v_{\text{ref}}$, siendo v_{ref} la solución analítica o numérica de referencia y v_{num} el resultado numérico.
- D Jacobiano de la transformación $x^i = x^i(q^1, q^2)$; $D = (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})^{1/2}$; $D = 1/J$.
- f Factor de relajación para la función de corriente; $\psi_{i,j}^k = f \cdot \psi_{i,j}^k - (f - 1) \cdot \psi_{i,j}^{k-1}$.
- fv Factor de relajación para las velocidades $v_{i,j}^k = fv \cdot v_{i,j}^k - (fv - 1) \cdot v_{i,j}^{k-1}$.
- g^{ij} Componentes del tensor métrico contravariante, $g^{ij} = \sum_{k=1}^3 (\partial q^i / \partial x^k)(\partial q^j / \partial x^k)$.
- g_{ij} Componentes del tensor métrico covariante, $g_{ij} = \sum_{k=1}^3 (\partial x^k / \partial q^i)(\partial x^k / \partial q^j)$.
- J Jacobiano de la transformación $q^i = q^i(x^1, x^2)$; $J = (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21})^{1/2}$.
- k Número de iteración; relación entre el calor específico a presión constante y a volumen constante (en los casos ensayados se ha tomado $k = 1.40$).
- \bar{L} Longitud característica.
- \bar{m} Flujo másico por unidad de altura, $\bar{m} = \bar{m}/(\bar{\rho}_o\bar{v}_o\bar{L})$.
- n Dirección normal al contorno.
- $N \times M$ Densidad de la malla: $N + 1$ puntos en la dirección ϵ y $M + 1$ puntos en la dirección η .
- M Número de Mach: $M = \bar{v}/(k\bar{R}\bar{T})^{1/2}$, en donde \bar{R} es la constante del gas.
- r Vector posición.
- T Temperatura, $T = \bar{T}/\bar{T}_o$.
- \mathbf{v}, v Vector velocidad $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}/\bar{v}_o$; módulo de la velocidad $v = \bar{v}/\bar{v}_o$.
- v_x, v_y Componentes cartesianas de la velocidad, $v_x = \bar{v}_x/\bar{v}_o$, $v_y = \bar{v}_y/\bar{v}_o$.

- x, y Coordenadas cartesianas, $x = \bar{x}/\bar{L}$, $y = \bar{y}/\bar{L}$; se emplea igualmente la notación (x^1, x^2) .
- $\Delta\varepsilon, \Delta\eta$ Incrementos de la malla en las direcciones ε y η ; $\Delta\varepsilon = 1/N$, $\Delta\eta = 1/M$.
- ψ Función de corriente, $\psi = \bar{\psi}/\bar{v}_o\bar{L}$.
- $\psi_{i,j}^k$ Valor de la función de corriente en el punto (i, j) de la malla en la iteración k .
- ρ Densidad, $\rho = \bar{\rho}/\bar{\rho}_o$.
- ε, η Coordenadas curvilíneas; se emplea igualmente la notación (q^1, q^2) .
- ξ Precisión exigida para finalizar las iteraciones: $\max|\psi_{i,j}^k - \psi_{i,j}^{k-1}| < \xi$.

Nota: – Los valores \bar{v}_o , \bar{T}_o , M_o , etc. son los correspondientes a un punto arbitrario 'o' del dominio; en general indica aguas arriba o la zona de entrada del flujo al dominio.

– Las variables *dimensionales* se han diferenciado de las *adimensionales* colocándoles encima un guión.

– Por comodidad se ha empleado la notación ε_x , ε_{xx} , ..., para indicar las derivadas $\partial\varepsilon/\partial x$, $\partial^2\varepsilon/\partial x^2$,

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el marco del Proyecto de Investigación no. 1937/82 subvencionado por la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica.

REFERENCIAS

1. A.H. Shapiro, "Compressible Fluid Flow", The Ronald Press Comp., New York, (1953).
2. Ching-Mao Hung, "Extrapolation of Velocity for Inviscid Solid Boundary Conditions", *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 11, (1987).
3. S.V. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, Washington, (1980).
4. C.D. Pérez Segarra, "Criterios Numéricos en la Resolución de la Transferencia de Calor en Fenómenos de Convección", *Tesis Doctoral*, Universitat Politècnica de Catalunya, (1987).
5. J.S. Thompson, "Elliptic Grid Generation", *Numerical Grid Generation*, ed. J.F. Thompson, North-Holland, (1982).
6. P.D. Thomas y J.F. Middlecoff, "Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations", *AIAA Journal*, Vol. 18, No. 6, (1980).