Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 13,**3**, 289–296(1997)

VIBRACIONES LIBRES DE PLACAS RECTANGULARES CON UNA PERFORACIÓN CIRCULAR CENTRAL

BLANCA DEL V. ARENAS
y
RICARDO O. GROSSI

PROMAS, Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Salta
Buenos Aires 177, 4400 Salta, Argentina
Tel.: + 54-87-255379 Fax: + 54-87-255351
E-mail: promas@ciunsa.edu.ar

RESUMEN

Este trabajo presenta el desarrollo y aplicación de un algoritmo general para la determinación de coeficientes de frecuencia de una placa rectangular con un agujero central libre. El algoritmo está basado en la aplicación del método de Rayleigh-Schmidt. Los resultados numéricos obtenidos que han podido ser comparados con trabajos de investigación previos, en general, están caracterizados por una buena precisión. Es posible aplicar el algoritmo en un amplio rango de condiciones de restricciones elásticas rotacionales, incluyendo las condiciones de apoyo clásicas, así como para distintas relaciones de lados de la placa y dimensiones de la perforación central.

FREE VIBRATION OF RECTANGULAR PLATES WITH A CENTRAL CIRCULAR HOLE

SUMMARY

The present work deals with the development and application of a general algorithm for the determination of values of frequency coefficients for a rectangular plate with a central free hole. The algorithm is based on the application of Rayleigh-Schmidt method. The numerical results obtained and compared with previous works are characterized by a good accuracy. It is possible to applied it in a wide range of conditions of elastically rotational restrictions, including the classical boundary conditions and also for different aspect plate coefficients and dimensions of the central hole.

Recibido: Abril 1996

 ISSN 0213–1315

INTRODUCCIÓN

El análisis dinámico de placas con agujeros es un tema importante de desarrollo y aplicación en diversas disciplinas, tales como las ingenierías naval y oceanográfica. La determinación de frecuencias naturales para vibraciones transversales de placas con un agujero central libre es un problema que ha sido estudiado por varios autores[1-3]. Existe una cantidad abundante de bibliografía sobre la aplicación del método de Rayleigh-Ritz y su variante conocida como el método de Rayleigh-Schmidt para la obtención de frecuencias de placas. El método de Reyleigh-Schmidt proporciona la posibilidad de refinar la curva de deformación propuesta a través de la función aproximante, sin necesidad de agregar términos a la misma[4-7]. El procedimiento provee un tratamiento directo y sencillo y los resultados obtenidos son en general muy buenos, desde un punto de vista práctico. Cuando se analiza el comportamiento dinámico de placas rectangulares isotrópicas, comúnmente se generan los siguientes coeficientes de frecuencia adimensionales

$$\Omega_{ij} = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\omega_{ij} a^2 \qquad \Omega_{ij} = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\omega_{ij} b^2$$

El algoritmo desarrollado permite obtener valores de los dos tipos de coeficientes de frecuencia indicados para los dos primeros modos de vibración. También permite usar distintas expresiones para los coeficientes de rigidez en los vínculos de los extremos.

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Consideremos una placa rectangular isotrópica con bordes elásticamente restringidos contra rotación y con una perforación circular central libre. Los lados están apoyados, por lo que las condiciones de contorno adimensionales obtenidas con el cambio de variables

$$x = \frac{\bar{x}}{a} \qquad y = \frac{\bar{y}}{b}$$

son

$$\begin{aligned} W(0,y) = W(1,y) = W(x,0) &= W(x,1) = 0 \\ r_1 a W_x(0,y) &= D W_{xx}(0,y) \\ r_2 a W_x(1,y) &= -D W_{xx}(1,y) \\ r_3 b W_y(x,0) &= D W_{yy}(x,0) \\ r_4 b W_y(x,1) &= -D W_{yy}(x,1) \end{aligned} \tag{1}$$

donde W denota la función de los desplazamientos transversales, $r_i, i = 1,2,3,4$ las constantes de rigidez rotacional, a y b los lados de la placa y D la rigidez a la flexión

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

donde μ es el coeficiente de Poisson. El método aplicado en el presente trabajo se basa en la adopción de funciones aproximantes constituídas por expresiones del tipo

$$\begin{aligned} W_a = {} & A_1(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^{n_3} + x^{n_4})(d_1 y + d_2 y^2 + d_3 y^{m_3} + y^{m_4}) + \\ & + A_2(b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^{n_3} + x^{n_4})(x - 1/2)(e_1 y + e_2 y^2 + e_3 y^{m_3} + y^{m_4})(y - 1/2) \end{aligned} \tag{2}$$

donde los coeficientes a_i, b_i, d_i y e_i se determinan reemplazando la expresión (2) en las condiciones de contorno (1). Los coeficientes n_3, n_4, m_3 y m_4 son parámetros ajustables. El funcional que gobierna el problema involucra los valores máximos de las energías de deformación y cinéticas del sistema mecánico en estudio y está dado por

$$I[\omega(x,y)] = U_{p_{\max}} + U_{r_{\max}} - T_{\max} \tag{3}$$

donde $U_{p_{\max}}$ representa la energía máxima de deformación de la placa, la cual está dada por

$$\begin{aligned} U_{p_{\max}} = \frac{D}{2} \Bigg[& \frac{b}{a^3} \int\int_{\bar{P}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 dxdy + \frac{a}{b^3} \int\int_{\bar{P}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 dxdy + \\ & + 2\mu \frac{1}{ab} \int\int_{\bar{P}} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dxdy + 2(1-\mu)\frac{1}{ab} \int\int_{\bar{P}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy \Bigg] \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\bar{P}$ es el dominio de integración, el cual es un cuadrado de lados igual a 1 con un agujero central. Por otra parte

$$\begin{aligned} U_{r_{\max}} = \frac{1}{2} \Bigg\{ & r_1 \frac{b}{a^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial W(0,y)}{\partial x}\right)^2 dy + r_2 \frac{b}{a^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial W(1,y)}{\partial x}\right)^2 dy + \\ & + r_3 \frac{a}{b^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial W(x,0)}{\partial y}\right)^2 dx + r_4 \frac{a}{b^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial W(x,1)}{\partial y}\right)^2 dx \Bigg\} \end{aligned} \tag{5}$$

es la expresión de la energía de deformación almacenada en los vínculos rotacionales a lo largo de los bordes de la placa y

$$T_{\max} = \frac{1}{2} ab\rho h \omega^2 \int\int_{\bar{P}} W^2 dxdy \tag{6}$$

es la expresión de la energía cinética de la placa, donde ρ denota la densidad del material y ω la frecuencia circular natural. Con estas expresiones el funcional total (3) queda expresado de la sigiente manera

$$
\begin{aligned}
2I[\omega(x,y)] = D \Bigg[& \frac{b}{a^3}\int\int_{\bar{P}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 dxdy + \frac{a}{b^3}\int\int_{\bar{P}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 dxdy + \\
& + 2\mu\frac{1}{ab}\int\int_{\bar{P}} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dxdy + 2(1-\mu)\frac{1}{ab}\int\int_{\bar{P}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy \Bigg] + \\
& + r_1\frac{b}{a^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial W(0,y)}{\partial x}\right)^2 dy + r_2\frac{b}{a^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial W(1,y)}{\partial x}\right)^2 dy + \\
& + r_3\frac{a}{b^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial W(x,0)}{\partial y}\right)^2 dx + r_4\frac{a}{b^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial W(x,1)}{\partial y}\right)^2 dx - ab\rho h\omega^2 \int\int_{\bar{P}} W^2 dxdy
\end{aligned}
\tag{7}
$$

El reemplazo de la función aproximante (2) en el funcional (7) conduce a la siguiente ecuación

$$
\begin{aligned}
& D\left[\frac{b}{a^3}I_1 + \frac{a}{b^3}I_2 + \frac{2\mu}{ab}I_3 + \frac{2(1-\mu)}{ab}I_4\right] + r_1\frac{b}{a^2}I_{r_1} + \\
& + r_2\frac{b}{a^2}I_{r_2} + r_3\frac{a}{b^2}I_{r_3} + r_4\frac{a}{b^2}I_{r_4} - ab\rho h\omega^2 I_c = 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

El cociente de Rayleigh para la placa rectangular isotrópica queda entonces expresado como

$$
\begin{aligned}
\Omega^2 = \frac{\rho h}{D}\omega^2 a^4 = \frac{1}{I_c}\{ & RD(1)I_1 + rl^4 RD(2)I_2 + rl^2 RD(3)I_3 + \\
& + rl^2 RD(4)I_4 + R_1 I_{r_1} + R_2 I_{r_2} + rl^3 R_3 I_{r_3} + rl^3 R_4 I_{r_4}\}
\end{aligned}
$$

A los efectos de tener un algoritmo general que permita generar valores numéricos correspondientes a distintas expresiones analíticas del coeficiente de frecuencia y de los coeficientes de rigidez en los lados, se introducen los parámetros p_i. De esta manera se tiene

$$
\begin{aligned}
\Omega^2 = \frac{1}{I_c}\{ & p_1 RD(1)I_1 + p_2 RD(2)I_2 + p_3 RD(3)I_3 + p_4 RD(4)I_4 + \\
& + p_5 R_1 I_{r_1} + p_6 R_2 I_{r_2} + p_7 R_3 I_{r_3} + p_8 R_4 I_{r_4}\}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

La condición de minimización $\frac{\partial\Omega[A_1,A_2]}{\partial A_i} = 0$ conduce a un sistema de ecuaciones lineales en A_1 y A_2. Para que exista una solución no trivial, el determinante debe ser nulo, obteniéndose la ecuación de frecuencia siguiente

$$A\Omega^4 + B\Omega^2 + C = 0 \tag{10}$$

siendo

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\omega l^2 \tag{11}$$

donde l denota al lado a o al b, según el tipo de coeficiente de frecuencia que se desea usar. La raíz de menor valor corresponde al coeficiente de frecuencia fundamental y la otra al coeficiente de frecuencia de un modo superior de vibración. Dado que la función aproximante propuesta W_a contiene a los coeficientes ajustables n_i y m_i, podemos escribir

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ij}(n_3, n_4, m_3, m_4)$$

El método de Rayleigh-Schmidt requiere además la minimización de los coeficientes de frecuencia respecto a n_3, n_4, m_3 y m_4[4]. Dicha minimización es un proceso complicado; afortunadamente es suficiente con tomar valores de n_i y m_i en entornos de los puntos i y j para obtener valores aproximados, pero de muy buena precisión[7]. En el caso en que n_i y m_i están fijos, se tiene el clásico método de Rayleigh-Ritz.

ANÁLISIS DE DISTINTOS CASOS

En primer lugar se generan valores de coeficiente de frecuencias

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\omega a^2$$

cuando los coeficientes de rigidez están dados por

$$R_1 = \frac{r_1 a}{D} \qquad R_2 = \frac{r_2 a}{D} \qquad R_3 = \frac{r_3 b}{D} \qquad R_4 = \frac{r_4 b}{D}$$

Para que el algoritmo desarrollado genere valores de acuerdo a este coeficiente, los parámetros p_i deben estar dados por

$$p_1 = 1 \quad p_2 = rl^4 \quad p_3 = rl^2 \quad p_4 = rl^2 \quad p_5 = 1 \quad p_6 = 1 \quad p_7 = rl^4 \quad p_8 = rl^4$$

Luego se generaron valores del coeficiente de frecuencia

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\omega b^2$$

cuando los coeficientes de rigidez están dados por

$$R_1 = \frac{r_1 a}{D} \quad R_2 = \frac{r_2 a}{D} \quad R_3 = \frac{r_3 b}{D} \quad R_4 = \frac{r_4 b}{D}$$

En este caso los parámetros p_i deben estar dados por

$$p_1 = rl^4 \quad p_2 = 1 \quad p_3 = rl^2 \quad p_4 = rl^2 \quad p_5 = rl^4 \quad p_6 = rl^4 \quad p_7 = 1 \quad p_8 = 1$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

La Tabla I muestra los valores de la frecuencia fundamental $\Omega_{11} = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\omega_{11}a^2$ para una placa rectangular con los lados 1 y 3 simplemente apoyados y lados 2 y 4 libres, obtenidos mediante los métodos de exponentes fijos y exponentes variables. Los mismos son comparados con el caso extremo de una placa llena, según los datos obtenidos de las referencias[3,10]. La Tabla II muestra los coeficientes de frecuencia $\Omega_{ij} = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\omega_{ij}a^2$ para una placa rectangular con los lados 1 y 2 simplemente apoyados y los lados 3 y 4 rígidamente empotrados. La Tabla III muestra los valores de la frecuencia $\Omega_{11} = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\omega_{11}b^2$ para una placa rectangular con los lados 1 y 2 elásticamente restringidos contra rotación y los lados 3 y 4 simplemente apoyados. Para distintas relaciones de lados y proporciones de la perforación se toma el caso extremo de una placa llena a los fines de comparar la precisión obtenida en el presente trabajo con las referencias[9,11].

Ω_{11}					
rl		η			
		0,0	0,20	0,30	0,40
0,4	(I)	1,3928	1,39157	1,38825	1,3831
	(II)	1,39			
	(III)	1,32			
2/3	(I)	2,2892	2,2908	2,28088	2,2700
	(II)	2,31			
	(III)	2,23			
1,5	(I)	5,1513	5,1248	5,0798	5,0137
	(II)	5,17			
	(III)	5,02			
2,5	(I)	8,6957	8,5901	8,4580	8,3186
	(II)	8,72			
	(III)	8,25			

(I) Presente trabajo, (II) Ref. 10, (III) Ref. 3

Tabla I. Coeficiente de frecuencia $\Omega_{11} = \sqrt{\rho h/D}\omega_{11}a^2$ de una placa rectangular con los lados 1 y 3 simplemente apoyados y lados 2 y 4 libres. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 0$, $T_1 = T_3 = \infty$, $T_2 = T_4 = 0$, $rl = a/b$, $\eta = \frac{2R}{a}$, $\mu = 0,30$

		η					
		0,20		0,30		0,40	
		Ω_{11}	Ω_{22}	Ω_{11}	Ω_{22}	Ω_{11}	Ω_{22}
$rl = 1$	(I)	30,10	93,58	31,82	92,64	31,94	92,69
	(II)		93,57		92,65		92,78
$rl = 1,5$	(I)	60,04	169,20	65,89	168,84	76,62	171,33
	(II)		169,41		169,06		171,67
$rl = 2$	(I)	103,84	277,92	117,20	279,24	137,13	285,81
	(II)		278,35		279,77		286,50

(I) Presente trabajo, (II) Ref. 1

Tabla II. Coeficiente de frecuencia $\Omega_{ij} = \sqrt{\rho h/D}\omega_{ij}a^2$ de una placa rectangular con los lados 1 y 2 simplemente apoyados y lados 3 y 4 rígidamente empotrados. $R_1 = R_2 = 0$ y $R_3 = R_4 = \infty$, $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \infty$, $rl = a/b$, $\eta = \frac{2R}{a}$, $\mu = 0,30$

Ω_{11}						
$rl = 0,4$						
$R_1 = R_2$		η				
		0,0	0,20	0,30	0,40
0,1	(I)	11,46	11,52	11,60	11,70
	(II)	11,45			
	(III)	11,50			
10	(I)	11,61	11,67	11,73	11,85
	(II)	11,66			
	(III)	11,70			
100	(I)	12,07	12,16	12,27	12,43
	(II)	12,06			
	(III)	12,00			
$rl = 0,8$					
0,1	(I)	16,23	16,50	16,93	17,62
	(II)	16,23			
	(III)	16,20			
10	(I)	18,55	18,94	19,56	20,59
	(II)	18,47			
	(III)	18,50			
100	(I)	20,19	21,34	22,18	23,72
	(II)	20,78			
	(III)	21,00			
$rl = 1$					
0,1	(I)	19,66	20,16	20,80	22,00
	(II)	19,84			
	(III)	19,80			
10	(I)	24,02	25,25	26,08	28,09
	(II)	24,51			
	(III)	24,20			
100	(I)	28,05	29,12	30,73	33,60
	(II)	28,16			
	(III)	28,00			

(I) Presente trabajo, (II) Ref. 11, (III) Ref. 9

Tabla III. Coeficiente de frecuencia $\Omega_{11} = \sqrt{\rho h/D}\omega_{11}b^2$ de una placa rectangular con los lados 1 y 2 elásticamente restringidos contra rotación y los lados 3 y 4 simplemente apoyados. $R_1 = R_2 = \frac{r_1 a}{D}$, $R_3 = R_4 = 0$, $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \infty$, $rl = a/b$, $\eta = \frac{2R}{a}$, $\mu = 0,30$

REFERENCIAS

1. R.H. Gutierrez, P.A. Laura y J.L. Pombo, "Higher Frequencies of Transverse Vibration of Rectangular Plates Elastically Restrained against Rotation at the Edges with a Central Free Hole", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **117**, 1, pp. 202–206, (1987).
2. P.A. Laura, R.H. Gutierrez, L. Ercoli, J.C. Utjes y R. Carnicer, "Free Vibration of Rectangular Plates Elastically Restrained against Rotation with Circular or Square Free Openings", *Ocean. Engng.*, Vol. **14**, 4, pp. 285–293, (1987).
3. A.W. Leissa, "Vibration of Plates", NASA SP160, (1969).
4. R. Schmidt, "A Variant of the Rayleigh-Ritz Method", *J. Ind. Math. Soc.*, Vol. **31**, 1, pp. 37–46, (1981).
5. C.W. Bert, "Use of Symmetry in Applying the Rayleigh-Schmidt Method to Static and Free Vibration Problems", *J. Ind. Math. Soc.*, Vol. **34**, pp. 65–67, (1984).

6. R.O. Grossi, "A Note on the Rayleigh-Schmidt Method", *J. Ind. Math. Soc.*, Vol. **37**, 1, pp. 29–35, (1987).
7. R.O. Grossi y A. Aranda, "Consideraciones sobre una variante del método de Rayleigh", *Revista Int. Mét. Num. para Cálculo y Diseño en Ing.*, Vol. **10**, 3, pp. 163–171, (1994).
8. G.A. Smith, P.A. Laura y M. Matis, "Experimental and Analytical Study of Vibrating Stiffened Rectangular Plates Subjected to In-Plane Loading", *Journal of the Acoustical society of America*, Vol. **48**, pp. 707–713, (1970).
9. G.B. Warburton y S.L. Edney, "Vibration of Rectangular Plates with Elastically Restrained Edges", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **95**, 4, pp. 537–552, (1984).
10. R.O. Grossi y P.A. Laura, "Transverse Vibrations of Rectangular, Orthotropic Plates with one or two Free Edges while the Remaining Are Elastically Restrained against Rotation", *Ocean. Engng.*, Vol. **6**, pp. 527–539, (1979).
11. R.O. Grossi, "Determinación aproximada de la frecuencia fundamental de placas rectangulares mediante el método de Rayleigh-Ritz", *Revista Int. Mét. Num. para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **11**, 2, pp. 183–204, (1995).