

INTERPRETACIÓN AUTOMÁTICA DE ENSAYOS DE FLUJO BIFÁSICO EN MEDIOS POROSOS

Comparación de técnicas de optimización

GABRIELA B. SAVIOLI

y

M. SUSANA BIDNER

*Laboratorio de Ingeniería de Reservorios
Universidad de Buenos Aires
Pabellón de Industrias-Ciudad Universitaria
1428 Buenos Aires, Argentina*

RESUMEN

Se aplica una técnica de regresión automática para obtener las curvas de permeabilidades relativas y de presión capilar a partir de datos de caudales medidos durante un ensayo transitorio de desplazamiento de petróleo por agua a través de un testigo de roca. Estas curvas desconocidas están descritas por funciones potenciales, cada una de ellas conteniendo dos parámetros como máximo. Los parámetros se encuentran minimizando una función objetivo que es la suma pesada de los cuadrados de las diferencias entre los datos de caudales medidos experimentalmente y los simulados numéricamente. La minimización se realiza aplicando tres técnicas de optimización: Levenberg Marquardt (en dos versiones diferentes, LM1 y LM2) y Aproximaciones Quasi-Newton para el problema de mínimos cuadrados (AQN).

El propósito principal de esta publicación es comparar el comportamiento de dichas técnicas. AQN es siempre convergente a la solución óptima a costa de una importante inversión de tiempo de máquina. LM1 es más rápida pero a veces se estanca siendo incapaz de encontrar el óptimo. El problema se debe a la forma en que esta técnica aproxima la matriz hessiana de la función objetivo. LM2, si bien converge al óptimo en la mayoría de los casos, consume un tiempo de CPU análogo (y aún mayor en los casos más complejos) que el de AQN, lo que la hace desventajosa frente a los otros dos algoritmos.

Además, al incorporar la curva de presión capilar, se observan mejores ajustes con los datos experimentales que cuando los términos capilares son ignorados.

SUMMARY

An automatic regression technique is applied to obtain relative permeability and capillary pressure curves from transient flow rate data measured during a laboratory displacement test of oil by water through a core. Those unknown curves are described by power functions, each of them containing, at most, two parameters. Parameters are found by minimizing an objective

Recibido: Mayo 1993

function, which is the weighted sum of the square of the differences between experimentally measured and numerically simulated flow rate data. The minimization is performed by applying three optimization techniques: Levenberg-Marquardt (in two different versions, LM1 and LM2) and Quasi-Newton Approximation for the Least Squares Problem (AQN).

The main purpose of this paper is to compare the behaviour of those techniques. AQN is always convergent to the optimal solution, though it takes a lot of computing time. LM1 is faster but gets sometimes stranded, being unable to find the optimum. This is caused by the hessian matrix approximation of the objective function. LM2, though it converges to the optimum point, takes a similar CPU time (and even larger, in the most difficult cases) than AQN. So LM2 has no advantage over the two other algorithms.

Moreover, a better matching to experimental data is observed when the capillary pressure curve is included than when the capillary pressure curve is neglected.

INTRODUCCIÓN

La aplicación de algoritmos automáticos de ajuste para obtener parámetros característicos de un reservorio petrolífero se ha convertido en una herramienta muy valiosa para la ingeniería de reservorios. Un ejemplo de ello es la determinación de curvas de permeabilidad relativa al petróleo y al agua y de presión capilar, necesarias como datos para la simulación de un proceso de recuperación secundaria mediante la inundación con agua de un reservorio.

En este trabajo, dichas curvas se obtienen en forma indirecta a partir de un ensayo de flujo transitorio realizado en el laboratorio sobre una muestra de roca del reservorio. Durante el ensayo se miden presiones y caudales de agua y petróleo a la entrada y a la salida de la muestra. Estas mediciones son ajustadas por un simulador numérico del flujo transitorio, bifásico e incompresible. La solución numérica se calcula en términos de las curvas de permeabilidades relativas y de presión capilar consideradas funciones de la saturación de agua y descritas a partir de un conjunto de parámetros ajustables.

Para obtener estos parámetros se minimiza una cierta función objetivo mediante técnicas de optimización. La elección de la función objetivo más adecuada fue presentada por Carrera y colaboradores^{1,2} que incorporan un análisis estadístico para resolver el problema de ajuste de parámetros. Sin embargo, como nuestro propósito es la comparación de técnicas de optimización AQN, LM1 y LM2, se elige una forma simplificada de dicha función, definiéndola como una suma pesada de los cuadrados de los residuos (diferencias entre los caudales medidos y calculados).

Previamente, métodos automáticos de interpretación de ensayos de desplazamiento fueron en general aplicados para obtener *sólo* permeabilidades relativas, si bien se han considerado^{3,4,5} y despreciado^{6,7} los efectos de la presión capilar. El modelo de flujo fue resuelto por diferencias finitas^{3,5,6,7} y por elementos finitos⁴. Las permeabilidades relativas y la presión capilar fueron representadas por funciones potenciales^{3,6}, por splines^{5,7} y por otras funciones⁴.

El aporte original de esta comunicación es doble:

Primero, el modelo físico-matemático propuesto permite determinar *simultáneamente las curvas de permeabilidades relativas y de presión capilar*. Se ha podido entonces estudiar la influencia de la presión capilar en la estimación de las curvas de

permeabilidades relativas, como así también el efecto del número de parámetros en la bondad del ajuste.

Segundo, se comparan tres técnicas de optimización: AQN, LM1 y LM2. AQN, que no había sido utilizada anteriormente para este problema, *resulta ser la más eficiente*.

MODELO MATEMÁTICO

Ecuaciones de flujo y modelo numérico

El ensayo de desplazamiento de petróleo con agua en un testigo rocoso lineal puede ser modelado mediante las siguientes ecuaciones que rigen el flujo transitorio, bifásico e incompresible a través de un medio poroso unidimensional. Estas ecuaciones se deducen introduciendo las ecuaciones de Darcy en las ecuaciones de continuidad para el agua y el petróleo⁸

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-K \frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} \right] = -\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + q_w \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-K \frac{k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial p_o}{\partial x} \right] = -\phi \frac{\partial S_o}{\partial t} + q_o \quad (2)$$

Las variables independientes son el espacio x y el tiempo t ; las incógnitas, la presión p y la saturación S . Los parámetros son: la permeabilidad absoluta K , las permeabilidades relativas k_r , la porosidad ϕ y la viscosidad μ . K , ϕ y μ son constantes y k_r son funciones exclusivas de la saturación. Los subíndices o y w indican las fases petróleo y agua, respectivamente. Los términos fuente q (caudal volumétrico por unidad de volumen) se consideran nulos en las ecuaciones, pues se les ha incluido en las condiciones de contorno.

Las saturaciones del agua y del petróleo cumplen

$$S_o + S_w = 1 \quad (3)$$

y las presiones en ambas fases están ligadas mediante la presión capilar p_c

$$p_c = p_o - p_w \quad (4)$$

Las ecuaciones 1 a 4 describen completamente el proceso.

Las condiciones iniciales consideradas son: presión atmosférica p_a y saturación de agua connata S_{wc}

$$p_w(x, 0) = p_a, \quad S_w(x, 0) = S_{wc}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5)$$

Las condiciones de contorno fueron seleccionadas de modo de reproducir la forma en que se lleva a cabo el ensayo de laboratorio. En la cara de entrada (punto de inyección) se considera presión constante, mayor que la presión atmosférica, y la saturación de agua máxima

$$p_w(0, t) = p_i > p_a, \quad S_w(0, t) = 1 - S_{or}, \quad t > 0 \quad (6)$$

donde p_i es la presión de inyección y S_{or} es la saturación de petróleo residual. En la cara de salida también se considera presión constante, igual a la atmosférica

$$p(L, t) = p_a \quad (7)$$

El caudal de agua Q_w y el de petróleo Q_o se obtienen aplicando la ecuación de Darcy

$$Q_w(0, t) = -KA \frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} \Big|_{x=0} ; \quad Q_o(L, t) = -KA \frac{k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial p_o}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (8)$$

donde A es el área transversal al flujo.

Como el caudal total Q_t ($Q_t = Q_o + Q_w$) es constante porque los fluidos son incompresibles, se cumple que

$$Q_t(0, t) = Q_t(L, t) = Q_w(0, t) \quad (9)$$

Las ecuaciones diferenciales 1 y 2 con las condiciones iniciales 5, las condiciones de contorno 6 y 7 y las relaciones auxiliares 3, 4, 8 y 9 se resuelven numéricamente por diferencias finitas aplicando el método IMPES. La discretización de las ecuaciones y el método de resolución pueden verse en la publicación de Gabbanelli *et al.*⁸

Representación funcional de las curvas de permeabilidades relativas y presión capilar

Las permeabilidades relativas son una medida de la conductancia del medio poroso para cada fase fluida. Empíricamente se conoce que la permeabilidad relativa a un fluido es función de la saturación de ese fluido, de la dirección del desplazamiento, de las características de la mojabilidad de la roca y de la distribución del tamaño de poros.

Las características distintivas de las curvas de permeabilidades relativas son: la saturación residual de la fase correspondiente (donde la permeabilidad relativa se anula), el valor extremo de la curva k_r^* (permeabilidad relativa de una fase a la saturación residual de la otra) y su curvatura. Aunque no existe una expresión teórica general para las curvas de permeabilidad relativa, se han propuesto distintas relaciones empíricas. Para flujo agua-petróleo, en un proceso de imbibición, las siguientes funciones potenciales son ampliamente aceptadas^{6,9,10,11,12}

$$k_{rw} = k_{rw}^* \left[\frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right]^{n_w} \quad (10)$$

$$k_{ro} = k_{ro}^* \left[\frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right]^{n_o} \quad (11)$$

Las ecuaciones (10) y (11) tienen cada una dos parámetros. Los puntos extremos k_{rw}^* y k_{ro}^* están determinados por la mojabilidad de la roca. Los exponentes n_w y n_o fijan la curvatura influenciada por la distribución del tamaño de poros.

Por otra parte, la presión capilar representa la interacción de las fases fluidas con la roca reservorio. Depende de la tensión interfacial, de las saturaciones de las fases, de la distribución del tamaño de poros, del diámetro medio de los poros y del ángulo de contacto de la interfase de los fluidos y la roca¹³. También es conveniente representarla por una ecuación empírica potencial^{13,14} que tiene dos parámetros ajustables, p_c^* y n_c

$$p_c = p_c^* \left[\frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right]^{n_c} \quad (12)$$

En un ensayo de desplazamiento agua/petróleo, k_{rw}^* y k_{ro}^* son determinados experimentalmente con cierto margen de error. Las curvas $p_c(S_w)$ podrían haber sido obtenidas mediante mediciones independientes. Por lo tanto, aplicando una técnica de regresión, se necesitarán ajustar desde dos (n_w , n_o) hasta seis parámetros (n_w , n_o , k_{rw}^* , k_{ro}^* , n_c y p_c^*).

Método de optimización

Los parámetros buscados se estiman minimizando una función objetivo que se construye como suma "pesada" de los cuadrados de los residuos (diferencias entre los datos medidos y los valores calculados por el método numérico descrito). Los datos provistos por el ensayo de desplazamiento son el volumen acumulado de petróleo y el volumen acumulado total (petróleo más agua) medidos para distintos tiempos. Se comprobó anteriormente¹⁰ que los mejores ajustes se logran aplicando la siguiente función objetivo

$$F(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N \left\{ w_{o,i} \left[Q_{o,i}^e - Q_{o,i}^c(\mathbf{y}) \right]^2 + w_{t,i} \left[Q_{t,i}^e - Q_{t,i}^c(\mathbf{y}) \right]^2 \right\} \quad (13)$$

donde \mathbf{y} es el vector de parámetros desconocidos $\mathbf{y} = (n_w, n_o, k_{rw}^*, k_{ro}^*, n_c, p_c^*)$, los supraíndices e y c indican experimental y calculado respectivamente, N es el número de datos y $w_{o,i}$, $w_{t,i}$ son factores de peso. Los pesos se consideran inversamente proporcionales a δ^2 , la varianza del error absoluto de la medición correspondiente¹⁵

$$w_{o,i} = \frac{1}{\delta(Q_{o,i}^e)^2}, \quad w_{t,i} = \frac{1}{\delta(Q_{t,i}^e)^2} \quad (14)$$

Para representar la realidad física se agregan restricciones simples a los parámetros

$$y_i^{\min} \leq y_i \leq y_i^{\max}$$

Entonces, la ecuación (13) constituye un problema de optimización con restricciones que puede ser transformado en uno irrestricto utilizando el siguiente cambio de variables

$$y_i = (y_i^{\max} - y_i^{\min}) \text{sen}^2 \beta_i + y_i^{\min} \quad (15)$$

La función objetivo puede reescribirse en forma compacta como

$$F(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^N f_i^2(\boldsymbol{\beta})/2 \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N) \quad (16)$$

donde f_i es el residuo pesado de la i -ésima medición. La ecuación (16) se minimiza utilizando dos técnicas de optimización distintas: Levenberg-Marquardt y Aproximaciones Quasi-Newton para el problema de mínimos cuadrados^{16,17}.

En general, un algoritmo de minimización actualiza las estimaciones de los parámetros usando una dirección de descenso \mathbf{p} . La forma de calcular \mathbf{p} es lo que caracteriza a los diferentes métodos. El método de Newton, que tiene orden local de convergencia cuadrático, elige la dirección \mathbf{p} que minimiza la aproximación de segundo orden de la función objetivo, es decir

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) \quad (17)$$

donde \mathbf{H} es la matriz hessiana y \mathbf{g} es el gradiente de la función objetivo.

Ahora bien, en la ecuación (16) el gradiente y el hessiano presentan una estructura especial

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{J}^T(\boldsymbol{\beta})\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}); \quad \mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{J}^T(\boldsymbol{\beta})\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}) \quad (18)$$

donde $\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta})$ es la matriz jacobiana de $\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})$ y $\mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^N f_i(\boldsymbol{\beta})\mathbf{H}_i(\boldsymbol{\beta})$, siendo \mathbf{H}_i la matriz hessiana de f_i .

Sin embargo, el cálculo de las derivadas segundas puede ser muy costoso. Debido a esto, los métodos de mínimos cuadrados tradicionales se basan en la suposición que el término de primer orden $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ prevalecerá en la solución sobre el término de segundo orden \mathbf{R} , que entonces puede ser despreciado. Esta suposición sólo se justifica cuando los residuos f_i en el óptimo son pequeños¹⁶. El método de Levenberg-Marquardt utiliza esta hipótesis, pero para asegurar la obtención de una dirección de descenso, suma a la matriz $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ el término $\lambda \cdot \mathbf{I}$, donde λ es un escalar no negativo e \mathbf{I} la matriz de identidad, esperando que en la solución λ sea suficientemente pequeño. En la biblioteca de rutinas IMSL está implementada una variación de este método, donde el hessiano se aproxima por $\mathbf{J}^T\mathbf{J} + \lambda\mathbf{D}$, siendo \mathbf{D} matriz diagonal que reproduce la diagonal de $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$. Para minimizar la función objetivo ecuación (16) se aplica la versión de IMSL, a la que nos referiremos como LM1. Además, para este análisis hemos modificado esa rutina a fin de recuperar el método original de Levenberg-Marquardt, al que llamaremos LM2.

Por su parte, para problemas con residuos grandes, la técnica AQN propone calcular una aproximación \mathbf{M} de \mathbf{R} (matriz desconocida que contiene las derivadas de segundo orden de la función objetivo). \mathbf{M} se elige de manera que se satisfaga la ecuación Quasi-Newton (secante). El cálculo iterativo de \mathbf{M} requiere sólo su aproximación previa, la función objetivo y su gradiente calculados en el punto actual. Para actualizar \mathbf{M} se utiliza la fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), pues es la que ha mostrado un mejor comportamiento en la práctica. Hemos implementado esta técnica en FORTRAN 77.

Para el cálculo de las derivadas primeras de f_i se utiliza en los tres algoritmos la misma aproximación por diferencias finitas (originalmente implementada en la rutina de IMSL). Se comienza aplicando diferencias adelantadas hasta encontrarse en las cercanías del mínimo, donde las diferencias centradas son una mejor aproximación.

El cambio se produce cuando la norma del gradiente de la nueva iteración es suficientemente pequeña.

DATOS

En nuestro laboratorio se ha realizado un ensayo transitorio de desplazamiento de petróleo con agua sobre una muestra rocosa nativa preservada cuidadosamente. El experimento se llevó a cabo a presión constante de entrada, presión atmosférica de salida y temperatura ambiente¹⁰.

La muestra se considera mojada por agua. Los datos son medidos durante el proceso de imbibición: el desplazamiento de petróleo por agua. Las características del testigo y las condiciones de operación se muestran en la Tabla I. Los caudales medidos a la salida del testigo (caudal de petróleo y caudal total) se representan mediante asteriscos en las Figuras 1 y 2.

$A(\text{cm}^2)$	11.401	$\mu_w (\text{Pa}\cdot\text{s})$	1.7×10^{-3}
$L(\text{cm})$	6.5	$\mu_o(\text{Pa}\cdot\text{s})$	20.4×10^{-3}
ϕ	0.112	$p_i (\text{Pa})$	2.0×10^5
$K (\mu\text{m}^2)$	119×10^{-3}	k_{ro}^*	0.85
S_{wc}	0.138	k_{rw}^*	0.51
S_{or}	0.126		

Tabla I. Propiedades de la muestra y condiciones de operación

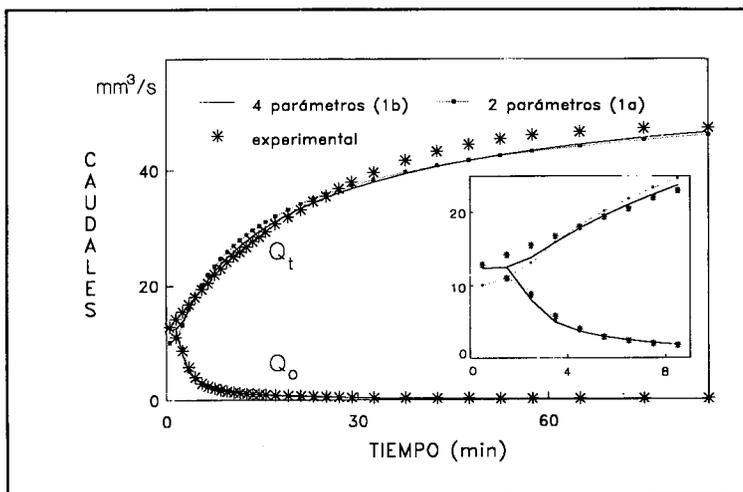


Figura 1. Ajuste numérico de las mediciones de caudal de petróleo y total fijando los puntos extremos de las curvas de permeabilidades relativas, despreciando (caso 1a) y considerando (caso 1b) los términos capilares

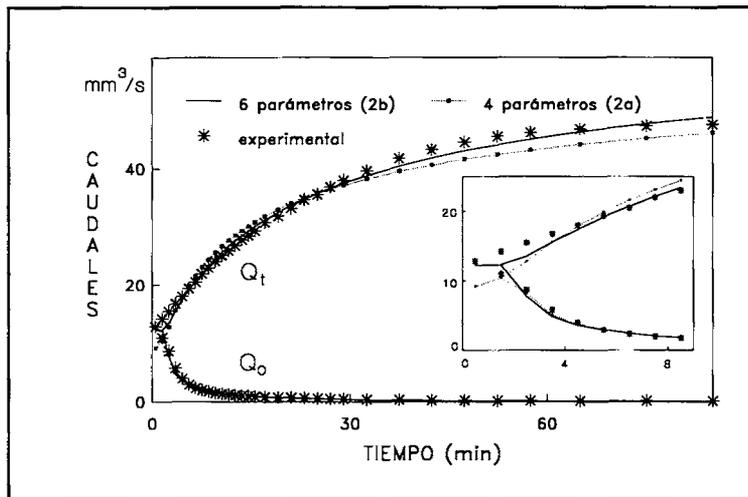


Figura 2. Ajuste numérico de las mediciones de caudal de petróleo y total liberando los puntos extremos de las curvas de permeabilidades relativas, despreciando (caso 2a) y considerando (caso 2b) los términos capilares

Errores: fuentes, definición y magnitud de los mismos

En el problema de ajuste automático considerado existen diferentes fuentes de error. El modelo matemático supone que la porosidad y la permeabilidad absoluta son constantes y que la saturación connata de agua y la saturación residual de petróleo son uniformes en el espacio. Esto no es cierto para una muestra rocosa real. El simulador numérico agrega errores de truncamiento y dispersión numérica. Las funciones potenciales usadas para representar las permeabilidades relativas y la presión capilar quizás no son la mejor aproximación a las curvas reales desconocidas. Representaciones con más parámetros, como las splines, son más flexibles^{7,15}.

Pero cabe preguntarse hasta qué punto vale la pena el uso de ecuaciones de flujo, procedimientos numéricos o representaciones funcionales más sofisticadas cuando se van a procesar mediciones inexactas.

Las inexactitudes en las mediciones también provienen de distintas fuentes. Hay errores en las estimaciones de los parámetros de las ecuaciones de flujo: porosidad, permeabilidad absoluta, viscosidad, saturación de agua inicial, saturación residual de petróleo. Además, hay errores en las mediciones de los datos de flujo tomadas durante el proceso de imbibición.

En nuestro laboratorio, los fluidos efluentes se recogen en una bureta de vidrio a diferentes incrementos de tiempo. Se mide el volumen de fluido recogido durante un cierto lapso. Dicho lapso es determinado por el técnico, quien espera el tiempo necesario para recoger aproximadamente un volumen constante. Este volumen debería ser mucho mayor que el error de lectura. Simultáneamente, el técnico verifica el volumen acumulado de fluido producido. Por lo tanto, se considera, en forma aproximada, que

la desviación del error en cada medición del caudal es proporcional al valor medido:

$$\frac{\delta(Q_{o,i}^e)}{(Q_{o,i}^e)} \simeq e_o \quad \frac{\delta(Q_{t,i}^e)}{(Q_{t,i}^e)} \simeq e_t \quad (19)$$

y se hace la suposición $e_o \simeq e_t$. Introduciendo la ecuación (19) en la ecuación (14), los factores de peso resultan inversamente proporcionales a los cuadrados de los caudales correspondientes. En consecuencia, en la función objetivo ecuación (13) se reemplaza

$$w_{o,i} = (Q_{o,i}^e)^{-2} \quad \text{y} \quad w_{t,i} = (Q_{t,i}^e)^{-2} \quad (20)$$

Ahora bien, las curvas “verdaderas” de permeabilidades relativas y presión capilar se desconocen. Por lo tanto, la bondad del ajuste se evalúa considerando los caudales medidos

$$E_{Q_o} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{Q_{o,i}^e - Q_{o,i}^c}{Q_{o,i}^e} \right|; \quad E_{Q_t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{Q_{t,i}^e - Q_{t,i}^c}{Q_{t,i}^e} \right| \quad (21)$$

donde E_{Q_o} y E_{Q_t} indican el error relativo promedio por medición.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este trabajo se analizan dos casos diferentes. En el primero se considera que los valores extremos de las curvas de permeabilidades relativas k_{rw}^* y k_{ro}^* son valores fijos medidos experimentalmente, mientras que en el segundo son dos nuevos parámetros a determinar en un intervalo que contempla un 10 % de error en la medición, es decir

$$0.459 \leq k_{rw}^* \leq 0.516 \quad 0.765 \leq k_{ro}^* \leq 0.935 \quad (22)$$

A su vez, cada uno de estos casos se divide en dos subcasos que se diferencian por la inclusión o no del término de presión capilar, a fin de estudiar su influencia en la determinación de las permeabilidades relativas. Luego, los parámetros a ajustar en cada subcaso son diferentes y se muestran en la Tabla II. Las restricciones físicas de los otros parámetros son

$$0.5 \leq n_w \leq 5, \quad 0.5 \leq n_o \leq 5, \quad 1 \leq n_c \leq 20, \quad 0 \leq p_c^* \leq 1 \quad (23)$$

CASO	SUBCASO	PARÁMETROS BUSCADOS
1) k_{rw}^* y k_{ro}^* fijos	1a) sin presión capilar	n_w, n_o
	1b) con presión capilar	n_w, n_o, p_c^*, n_c
2) k_{rw}^* y k_{ro}^* ajustables	2a) sin presión capilar	$n_w, n_o, k_{rw}^*, k_{ro}^*$
	2b) con presión capilar	$n_w, n_o, k_{rw}^*, k_{ro}^*, p_c^*, n_c$

Tabla II. Parámetros a determinar en cada subcaso testado

Las pruebas numéricas se llevaron a cabo en un PC 386/33-50 con coprocesador matemático.

Comparación de las técnicas de optimización

A fin de calcular los parámetros óptimos en los cuatro subcasos, se aplican los tres algoritmos LM1, LM2 y AQN. Se parte desde distintos puntos iniciales. Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla III, donde para cada caso se observa:

- 1a) Los tres algoritmos convergen al mismo óptimo, siendo LM1 la técnica que insume menor tiempo de CPU.

COMPORTAMIENTO DE LAS TÉCNICAS DE OPTIMIZACION					INFLUENCIA DE LA PRESION CAPILAR				
CASO	Puntos iniciales		Técnica	Convergencia (%)	Tiempo CPU prom. (min)	Óptimo	F	Errores relativos promedio	
	Combinaciones	Total						E_{Qo}	E_{Qt}
1a	$n_w = 1.2 / 2 / 3$ $n_o = 1.2 / 2 / 3$	9	AQN	100	7.09	$n_w = 1.51$ $n_o = 3.67$	0.54	0.122	0.062
			LM1	100	4.24				
			LM2	100	7.16				
1b	$n_w = 1.2 / 2$ $n_o = 2 / 3$ $p_c^* = 0.5$ $n_c = 3 / 6$	8	AQN	100	12.85	$n_w = 1.79$ $n_o = 3.31$ $p_c^* = 0.6$ $n_c = 4.43$	0.46	0.115	0.037
			LM1	63	16.17				
			LM2	87.5	22.91				
2a	$n_w = 1.2$ $n_o = 2 / 3$ $k_{rw}^* = 0.47 / 0.54$ $k_{ro}^* = 0.79 / 0.90$	8	AQN	100	25.18	$n_w = 1.43$ $n_o = 3.70$ $k_{rw}^* = 0.51$ $k_{ro}^* = 0.77$	0.52	0.116	0.063
			LM1	100	10.33				
			LM2	100	20.05				
2b	$n_w = 1.2$ $n_o = 2 / 3$ $k_{rw}^* = 0.47 / 0.54$ $k_{ro}^* = 0.90$ $p_c^* = 0.5$ $n_c = 3 / 6$	8	AQN	100	40.28	$n_w = 1.94$ $n_o = 3.25$ $k_{rw}^* = 0.55$ $k_{ro}^* = 0.77$ $p_c^* = 0.89$ $n_c = 4.14$	0.40	0.109	0.026
			LM1	0	---				
			LM2	100	88.11				

Tabla III. Comportamiento de las técnicas de optimización e influencia de la presión capilar

1b) LM1 alcanza el óptimo partiendo de cinco de los ocho puntos iniciales. En los tres restantes alcanza un punto de estancamiento de mayor función objetivo, $n_w = 1.64$, $n_o = 3.49$, $n_c = 6.94$, $p_c^* = 0.969$, $F_{\text{óptima}} = 0.48$. En dicho punto $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ es mal condicionada y en consecuencia LM1 busca el óptimo priorizando la dirección de la variable asociada al mínimo autovalor, que en este caso es p_c^* . En la Figura 3 se grafica la función objetivo variando sólo p_c^* . Se fijan n_w , n_o , y n_c en los valores del punto de estancamiento y en los valores óptimos. En el primer caso LM1 se estanca, pues la función se hace constante en los alrededores del valor $p_c^* = 0.986$. Por su parte, LM2 sólo se estanca allí partiendo de uno de los ocho puntos iniciales. Una vez alcanzado ese punto de estancamiento, el comportamiento de LM2 es análogo al de LM1, pues ambas utilizan valores muy pequeños (orden 10^{-5}) del parámetro λ . Las dos implementaciones de Levenberg–Marquardt, en los casos en que convergen, son más lentas que AQN, especialmente el método tradicional. Ambas emplean gran cantidad de iteraciones para alcanzar los valores mínimos de n_c y p_c^* . El problema radica en que la influencia de los dos parámetros de la curva de presión capilar en la función objetivo F es mucho menor que la que ejercen los exponentes de las curvas de permeabilidades relativas n_w y n_o . Esto puede observarse en la Figura 4, donde se ha graficado F en función de cada uno de los parámetros, fijando el resto en su valor óptimo. Con el propósito de comparar las distintas curvas, se han normalizado los intervalos de variación de los parámetros en $[0,1]$. La técnica AQN es capaz de arribar siempre al punto óptimo, pues incorpora información de curvatura relacionada con las derivadas de segundo orden de los residuos f_i .

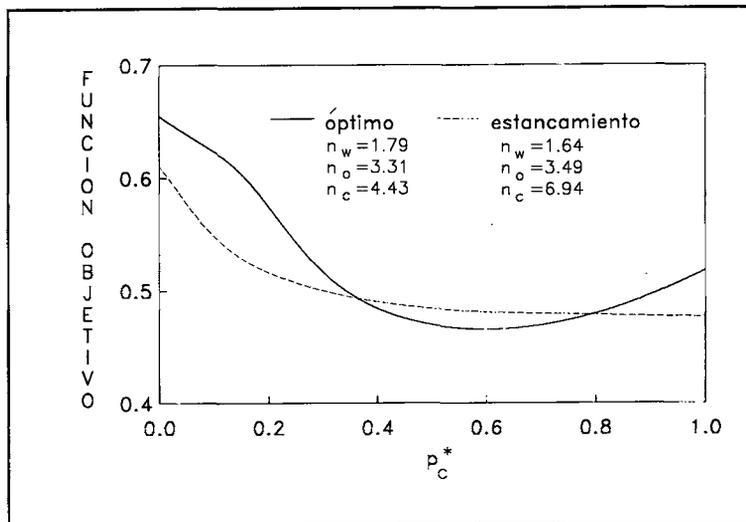


Figura 3. Función objetivo en términos de p_c^* (caso 1b)

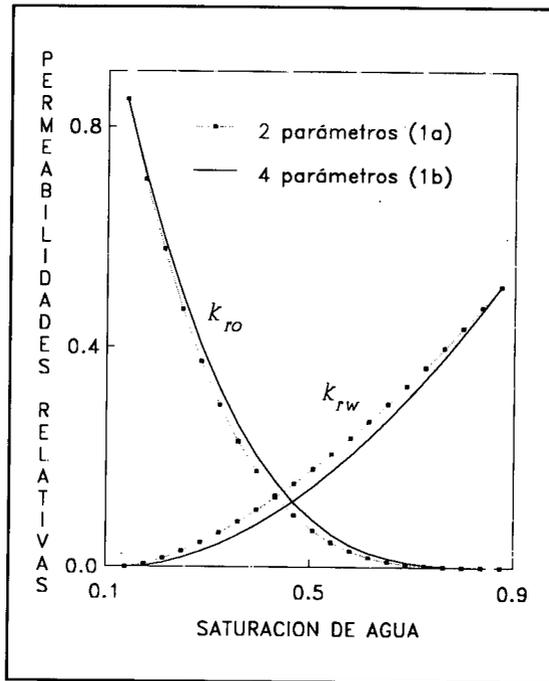


Figura 5. Curvas de permeabilidades relativas estimadas con el método inverso fijando sus puntos extremos, despreciando (1a) y considerando (1b) los términos capilares

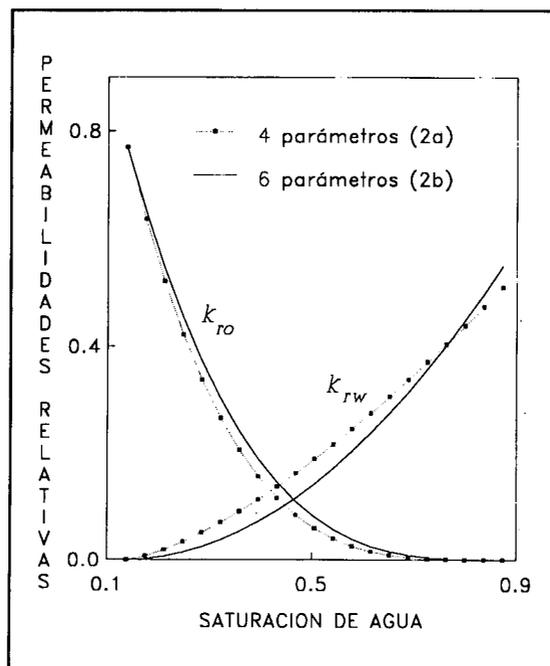


Figura 6. Curvas de permeabilidades relativas estimadas con el método inverso liberando sus puntos extremos, despreciando (2a) y considerando (2b) los términos capilares

Influencia de los puntos finales de las curvas de permeabilidades relativas

Ambos casos, 1b y 2b, incluyen las presiones capilares. En 1b se optimizan cuatro parámetros, dejando fijos en los valores medidos los puntos finales de las curvas de permeabilidades relativas al agua y al petróleo. En el caso 2b se optimizan seis parámetros permitiendo a dichos puntos finales oscilar dentro de un rango del 10 % de los valores medidos.

Comparando las líneas llenas de las Figuras 1 y 2 (casos 1b y 2b, respectivamente) se desprende que la inclusión de seis parámetros en la última figura mejora algo el ajuste. Esta mejora es causada por un pequeño cambio en las curvas de permeabilidades relativas del caso 2b respecto de las curvas del caso 1b. Ambas se muestran en la Figura 7. Sin embargo, las curvas de presión capilar de los dos casos son significativamente diferentes, como se representa en la Figura 8.

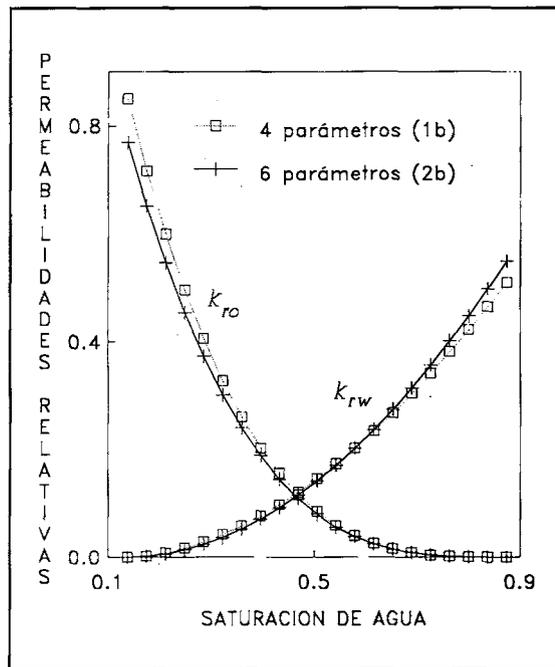


Figura 7. Curvas de permeabilidades relativas estimadas considerando la presión capilar y fijando los puntos extremos de las curvas (1b) o liberándolos (2b)

Es decir, las curvas de permeabilidades relativas no son muy sensibles al valor de los parámetros de las curvas de presión capilar. Este efecto fue observado anteriormente para distintos ensayos experimentales¹⁰.

Finalmente, para los casos analizados en la Tabla III, la influencia de los puntos finales de las funciones de la permeabilidad relativa es de menor magnitud que la influencia de la presión capilar: la función objetivo disminuye de 0.52 (caso 2a) a 0.40

NOMENCLATURA

- A = área transversal (m^2)
 e = factor de proporcionalidad definido en la ecuación (19)
 f_i = residuo pesado de la medición i
 F = función objetivo
 g = gradiente de la función objetivo
 H = matriz hessiana de la función objetivo
 H_i = matriz hessiana del residuo f_i
 I = matriz identidad
 J = matriz jacobiana de f
 K = permeabilidad absoluta (m^2)
 k_r = permeabilidad relativa
 k_{ro}^* = permeabilidad relativa al petróleo en S_{wc}
 k_{rw}^* = permeabilidad relativa al agua en S_{or}
 L = longitud de la muestra (m)
 N = número de mediciones
 n_c = exponente de la ecuación de presión capilar
 n_o = exponente de la ecuación de permeabilidad relativa al petróleo
 n_w = exponente de la ecuación de permeabilidad relativa al agua
 p = vector dirección de búsqueda
 p = presión (Pa)
 p_a = presión atmosférica (Pa)
 p_c = presión capilar (Pa)
 p_c^* = presión capilar en S_{wc} (Pa)
 p_i = presión de inyección (Pa)
 Q = caudal (m^3/s)
 q = caudal por unidad de volumen ($1/s$)
 R = matriz definida por la ecuación (18)
 S = saturación
 S_{or} = saturación residual de petróleo
 S_{wc} = saturación connata de agua
 t = tiempo (s)
 x = distancia horizontal (m)
 y = vector de parámetros restringidos
 w_i = factor de peso de la medición i , [$(m^3/s)^{-2}$]
 β = vector de parámetros irrestringidos, definido en la ecuación (15)

- δ_i = desvío de la medición i -ésima de caudal (m^3/s)
 μ = viscosidad (Pa·s)
 ϕ = porosidad
 λ = parámetro de Marquardt

Subíndices

- i = indica i -ésimo dato
 o = fase petróleo
 w = fase agua
 t = fase fluida total

Supraíndices

- c = valor calculado
 e = valor experimental

REFERENCIAS

1. F. Samper Calvete y J. Carrera Ramírez, "Geoestadística-aplicaciones a la hidrología subterránea", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España, (1990).
2. J. Carrera Ramírez y S. Neuman, "El problema inverso de la hidrología subterránea: estado del arte y método de solución", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, **2**, 1, pp. 3-25, (1986).
3. P.M. Sigmund and F.G.Mc Caffery, "An Improved Unsteady-State Procedure for Determining the Relative Permeability Characteristics of Heterogeneous Porous Media", *SPEJ*, **19**, 1, pp. 15-28, (1979).
4. G. Chavent, G. Cohen y M. Espy, "Determination of Relative Permeabilities and Capillary Pressures by an Automatic Adjustment Method", *SPE Reprint 9237, Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas (Sept. 21-24), (1980).
5. P.C. Richmond and A.T. Watson, "Estimation of Multiphase Flow Functions from Displacement Experiments", *SPEERE*, **5**, 1, pp. 121-127, (1990).
6. D.J. MacMillan, "Automatic History Matching of Laboratory Corefloods to Obtain Relative Permeabilities Curves", *SPEERE* **2**, 1, pp. 85-91, (1987).
7. P.D. Kerig and A.T. Watson, "A New Algorithm for Estimating Relative Permeabilities from Displacement Experiments", *SPEERE*, **2**, 1, pp. 103-112, (1987).
8. S.C. Gabbanelli, A.G. Mezzatesta and M.S. Bidner, "One Dimensional Numerical Simulation of Waterflooding in Oil Reservoir", *Lat. Am. J. Heat & Mass Transf.*, **6**, pp. 251-273, (1982).

9. C.A. Grattoni and M.S. Bidner, "History Matching of Unsteady-State Corefloods for Determining Capillary Pressures and Relative Permeabilities", *SPE Reprint 21135, I Latin American Petroleum Engineering Conference*, Río de Janeiro, Brazil (Oct. 14-19), (1990).
10. G.B. Savioli, C.A. Grattoni and M.S. Bidner, "The Influence of Capillary Pressure when Determining Relative Permeability from Unsteady-State Corefloods", *SPE Reprint 23698, Proceedings of the II Latin American Petroleum Engineering Conference*, Caracas, Venezuela (March 5-8). I, pp. 265-274, (1992).
11. L.W. Lake, "*Fundamentals of Enhanced Oil Recovery*", Prentice-Hall, (1989).
12. G.B. Savioli, C.A. Grattoni and M.S. Bidner, "On the Inverse Problem Application to Reservoir Characterization", *Proceedings of the Sixth European Symposium on Improved Oil Recovery*, Stavanger, Norway (May 21-23), II, pp. 885-894, (1991).
13. R.A. Dawe, M.R. Wheat and M.S. Bidner, "Experimental Investigation of Capillary Pressure Effects on Immiscible Displacement in Lensed and Layered Porous Media", *Transport in Porous Media*, 7, pp. 83-101, (1992).
14. P.C. Porcelli and M.S. Bidner, "Simulation and Transport Phenomena of a Ternary Two-Phase Flow", *Transport in Porous Media*, 14, pp. 101-122, (1994).
15. A.T. Watson, P.C. Richmond, P.D. Kerig and T.M. Tao, "A Regression-Based Method for Estimating Relative Permeabilities from Displacement Experiments", *SPERE*, 3, 3, pp. 953-958, (1988).
16. P.E. Gill, W. Murray and M.H. Wright, "*Practical Optimization*", Academic Press, (1981).
17. G.B. Savioli y M.S. Bidner, "Aplicación del método inverso al análisis de ensayos de pozos petrolíferos", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 10, 1, pp. 3-21, (1994).