

# Expressões de análise de sensibilidade em problemas elásticos

Cláudio A. de Carvalho Silva e Marco Lúcio Bittencourt

Universidade Estadual de Campinas  
 Faculdade de Engenharia Mecânica  
 Departamento de Projeto Mecânico  
 P.O. Box 6051, Zip Code 13083-970  
 Campinas/SP, Brazil  
 Tel.: 55-19-788 83 84, Fax: 55-19-289 37 22  
 E-mail: cacs@fem.unicamp.br  
 E-mail: mlb@fem.unicamp.br

## Resumen

Neste trabalho, desenvolvem-se as expressões contínuas de análise de sensibilidade em problemas elásticos lineares. Consideram-se variáveis relacionadas a parâmetros discretos e de forma do problema estrutural. Aspectos da implementação das classes em C++ são discutidos. Por fim, apresentam-se exemplos de otimização de espessura e forma em domínios bidimensionais como aplicações dos métodos descritos.

## DESIGN SENSITIVITY ANALYSIS EXPRESSIONS FOR ELASTIC PROBLEMS

## Summary

In the present work, continuum design sensitivity analysis expressions for linear elastic problems are developed. Discret parameters and shape variables of structural problems are considered. Aspects of C++ classes implementation are also discussed. Finally, two-dimensional thickness and shape optimization problems are presented.

## INTRODUÇÃO

Um grande número de problemas de otimização estrutural apresentam a seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(u, \nabla u, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad \text{sujeito à } & g_i(u, \nabla u, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(u, \nabla u, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0 \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $f$  é a função objetivo do problema;  $g_i$  e  $h_j$  são os funcionais de restrição;  $u$  é a solução da equação de estado do problema estrutural;  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor das variáveis de projeto.

Como se observa em (1), as funções  $f$ ,  $g_i$  e  $h_j$  são implícitas nas variáveis de projeto, pois dependem da solução  $u$ , a qual por sua vez depende de  $\mathbf{p}$ , ou seja,  $u \equiv u(\mathbf{p})$ . A região  $\Omega$  do domínio, onde todas as restrições são satisfeitas simultaneamente, é chamada *região factível* ou *de viabilidade*, ou seja

$$\Omega = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | g_i(\mathbf{p}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \text{ e } h_j(\mathbf{p}) = 0, j = 1, 2, \dots, p \} \quad (2)$$

Em geral, os funcionais  $f$ ,  $g_i$  e  $h_j$  são altamente não-lineares, podendo envolver ainda um grande número de variáveis de projeto. No entanto, para resolver o problema (1),

exige-se apenas que as primeiras derivadas dos funcionais existam em todos os pontos de  $\Omega$ . Resolver um problema de otimização significa determinar o ponto  $\mathbf{p}^* \in \Omega$  no qual  $f$  tenha valor mínimo. Se  $\mathbf{p}^*$  existir, denomina-se o mesmo como ponto de mínimo, ponto ótimo ou projeto ótimo no contexto de engenharia. Este tipo de formulação matemática do problema de projeto permite que sejam introduzidos procedimentos sistemáticos de análise e solução, como é o caso dos métodos baseados em otimização<sup>1,21,24</sup>.

A escolha dos funcionais está diretamente relacionada à atividade de síntese de uma estrutura<sup>21</sup>. Em primeiro lugar, estabelece-se o objetivo funcional do projeto, ou seja, define-se o critério de julgamento a ser aplicado às diversas soluções possíveis. Em seguida, seleciona-se um conjunto de características da estrutura, definindo claramente um projeto e permitindo atingir seu objetivo funcional. Tais características dependem do modelo físico-matemático adotado para descrever a estrutura, podendo envolver propriedades geométricas e de materiais, a forma da estrutura ou a combinação de elementos construtivos. Em geral, estas características são representadas pelo vetor de variáveis  $\mathbf{p} \in \Omega \subset \mathcal{R}^n$  que, ao assumir valores numéricos, origina um projeto. Por último, determinam-se os requisitos de performance que a estrutura deve cumprir, constituindo-se em limitantes impostos ao objetivo do projeto. Projetos que cumprem seus requisitos são denominados viáveis; os demais, inviáveis.

Observa-se que uma classe importante de algoritmos de otimização utiliza informações de primeira ordem, provenientes dos gradientes dos funcionais do problema<sup>2,3</sup>. Apesar da existência de métodos de otimização não utilizando gradientes<sup>15</sup>, seu conhecimento fornece informações bastante relevantes acerca da formulação do problema de projeto, como a importância relativa das variáveis e restrições. Além disso, permite informar sobre a possibilidade e o grau de melhoria efetiva que pode ser imposta a uma determinada opção de projeto.

O método de Pontos Interiores de Herskovits<sup>17</sup> consiste de um algoritmo de pontos interiores para otimização não-linear sujeita a restrições de igualdade e desigualdade. Devido à sua característica de convergência global com taxa superlinear<sup>19</sup>, além de gerar uma seqüência de pontos viáveis, tem sido aplicado com sucesso em problemas estruturais<sup>8,10,18,22</sup>. O algoritmo emprega uma técnica iterativa de ponto fixo na solução direta do sistema de equações e inequações não-lineares, obtidas das condições necessárias de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker. A cada iteração, determina-se a *direção de busca* resolvendo dois sistemas lineares de mesma matriz, não ocorrendo solução de subproblemas quadráticos. O decréscimo da função objetivo e a viabilidade é garantida através de uma *busca linear imprecisa*, que, juntamente com a alta taxa de convergência do algoritmo, reduz o número de avaliações de funcionais e gradientes.

Como na maioria dos casos os funcionais de performance dependem da solução do problema estrutural, são necessários procedimentos específicos para cálculo de gradientes. Dentre os diversos métodos disponíveis<sup>13,14</sup>, destaca-se a análise de sensibilidade de projeto<sup>7,16</sup> nas formulações discreta e contínua.

No caso discreto, determinam-se as derivadas, tomando-se as equações dos meios contínuos em sua forma discretizada. No caso da formulação contínua, consideram-se estas equações em sua forma original, deduzindo-se analiticamente as expressões de sensibilidade, as quais são então discretizadas para o cálculo numérico. A formulação contínua tem como vantagens a obtenção do enunciado analítico das derivadas dos funcionais do problema sem nenhuma discretização envolvida, além da independência em relação ao código de análise estrutural. Observa-se que a avaliação das sensibilidades pode ser feita como pós-processamento, a partir da resposta usual de elementos finitos.

O problema elástico linear pode ser colocado na seguinte forma variacional: *determinar o campo de deslocamentos  $u \in \mathcal{V}$  tal que*

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{T}(u) \cdot \mathbf{E}(v) dV = \int_{\Gamma^2} \Phi \cdot v dA + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot v dV \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (3)$$

sendo  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  a região do espaço euclidiano pontual ocupado pela estrutura;  $\mathbf{T}(\cdot)$  o tensor de tensões de Cauchy;  $\mathbf{E}(\cdot)$  o tensor de deformação infinitesimal;  $\Phi$  o campo vetorial de forças de superfície;  $\mathbf{b}$  o campo vetorial de forças de corpo;  $\mathcal{V}$  é o *espaço dos deslocamentos cinematicamente admissíveis*. Para um material isotrópico linear, os tensores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{E}$  estão relacionados através da lei de Hooke, ou seja,  $\mathbf{T} = \mathbf{C}[\mathbf{E}]$ , sendo  $\mathbf{C}$  o tensor de elasticidade.

A expressão anterior, assim como vários problemas de mecânica, podem ser escritos de forma resumida através da *equação de estado*

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (4)$$

onde  $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  é a forma bilinear, assumida neste caso como limitada e elíptica;  $l(\cdot) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  é a forma linear e limitada associada.

Neste artigo, consideram-se dois tipos de variáveis de projeto no desenvolvimento de expressões de sensibilidade: variáveis não relacionadas à geometria do problema, ou seja, parâmetros discretos da estrutura, como espessuras em problemas de tensão plana, propriedades de material, etc; variáveis de forma, onde a geometria de  $\mathcal{B}$  é a variável do problema. De posse de procedimentos de cálculo de gradientes, apresentam-se aplicações em otimização estrutural, utilizando o algoritmo de ponto interior de Herskovits<sup>17</sup> e o método de elementos finitos, num ambiente implementado em C++<sup>22,23</sup>.

## FUNCIONAIS

Neste trabalho, os funcionais  $f$ ,  $g_i$  e  $h_j$ , indicados em (1), são escolhidos como massa, tensão, deslocamento ou energia de deformação, conforme descrito a seguir.

### Massa

Seja  $\tilde{\rho}(\mathbf{x})$  o campo escalar de densidade do corpo. O funcional de massa é dado por

$$\psi_1 = \int_{\mathcal{B}} \tilde{\rho}(\mathbf{x}) dV \quad (5)$$

### Tensão

Define-se a função de média  $m_r(\mathbf{x})$  como uma função não-nula apenas em uma região  $\mathcal{B}_r \subseteq \mathcal{B}$  e com integral unitária sobre o domínio, ou seja

$$m_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1/\int_{\mathcal{B}_r} dV & \mathbf{x} \in \mathcal{B}_r \\ 0 & \mathbf{x} \notin \mathcal{B}_r \end{cases} \quad (6)$$

Considere um funcional de tensão  $\mathcal{G}(\mathbf{T})$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(u(\mathbf{x}))$ , envolvendo o critério de falha relevante ao problema, como por exemplo tensões principais, von Mises e Tresca. Em geral, utiliza-se o seguinte funcional de tensão média na região  $\mathcal{B}_r \subseteq \mathcal{B}$

$$\psi_2 = \int_{\mathcal{B}_r} \mathcal{G}(\mathbf{T}) m_r(\mathbf{x}) dV = \frac{\int_{\mathcal{B}_r} \mathcal{G}(\mathbf{T}) dV}{\int_{\mathcal{B}_r} dV} \quad (7)$$

Para uma discretização do domínio  $\mathcal{B}$  em elementos finitos, o domínio  $\mathcal{B}_r$  poderia ser, por exemplo, coincidente com o elemento onde ocorre o valor máximo de  $\mathcal{G}(\mathbf{T})$ .

## Deslocamento

Seja o funcional de deslocamento resultante nos pontos do domínio  $\mathcal{G}(u) = |u(\mathbf{x})|$ . Define-se o funcional de deslocamento resultante num ponto como

$$\psi_3 \equiv |u(\mathbf{x}_k)| = \int_{\mathcal{B}} \mathcal{G}(u) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) dV$$

sendo  $\mathbf{x}_k$  as coordenadas do nó onde o deslocamento deve ser controlado ( $\mathbf{x}_k$  poderia ser, por exemplo, as coordenadas do nó de deslocamento resultante máximo). Pode-se definir também o funcional de deslocamento de um determinado grau de liberdade como

$$\psi_3 \equiv |u_x(\mathbf{x}_k)| = \int_{\mathcal{B}} |u_x(\mathbf{x})| \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) dV \quad \mathcal{G}(u) = |u_x(\mathbf{x})|$$

## Energia de deformação

A energia de deformação de um corpo  $\mathcal{B}$ , sujeito ao estado elástico  $[u, \mathbf{T}, \mathbf{E}]$ , é definida pelo seguinte funcional

$$\psi_4 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T}(u) \cdot \mathbf{E}(u) dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{c}[\nabla u^S] \cdot \nabla u^S dV \quad (8)$$

## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE À PARÂMETROS DISCRETOS

Consideram-se, inicialmente, variáveis de projeto controlando apenas características discretas do problema variacional (4), enquanto o domínio  $\mathcal{B}$  permanece fixo. Neste caso, as formas  $a(u, v)$  e  $l(v)$  dependem diretamente do vetor de variáveis  $\mathbf{p}$ , sendo indicadas, respectivamente, como  $a_{\mathbf{p}}(u, v)$  e  $l_{\mathbf{p}}(v)$ . A solução  $u$  é um campo vetorial tal que  $u = u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ . Demonstra-se<sup>16</sup> que as formas bilinear  $a(u, v)$  e linear  $l(v)$  são diferenciáveis com respeito ao projeto  $\mathbf{p}$ , mantendo-se  $u$  fixo. Da mesma maneira,  $u$  e  $\nabla u$  são diferenciáveis com relação a  $\mathbf{p}$ . Assim, sendo  $\delta \mathbf{p}$  uma variação do projeto atual  $\mathbf{p}$ , tem-se

$$\dot{a}_{\mathbf{p}}(u, v) = Da_{\mathbf{p}}(u, v)[\delta \mathbf{p}] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{a_{\mathbf{p}+\tau\delta \mathbf{p}}(u, v) - a_{\mathbf{p}}(u, v)}{\tau} = \nabla_{\mathbf{p}} a(u, v) \cdot \delta \mathbf{p} \quad (9)$$

$$\dot{l}_{\mathbf{p}}(v) = Dl_{\mathbf{p}}(v)[\delta \mathbf{p}] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{l_{\mathbf{p}+\tau\delta \mathbf{p}}(v) - l_{\mathbf{p}}(v)}{\tau} = \nabla_{\mathbf{p}} l(v) \cdot \delta \mathbf{p} \quad (10)$$

$$\dot{u}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = Du(\mathbf{x}, \mathbf{p})[\delta \mathbf{p}] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \tau\delta \mathbf{p}) - u(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\tau} = \nabla_{\mathbf{p}} u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{p} \quad (11)$$

Um conjunto de funcionais de performance estrutural, tais como volume, deslocamentos, tensões e energia de deformação, pode ser descrito pela forma geral

$$\psi(\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{B}} \mathcal{G}(u, \nabla u, \mathbf{p}) dV \quad u = u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (12)$$

sendo  $\mathcal{G}$  um funcional continuamente diferenciável com relação aos seus argumentos e  $\mathcal{B}$  fixo.

A seguinte derivada direcional é válida

$$\dot{\psi}(\mathbf{p}) \equiv D\psi(\mathbf{p})[\delta \mathbf{p}] = D \left\{ \int_B \mathcal{G}(u(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \nabla u(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{p}) dV \right\} [\delta \mathbf{p}] = \nabla_{\mathbf{p}} \psi \cdot \delta \mathbf{p}$$

Como o domínio é fixo, pode-se passar a operação de diferenciação para dentro da integral. Portanto, aplicando-se a regra da cadeia<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\mathbf{p}) &= \int_B D \{ \mathcal{G}(u(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \nabla u(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{p}) \} [\delta \mathbf{p}] dV = \\ &= \int_B ( \mathcal{G}_{,u} \cdot \dot{u} + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla \dot{u} + \mathcal{G}_{,\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p} ) dV \end{aligned} \quad (13)$$

Como, em geral,  $u$  é calculado numericamente, os termos  $\dot{u}$  e  $\nabla \dot{u}$  são desconhecidos. Para determiná-los, pode-se empregar os métodos direto ou adjunto.

No *método direto*, a variação  $\dot{u}$  é obtida da derivada total de (4), ou seja

$$[a(u, v)]' = [l(v)]' \Rightarrow \dot{a}_{\mathbf{p}}(u, v) + a(\dot{u}, v) = \dot{l}_{\mathbf{p}}(v) \rightarrow a(\dot{u}, v) = \dot{l}_{\mathbf{p}}(v) - \dot{a}_{\mathbf{p}}(u, v) \quad (14)$$

A equação (14) dá origem a um novo problema variacional de mesma forma bilinear (4), cuja solução é justamente a derivada  $\dot{u}$  do campo de deslocamentos. A partir dessa solução, determina-se  $\nabla \dot{u}$ , obtendo-se então  $\dot{\psi}(\mathbf{p})$  aplicando a expressão (13).

No *método adjunto*, elimina-se a dependência direta de  $\dot{\psi}(\mathbf{p})$  em relação a  $\dot{u}$  e  $\nabla \dot{u}$ . Para isso, introduz-se um problema auxiliar, o qual possui as mesmas restrições em deslocamentos do problema original, mas é sujeito a um *carregamento adjunto* dependente do funcional  $\psi(\mathbf{p})$ . Observa-se que os dois primeiros termos em (13), constituem-se numa forma linear e limitada em  $\dot{u}$

$$l^{adj}(\dot{u}) = \int_B ( \mathcal{G}_{,u} \cdot \dot{u} + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla \dot{u} ) dV$$

Considerando a forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  com variáveis adequadas, pode-se escrever um novo problema variacional correspondente a  $l^{adj}(\dot{u})$ , ou seja

$$a(\varsigma, \dot{u}) = \int_B ( \mathcal{G}_{,u} \cdot \dot{u} + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla \dot{u} ) dV \quad (15)$$

Devido à simetria de  $a(\cdot, \cdot)$  e utilizando (14) e (15), tem-se que

$$a(\varsigma, \dot{u}) = a(\dot{u}, \varsigma) = \dot{l}_{\mathbf{p}}(\varsigma) - \dot{a}_{\mathbf{p}}(u, \varsigma) = \int_B ( \mathcal{G}_{,u} \cdot \dot{u} + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla \dot{u} ) dV$$

Substituindo a equação anterior em (13), tem-se a expressão da derivada do funcional  $\psi(\mathbf{p})$

$$\dot{\psi}(\mathbf{p}) = \dot{l}_{\mathbf{p}}(\varsigma) - \dot{a}_{\mathbf{p}}(u, \varsigma) + \int_B \mathcal{G}_{,\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p} dV \quad (16)$$

Assim, a determinação de  $\dot{\psi}(\mathbf{p})$  depende apenas do estado adjunto  $\varsigma$ . Para isso, define-se o seguinte problema variacional adjunto: *determinar o campo de deslocamentos  $\varsigma$  tal que*

$$a(\varsigma, v) = \int_B ( \mathcal{G}_{,u} \cdot v + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla v ) dV \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (17)$$

Das propriedades de diferenciabilidade assumidas para  $\mathcal{G}$ , o termo independente é um funcional linear e contínuo. Portanto, garante-se a existência e a unicidade do estado adjunto  $\varsigma$  pelo teorema de Lax-Milgram<sup>16</sup>.

Dessa forma, tem-se a seguinte expressão para a derivada parcial do funcional de performance  $\psi$  em relação a um parâmetro  $p_k$  não relacionado a forma do domínio do problema estrutural

$$(\nabla_{\mathbf{p}}\psi)_k = \frac{\partial\psi}{\partial p_k} = \frac{\partial l}{\partial p_k}(\varsigma) - \frac{\partial a}{\partial p_k}(u, \varsigma) + \int_B \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_k} dV \quad k = 1, \dots, n \quad (18)$$

### Estado plano de tensão

Nesta seção, a formulação anterior será aplicada ao problema de tensão plana. Para isso, consideram-se as seguintes hipóteses: despreza-se a tensão normal ao plano contendo o domínio  $\mathcal{B}$ ; a espessura do corpo é pequena se comparada às demais dimensões; os carregamentos não dependem da coordenada normal à  $\mathcal{B}$ .

Logo, a partir de (4), as formas bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  e linear  $l(\cdot)$  estarão dadas por

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_B e(\mathbf{x}) [\mathbf{T}(u) \cdot \mathbf{E}(v)] dA & l(v) &= \\ &= \int_B e(\mathbf{x}) [\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot v] dA + \int_{\Gamma^2} e(\mathbf{x}) [\Phi \cdot v] dL \end{aligned} \quad (19)$$

onde  $e(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$  é uma função escalar descrevendo a espessura do corpo; os deslocamentos dos pontos do corpo são funções de suas coordenadas no plano, ou seja,  $u(\mathbf{x}) = \{u_x(x, y) \quad u_y(x, y)\}^T$ .

Na prática, a espessura  $e(\mathbf{x})$  é aproximada por uma combinação linear de funções de forma, sendo as constantes dessa combinação as variáveis de projeto a serem otimizadas, ou seja

$$e(\mathbf{x}) \simeq \sum_{k=1}^n p_k \phi_k \quad (20)$$

Sejam, então, as funções  $\phi_i$  definidas como

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathcal{B}_k \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \mathcal{B}_k \end{cases} \quad \text{onde } \bigcup_{k=1}^n \mathcal{B}_k = \mathcal{B} \quad \bigcup_{k=1}^n \partial \mathcal{B}_k \cap \partial \mathcal{B} = \partial \mathcal{B} \quad (21)$$

Tais funções dividem o corpo em subregiões  $\mathcal{B}_k$  de espessura constante. Assim, os termos em (19) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{k=1}^n p_k \int_{\mathcal{B}_k} \mathbf{T}(u) \cdot \mathbf{E}(v) dA \\ l(v) &= \sum_{k=1}^n p_k \left\{ \int_{\mathcal{B}_k} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot v dA + \int_{\Gamma^2 \cap \partial \mathcal{B}_k} \Phi \cdot v dL \right\} \end{aligned}$$

de onde se conclui que

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial p_k}(u, v) &= \int_{B_k} \mathbf{T}(u) \cdot \mathbf{E}(v) dA \\ \frac{\partial l}{\partial p_k}(v) &= \left\{ \int_{B_k} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot v dA + \int_{\Gamma^2 \cap \partial B_k} \Phi \cdot v dL \right\} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Dessa forma, sendo  $\varsigma$  a solução do problema adjunto, a equação (18) pode ser reescrita como

$$(\nabla_{\mathbf{p}} \psi)_k = \int_{B_k} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \varsigma dA + \int_{\Gamma^2 \cap \partial B_k} \Phi \cdot \varsigma dL - \int_{B_k} \mathbf{T}(u) \cdot \mathbf{E}(\varsigma) dA + \int_B \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_k} dV \quad (23)$$

### Determinação de gradientes

A seguir são desenvolvidas as expressões dos gradientes dos funcionais de massa, tensão e deslocamento para o problema de estado plano de tensão

#### *Funcional de massa*

De acordo com (5), o funcional de massa e a sua sensibilidade são dados por

$$\psi_1 = \int_B \tilde{\rho}(\mathbf{x}) e(\mathbf{x}) dA \quad \dot{\psi}_1 = \int_B \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \delta e dA \quad (24)$$

Portanto, empregando (20) e (21), vem que

$$\psi_1(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n p_k \int_{B_k} \tilde{\rho}(\mathbf{x}) dA \quad (25)$$

$$\dot{\psi}_1(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n \delta p_k \int_{B_k} \tilde{\rho}(\mathbf{x}) dA = \nabla_{\mathbf{p}} \psi_1 \cdot \delta \mathbf{p} \quad (26)$$

Logo

$$(\nabla_{\mathbf{p}} \psi_1)_k = \frac{\partial \psi_1}{\partial p_k} = \int_{B_k} \tilde{\rho}(\mathbf{x}) dA \quad (27)$$

Observa-se que não há a necessidade de formular um problema adjunto, pois este funcional é independente de  $u$ .

### Funcional de tensão

Considerando o funcional de tensão (6), sua expressão de sensibilidade é dada por

$$\dot{\psi}_2 = \int_B [\mathcal{G}_{,T}(u) \cdot \mathbf{T}(\dot{u})] m_r(\mathbf{x}) e(\mathbf{x}) dA \quad (28)$$

Neste caso, aplicando (17), tem-se o seguinte problema adjunto do funcional  $\psi_2$ : *determinar o campo de deslocamentos adjunto  $\varsigma$  tal que*

$$a(\varsigma, v) = \int_B [\mathcal{G}_{,T}(u) \cdot \mathbf{T}(v)] m_r(\mathbf{x}) dA \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (27)$$

Pode-se, por exemplo, escrever o funcional de tensão  $\psi_2$  em relação à tensão equivalente de von Mises como

$$\psi_2(\mathbf{p}) = \int_B \sigma_{VM} m_r dA \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbf{T}(u)) = \sigma_{VM}$$

sendo que  $\sigma_{VM} = \{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2\}^{1/2}$  define a tensão equivalente no caso de tensão plana. Assim

$$\mathcal{G}_{,T}(u) = \frac{1}{2\sigma_{VM}} \begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y & 6\tau_{xy} \\ 6\tau_{xy} & 2\sigma_y - \sigma_x \end{bmatrix}$$

### Funcional de deslocamento

O funcional (7) tem a sensibilidade descrita por

$$\dot{\psi}_3(\mathbf{p}) = \int_B (\mathcal{G}_{,u} \cdot \dot{u}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) dA \quad (29)$$

Através de (17), tem-se o seguinte problema adjunto do funcional  $\psi_3$ : *determinar o campo de deslocamentos adjunto  $\varsigma$  tal que*

$$a(\varsigma, v) = \int_B [\mathcal{G}_{,u}(u) \cdot v] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) dA \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (30)$$

Neste caso,  $\mathcal{G}_{,u}(u) = \frac{1}{|u(\mathbf{x}_k)|} \{u_x(\mathbf{x}_k) \quad u_y(\mathbf{x}_k)\}^T$  constitui-se no próprio carregamento adjunto do nó.

Se este funcional for definido em relação a um determinado grau de liberdade, então  $\mathcal{G}_{,u}(u) = \{1 \ 0\}^T$  se  $u_x(\mathbf{x}_k) > 0$ ;  $\mathcal{G}_{,u}(u) = \{-1 \ 0\}^T$  se  $u_x(\mathbf{x}_k) < 0$ ;  $\mathcal{G}_{,u}(u) = \{0 \ 1\}^T$  se  $u_y(\mathbf{x}_k) > 0$ ;  $\mathcal{G}_{,u}(u) = \{0 \ -1\}^T$  se  $u_y(\mathbf{x}_k) < 0$ .

## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE À FORMA

### Variação da geometria do domínio

Os corpos têm a propriedade física de ocuparem regiões no espaço euclidiano pontual  $\mathcal{E}$ . Apesar de nenhuma dessas regiões estar intrinsecamente associada ao corpo, convencionou-se adotar uma dessas regiões, denotada por  $\mathcal{B}$ , como *configuração de referência*, associando os pontos do corpo com suas posições em  $\mathcal{B}$ . Assim, o corpo  $\mathcal{B}$  é formalmente uma região regular do espaço euclidiano, sendo os pontos  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$  chamados *pontos materiais*. Um movimento  $X^\tau(\mathbf{x}, \tau)$  de um corpo  $\mathcal{B}$  é uma função de classe  $C^3$  tal que<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} X^\tau : \mathcal{B} \times \mathfrak{R} &\rightarrow \mathcal{E} \\ (\mathbf{x}, \tau) &\rightarrow \mathbf{x}^\tau \end{aligned} \tag{31}$$

onde, para um  $\tau \in \mathfrak{R}$  fixo, tem-se uma transformação injetora suave.

Nessa transformação,  $\mathbf{x}^\tau = X^\tau(\mathbf{x}, \tau)$  é a posição do ponto  $\mathbf{x}$  no tempo  $\tau$ , enquanto  $\mathcal{B}_\tau = X^\tau(\mathcal{B}, \tau)$  é a região ocupada pelo corpo em  $\tau$ . Para cada  $\tau$  fixo,  $X^\tau(\mathbf{x}, \tau)$  representa uma deformação de  $\mathcal{B}$ . Logo, um movimento é uma família uniparamétrica de deformações em função do parâmetro  $\tau$ . Define-se ainda a *trajetória*  $\mathcal{T}$  de um ponto  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$  como o conjunto de posições assumidas por  $\mathbf{x}$  ao longo do movimento, ou seja,  $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}^\tau, \tau) \mid \mathbf{x}^\tau \in \mathcal{B}_\tau, \tau \in \mathfrak{R}\}$ .

Como  $X^\tau$  é um mapeamento injetor para todo  $\tau$ , existe a transformação inversa  $X(\cdot, \tau) \equiv [X^\tau(\cdot, \tau)]^{-1}$ ,  $X(\cdot, \tau) : \mathcal{B}_\tau \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $\mathbf{x} = X(\mathbf{x}^\tau, \tau)$ . Portanto

$$X^\tau(X(\mathbf{x}^\tau, \tau), \tau) = \mathbf{x}^\tau \quad X(X^\tau(\mathbf{x}, \tau), \tau) = \mathbf{x} \tag{32}$$

Logo, dado  $(\mathbf{x}^\tau, \tau) \in \mathcal{T}$ ,  $\mathbf{x} = X(\mathbf{x}^\tau, \tau)$  é o ponto material que ocupa o lugar  $\mathbf{x}^\tau$  em  $\tau$ .

Qualquer campo associado com o movimento pode ser expresso em função do ponto material e do tempo (*descrição material*) ou como função da trajetória (*descrição espacial*). Por exemplo, dado o campo material  $(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, \tau)$ , define-se sua descrição espacial  $\Phi_s$  como  $\Phi_s(\mathbf{x}^\tau, \tau) = \Phi(X(\mathbf{x}^\tau, \tau), \tau)$ . Da mesma forma, tem-se a descrição material  $\Psi_m$  do campo espacial  $(\mathbf{x}^\tau, \tau) \rightarrow \Psi(\mathbf{x}^\tau, \tau)$  como  $\Psi_m(\mathbf{x}, \tau) = \Psi(X^\tau(\mathbf{x}, \tau), \tau)$ .

Define-se a *derivada material no tempo de um campo espacial*  $\Psi$ , ou derivada total do campo  $\Psi$  em relação a  $\tau$ , como

$$\dot{\Psi} = [(\Psi_m)]_s = \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(X^\tau(\mathbf{x}, \tau), \tau) \right|_{\mathbf{x} = X(\mathbf{x}^\tau, \tau)} \tag{33}$$

Observa-se que  $\dot{\Psi}$  representa a derivada de  $\Psi$  em relação ao tempo, mantendo o ponto material fixo. Dessa maneira, para calcular  $\dot{\Psi}$ , toma-se a descrição material  $\Psi_m$ , determina-se a derivada no tempo e retorna-se à descrição espacial.

O campo vetorial espacial  $\mathbf{V}_s(\mathbf{x}^\tau, \tau)$  é definido como a descrição espacial da velocidade, sendo dado por

$$\mathbf{V}_s(\mathbf{x}^\tau, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} X^\tau(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} X^\tau(X(\mathbf{x}^\tau, \tau), \tau) = \mathbf{X}^\tau(X(\mathbf{x}^\tau, \tau), \tau) \tag{34}$$

Como a transformação  $X^\tau(\mathbf{x}, \tau)$  é suave e contínua, toma-se a seguinte expansão na vizinhança de  $\tau = 0$

$$X^\tau(\mathbf{x}, \tau) = X^\tau(\mathbf{x}, 0) + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} X^\tau(\mathbf{x}, 0) + o(\tau^n) \quad n = 2, 3, \dots$$

Desprezando os termos de ordem superior  $o(\tau^n)$  tem-se

$$\mathbf{x}^\tau = \mathbf{X}^\tau(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (35)$$

onde, a partir de (34),  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_s(\mathbf{x}^\tau, \tau)|_{\tau=0}$ . O campo vetorial suave  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  é denominado velocidade de mapeamento de projeto.

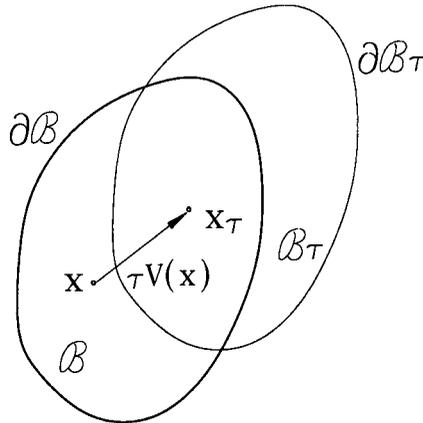


Figura 1. Variação do domínio  $\mathcal{B}$  para  $\mathcal{B}_\tau$

A transformação (35), ilustrada na Figura 1, é empregada para obter variações do domínio  $\mathcal{B}$ . O novo domínio  $\mathcal{B}_\tau$  e seu contorno  $\partial \mathcal{B}_\tau$  são indicados por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\tau &= \mathbf{X}^\tau(\mathcal{B}, \tau) = \{ \mathbf{x}^\tau \in \mathbb{R}^3 : \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \mathbf{x}^\tau = \mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{x}^0 = \mathbf{x} \} \\ \partial \mathcal{B}_\tau &= \mathbf{X}^\tau(\partial \mathcal{B}, \tau) = \{ \mathbf{x}^\tau \in \mathbb{R}^3 : \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}, \mathbf{x}^\tau = \mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{x}^0 = \mathbf{x} \} \end{aligned}$$

Pela sua definição, a transformação  $\mathbf{X}^\tau(\cdot, \tau)$  é tal que em cada configuração  $\mathcal{B}_\tau$ , pode-se definir um problema elastostático linear descrito pelo seguinte problema variacional: *determinar  $u^\tau$  tal que*

$$a_{\mathcal{B}_\tau}(u^\tau, v^\tau) = l_{\mathcal{B}_\tau}(v^\tau) \quad \forall v^\tau \in \mathcal{V}_\tau \quad (36)$$

onde  $\mathcal{V}_\tau$  é o espaço das soluções cinematicamente admissíveis para o domínio  $\mathcal{B}_\tau$ .

Assim, as formas bilinear e linear do problema elastostático são dadas, respectivamente, por  $a_{\mathcal{B}_\tau}(u^\tau, v^\tau) = \int_{\mathcal{B}_\tau} \mathbf{T}(u^\tau) \cdot \mathbf{E}(v^\tau) dV$  e  $l_{\mathcal{B}_\tau}(v^\tau) = \int_{\Gamma_2^\tau} \Phi^\tau \cdot v^\tau dA + \int_{\mathcal{B}_\tau} \mathbf{b}^\tau \cdot v^\tau dV$ . Portanto,  $u^\tau$  é a solução da equação de estado do problema elastostático linear no domínio  $\mathcal{B}_\tau$ . A seguir será adotada a seguinte notação simplificada para o problema variacional (36) nas configurações  $\tau \rightarrow \mathcal{B}_\tau$  e de referência  $\tau = 0 \rightarrow \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{B}_\tau}(u^\tau, v^\tau) = l_{\mathcal{B}_\tau}(v^\tau) &\rightarrow a^\tau(u^\tau, v^\tau) = l^\tau(v^\tau) \\ a_{\mathcal{B}}(u, v) = l_{\mathcal{B}}(v) &\rightarrow a(u, v) = l(v) \end{aligned}$$

Como a cada  $\tau$  tem-se um problema variacional diferente, sua solução no domínio  $\mathcal{B}_\tau$  é o campo vetorial espacial  $u^\tau = u^\tau(\mathbf{x}^\tau, \tau)$ . A partir de (33), tem-se a derivada material de  $u^\tau$  em relação ao tempo, podendo-se demonstrar a diferenciabilidade de  $u^\tau$ <sup>16</sup>. Portanto

$$\begin{aligned} \dot{u}^\tau(\mathbf{x}^\tau, \tau) &= (u_m^\tau)_s = \left. \frac{\partial}{\partial \tau} u^\tau(\mathbf{X}^\tau(\mathbf{x}, \tau), \tau) \right|_{\mathbf{x}} = \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{x}^\tau, \tau) = u^{\tau'}(\mathbf{x}^\tau, \tau) + (\text{grad} u^\tau) \mathbf{V}_s(\mathbf{x}^\tau, \tau) \end{aligned} \quad (37)$$

Em  $\tau = 0$

$$\dot{u}(\mathbf{x}) = u'(\mathbf{x}) + (\nabla u) \mathbf{V}(\mathbf{x}) \tag{38}$$

sendo  $\dot{u}(\mathbf{x}) = \dot{u}^\tau(\mathbf{x}^\tau, \tau)|_{\tau=0}$  e  $u'(\mathbf{x}) = u'^\tau(\mathbf{x}^\tau, \tau)|_{\tau=0}$ ; o gradiente espacial  $\text{grad } u^\tau$  se reduz a sua representação material  $\nabla u$  na configuração de referência  $\mathcal{B}$ , ou seja,  $\nabla u(\mathbf{x}) = \text{grad } u^\tau(\mathbf{x}^\tau, \tau)|_{\tau=0}$ .

O campo vetorial espacial  $u^\tau(\mathbf{x}^\tau, \tau)$  tem descrição material  $u_m^\tau(\mathbf{x}, \tau) = u^\tau(\mathbf{X}^\tau(\mathbf{x}, \tau), \tau)$ . Assim, observando-se que  $u_m^\tau(\cdot, \tau) = u^\tau(\cdot, \tau) \circ \mathbf{X}^\tau(\cdot, \tau)$  e aplicando a regra da cadeia, o gradiente material de  $u^\tau$  é dado por<sup>12</sup>

$$\nabla u_m^\tau = (\text{grad } u^\tau)_m \mathbf{F} \Rightarrow (\text{grad } u^\tau)_m = \nabla u_m^\tau \mathbf{F}^{-1} \tag{39}$$

sendo  $\mathbf{F}$  o gradiente material de  $\mathbf{X}^\tau$ , ou seja,  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{X}^\tau = \mathbf{I} + \tau \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x})$ .

Além disso, as seguintes relações são válidas<sup>12</sup>

$$\dot{\mathbf{F}} = (\text{grad } \mathbf{V}_s)_m \mathbf{F} \tag{40}$$

$$(\det \dot{\mathbf{F}}) = \det(\mathbf{F}) \text{tr}(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) = \det \mathbf{F} (\text{div } \mathbf{V}_s)_m \tag{41}$$

### Sensibilidade de funcionais definidos num domínio variável

Considere um funcional  $\psi^\tau$  com a seguinte expressão genérica

$$\psi^\tau = \int_{\mathcal{B}_\tau} \mathcal{G}(u^\tau, \nabla u^\tau, \mathbf{x}^\tau) dV \tag{42}$$

onde  $u^\tau$  é a solução do problema variacional (36).

A seguinte expressão permite mudar o domínio de integração  $\mathcal{B}_\tau$  para  $\mathcal{B}$ <sup>12</sup>

$$\psi^\tau = \int_{\mathcal{B}_\tau} \mathcal{G}(u^\tau, \nabla u^\tau, \mathbf{x}^\tau) dV = \int_{\mathcal{B}} \mathcal{G}_m(u_m^\tau, \nabla u_m^\tau, \mathbf{x}) \det \mathbf{F} dV \tag{43}$$

Logo, de forma análoga ao caso de parâmetros discretos, a derivada material no tempo  $\dot{\psi}^\tau$  é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^\tau &= \frac{d}{d\tau} \int_{\mathcal{B}_\tau} \mathcal{G}(u^\tau, \nabla u^\tau, \mathbf{x}^\tau) dV = \int_{\mathcal{B}} [\mathcal{G}_m(u_m^\tau, \nabla u_m^\tau, \mathbf{x}) (\det \mathbf{F})]^\cdot dV = \\ &= \int_{\mathcal{B}} [\dot{\mathcal{G}}_m \det \mathbf{F} + \mathcal{G}_m (\det \dot{\mathbf{F}})] dV \end{aligned}$$

Empregando (41) e tomando uma expressão análoga a (37) com  $u^\tau = \mathcal{G}$ , vem que

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^\tau &= \int_{\mathcal{B}} (\dot{\mathcal{G}} + \mathcal{G} \text{div } \mathbf{V}_s)_m (\det \mathbf{F}) dV = \\ &= \int_{\mathcal{B}} (\mathcal{G}' + \mathbf{V}_s \cdot \text{grad } \mathcal{G} + \mathcal{G} \text{div } \mathbf{V}_s)_m (\det \mathbf{F}) dV \end{aligned} \tag{44}$$

Em  $\tau = 0$

$$\dot{\psi} = \int_{\mathcal{B}} (\mathcal{G}' + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{G} + \mathcal{G} \text{Div } \mathbf{V}) dV$$

Da regra da cadeia, determina-se que  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_{,u} \cdot u' + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla u' + \mathcal{G}_{,x}$ . Portanto

$$\dot{\psi} = \int_B (\mathcal{G}_{,u} \cdot u' + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla u') dV + \int_B (\mathcal{G}_{,x} + \mathcal{G} \operatorname{Div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{G}) dV$$

Substituindo (38) na equação acima tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = & \int_B [\mathcal{G}_{,u} \cdot \dot{u} - \mathcal{G}_{,u} \cdot \nabla u \mathbf{V} + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla \dot{u} - \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla (\nabla u \mathbf{V})] dV + \\ & + \int_B [\mathcal{G}_{,x} + \mathcal{G} \operatorname{Div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{G}] dV \end{aligned} \quad (45)$$

Entretanto,  $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{G} = \mathbf{V} \cdot [\nabla u^T \mathcal{G}_{,u} + \nabla (\nabla u)^T \mathcal{G}_{,\nabla u}] = \mathcal{G}_{,u} \cdot \nabla u \mathbf{V} + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla (\nabla u) \mathbf{V}$ . Logo

$$\dot{\psi} = \int_B [\mathcal{G}_{,u} \cdot \dot{u} + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla \dot{u}] dV + \int_B [\mathcal{G}_{,x} + \mathcal{G} \operatorname{Div} \mathbf{V} - \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla u \nabla \mathbf{V}] dV \quad (46)$$

Demonstra-se que  $\mathcal{G} \operatorname{Div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{G} = \operatorname{Div}(\mathcal{G} \mathbf{V})^{12}$ . Do teorema da divergência, tem-se que  $\int_B \operatorname{Div}(\mathcal{G} \mathbf{V}) dV = \int_{\partial B} \mathcal{G} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$ , sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal unitário a  $\partial B$ . Portanto, a partir da equação (45), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = & \int_B [\mathcal{G}_{,u} \cdot \dot{u} + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla \dot{u}] dV - \int_B [\mathcal{G}_{,x} + \mathcal{G}_{,u} \cdot (\nabla u \mathbf{V}) - \\ & - \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla (\nabla u \mathbf{V})] dV + \int_{\partial B} \mathcal{G} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned} \quad (47)$$

As expressões (46) e (47) são equivalentes do ponto de vista analítico. Na prática, porém, deve-se analisar se o método numérico utilizado para resolver a equação de estado obtém melhores resultados no contorno ou no domínio. Através do método de elementos finitos, por exemplo, são obtidos resultados mais precisos no interior do domínio em comparação com os resultados do contorno. Nesse caso, opta-se por utilizar a expressão (46)<sup>25</sup>.

Em resumo, a sensibilidade do funcional  $\psi$  é descrita pelo seguinte enunciado

$$\dot{\psi} = \psi_{,u} \cdot \dot{u} + \psi_{,\nabla u} \cdot \nabla \dot{u} + \psi_{,x} + \psi'_V \quad (48)$$

onde  $\psi'_V$  envolve os termos das expressões (46) e (47) em função do campo de velocidades. Novamente, o enunciado da sensibilidade do funcional envolve os termos  $\dot{u}$  e  $\nabla \dot{u}$ .

### Sensibilidade da equação de estado

O estudo da sensibilidade da equação de estado do problema fornece meios para empregar o enunciado (48), visando determinar a sensibilidade do funcional  $\psi$  dada em (46) ou (47).

Considera-se a seguinte notação para a forma bilinear de (36).

$$a^T(u^T, v^T) = \int_{B_r} \mathbf{T}(u^T) \cdot \mathbf{E}(v^T) dV = \int_{B_r} \Theta(\operatorname{grad} u^T, \operatorname{grad} v^T) dV$$

A derivada material em relação ao tempo é obtida por um procedimento análogo a (44). Portanto

$$\begin{aligned} \dot{a}^\tau(u^\tau, v^\tau) &= \frac{d}{d\tau} \int_{B_\tau} \Theta(\text{grad}u^\tau, \text{grad}v^\tau) dV = \\ &= \frac{d}{d\tau} \int_B \Theta(\nabla u_m^\tau \mathbf{F}^{-1}, \nabla v_m^\tau \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} dV \\ &= \int_B (\dot{\Theta} + \Theta \text{div} \mathbf{V}_s)_m \det \mathbf{F} dV = \\ &= \int_B (\Theta' + \mathbf{V}_s \cdot \text{grad}\Theta + \Theta \text{div} \mathbf{V}_s)_m (\det \mathbf{F}) dV \end{aligned}$$

Em  $\tau = 0$

$$[a(u, v)]' = \int_B (\Theta' + \mathbf{V} \cdot \nabla\Theta + \Theta \text{Div} \mathbf{V}) dV \tag{49}$$

Observando que  $\dot{v} = v' + (\nabla v) \cdot \mathbf{V} = 0$  (o espaço  $\mathcal{V}$  não depende de  $\tau$ ) e utilizando (38), os termos da expressão anterior são dados por

$$\begin{aligned} \Theta' &= \mathbf{c} [\nabla u'^S] \cdot \nabla v^S + \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot \nabla v'^S \\ &= \mathbf{c} [\nabla \dot{u}^S] \cdot \nabla v^S - \mathbf{c} [(\nabla \nabla u \mathbf{V} + \nabla u \nabla \mathbf{V})^S] \cdot \nabla v^S - \\ &\quad - \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot (\nabla \nabla v \mathbf{V} + \nabla v \nabla \mathbf{V})^S \\ \mathbf{V} \cdot \nabla\Theta &= \{ \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot (\nabla \nabla v^S) \} \cdot \mathbf{V} + \{ \mathbf{c} [(\nabla \nabla u^S)] \cdot \nabla v^S \} \cdot \mathbf{V} \\ &= \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot (\nabla \nabla v \mathbf{V})^S + \mathbf{c} [(\nabla \nabla u \mathbf{V})^S] \cdot \nabla v^S \\ \Theta \text{Div} \mathbf{V} &= \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot \nabla v^S \text{Div} \mathbf{V} \end{aligned}$$

Substituindo as relações anteriores em (49) vem que

$$\begin{aligned} [a(u, v)]' &= \int_B \mathbf{c} [\nabla \dot{u}^S] \cdot \nabla v^S dV - \\ &\quad - \int_B \{ \mathbf{c} [(\nabla u \nabla \mathbf{V})^S] \cdot \nabla v^S + \\ &\quad + \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot (\nabla v \nabla \mathbf{V})^S \} dV + \int_B \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot \nabla v^S \text{Div} \mathbf{V} dV \end{aligned} \tag{50}$$

Assim como na seção anterior, a equação (50) também pode ser reescrita convertendo a integral do último termo para uma integral de contorno. Logo

$$\begin{aligned} [a(u, v)]' &= \int_B \mathbf{c} [\nabla \dot{u}^S] \cdot \nabla v^S dV - \int_B \{ \mathbf{c} [(\nabla u \nabla \mathbf{V})^S] \cdot \nabla v^S + \\ &\quad + \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot (\nabla v \nabla \mathbf{V})^S \} dV + \int_{\partial B} (\mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot \nabla v^S) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dV \end{aligned} \tag{51}$$

Em qualquer uma das formas anteriores, tem-se que

$$[a(u, v)]' = a(\dot{u}, v) + a'_V(u, v) \tag{52}$$

Para a forma linear em (36), obtem-se pelo mesmo procedimento

$$\dot{l}(v) = \int_B (\dot{\mathbf{b}} + \mathbf{b} \operatorname{Div} \mathbf{V}) \cdot v \, dV + \int_{\Gamma^2} (\dot{\Phi} + \Phi (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{Div} \mathbf{n}) \cdot v \, dA \quad (53)$$

Deve-se observar que o parâmetro  $\tau$  não tem significado físico, tendo sido introduzido somente para descrever matematicamente a variação do domínio geométrico do problema em torno da posição original. Assim, pode-se afirmar que parâmetros físicos do problema independem diretamente de  $\tau$ , dependendo somente da variação espacial.

Desta maneira,  $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{b}' + (\nabla \mathbf{b}) \mathbf{V} = (\nabla \mathbf{b}) \mathbf{V}$  pois  $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$ . Além disso, observa-se que o termo  $\dot{\Phi}$  está relacionado apenas a  $\mathbf{V}$ : se  $\Phi$  é independente da superfície,  $\dot{\Phi} = \mathbf{0}$ ; se  $\Phi$  é dependente da orientação da superfície,  $\dot{\Phi} = \dot{\Phi}(\mathbf{V})$  pois as coordenadas dos pontos da superfície são lineares em  $\tau$ . Logo,  $\dot{l}(v)$  envolve apenas termos relacionados a  $\mathbf{V}$ , ou seja,  $\dot{l}(v) = l'_V(v)$ .

Assumindo que o problema variacional (36) é satisfeito para  $\forall \tau$ , pode-se determinar  $\dot{u}$  através da relação

$$a(\dot{u}, v) = l'_V(v) - a'_V(u, v) \quad (54)$$

### Método adjunto

De modo semelhante ao cálculo da sensibilidade à variação de parâmetros discretos, a formulação de um problema adjunto permite eliminar a dependência direta das equações (46) e (47) em relação à  $\dot{u}$  e  $\nabla \dot{u}$ . Da mesma forma, introduz-se um problema variacional adjunto em  $\tau = 0$ : *determinar  $\varsigma$  tal que*

$$a(\varsigma, v) = \int_B (\mathcal{G}_{,u} \cdot v + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla v) \, dV \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (55)$$

Este problema é idêntico ao problema adjunto (17), sendo  $\varsigma$  o estado adjunto. Esse fato é bastante vantajoso do ponto de vista da implementação computacional para o cálculo simultâneo da sensibilidade à parâmetros e à forma.

A partir de (54), (55) e da simetria de  $a(\cdot, \cdot)$ , obtem-se

$$\int_B (\mathcal{G}_{,u} \cdot \dot{u} + \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla \dot{u}) \, dV = l'_V(\varsigma) - a'_V(u, \varsigma)$$

Logo, a sensibilidade do funcional  $\psi$ , dada em (46), pode ser reescrita como

$$\dot{\psi} = l'_V(\varsigma) - a'_V(u, \varsigma) + \int_B (\mathcal{G}_{,x} + \mathcal{G} \operatorname{Div} \mathbf{V} - \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla u \nabla \mathbf{V}) \, dV$$

ou seja

---

Este é o exemplo de carregamentos relacionados à pressão (sempre normais à superfície) ou carregamentos relacionados a fenômenos de atrito (tangentes à superfície).

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} = & \int_{\mathcal{B}} [(\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{V} + \mathbf{b} \cdot \nabla \text{Div } \mathbf{V}] dV + \\
& + \int_{\Theta^2} [\Phi' + (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{V} + \Phi \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \text{Div } \mathbf{n}] dA - \\
& - \int_{\mathcal{B}} \left\{ \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot \nabla \zeta^S \text{Div } \mathbf{V} + \mathbf{c} [(\nabla u \nabla \mathbf{V})^S] \cdot \nabla \zeta^S + \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot (\nabla \zeta \nabla \mathbf{V})^S \right\} dV + \\
& + \int_{\mathcal{B}} [\mathcal{G}_{,\mathbf{x}} + \mathcal{G} \text{Div } \mathbf{V} - \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla u \nabla \mathbf{V}] dV
\end{aligned} \tag{56}$$

Uma vez resolvido o problema adjunto (55), a expressão (56) permite obter a sensibilidade do funcional  $\psi$  para uma variação do domínio descrita pelo campo de velocidades  $\mathbf{V}$ . Observa-se que o problema variacional (55) tem a mesma forma bilinear de (36), em torno da configuração de referência ( $\tau = 0$ ).

Suponha que os pontos do contorno  $\partial \mathcal{B}$  sejam especificados por um vetor posição  $\mathbf{x}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3$ , onde  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor com  $n$  variáveis de parametrização. Uma vez que o vetor  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  tenha sido definido, as expressões de análise de sensibilidade podem ser expressas em termos de uma variação  $\delta \mathbf{p}$ . Para isto considera-se

$$\mathbf{p}^\tau = \mathbf{p} + \tau \delta \mathbf{p} \tag{57}$$

onde  $\mathbf{p}^\tau$  define o contorno  $\partial \mathcal{B}_\tau$ .

O campo de velocidades no contorno é então definido como

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{d\tau} [\mathbf{x}^\tau(\mathbf{p}^\tau)] \right|_{\tau=0} = \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p}) \left. \frac{d\mathbf{p}^\tau}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p}) \delta \mathbf{p} \tag{58}$$

Cada coluna de  $\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p})$  expressa a contribuição de uma variável de projeto no campo de velocidades, ou seja

$$\mathbf{V}(\mathbf{x})_{p_k} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p})}{\partial p_k} \delta p_k \quad k = 1, \dots, n \tag{59}$$

Considerando que o campo de velocidades tenha sido definido no interior do domínio  $\mathcal{B}$  respeitando as hipóteses de continuidade exigidas<sup>6</sup>, a sensibilidade dos funcionais, dependentes da solução da equação de estado, pode ser expressa em função das variáveis de projeto, ou seja

$$\dot{\psi} = \nabla_{\mathbf{p}} \psi \cdot \delta \mathbf{p}$$

Nesse trabalho, o campo de velocidades de velocidades é não-nulo apenas em uma camada da espessura de um elemento em torno do contorno parametrizado. Trata-se de uma opção bastante eficiente, ainda que não seja a mais precisa, tendo conduzido a resultados bastante satisfatórios<sup>9,10,22</sup>. Observa-se que empregou-se NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) para a parametrização do contorno<sup>22</sup>.

A componente  $k$  do gradiente do funcional  $\psi$  em relação às variáveis de projeto é obtida substituindo (59) em (56)

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{p}} \psi)_k &= \int_{\mathcal{B}} \left[ (\nabla \mathbf{b}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} \cdot \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\zeta} \operatorname{Div} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} \right] dV + \\
&+ \int_{\Gamma^2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \cdot \boldsymbol{\zeta} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} (\nabla \Phi) \cdot \boldsymbol{\zeta} + \Phi \cdot \boldsymbol{\zeta} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} \cdot \mathbf{n} \right) \operatorname{Div} \mathbf{n} \right] dA + \\
&- \int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}^S \operatorname{Div} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} dV \\
&+ \int_{\mathcal{B}} \left\{ \mathbf{c} \left[ \left( \nabla u \nabla \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} \right)^S \right] \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}^S + \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot \left( \nabla \boldsymbol{\zeta} \nabla \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} \right)^S \right\} dV + \\
&+ \int_{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_k} + \mathcal{G} \operatorname{Div} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} - \mathcal{G}_{,\nabla u} \cdot \nabla u \nabla \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} \right) dV
\end{aligned} \tag{60}$$

### Gradiente dos funcionais de performance estrutural

As expressões anteriores podem ser aplicadas a funcionais usuais de performance estrutural, como funcionais de massa, energia de deformação, tensão e deslocamento.

#### Funcional de massa

O seguinte funcional define a massa do corpo  $\mathcal{B}_\tau$  durante a variação de sua geometria

$$\psi_1 = \int_{\mathcal{B}_\tau} \tilde{\rho}^\tau(\mathbf{x}^\tau) dV = \int_{\mathcal{B}} \tilde{\rho}^\tau(\mathbf{x}) \det \mathbf{F} dV$$

A sua sensibilidade em relação à variação do domínio é obtida por

$$\dot{\psi}_1 = \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{V} \cdot \nabla \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{V}] dV \rightarrow \dot{\psi}_1 = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{Div}(\tilde{\rho} \mathbf{V}) dV = \int_{\partial \mathcal{B}} \tilde{\rho} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

A componente  $k$  do vetor gradiente é dada por

$$(\nabla_{\mathbf{p}} \psi_1)_k = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{Div} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} \right) dV = \int_{\partial \mathcal{B}} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_k} \right) \cdot \mathbf{n} dA$$

#### Funcionais de tensão e deslocamento

Estes funcionais dependem da solução da equação de estado do problema e sua sensibilidade pode ser obtida pelo método adjunto. Para um dado funcional, seu carregamento adjunto é o mesmo tanto para problemas de otimização de parâmetros como de forma. Assim, podem ser aplicadas as mesmas expressões de funcionais de tensão e deslocamento, com os seus respectivos carregamentos adjuntos, determinados para a sensibilidade a parâmetros.

### Funcional de energia de deformação

A energia de deformação do corpo  $B_\tau$  é definida pela expressão

$$\psi_4 = \frac{1}{2} \int_{B_\tau} \mathbf{c} [(\text{grad } u^\tau)^S] \cdot (\text{grad } u^\tau)^S dV$$

Por sua vez, a sua sensibilidade é determinada como

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_4 = & \int_B \mathbf{c} [\nabla \dot{u}^S] \cdot \nabla u^S dV - \int_B \mathbf{c} [(\nabla u \nabla \mathbf{V})^S] \cdot \nabla u^S dV + \\ & + \frac{1}{2} \int_B \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot \nabla u^S \text{Div } \mathbf{V} dV \end{aligned}$$

A dependência da expressão anterior em relação a  $\nabla \dot{u}$  pode ser eliminada, empregando-se as expressões (50), (52), (53) e (54). Desta maneira, evita-se a necessidade de resolver o problema adjunto para determinar a sensibilidade  $\dot{\psi}_4$ . Logo

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_4 = & \int_B [(\nabla \mathbf{b}) \mathbf{V} \cdot u + \mathbf{b} \cdot u \text{Div } \mathbf{V}] dV + \\ & + \int_{\Gamma^2} [\Phi' + (\nabla \Phi) \mathbf{V} \cdot u + \Phi \cdot u (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \text{Div } \mathbf{n}] dA + \\ & + \int_B \left\{ \mathbf{c} [(\nabla u \nabla \mathbf{V})^S] \cdot \nabla u^S - \frac{1}{2} \mathbf{c} [\nabla u^S] \cdot \nabla u^S \text{Div } \mathbf{V} \right\} dV \end{aligned}$$

### ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO

O método de Pontos Interiores de Herskovits<sup>21</sup> consiste de um algoritmo de pontos interiores para otimização não-linear sujeita a restrições de igualdade e desigualdade. Devido à sua característica de convergência global com taxa superlinear<sup>23</sup>, além de gerar uma seqüência de pontos viáveis, tem sido aplicado com sucesso em problemas estruturais<sup>13,15,22,26</sup>. O algoritmo emprega uma técnica iterativa de ponto fixo na solução direta do sistema de equações e inequações não-lineares, obtidas das condições necessárias de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker. A cada iteração, determina-se a *direção de busca* resolvendo dois sistemas lineares de mesma matriz, não ocorrendo solução de subproblemas quadráticos. O decréscimo da função objetivo e a viabilidade é garantida através de uma *busca linear imprecisa*, que, juntamente com a alta taxa de convergência do algoritmo, reduz o número de avaliações de funcionais e gradientes.

### IMPLEMENTAÇÃO

Os algoritmos de otimização e análise de sensibilidade foram implementados em C++ utilizando recursos de programação orientada por objetos<sup>26-28</sup> a partir de um conjunto de classes para elementos finitos previamente desenvolvido<sup>4-6</sup>.

O problema de otimização é caracterizado por uma intensa troca de informações entre os módulos de análise, avaliação de funcionais/gradientes e otimização. Desta maneira, torna-se fundamental maximizar a eficiência na troca de dados entre estes módulos. Nesse sentido, um objeto da classe implementando o método de elementos finitos foi declarado como um dado da classe de gerenciamento de funcionais, disponibilizando em memória todas as informações e métodos do modelo de elementos finitos.

Os funcionais de performance foram implementados como classes derivadas de uma classe base genérica, através do recurso de funções virtuais, tornando o código independente do tipo específico de funcional utilizado. Assim, os funcionais empregados numa análise são definidos apenas em tempo de execução. Além disso, novos tipos de funcionais podem ser incluídos sem a necessidade de revisar nenhuma parte do programa. Todos os procedimentos de análise de sensibilidade são definidos como funções internas das classes, tornando a interface de utilização bastante simples.

Por último, o algoritmo de otimização é implementado como uma classe derivada da classe de gerenciamento de funcionais, herdando suas características e tendo acesso em memória a seus dados. Essa construção modular facilita a extensão e atualização dos códigos.

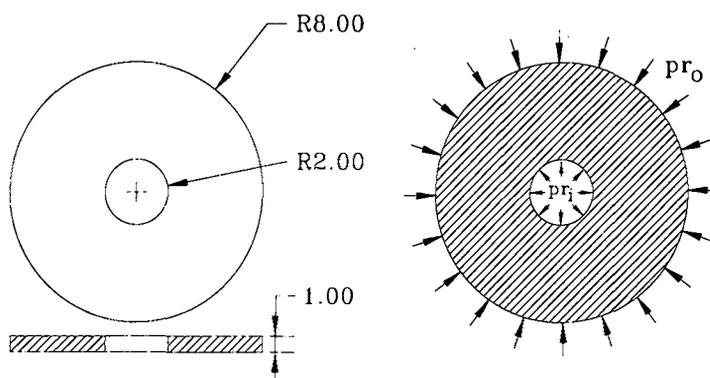


Figura 2. Dimensões e carregamento do disco

## ESTUDO DE CASOS

### Disco submetido a pressões interna e externa

A Figura 2, ilustra um cilindro submetido a pressões interna e externa. A solução analítica para o deslocamento radial  $u(r)$  e as tensões radial  $\sigma_r$  e tangencial  $\sigma_t$  é dada pelas seguintes expressões<sup>24</sup>

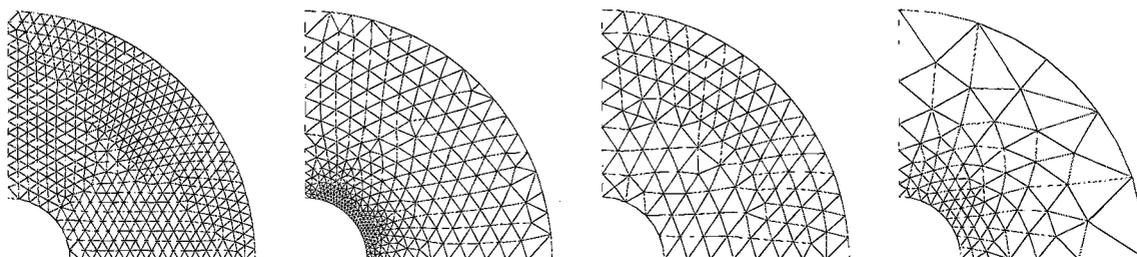
$$u(r) = \left( \frac{1 - \tilde{\nu}}{\tilde{E}} \right) C_1 r + \left( \frac{1 + \tilde{\nu}}{\tilde{E}} \right) C_2 / r \quad \sigma_r = C_1 - C_2 / r^2 \quad \sigma_t = C_1 + C_2 / r^2$$

onde  $\tilde{E}$  e  $\tilde{\nu}$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material. Por sua vez, as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são definidas como

$$C_1 = \frac{1}{p_1} \left[ \frac{f_i r_i^2 - f_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \right] \quad C_2 = \frac{1}{p_1} \left[ \frac{(f_i - f_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \right]$$

sendo  $p_1$ ,  $r_i$  e  $r_o$  a espessura e os raios interno e externo do disco;  $f_i$  e  $f_o$  os carregamentos distribuídos nos perímetros interno e externo do disco. Assim, as pressões interna ( $pr_i$ ) e externa ( $pr_o$ ) são dadas, respectivamente, por  $pr_i = f_i/p_1$  e  $pr_o = f_o/p_1$ . Os seguintes valores numéricos foram adotados:  $\tilde{E} = 2,1 \times 10^6$  kN/cm<sup>2</sup>;  $\tilde{\nu} = 0,3$ ;  $r_i = 2$  cm;  $r_o = 8$  cm;  $f_i = 100$  kN/cm;  $f_o = 10$  kN/cm;  $p_1 = 1$  cm. Considerou-se ainda  $u_a = 0.0005$  cm como valor máximo admissível em deslocamento.

O problema foi discretizado utilizando elementos lineares (malhas 1 e 2 — Figuras 3a e 3b) e quadráticos (malhas 3 e 4 — Figuras 3c e 3d, empregando refinamento adaptável através do estimador Zienckwicz-Zhu<sup>31</sup>



**Figura 3.** Disco-malhas de elementos finitos empregadas: a) Malha 1: elementos lineares; b) Malha 2: elementos lineares com refinamento; c) Malha 3: elementos quadráticos; d) Malha 4: elementos quadráticos com refinamento

A solução analítica para o funcional de deslocamento resultante máximo é dada, neste caso, pelo deslocamento do perímetro interno do disco, ou seja,  $\psi = u(r_i) = u(r = 2)$ . Para o funcional  $\psi$ , os valores obtidos analítica e numericamente são mostrados na Tabela I. Pode-se observar nesses resultados que quanto mais adequada for a malha para a análise de elementos finitos, mais precisos são os valores obtidos para o funcional de deslocamento  $\psi$  e sua derivada.

	$\psi(p_1)/u_a - 1$	Erro (%)	$ (d\psi/dp_1)/u_a$	Erro (%)
<b>Análítico</b>	-0,7676190	-	-0,2323810	-
<b>Malha 1</b>	-0,7684886	0,1132854	-0,2315119	0,3739979
<b>Malha 2</b>	-0,7680394	0,0547668	-0,2319730	0,1755737
<b>Malha 3</b>	-0,7679410	0,0419479	-0,2320576	0,1391680
<b>Malha 4</b>	-0,7675882	0,0040124	-0,2324100	0,0124795

**Tabela I.** Solução analítica e resultados numéricos para o funcional  $\psi(p_1)$  e sua derivada em  $p_1 = 1$

	$p_{1\text{final}}$	Erro %	Iterações	Anál. MEF	Problemas adj.
<b>Análítico</b>	0,23238095	-	-	-	-
<b>Malha 1</b>	0,23151532	0,37250472	6	17	6
<b>Malha 2</b>	0,23196448	0,17921865	6	17	6
<b>Malha 3</b>	0,23205941	0,13836762	6	15	6
<b>Malha 4</b>	0,23241573	0,01496680	6	17	6

**Tabela II.** Espessuras ótimas usando o deslocamento radial máximo como restrição

Considere agora o problema de minimizar a massa do disco, com a restrição funcional de se manter o deslocamento radial máximo menor ou igual a  $u_a = 0,0005$  cm, usando uma espessura inicial  $p_1 = 1,0$  cm. A Tabela II apresenta os resultados para cada uma das malhas utilizadas no exemplo anterior, mostrando os valores da espessura ótima  $p_{1\text{final}}$  e os respectivos erros relativos à solução analítica, o número de iterações do método de Herskovits, o número de análises do modelo de elementos finitos e o número de soluções de problemas adjuntos. Em todos os casos foram obtidos resultados satisfatórios, sendo que o resultado mais preciso foi obtido com a malha de elementos quadráticos com refinamento

(malha 4). A Figura 4 mostra a evolução da espessura e do volume do disco utilizando esta última discretização.

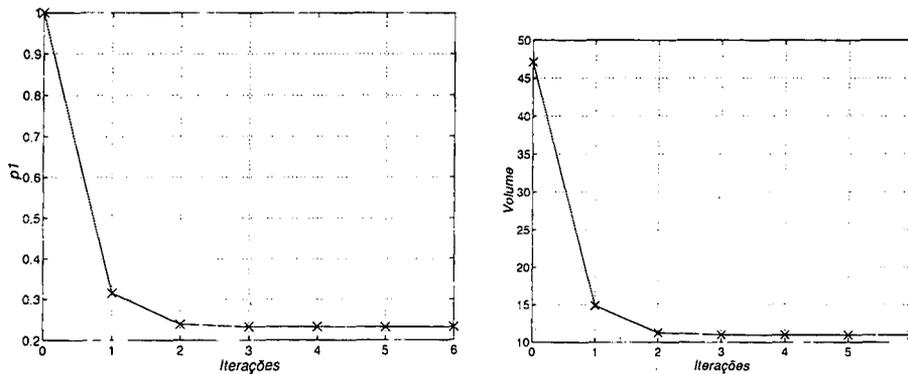


Figura 4. Iterações de otimização da espessura do disco (Malha 4): a) Evolução da espessura do disco nas iterações; b) Evolução do volume do disco nas iterações

### Chapa com furo

Considere uma chapa quadrada com um furo central sujeita às condições mostradas na Figura 5 e espessura de 0,05 cm. As constantes de material são  $\tilde{E} = 3000 \text{ kN/cm}^2$  e  $\tilde{\nu} = 0,3$ , enquanto as trações laterais são  $F_x = 15 \text{ kN/cm}$  e  $F_y = 30 \text{ kN/cm}$ .

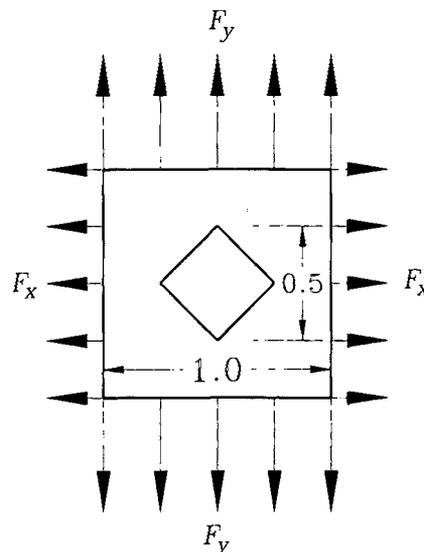


Figura 5. Dimensões (cm) e condições de contorno da chapa sob tração com furo quadrado

Considerando a simetria do problema nas direções  $x$  e  $y$ , apenas 1/4 da chapa é analisada, sendo que o lado do furo é modelado como uma NURBS de ordem 3 e 5 pontos de controle, como mostrado na Figura 6. Além disso, tem-se a parametrização do modelo em 8 variáveis de forma correspondendo a coordenadas dos pontos de controle da curva NURBS nas direções e nos intervalos indicados na mesma figura e na tabela abaixo.

O algoritmo de Herskovits foi aplicado, sendo necessárias 12 iterações para resolver o problema<sup>26</sup>. A evolução do valor da função objetivo na seqüência das iterações é mostrada

da Figura 7. As Figuras 8a,b,c,d ilustram, respectivamente, a geometria inicial, as formas alcançadas nas iterações 2 e 4 e a geometria final.

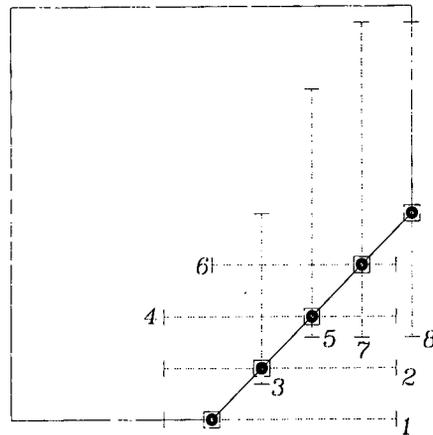


Figura 6. Parametrização do problema. As setas indicam as variáveis do problema

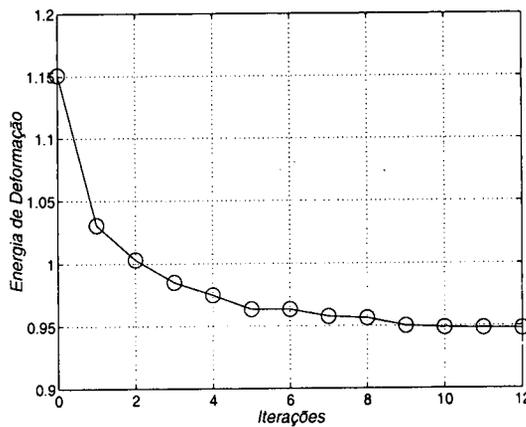


Figura 7. Energia de deformação durante as iterações

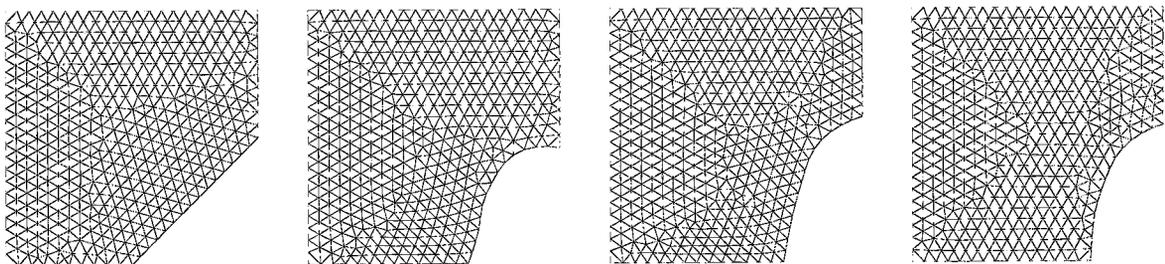
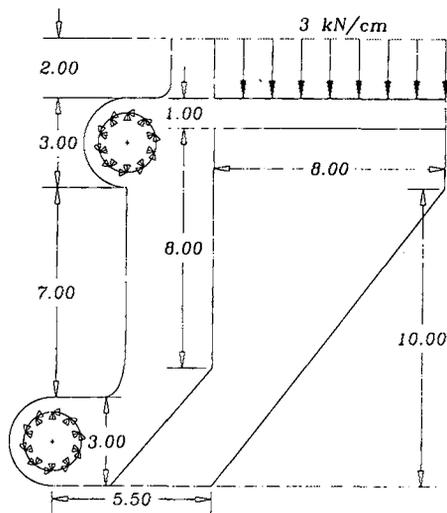


Figura 8. Geometrias obtidas no processo de otimização: a) Projeto inicial; b) Segunda iteração; c) Quarta iteração; d) Projeto final

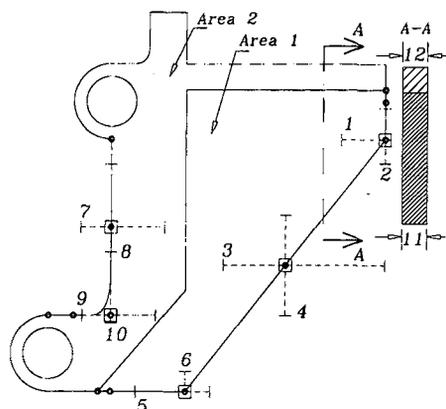
### Componente mecânico

A Figura 9 mostra um componente mecânico modelado como um problema de tensão plana. A função objetivo é o volume do componente e as restrições são o deslocamento máximo e os limites superior e inferior das variáveis de projeto.



**Figura 9.** Forma inicial (cm) e condições de contorno: ( $E = 21,0 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\rho = 7,81 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ )

O modelo foi parametrizado em 12 variáveis como mostrado na Figura 10. As variáveis de forma de 1 a 10 são coordenadas dos pontos de controle de curvas NURBS. As linhas tracejadas indicam a direção e o intervalo de variação (limites superior e inferior) de cada variável de forma. O componente foi dividido em duas regiões (subdomínios representados por áreas) que podem ter espessuras diferentes. As variáveis 11 e 12 controlam, respectivamente, as espessuras dos elementos das áreas 1 e 2. O modelo foi discretizado com elementos finitos triangulares quadráticos.



**Figura 10.** Variáveis de projeto

O processo iterativo convergiu em 16 iterações com uma precisão de  $10^{-4}$ . O volume final é  $69,5149 \text{ cm}^3$  representando um decréscimo de  $39,3216\%$  em relação ao volume inicial

de 114,5629 cm<sup>3</sup>. O máximo deslocamento resultante é  $9,9999991 \times 10^{-3}$ . As Figuras 11 e 12 mostram, respectivamente, o comportamento da função objetivo durante as iterações e as geometrias inicial e final.

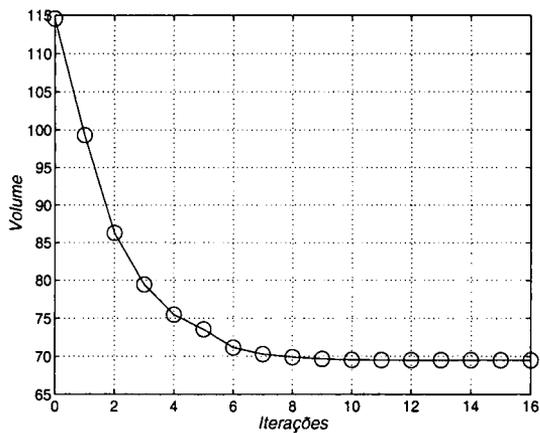


Figura 11. Evolução do volume

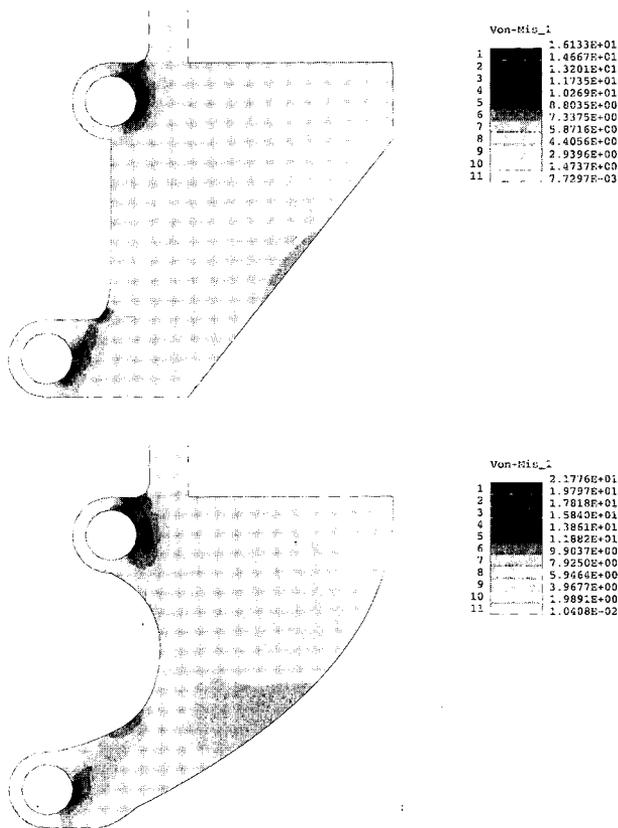


Figura 12. Formas inicial e final: a) Projeto inicial-espessuras: área 1 = 1,00000 cm, área 2 = 1,00 cm; b) Projeto ótimo-espessuras: área 1 = 0,60001 cm, área 2 = 0,80001cm

## CONCLUSÕES

A melhoria efetiva no projeto das estruturas mostradas nos exemplos demonstram a confiabilidade das expressões de sensibilidade desenvolvidas e de sua implementação na determinação de gradientes de funcionais de performance estrutural, permitindo aplicações bastante satisfatórias em otimização de estruturas.

Na otimização de espessura, observa-se claramente que a melhoria na discretização do problema (análise adaptável e elementos de maior grau) conduz a resultados mais precisos de sensibilidade e conseqüentemente de otimização. Entretanto, o erro na sensibilidade permanece sempre maior que o erro no valor do funcional. De fato, o erro na sensibilidade permanece como a maior parcela de erro durante a aplicação de algoritmos de otimização baseados em gradientes. Como na otimização de forma, esta relação também se mantém, torna-se necessário aplicar procedimentos de estimação do erro na sensibilidade, associado à discretização, e métodos de adaptação baseados nessa estimativa<sup>8</sup>.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq) e Tecnológico e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Os autores também agradecem os recursos de software fornecidos pelo grupo TACSOM (<http://www.lncc.br/~tacsom>).

## REFERÊNCIAS

- 1 J.S. Arora, "Introduction to optimum design", Mechanical Engineering Series, McGraw-Hill, New York, (1989).
- 2 M.S. Bazaraa, H.D. Sherali e C.M. Shetty, "Nonlinear programming-Theory and applications", 2ª edição, John Wiley & Sons, New York, (1993).
- 3 A.D. Belegundu e J.S. Arora, "A Study of mathematical programming methods for structural optimization. Part I: Theory", *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. **21**, pp. 1583-1599, (1985).
- 4 M.L. Bittencourt, "Métodos iterativos e multigrid adaptáveis em malhas não-estruturadas, DPM/FEM/UNICAMP (1996).
- 5 M.L. Bittencourt e R.A. Feijóo, "Elementos finitos orientados por objetos", submetido a *Revista Internacional de Métodos Numéricos y Diseño en Ingeniería*, (1998).
- 6 M. L. Bittencourt, M. C. Galvão, C. A. Silva e R. A. Feijóo, "An object-oriented interactive software environment for structural Analysis and optimization", submetido à *Engineering with Computers*, (1998).
- 7 G. Bueda e J. Oliver, "A general methodology for structural shape optimization problems using automatic adaptive remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **36**, N° 18, pp. 3161-3185, (1993).
- 8 G. C. Buscaglia, R. A. Feijóo e C. Padra, "A posteriori error estimation in sensitivity analysis", *Structural Optimization*, Vol. **9**, N° 3/4, pp. 194-199, (1995).
- 9 K.K. Choi e K.H. Seong, "A domain method for shape design sensitivity analysis of built-up structures", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **57**, N° 1, pp. 1-15, (1986).

- 10 K.K. Choi, S.-L. Twu, "Equivalence of continuum and discrete methods of shape design sensitivity analysis", *AIAA Journal*, Vol. **27**, N° 10, pp. 1419–1424, (1989).
- 11 K.K. Choi e K.H. Chang, "A study of design velocity field computation for shape optimal design", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. **15**, N° 4, pp. 317–341, February, (1994).
- 12 E. Dufeu, J. Gómez, F. Cugnon e P. Beckers, "Control del error en la optimización de forma de estructuras bidimensionales", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño y Ingeniería*, Vol. **13**, N° 2, pp. 165–183.
- 13 A.G. Evsukoff, "Sobre a introdução de um algoritmo de ponto interior no ambiente de projeto de engenharia", Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, (1992).
- 14 E. A. Fancello, J. Haslinger e R. A. Feijóo, "Numerical comparison between two cost functions in contact shape optimization", *Structural Optimization*, Vol. **9**, N° 1, pp. 57–68, February, (1995).
- 15 E.A. Fancello, "Análise de sensibilidade, geração automática de malhas e o método dos elementos finitos na otimização de forma em problemas de contato e mecânica da fratura", COPPE/UFRJ, (1993).
- 16 M.E. Gurtin, "An introduction to continuum mechanics", *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. **158**, Academic Press, (1981).
- 17 R.T. Haftka e H.M. Adelman, "Recent developments in structural sensitivity analysis", *Structural Optimization*, Vol. **1**, N° 3, pp. 137–151, (1989).
- 18 R.T. Haftka e R.V. Grandhi, "Structural shape optimization—a survey", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **57**, N° 1, pp. 91–106, (1986).
- 19 J. Haslinger e D. Jedelský, "Genetic algorithms and fictitious domain based approaches in shape optimization", *Structural Optimization*, Vol. **12**, N° 4, pp. 257–264 (1996).
- 20 E.J. Haug, K.K. Choi e V. Komkov, "Design sensitivity analysis of structural systems", *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. **177**, Academic Press, Orlando, (1986).
- 21 J. Herskovits, "A two-stage feasible directions algorithm for nonlinear constrained optimization", *Mathematical Programming*, Vol. **36**, pp. 19–38, (1986).
- 22 J. Herskovits e C.A.B. Coelho, "An interior points algorithm for structural optimization problems", *Computer Aided Optimum Design of Structures: Recent Advances - Proceedings of the First International Conference, Southampton, June, 1989*, pp. 231–241, C.A. Brebbia e S. Hernandez (Eds.), Computational Mechanics Publications, Springer Verlag, Southampton, (1989).
- 23 E. R. Panier, A.L. Tits e J. Herskovits, "A QP-free, globally convergent, locally superlinear convergent algorithm for inequality constrained optimization", *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. **26**, N° 4, pp. 788–810, (1988).
- 24 E.P. Popov, "*Engineering mechanics of solids*", 1ª edição, Prentice-Hall (1990).
- 25 L. A. Schmit, "Structural synthesis-its genesis and development", *AIAA Journal*, Vol. **19**, N° 10, pp. 1249–1263, October, (1981).
- 26 C.A. de C. Silva, "Otimização estrutural e análise de sensibilidade orientadas por objetos", Universidade Estadual de Campinas, (1997).
- 27 C.A. de C. Silva e M.L. Bittencourt, "An interactive object-oriented tool for structural optimization", *Proceedings of 4th World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, July 1982, International Association for Computational Mechanics, (1998).
- 28 C. A. Silva e M. L. Bittencourt, "An object-oriented structural optimization program", submetido à *Structural Optimization*, (1998).

- 29 G.N. Vanderplaats, "Structural optimization-past, present and future, *AIAA Journal*, Vol. **20**, 7, pp. 992-1000 (1982).
- 30 R.J. Yang e M.E. Botkin, "Accuracy of the domain material derivative approach to shape design sensitivities", *AIAA Journal*, Vol. **25**, 12, pp. 1606-1610, (1987).
- 31 O.C. Zienkiewicz e J.Z. Zhu, "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **24**, pp. 337-359, (1987).