

## GENERACION AUTOMATICA DE CONTORNOS DE NIVEL

P. BRUNET  
F. CARRASCO  
y  
L. PEREZ

*Departamento de Métodos Informáticos,  
E.T.S.E.I.B., U.P.C.*

### RESUMEN

En este trabajo se realiza un estudio comparativo de los principales algoritmos para generación de contornos de nivel desarrollados hasta la fecha. Las comparaciones realizadas evalúan los algoritmos bajo los criterios de tiempo de cálculo y calidad de los contornos de nivel generados.

### SUMMARY

A comparative study of the available contour plotting algorithms has been performed, both those of our own developments and those appearing in specialized literature, to yield an additional working tool that confronts the programs that the researcher can use. The comparisons test the algorithms on the criteria of computation time and of the quality of the resulting contour lines.

### INTRODUCCION

La representación de superficies mediante contornos de nivel es un procedimiento utilizado en numerosos campos de aplicación. Así, podemos encontrarlo en representaciones topográficas, generación de mapas del tiempo, visualización de imágenes en medicina, diseño asistido por computador de superficies, visualización de resultados de programas de control numérico para el mecanizado de superficies.

En general, no se dispone de una formulación analítica  $z = f(x,y)$  de la superficie a representar. En su lugar, se conoce un conjunto de valores  $Z_k$  en determinados puntos del plano  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1 \dots n$ . Por ello, uno de los principales problemas inherentes a la generación de contornos de nivel es el de la interpolación de los puntos dados: es preciso disponer de un algoritmo que estime el valor  $z$  de la función para cualquier punto del plano  $(x,y)$ , cumpliendo que  $z(x_k, y_k) = z_k, \forall k$ .

El conjunto inicial de puntos, puede estar distribuido en una malla rectangular en el plano  $x-y$ , o bien puede estar repartido de forma irregular, Figura 1, según el tipo de aplicación. En el primer caso, existen algoritmos que directamente obtienen el modelo analítico interpolado —camino (a) de la Figura 1—. En el segundo caso, en cambio, el camino directo — (a) — no es prácticamente utilizado, y el modelo interpolado  $z = z(x,y)$  se obtiene, bien a través de una triangularización previa del dominio —camino (b) + (c)—, bien mediante el paso a una malla rectangular intermedia, camino (e) + (a).

Recibido: Octubre 1985

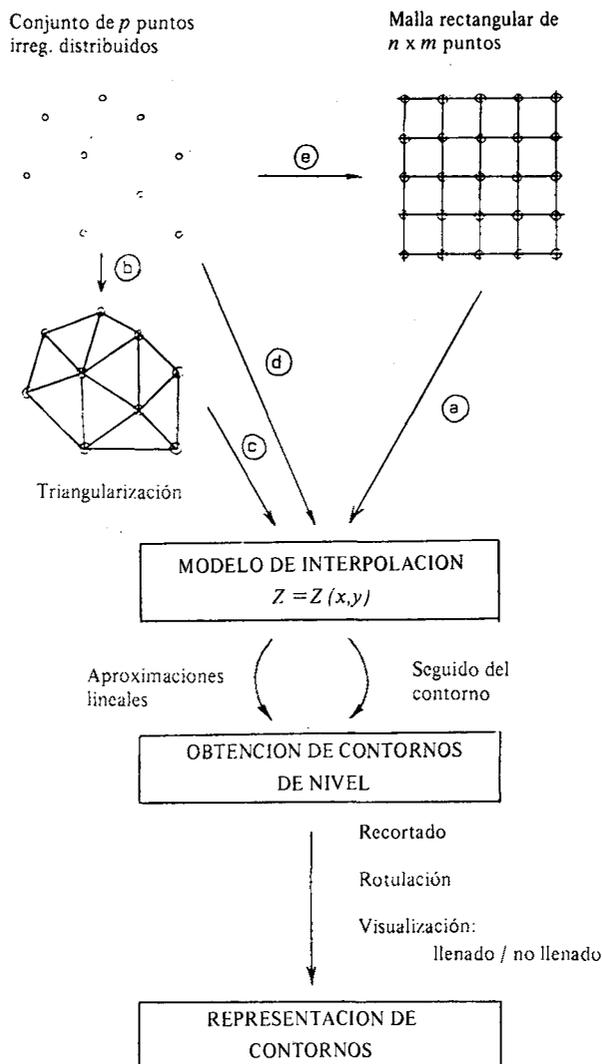


Figura 1. Proceso de obtención de contornos de nivel.

A partir del modelo interpolado, se generan los contornos de nivel mediante aproximaciones poligonales suficientemente finas, ya que en general no es posible resolver analíticamente el problema de la intersección de la superficie interpolada con una familia de planos horizontales. Finalmente, puede ser necesario el recortado de los contornos por la frontera del dominio, así como su rotulado.

En el presente artículo se presentan y comparan algunos de los algoritmos más utilizados en la generación de contornos de nivel de superficies univaluadas. Se estudian los distintos algoritmos de interpolación que producen el modelo final de superficie, y se introduce a los principales métodos de representación gráfica de contornos. En la segunda parte, se comparan las prestaciones de los distintos algoritmos de interpolación, analizando los resultados de las implementaciones realizadas, con las superficies de test habituales en la literatura.

METODOS DE INTERPOLACION BIDIMENSIONAL

Puntos distribuidos en una malla rectangular

Cuando se parte de una matriz  $Z_{ij}$  de valores de la superficie a representar (donde  $z_{ij} = z(x_{ij}, y_{ij})$ ,  $i = 1...n$ ,  $j = 1...m$ ), existen métodos para la interpolación en puntos distintos a los de la malla. En particular, siempre que se disponga de dos familias de funciones univaluadas  $C_i(x)$ ,  $i = 1...n$  y  $C_j(Y)$ ,  $j = 1...m$  tales que

$$C_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \tag{1}$$

$$C_j(y_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=l \\ 0 & \text{si } j \neq l \end{cases}$$

es inmediato ver que la superficie  $S(x,y)$ , formada como producto tensorial de interpolantes unidimensionales<sup>2, 4</sup>, interpola el conjunto  $Z_{ij}$  de valores dados:

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Z_{ij} * C_i(x) * C_j(y) \tag{2}$$

$$S_{kl}(u,v) = \begin{Bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{Bmatrix} [M] [P_{kl}] [M]^T \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

$$u = \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}, \quad v = \frac{y-y_l}{y_{l+1}-y_l}$$

$M$  es una matriz constante de  $4 \times 4$ , y  $P_{kl}$  contiene el valor, en los cuatro puntos extremos del intervalo  $[x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$ , de las alturas  $z$ , sus primeras derivadas parciales  $z^u$ ,  $z^v$ , y la segunda derivada cruzada  $z^{uv}$ <sup>8</sup>. Así pues, un algoritmo alternativo para la obtención del spline bicúbico que interpola los datos consistente en estimar las matrices derivadas  $z_{ij}^u$ ,  $z_{ij}^v$  y  $z_{ij}^{uv}$ , y luego aplicar la fórmula (3) a cada rectángulo de la malla<sup>8</sup>.

La formulación bicúbica de las ecuaciones (2) y (3) pueden complicar, en algunos casos, la generación posterior de los contornos de nivel —que puede entenderse como el cálculo de la intersección del interpolante con distintos planos horizontales—. Una posibilidad alternativa<sup>9, 14</sup>, es la aproximación de cada trozo bicúbico por cuatro trozos bicuadráticos. Suponiendo que la malla rectangular es regular y tal que  $x_{i+1}-x_i = 1 \quad \forall i$ ,  $y_{i+1}-y_i = 1 \quad \forall i$ , y definiendo la matriz  $DQ_t$  función del signo del parámetro  $t$ ,

$$DQ_t = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/8 & -1/8 \\ -2 & 2 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & 2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix} & \text{si } t \leq 0 \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/8 & -1/8 \\ -2 & 2 & -1/2 & -1/2 \\ 2 & -2 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} & \text{si } t > 0 \end{cases} \tag{4}$$

la ecuación de la superficie bicuadrática en el rectángulo de la malla  $[x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$  —equivalente a la expresión bicúbica (3)—, es,

$$S_{kl}(u, v) = \left\{ 1 \ u \ u^2 \right\} \mathbf{DQ}_U \mathbf{P}_{kl} [\mathbf{DQ}]_V \begin{Bmatrix} y_l^1 \\ y_l^2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$u = x - (x_{k+1} + x_k)/2; \quad v = y - (y_{l+1} + y_l)/2$$

donde la matriz  $\mathbf{P}_{kl}$  contiene, como en (3), los valores y derivadas parciales en los cuatro extremos del intervalo,

$$\mathbf{P}_{kl} = \begin{bmatrix} z_{kl} & z_{k+1,l} & z_{kl}^v & z_{k+1,l}^v \\ z_{k,l+1} & z_{k+1,l+1} & z_{k,l+1}^v & z_{k+1,l+1}^v \\ z_{kl}^u & z_{k+1,l}^u & z_{kl}^{uv} & z_{k+1,l}^{uv} \\ z_{k,l+1}^u & z_{k+1,l+1}^u & z_{k,l+1}^{uv} & z_{k+1,l+1}^{uv} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Evidentemente, el algoritmo de interpolación con trozos bicuadráticos sigue un proceso totalmente paralelo al de la interpolación con splines bicúbicos: una vez estimadas las matrices de derivadas parciales  $z_{ij}^u$ ,  $z_{ij}^v$  y  $z_{ij}^{uv}$ , sólo es preciso aplicar a cada rectángulo de la malla la ecuación (5) en lugar de la (3). Como se verá posteriormente, se comparan los algoritmos basados en (3) y (5) —con estimación de  $z_{ij}^{uv} = 0 \ \forall i, j$ , siguiendo el trozo bicúbico llamado  $F^{19}$ , los resultados en ambos algoritmos son bastante similares.

### Puntos distribuidos irregularmente en el plano

Cuando se dispone del valor de la función a interpolar en un conjunto irregular de puntos-dato,

$$(x_i, y_i, z_i), \quad i=1 \dots p \quad (7)$$

no es posible utilizar directamente los algoritmos basados en splines bicúbicos introducidos anteriormente. En este caso, y dado que los métodos globales que no utilizan una triangularización previa<sup>2,3</sup> no dan lugar a superficies lo suficientemente suaves, se describirán únicamente los algoritmos que obtienen valores en una malla rectangular, y aquellos que se basan en una triangularización previa del dominio<sup>3, 9, 15</sup>.

### Obtención de valores en una malla rectangular

Como ya se ha indicado, estos algoritmos trabajan en dos fases,

— En una primera fase, se calcula una matriz de valores  $F_{ij}$  en una malla rectangular que contiene a los puntos dados, de forma que la superficie que luego se genere por splines bicúbicos a partir de  $F_{ij}$ , pase por los  $P$  puntos dados (7).

– Luego en una segunda fase, se generan valores interpolados directamente utilizando la ecuación (2).

En <sup>7</sup> se presenta un algoritmo de estas características, en que la determinación concreta de la matriz  $F_{ij}$  implica, además de la exigencia de que interpole los puntos dados, la minimización del cuadrado de las diferencias entre los puntos de la malla rectangular y un interpolante lineal a trozos. Este criterio, que se demostró superior a otros como el de minimización de la norma o minimización de la variancia, da lugar sin embargo a interpolantes demasiado oscilatorios en algunos casos. Por ello, en el presente trabajo se ha utilizado una mejora del mismo, que se presenta en el anexo. Sus principales características son,

– La utilización de un criterio de optimización que asegura la máxima suavidad, en el sentido de mínima curvatura, en los puntos de la malla de las líneas isoparamétricas.

– Una formulación que permite la utilización inmediata del método con cualquier algoritmo de interpolación en malla rectangular por producto tensorial. En particular, puede utilizarse con splines locales o globales.

– La utilización de un algoritmo de cálculo de  $F_{ij}$  que permite obtener soluciones aproximadas aún en el caso de matrices mal condicionadas (debidas, por ejemplo, a una distribución poco uniforme de los puntos dato respecto la malla).

La principal ventaja de este grupo de algoritmos estriba en que, en la segunda fase, se reducen a una interpolación bidimensional por producto tensorial, de propiedades bien conocidas. Por otra parte, es posible obtener superficies con continuidad  $C^2$ , en contra de lo que ocurre, en general, con los métodos basados en una triangularización inicial. Sin embargo, y como ya se ha dicho, pueden presentar problemas de cálculo y errores en la solución en el caso de distribuciones de puntos poco uniformes.

### Método de Shepard triangular

El esquema de interpolación a un conjunto de puntos irregularmente distribuidos denominado "Shepard triangular"<sup>16</sup> es una variante de la clásica fórmula de Shepard<sup>23</sup> de la que se diferencia, básicamente, por el empleo de una triangularización de los puntos-dato sobre el plano  $x$ - $y$ . El corte de cálculo adicional introducido en la determinación de la triangularización queda compensado por el mejor comportamiento de la superficie interpolada, que no presenta los problemas de suavidad de la fórmula de Shepard: discontinuidad de las primeras derivadas parciales en los puntos-dato (visualmente "cúspides").

Sea  $\{T\}$  una triangularización de las proyecciones sobre el plano  $x$ - $y$  de un conjunto irregular de puntos,

$$(x_i, y_i, z_i), i=1, \dots, p$$

En la derivación de la superficie  $S(x,y)$  que los interpola con el método de Shepard triangular, a cada triángulo  $T \in \{T\}$  se le asigna un interpolante lineal  $L_T(x,y)$  definido por la ecuación del plano que pasa por los puntos-dato cuyas proyecciones sobre el plano  $x$ - $y$  son los vértices de  $T$ . De este modo,  $S(x,y)$  puede ser expresada por la combinación conexas<sup>16</sup>.

$$S(x,y) = \frac{\sum_{T \in (T)} w_T(x,y) \cdot L_T(x,y)}{\sum_{T \in (T)} w_T(x,y)} \quad (8)$$

con:

$T$ : = triángulo  $(i,j,k)$

$L_T(x_l, y_l) = z_l$  para  $l = i,j,k$

$$w_T(x,y) = \frac{1}{d_i^2 d_j^2 d_k^2}; \quad d_l^2 = (x-x_l)^2 + (y-y_l)^2 \quad (9)$$

Es inmediato ver que la superficie  $S(x,y)$  pasa por todos los puntos-dato y posee precisión lineal: representa exactamente a la superficie real si ésta es un plano. Además, se puede demostrar que su continuidad es  $C^\infty$ <sup>16</sup> lo que se traducirá en una gran suavidad de los contornos de nivel obtenidos con este método.

Las ecuaciones (8) y (9) ponen también de manifiesto el carácter global de este esquema de interpolación, al depender la forma final de la superficie de todos los puntos dato. Por este motivo, su utilización se ve limitada a aplicaciones con reducidos números de datos pues, de otro modo, el proceso de cálculo de valores interpolados será excesivamente costoso en tiempo de ordenador.

### Estimación de Derivadas Parciales

Una característica común a los métodos locales de interpolación que serán descritas en los siguientes apartados es la necesidad de disponer de las derivadas parciales de la superficie a representar en los puntos dados, que deben ser estimadas a partir de las coordenadas de estos puntos. Este proceso de estimación de derivadas junto con el de obtención de una triangularización del dominio del plano  $x,y$  será, por consiguiente, las dos fases iniciales de los algoritmos de estos métodos.

En <sup>17</sup> se presentan varias técnicas para la estimación de las primeras derivadas parciales de una superficie dada por un conjunto de puntos irregularmente distribuidos. En un grupo importante de estos procedimientos, el valor de la derivada se calcula a partir de una media ponderada de las pendientes de planos que pasan por el punto de estimación y dos adicionales vecinos elegidos entre los restantes puntos dados. A este grupo pertenecen los métodos de little <sup>17</sup> y Akima <sup>1</sup> que se definen más precisamente de la siguiente forma.

- Método de little: A partir de una triangularización del dominio del plano  $x,y$ , se toman como puntos adicionales aquellos que junto con el de estimación forman uno de sus triángulos. La función peso es el recíproco del producto de las longitudes de los lados de este triángulo que llegan al vértice estudiado, al cuadrado.
- Método de Akima: En este caso los dos puntos adicionales se eligen entre los  $nc$  más próximos al de estimación (midiendo las distancias sobre el plano  $x,y$ ), donde  $nc$  es un parámetro. Estos dos puntos y el de estimación forman un triángulo en el espacio, y se toma como función peso el área de este triángulo multiplicada por el coseno del ángulo formado por un vector normal a él y el eje  $z$ .

Ambos procedimientos proporcionan resultados igualmente satisfactorios y han sido utilizados en el estudio comparativo de métodos que se presenta posteriormente.

**Método de Powell y Sabin**

El método propuesto por Powell y Sabin <sup>18</sup> es un esquema local de interpolación a un conjunto irregular de puntos basado en una primera triangularización de sus proyecciones sobre el plano  $x,y$ , seguida de la interpolación en cada triángulo con una superficie formada por trozos cuadráticos enlazados entre sí y con los triángulos adyacentes con continuidad  $C^1$ .

Considérese uno de estos triángulos, de vértices  $(x_i, y_i), i=1, \dots, 3$ . El elemento cuadrático en su interior,  $S(x,y)$ , queda completamente definido por las alturas y primeras derivadas parciales de la superficie real en los vértices del triángulo, a partir de las condiciones de interpolación:

$$S(x_i, y_i) = z_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x_i, y_i) = z_i^x \quad i=1, \dots, 3 \quad (10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}(x_i, y_i) = z_i^y$$

Sin embargo, los seis grados de libertad de una superficie cuadrática son insuficientes para satisfacer simultáneamente las nueve relaciones <sup>10</sup>, lo que obliga a dividir el triángulo inicial en otros más pequeños y a generar  $S(x,y)$  con la unión de los trozos cuadráticos definidos sobre los subtriángulos resultantes de la división.

En <sup>18</sup> se analiza la existencia y unicidad del elemento cuadrático  $S(x,y)$  para varias divisiones posibles del triángulo. Como resultado de este estudio, ambos autores proponen el siguiente algoritmo de construcción del interpolante:

1. Si el triángulo es suficientemente agudo (máximo ángulo interior no superior a  $75^\circ$ ) se divide en otros seis, uniendo su baricentro o con los vértices y puntos medios de las aristas, como se ilustra en Figura 2.

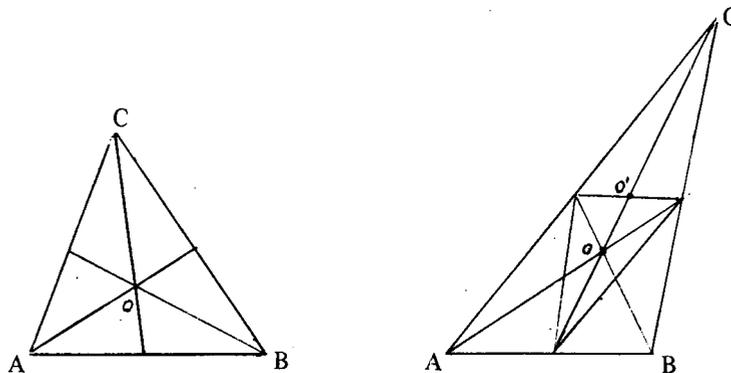


Figura 2. Tipos de divisiones que se realizan en el método de Powell y Sabin.

2. En caso contrario, el triángulo se subdivide en otros doce uniendo cada vértice con el punto medio de la arista opuesta y los puntos medios entre sí, en la forma indicada en Figura 2. Con esta división aparecen tres grados de libertad adicionales en el elemento cuadrático  $S(x,y)$ , que se fijan imponiendo las primeras derivadas parciales de las superficies en los puntos medios de las aristas y en dirección normal a ellas. Estas derivadas deben ser estimadas por interpolación lineal a lo largo de las respectivas aristas para asegurar la continuidad  $C^1$  entre dos triángulos adyacentes con diferentes divisiones<sup>18</sup>.

Una vez determinado el tipo de división a realizar en función de la forma del triángulo, las expresiones cuadráticas del elemento  $S(x,y)$  pueden ser obtenidas a partir de la siguiente propiedad: si  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies cuadráticas unidas con continuidad  $C^1$  a través de la recta,

$$ax + by + c = 0$$

existe un único escalar  $\lambda$  (coeficiente de transferencia) tal que:

$$S_2(x,y) = S_1(x,y) + \lambda(ax + by + c)^2 \quad (11)$$

La aplicación reiterada de la relación (11) permite expresar el elemento cuadrático  $S(x,y)$  por:

$$S(x,y) = S_0(x,y) + \sum_{k \in \alpha_0(x,y)} \lambda_k (a_k x + b_k y + c_k)^2$$

$$S(x,y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^{2-i} a_{ij} x^i y^j \quad (12)$$

Siendo:

- $S_0(x,y)$ : restricción de  $S(x,y)$  a uno de los subtriángulos de la división (subtriángulo de referencia)
- $\lambda_k$ : coeficiente de transferencia de la arista interior  $k$  de la división (de ecuación  $a_k x + b_k y + c_k = 0$ )
- $\alpha_0(x,y)$ : conjunto de aristas atravesadas por un camino arbitrario que une un punto del subtriángulo de referencia con el punto  $(x,y)$ .

Finalmente, los coeficientes  $a_{ij}$  y  $\lambda_k$  de ecuación (12) son determinados tras el planteamiento y resolución del sistema lineal de ecuaciones (10), más las tres relaciones de las derivadas normales para la división en doce subtriángulos, teniendo presente que:

- en la división en seis subtriángulos sólo tres de los coeficientes de transferencia  $\lambda_k$  son independientes, dado que las expresiones cuadráticas al principio y final de un camino cerrado que rodee al baricentro  $O$  (Figura 2) deben coincidir.
- en la división en doce subtriángulos los coeficientes de transferencia  $\lambda_k$  de aristas interiores situadas sobre la misma recta soporte son idénticos (tómese por ejemplo, caminos cerrados que rodeen a los puntos  $O$  y  $O'$  de Figura 2).

El método de Powell y Sabin tiene un interés especial en aplicaciones tales como la generación de contornos de nivel, dado que las secciones de la superficie interpolada con planos horizontales son localmente curvas fácilmente parametrizables (cónicas) que pueden ser trazadas con rapidez y exactitud. En<sup>9</sup>, por ejemplo, se describe un algoritmo de cálculo directo de los tramos de una sección cónica interiores a un polígono convexo arbitrario y, en particular, a un triángulo.

**Método de Clough y Tocher**

De una forma similar al método de Powell y Sabin, el esquema de Clough y Tocher<sup>11</sup> construye una superficie que interpola a un conjunto irregular de puntos formada por trozos cúbicos unidos con continuidad  $C^1$ . Una vez que se dispone de una triangulación de los puntos-datos sobre el plano  $x-y$ , el elemento cúbico en el interior de uno de sus triángulos queda definido a partir de las alturas y primeras derivadas parciales de la superficie real en los vértices, y se genera por la unión de tres trozos cúbicos definidos sobre los respectivos subtriángulos resultantes de la división por el baricentro mostrada en Figura 3.

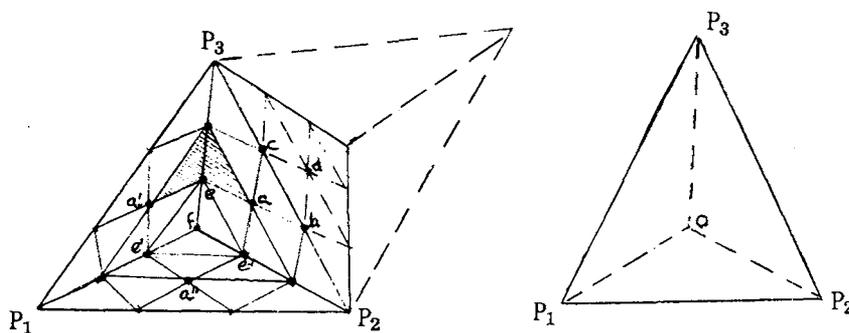


Figura 3. Condiciones para la continuidad  $C^1$  en Clough y Tocher.

Una forma adecuada para la construcción del elemento cúbico en el interior de un triángulo  $T$  consiste en descomponerlo en la base de polinomios bivariados de Bernstein de grado 3, definida por <sup>11</sup>:

$$B_i(\mathbf{u}) = \frac{3!}{i_1! i_2! i_3!} u_1^{i_1} u_2^{i_2} u_3^{i_3} \tag{13}$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3) \text{ t.q. } i_1 + i_2 + i_3 = 3 \text{ y } i_j \geq 0 \quad \forall_j$$

siendo  $\mathbf{u}$  el vector de coordenadas baricéntricas relativas a un cierto triángulo y  $\mathbf{i}$  una terna de índices enteros. De este modo, los tres polinomios cúbicos del interpolante pueden ser expresados por:

$$S_k(\mathbf{u}_k) = \sum_{i_1+i_2+i_3=3} b_i^k B_i(\mathbf{u}_k) \quad k=1,2,3 \quad (14)$$

$$i_j \geq 0, \forall_j$$

donde  $\mathbf{u}_k$  es el vector de coordenadas baricéntricas relativas al subtriángulo  $T_k$  de la división y  $b_i^k$  son los coeficientes de la descomposición, que poseen la siguiente interpretación geométrica: Si la notación  $(\mathbf{u}, h)$  designa a un punto del espacio de altura  $h$  y cuya proyección sobre el plano  $x-y$  coincide con el de coordenadas baricéntricas  $\mathbf{u}$ , el conjunto de puntos:

$$\{(\mathbf{u}_k = \mathbf{i}/3, b_i^k) \text{ t.q. } i_1+i_2+i_3 = 3 \text{ y } i_j \geq 0 \forall_j\}$$

forman un **poliedro de control** que modela la forma del polinomio cúbico  $S_k$ . Por consiguiente, a cada coeficiente  $b_i^k$  se le puede asociar un nodo o punto de coordenadas baricéntricas  $\mathbf{u}_k = \mathbf{i}/3$ , dando lugar a los tres reticulados mostrados en Figura 3.

Empleando la notación introducida, el cálculo del elemento cúbico en el interior de un triángulo  $T$  se realiza con los siguientes pasos <sup>11</sup>.

- 1) Determinar un polinomio cúbico  $S^\circ(\mathbf{u})$  que interpole las alturas y primeras derivadas parciales de la superficie real en los vértices de  $T$  y posea precisión cuadrática, es decir, representa exactamente a una superficie cuadrática. Los coeficientes de su descomposición:

$$S^\circ(\mathbf{u}) = \sum_{i_1+i_2+i_3=3} b_i^\circ B_i(\mathbf{u})$$

$$i_j \geq 0, \forall_j$$

siendo  $\mathbf{u}$  el vector de coordenadas baricéntricas relativas a  $T$ , pueden ser obtenidos fácilmente teniendo presente que el correspondiente poliedro de control y el polinomio  $S^\circ(\mathbf{u})$  son tangentes en los vértices de  $T$ , y que la precisión cuadrática impone:

$$b_{1,1,1} = 1/4(b_{2,0,1}+b_{1,0,2}+b_{0,2,1}+b_{0,1,2}+b_{2,1,0}+b_{1,2,0}) - 1/6(b_{3,0,0}+b_{0,3,0}+b_{0,0,3})$$

- 2) Determinar los coeficientes  $b_i^k$  de la descomposición de  $S^\circ(\mathbf{u})$  en cada uno de los subtriángulos de la división  $T_k$ ,  $k=1,2,3$ . Estos coeficientes pueden obtenerse directamente a partir de  $b_i^\circ$  mediante un proceso denominado transformación de dominio <sup>11</sup>, aunque es posible reducir el número de operaciones aplicando la propiedad que se describirá a continuación <sup>9</sup>.
- 3) Corregir los polinomios cúbicos  $S_k^\circ$  de cada subtriángulo  $T_k$  obtenidos en el paso anterior para asegurar continuidad  $C^1$  a través de las aristas exteriores. Esta condición obliga a que el cuadrilátero de vértices  $(\mathbf{u}_a, b_a)$ ,  $(\mathbf{u}_b, b_b)$ ,  $(\mathbf{u}_c, b_c)$  y  $(\mathbf{u}_d, b_d)$ , sea plano (Figura 3), lo que se consigue modificando únicamente el coeficiente  $b_a$  con un ajuste mínimo-cuadrático de este cuadrilátero por un plano que pase por  $(\mathbf{u}_b, b_b)$  y  $(\mathbf{u}_c, b_c)$ . Evidentemente, esta conversión es innecesaria si la arista no es compartida por otro triángulo de la triangularización.

- 4) Corregir los polinomios cúbicos de cada subtriángulo para asegurar continuidad  $C^4$  a través de las aristas interiores de la división. Las modificaciones de los coeficientes asociados a los nodos  $a$ ,  $a'$  y  $a''$  de los reticulados (Figura 3) obligan a recalcular los de los nodos  $e$ ,  $e'$ ,  $e''$  y  $f$  (Figura 3). Usando la propiedad geométrica descrita en el paso anterior, es fácil comprobar que  $b_e$  es la media aritmética de los coeficientes asociados a los tres nodos vecinos (que completan el cuadrilátero rayado en Figura 3), mientras que  $b_f$  es la media aritmética de los coeficientes  $b_e$ ,  $b_e'$  y  $b_e''$ .

Tras el proceso anterior de construcción del elemento cúbico de Clough y Tocher, el cálculo de valores interpolados es inmediato, con las ecuaciones (13) y (14).

### El método Akima

El diseño primitivo del algoritmo fue expuesto en 1978<sup>1</sup> y consta de tres pasos:

- Triangularización del plano  $x$ - $y$  a partir de los puntos dados que serán vértices de los triángulos resultantes.
- Estimación de las derivadas primeras y segundas en cada punto dado.
- Adaptación de un polinomio de quinto grado en  $x, y$  en cada triángulo. Esto implica que se está trabajando con una interpolación de splines locales.

El tercer apartado, la interpolación, se realiza empleando la siguiente fórmula para la función interpolante,

$$S(x,y) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^{5-i} a_{ij} x^i \cdot y^j \tag{15}$$

De los 21 coeficientes  $a_{ij}$ , 18 vienen dados por las condiciones de paso; a saber, los valores de la función y sus derivadas parciales primeras y segundas (incluso la cruzada) en cada uno de los tres vértices. Para determinar los tres coeficientes restantes, se impone que las derivadas parciales de la función interpolante en la dirección perpendicular a cada lado del triángulo sean polinomios de tercer grado, como máximo, en la variable medida en la dirección de la arista del triángulo (cuando en realidad deberían ser polinomios de cuarto grado). Estas tres condiciones nos fijan los tres grados de libertad que quedaban, y, además es fácil demostrar que aseguran la conexión  $C^1$  entre los trozos triangulares. En efecto si realizamos una transformación paramétrica introduciendo un nuevo sistema de coordenadas cartesianas al que llamaremos  $s$ - $t$ , para la proyección de la triangulación sobre el plano  $x$ - $y$  (el sistema  $s$ - $t$  se establece de manera que el eje  $s$  es paralelo a una arista del triángulo), se puede establecer una transformación lineal que determina biunívocamente los valores de las derivadas parciales en los vértices del triángulo expresadas en  $s$ - $t$  en función de las mismas expresadas en  $x$ - $y$ . La continuidad de los polinomios de quinto grado correspondientes a los triángulos que comparten una arista común demuestra la continuidad de los valores de  $z$  a lo largo de la arista. De la misma manera, los valores de  $z_t$  y  $z_{st} = (z_t)_s$  en los dos vértices de la arista determinan de forma única un polinomio  $z_t = z_t(S)$  de grado 3 a lo largo de la arista. Al imponer que  $z_z$  sea como máximo un polinomio de grado 3, se obliga a que el polinomio sea el mismo para los dos triángulos que comparten la arista, ya que suministrarán los mismos valores de  $z_t$  y  $z_{st}$ . Ello asegura la continuidad  $C^1$  a lo largo de todas las aristas de la triangularización.

### El algoritmo recursivo

Dado un conjunto de puntos irregularmente distribuidos, se puede dibujar un mapa de curvas de nivel utilizando un algoritmo recursivo de finura regulable como dato. El método<sup>3</sup> se basa en refinar, hasta el nivel deseado, la triangulación inicial con lo que se obtienen sucesivas mallas cada vez más tupidas.

El primer paso consiste en obtener la triangulación que tenga como vértices los puntos dados.

En el segundo paso se realiza la estimación inicial de las derivadas parciales (sólo las primeras) en cada uno de los vértices de la triangulación. La estimación se realiza a partir de los valores de las pendientes de los triángulos que concurren en el vértice estudiado.

El tercer paso consiste en la subdivisión recurrente de los triángulos de la malla original, con el fin de que la variación de los valores de las derivadas parciales entre cualquier nodo y los que le rodean sea suficientemente suave. La división se realiza por división en dos mitades de igual longitud de las proyecciones de las aristas en el plano  $x-y$ , con lo que se obtienen cuatro nuevos triángulos por cada uno de los antiguos. A cada uno de los nuevos vértices así encontrados se le asigna una altura (osea, una coordenada  $z$ ) resultante de la interpolación cúbica a partir de las  $z$  de los puntos extremos del lado antiguo; las condiciones impuestas al polinomio de tercer grado son: paso por la altura correspondiente a los puntos extremos y pendiente coincidente con las proyecciones de las derivadas parciales sobre el plano vertical que pasa por los dos puntos extremos.

Se han realizado pruebas con diversos métodos para estimar los valores de las derivadas parciales en los nuevos puntos: se han analizado interpolaciones cuadráticas y cúbicas de los valores de ambas derivadas por separado, así como interpolaciones de la pendiente en la intersección entre el plano tangente y el plano vertical que contiene a los dos puntos extremos. Sin embargo, los mejores resultados se han obtenido con la interpolación lineal (y por separado) de las derivadas parciales en los extremos.

La subdivisión se considera suficiente cuando ninguna de las diferencias en valor absoluto entre derivadas parciales de triángulos adyacentes supera un umbral dado. El parámetro que regula la precisión del método es el grado de recursividad, fijado por el usuario al principio de la ejecución del algoritmo.

El cuarto y último paso es el cálculo de las curvas de nivel, que son, de hecho, segmentos de recta; los triángulos de la malla más tupida son inspeccionados y las alturas correspondientes a las líneas de nivel se interpolan linealmente en los tres lados.

### OBTENCION DE LOS CONTORNOS DE NIVEL

Una vez definida una superficie que interpola los datos el proceso de obtención de sus contornos de nivel puede ser realizado con alguno de los siguientes métodos<sup>9</sup>,

a) Trazado directo de los contornos.

Si el interpolante tiene una forma analítica simple se pueden calcular directamente puntos de sus secciones con planos horizontales a partir de las ecuaciones paramétricas de estas curvas. Este caso se presenta, por ejemplo, en el interpolante de Powell & Sabin cuyas secciones son tramos de cónicas interiores a triángulos<sup>9</sup>.

b) Interpolación a una malla regular.

La superficie representada se interpola a los nodos de una malla regular, rectangu-

lar o triangular, donde con una simple interpolación adicional (bilineal) se determinan los tramos rectos que aproximan a los contornos de nivel. Estos tramos pueden obtenerse independientemente para cada una de las celdas de la malla, o bien, se pueden seguir los contornos completos a lo largo de la malla <sup>3, 22, 24</sup>.

c) Seguimiento del contorno.

A partir de dos puntos iniciales se va siguiendo el contorno punto por punto, utilizando los valores interpolados en la proximidad de la prolongación del contorno por una recta que une los dos últimos puntos determinados con el objeto de calcular nuevos puntos. Dos problemas que aparecen en la realización de estos algoritmos de seguimiento de contorno son la búsqueda de puntos iniciales y prevenir que el algoritmo sepa encontrar una condición de conclusión en el trazado de un contorno cerrado. Una solución propuesta por Sabin <sup>21</sup> consiste en construir un árbol que una los puntos estacionarios de la superficie y que sería utilizado para determinar puntos iniciales por interpolación lineal, así como para controlar los procesos de seguimiento de contornos cerrados.

Los métodos de obtención directa de contornos de nivel proporcionan resultados exactos pero sólo se pueden emplear en casos particulares. Los dos restantes son de carácter general y aunque son más precisas las técnicas de seguimiento del contorno, la complejidad del algoritmo es también mayor.

En una segunda fase, y en caso de que se especifique la frontera de la región en la que se desea que aparezcan los contornos, es necesario realizar una operación de recortado: a medida que se va generando cada uno de los pequeños tramos rectos que conforman los contornos de nivel, debe analizarse si es interior o no a la región; en caso de ser sólo parcialmente interior, debe ser recortado, visualizando sólo su parte interior.

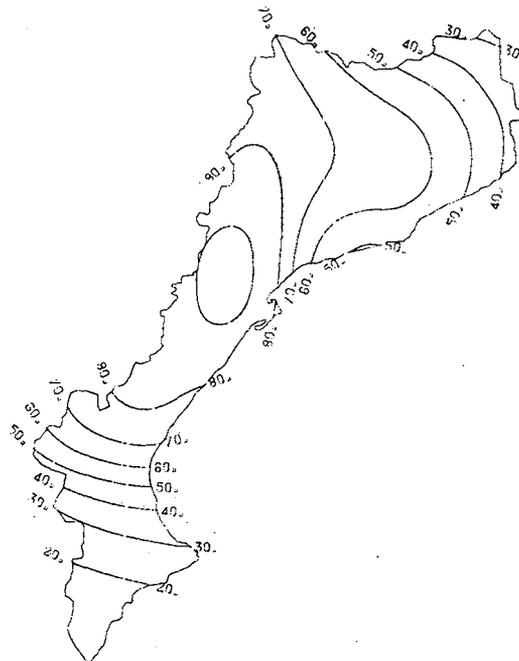


Figura 4. Fase final de recortado y rotulación de contornos.

En esta fase, puede utilizarse cualquier algoritmo clásico de "clipping" por una frontera poligonal no convexa, <sup>19, 20</sup>. En <sup>9</sup> se presenta, por ejemplo, un algoritmo del tipo seguido del contorno que minimiza los tiempos de búsqueda y recortado en el caso de fronteras complejas.

La representación final de los contornos puede realizarse sobre papel o bien sobre pantalla gráfica. En el primer caso, los contornos se dibujan, y es importante su generación de forma secuencial para evitar al máximo los movimientos inútiles de la pluma. Asimismo, es importante disponer de algoritmos automáticos de rotulación del valor correspondiente a cada contorno, Figura 4. En <sup>9</sup> y <sup>10</sup>, por ejemplo, se presentan posibles algoritmos de rotulación.

En cambio, cuando la representación se realiza sobre pantallas raster en color, puede ser más útil disponer de una representación coloreada según las alturas, donde la rotulación ha sido sustituida por una leyenda lateral explicativa del significado de cada color. Un posible algoritmo de dibujo (una vez obtenidos el conjunto de tramos rectos del contorno, recortados por la frontera del dominio, y almacenados cada uno de ellos en dos listas correspondientes a los colores que separa), es el siguiente:

1. Crear una lista ordenada de caminos abiertos según el orden de aparición de sus puntos iniciales al recorrer la frontera del dominio en sentido antihorario.
2. Determinar las superficies comprendidas por los caminos. Si el camino es abierto se asigna a esta superficie un valor suficientemente elevado; si el camino es cerrado su superficie será positiva si deja el interior a su derecha.
3. Si no hay ningún camino o todos ellos son cerrados llenar del color correspondiente el "background" del dominio de llenado.
4. Dibujar en cualquier orden decreciente de superficie las áreas formadas entre caminos abiertos y trozos del perímetro del dominio de llenado.
5. Dibujar por orden decreciente de superficie las áreas definidas por caminos cerrados; no dibujar aquellos caminos de superficie negativa.



Figura 5. Representación con llenado sólido. Factor de precisión,  $kp=2$ .

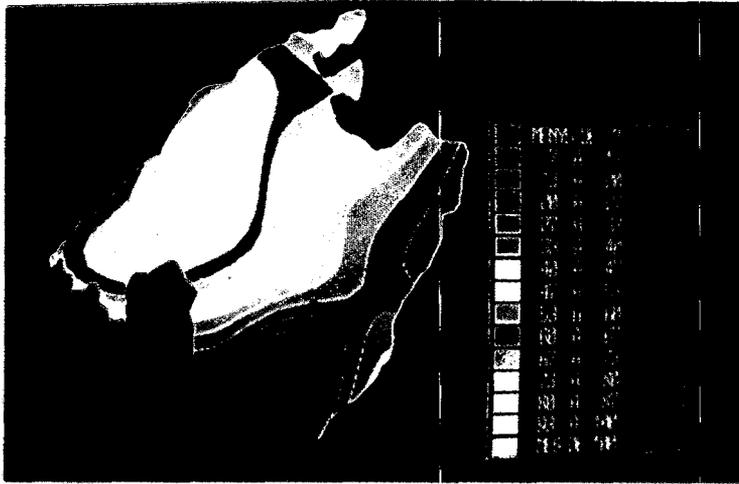


Figura 6. Los primeros contornos de nivel de la figura 5, con factor de precisión  $kp=5$ .

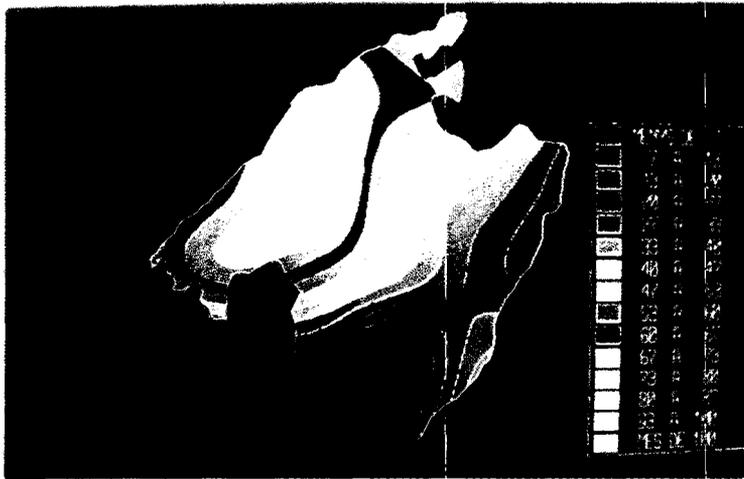


Figura 7. Contornos de nivel de la figura 5, con  $kp=20$ .

Las Figuras 5, 6 y 7 presentan los contornos de nivel obtenidos con este algoritmo, y una interpolación por splines bicúbicos locales. La malla inicial estaba constituida por  $6 \times 6$  puntos; se ha realizado una aproximación bilineal en los rectángulos de una segunda malla obtenida dividiendo cada rectángulo de la primera en  $kp \times kp$  rectángulos más finos. Se puede observar la mejora que se obtiene en la representación, al pasar de  $kp=2$  a  $kp=5$  y finalmente a  $kp=20$ .

#### DISCUSION Y COMPARACION ENTRE METODOS

Para la comparación entre los algoritmos de generación de contornos que parten de puntos en una malla rectangular:

*SCL* : Splines bicúbicos locales, ecuación (3),

*DQP* : Aproximación por trozos bicuadráticos, ecuación (5),

se ha utilizado la siguiente superficie, propuesta por Nielson i Franke en 1983,

$$z(x,y) = .4 * \exp\left(-\left(\frac{x-.2}{.4}\right)^2 - (y-.2)^2\right) + \exp\left(-\left(\frac{x-1}{.35}\right)^2 - \left(\frac{y-.3}{.7}\right)^2\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{x-.4}{.6}\right)^2 + \left(\frac{y-.9}{.4}\right)^2} + .3 \quad (16)$$

utilizando una malla de 5 x 5 puntos en el dominio  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ . Las Figuras 8 y 9 muestran que apenas existen diferencias entre ambos esquemas de interpolación. Los tiempos de proceso son asimismo similares<sup>9</sup>, siendo inferior el del algoritmo *DQP* cuando se requiere un factor de precisión elevado.

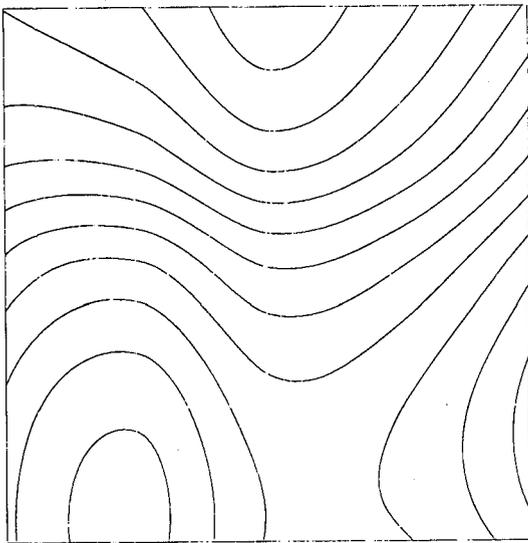


Figura 8. Resultados del interpolante *SCL*, con el test de Nielson y Franke y malla de 5 x 5 puntos. Factor  $kp=10$ .

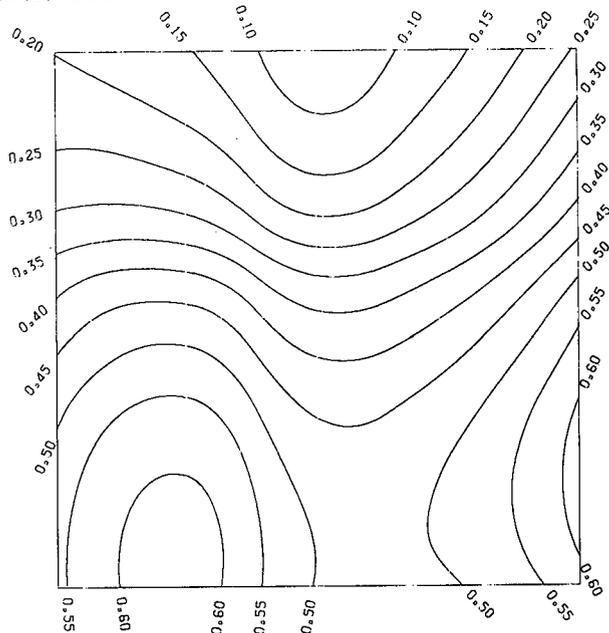


Figura 9. Resultados del interpolante *DQP*, con el mismo test de la figura 8. Factor  $kp=10$ .

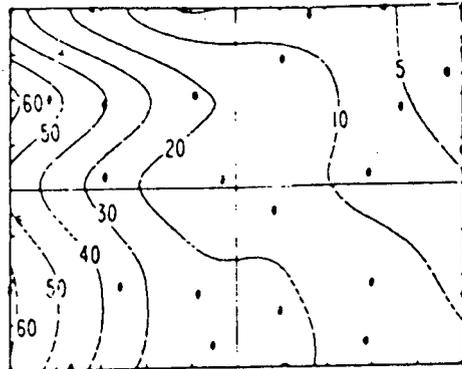
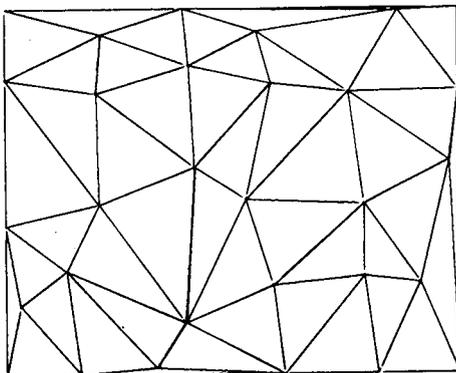


Figura 10. Datos del test de Akima, Triangularización del dominio y contornos de nivel de la superficie real.

Para la comparación entre algoritmos que parten de puntos irregulares se ha utilizado el test de Akima, consistente en un conjunto de 30 puntos <sup>1</sup>. Su triangularización y los contornos de la superficie real se observan en la Figura 10.

Por lo que respecta al método basado en la obtención de valores en una malla rectangular, se ha considerado siempre  $n=m$  y se han realizado tres pruebas con  $n=6$ ,  $n=8$  y  $n=10$ . (En todos ellos,  $n.m > p=30$ ). La Tabla I presenta el comportamiento de la superficie bicúbica interpolante, en función del factor de ponderación  $\lambda$ . En ella se analiza la norma del vector  $Bf-z$  —que indica el error que se comete en la interpolación de los puntos iniciales mediante la superficie bicúbica—, el valor  $\alpha(f)$  —cuanto más pequeño, más suave es la superficie final— y la condición de la matriz en la resolución del sistema lineal —valores muy elevados significan matrices mal condicionadas—.

TABLA I

Comportamiento de la Superficie Interpolante

	$\lambda$	$\ Bf-z\ $	$f^t M f$	<i>cond</i>
Malla de 10 x 10 puntos	$10^{-4}$	0.01	1980	49978
	$10^{-3}$	0.09	1965	5432
	$10^{-2}$	0.86	1830	696
	$10^{-1}$	6.3	1066	596
	0.5	17	252	626
	0.9	30	23	3882
Malla de 8 x 8 puntos	$\lambda$	$\ Bf-z\ $	$f^t M f$	<i>cond</i>
	$10^{-4}$	0.016	3574	32535
	$10^{-2}$	1.5	3105	1145
	$10^{-1}$	9	1398	619
	0.5	21.2	270	1355
	0.9	33	17.4	5005
Malla de 6 x 6 puntos	$\lambda$	$\ Bf-z\ $	$f^t M f$	<i>cond</i>
	$10^{-4}$	0.08	13911	26625
	$10^{-2}$	4.85	7871	180
	$10^{-1}$	15.4	1869	113
	0.5	27	277	546
	0.9	36.6	11	2739

Tabla 1. Obtención de una malla rectangular a partir de puntos irregulares.

De la tabla anterior puede concluirse;

- Que como es lógico, los valores  $\|Bf-z\|$  y  $f^t M f$  tienen comportamientos contrarios: En cualquier malla, para valores pequeños de  $\lambda$  se obtienen superficies que interpolan con gran aproximación los puntos dato (valores pequeños de  $\|Bf-z\|$ ), pero

que son poco suaves (valores elevados en  $f^tMf$ ); en cambio, los valores elevados de  $\lambda$  producen el efecto contrario.

- Que al aumentar el número de puntos de la malla y con ello el número de grados de libertad en el cálculo de  $F_{ij}$ , se consiguen errores y factores de suavidad más bajos. No obstante, el resultado ya es aceptable incluso con una malla de 36 puntos (compárense las Figuras 11 y 13).
- Que los resultados más aceptables se consiguen con valores pequeños de  $\lambda$ , Figuras 11 y 13.

El error cuadrático  $\|Bf-z\|$  en el caso de  $\lambda = 0.9$  es tan elevado que la superficie ha dejado de parecerse por completo a la teórica. En cambio, el elevado peso que se concede a  $f^tMf$  produce una gran suavidad en la superficie: se va tendiendo al plano de regresión de los puntos. Figura 12.

- La condición de la matriz <sup>12</sup>, aunque más elevada en los casos de  $\lambda$  reducida, se mantiene dentro de los límites aceptables.

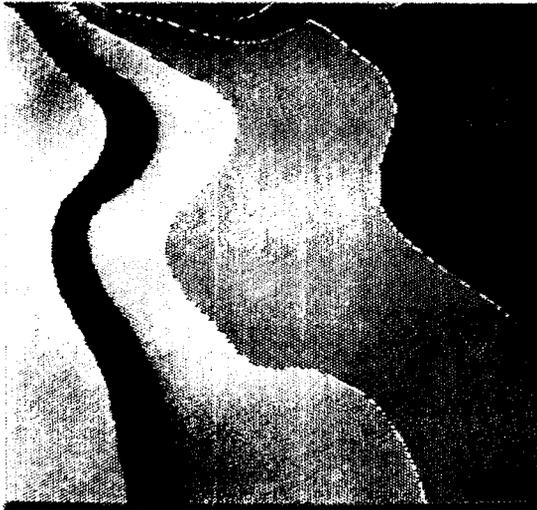


Figura 11. Conversión a malla rectangular.  
Contorno de Adima con 10 x 10  
puntos y factor  $\lambda = 0.0001$ .

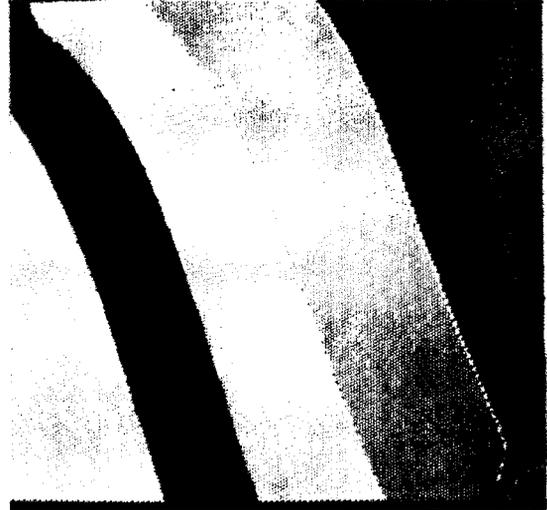


Figura 12. Conversión a malla rectangular.  
Contornos del test de Akima con 10 x 10  
puntos y factor  $\lambda = 0.9$ .

Con el mismo test de Akima, el método de Shepard triangular proporciona el mapa de Figura 14 donde se observa una buena similitud con los contornos de la superficie real (en Figura 10). Como era de esperar, este método produce superficies muy suaves que se adaptan mejor a cambios bruscos de las alturas de los puntos-dato que los obtenidos con los métodos locales de interpolación y con un notable mejor comportamiento en las zonas periféricas del mapa. Sin embargo, el corte computacional del proceso de interpolación aumenta rápidamente con el número de datos <sup>9</sup>, siendo obligado acudir a los métodos locales cuando éste es elevado.

Los resultados del test de Akima para los métodos de Powell y Sabin y de Clough y Power se ilustran en Figuras 15 y 16 respectivamente. En ambos casos se utilizó un mismo procedimiento de evaluación de las primeras derivadas parciales de la superficie representada en los puntos dato basado en el método de Little <sup>17</sup>. Como consecuencia, las diferencias entre los dos mapas son poco importantes (al igual que sucede entre los

métodos *AQP* y *SCL*), aunque pueden observarse mayores oscilaciones de los contornos en el método de Powell y Sabin (compárense, por ejemplo, los contornos de cota

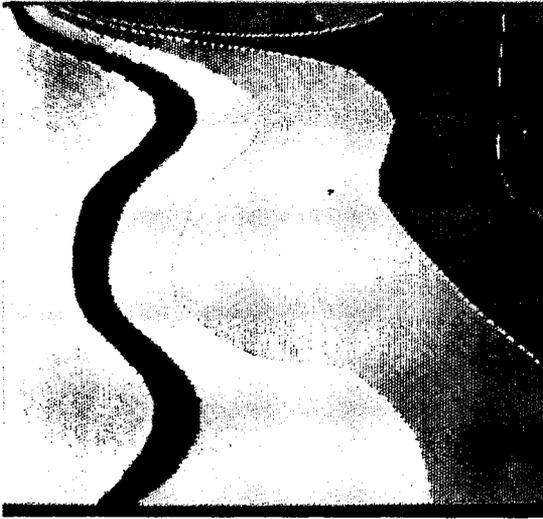


Figura 13. Conversión a malla rectangular. Contornos del test de Akima, con malla de 6 x 6 puntos y factor  $\lambda = 0.0001$ .

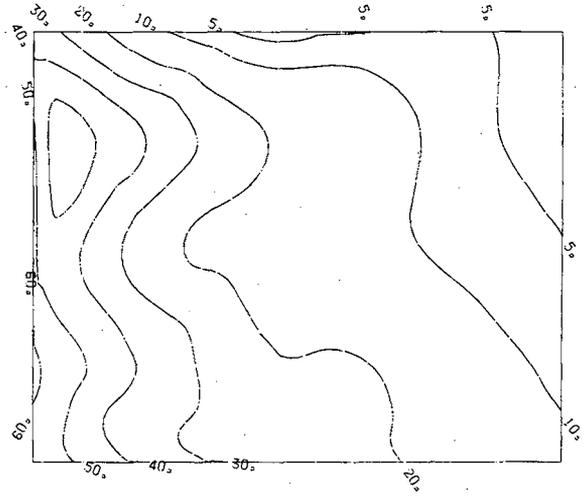


Figura 14. Contorno de nivel obtenidos con el método Shepard triangular. Factor  $kp=50$ .

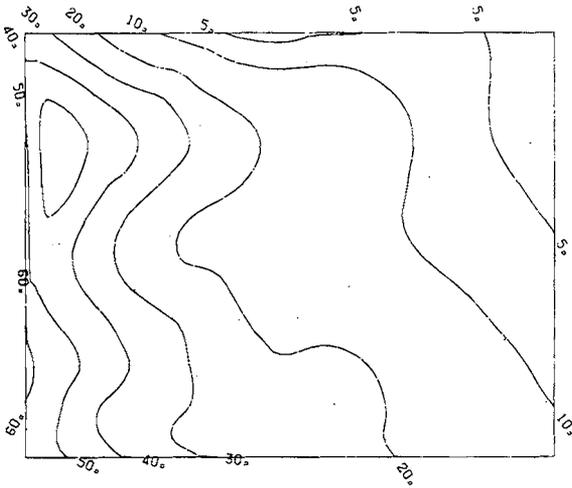


Figura 15. Resultados obtenidos con el interpolante de Powell y Sabin.

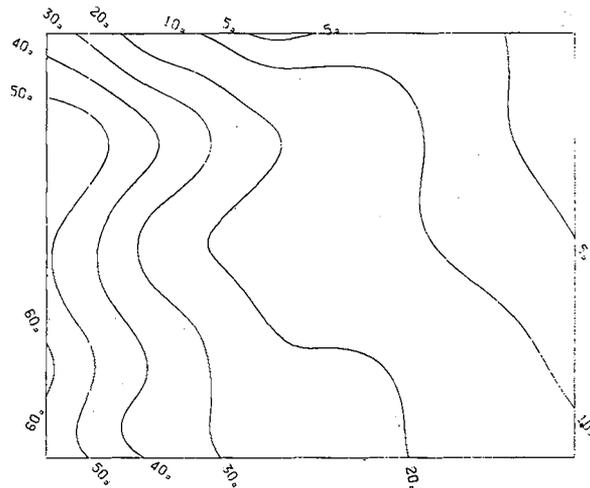


Figura 16. Contornos resultantes con el interpolante de Clough y Tocher. Factor  $kp=15$ .

20). Asimismo, se aprecian problemas de precisión de ambos interpolantes en las zonas periféricas de los mapas, lo que es debido a una falta de información de la superficie: mientras que un nodo interno del conjunto de puntos-dato se dispone de alturas de la superficie en puntos a su alrededor, en los nodos de la periferia existe un sector de al menos  $180^\circ$  donde se carece de esta información. Este problema de precisión aparece, también, en los métodos globales como el de Shepard triangular (véase la zona inferior-derecha de Figura 14), pero se acentúa en los esquemas locales de interpolación como consecuencia del carácter local de la superficie y la falta de fiabilidad en los procesos de

estimación de las derivadas parciales e interpolación (especialmente, por las formas alargadas de muchos de los triángulos en estas zonas). La comparación de los tiempos de ejecución de estos algoritmos <sup>9</sup> es favorable para el método de Powell y Sabin si se desea una muy buena precisión en el dibujo, debido al empleo de un algoritmo de cálculo directo de los contornos (una vez determinados los tramos de las secciones cónicas interiores a un triángulo el cálculo de los puntos de ellas es inmediato a partir de sus ecuaciones paramétricas).

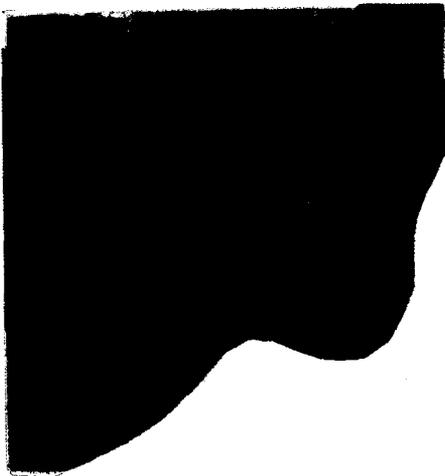


Figura 17. Contornos obtenidos con el método de interpolación quintica por Akima.

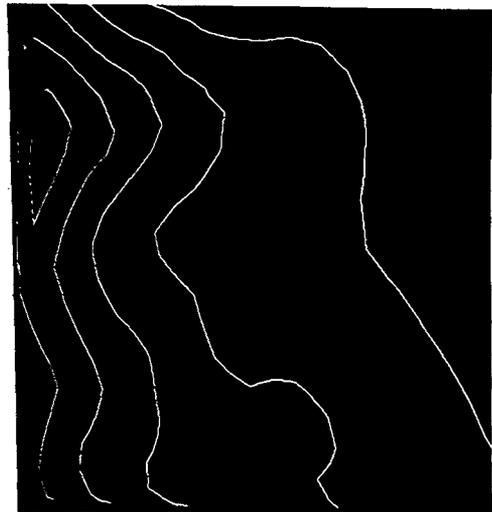


Figura 18. División recursiva de la malla triangular. Dos niveles de recursividad.



Figura 19. División recursiva de la malla. Número de niveles de recursividad igual a tres.

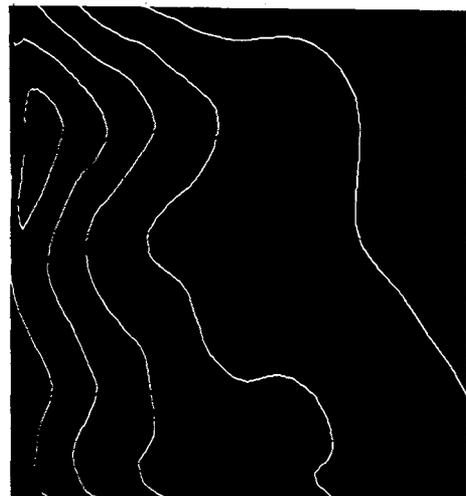


Figura 20. División recursiva de la malla triangular. Cuatro niveles de recursividad.

El método de interpolación por superficies quinticas de Akima, Figura 17, genera contornos de calidad comparables a los obtenidos con el método de Shepard triangular. La complejidad del algoritmo de interpolación es menor, al ser el único método local que no debe subdividir los triángulos de la triangularización. Sin embargo, se complica considerablemente el algoritmo de estimación de derivadas parciales, al ser preciso trabajar con las de segundo orden. Finalmente, con el método de subdivisión recursiva, se obtiene un resultado tanto más preciso cuanto mayor es la profundidad de la recursividad utilizada en la triangulación (profundidad 2 Figura 18, profundidad 3 Figura 19, profundidad 4, Figura 20). La precisión es satisfactoria, si se comparan con los resultados obtenidos por el propio Akima con su método. Tanto en el método de Akima como en el recursivo hay que observar la aparición de un máximo relativo que en la superficie auténtica no se presenta y, además, un cambio de curvatura de las líneas de nivel en los lados extremos de la figura que tampoco corresponde a la superficie. La aparición de estas oscilaciones es debida al procedimiento seguido para la estimación de las derivadas en los vértices; se parte de la información de las pendientes de los triángulos próximos al vértice estudiado, y esta información es deficitaria en los vértices de las fronteras del dominio estudiado.

Un aumento del grado de recursividad deseado no elimina totalmente estas alteraciones. En general, es conveniente aumentar la precisión deseada hasta lograr que en las zonas del dibujo no afectadas por las mencionadas oscilaciones marginales los contornos tengan un aspecto suave sin "queiebros" en las curvas dibujadas. Por otra parte, la suavidad obtenida es correcta y mejor que en el método de Akima.

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han presentado y discutido un conjunto de algoritmos utilizables para la representación de superficies mediante contornos de nivel.

Por lo que respecta a los dos algoritmos expuestos que tratan mallas rectangulares (splines bicúbicos y superficies formadas por trozos bicuadráticos), puede concluirse que no existen apenas diferencias en las representaciones que se obtienen. Son algoritmos robustos que producen salidas similares siempre que las derivadas parciales estimadas no sean elevadas.

Por otra parte, comparando los resultados obtenidos con los esquemas de interpolación a puntos irregularmente distribuidos, se puede concluir que el paso a malla rectangular da resultados aceptables —que mejoran al aumentar el número de puntos de la malla rectangular— siempre que la distribución de los puntos dentro de ésta sea suficientemente regular. En cuanto a los métodos basados en una triangularización inicial, se obtienen mejores resultados, en cuanto a suavidad de los contornos y precisión de la superficie de interpolación, utilizando el esquema global Shepard Triangular. Así, en el test de Akima se observa, por un lado, una variación más suave de los contornos de nivel, y por otra parte una gran similitud del interpolante con la superficie real. En cuanto a los demás esquemas, la aproximación quintica de Akima da resultados aceptables, aunque en el proceso de cálculo es más laborioso al tener que estimar y utilizar las segundas derivadas parciales. Por otra parte, los contornos de nivel obtenidos con el esquema *C & T* son, en general, más suaves que los correspondientes al esquema *P & S* (en este último, la superficie es más discontinua al poseer un mayor número de pedazos triangulares).

Finalmente el método de división recursiva de la triangulación proporciona una figura de contornos suaves y que se adaptan bien a la superficie de control; su inconveniente en cambio, es su gran sensibilidad a los errores de estimación de las derivadas en los puntos de la triangulación inicial.

## ANEXO

**Obtención de valores en una malla rectangular.****Enunciado del problema:**

Dado un conjunto de puntos  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i=1 \dots p$  y dos valores  $n, m$  tales que  $n \cdot m > p$ , obtener una matriz de valores  $F_{ij}$  en una malla rectangular  $[x_k] \times [y_l]$ ,  $k=1 \dots n$ ,  $l=1 \dots m$  tal que el dominio  $[x_1, x_n] \times [y_1, y_m]$  contenga todos los puntos  $(x_i, y_i)$ , de forma que el spline bicúbico formado a partir de  $F_{ij}$ ,

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{ij} \cdot C_i(x) \cdot C_j(y)$$

interpole los  $p$  puntos iniciales dados.

**Solución:**

Imponiendo que el spline bicúbico ha de interpolar los puntos iniciales,

$$z_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{ij} \cdot C_i(x_k) \cdot C_j(y_k) = \sum_{l=1}^N f_l \cdot B_{kl}, \quad k=1 \dots p$$

donde  $N=n \cdot m$ , el vector  $\mathbf{f} = \{f_1 \dots f_N\}$  contiene todos los elementos de la matriz  $\mathbf{F}_{ij}$ , y la matriz  $\mathbf{B}$  de  $p \times N$  se define a partir de los splines cardinales unidimensionales,

$$B_{kl} = C_i(x_k) \cdot C_j(y_k)$$

$$\text{con } i, j \text{ tales que } f_l = F_{ij}$$

Los elementos de la matriz  $\mathbf{B}$  son constantes que dependen de la situación de los  $P$  puntos iniciales, así como de la situación de la malla rectangular.

El sistema lineal  $\mathbf{Z}_k = \sum f_l \cdot B_{kl}$  (o bien  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{Z}$ ) no posee, en general, una solución única al ser  $N=n \cdot m > p$ . Por ello, entre todos los posibles vectores solución  $\mathbf{f}$ , se escoge el que minimiza el funcional,

$$\alpha(\mathbf{f}) = \sum_i \sum_j [2F_{ij} - F_{i-1,j} - F_{i+1,j}]^2 + \sum_i \sum_j [2F_{ij} - F_{i,j-1} - F_{i,j+1}]^2$$

$\alpha(\mathbf{f})$  contiene, para cada punto de la malla rectangular, los cuadrados de las diferencias segundas de  $F$  en las direcciones coordenadas; por tanto, se impone la minimización de la aproximación en diferencias finitas de la curvatura de las líneas isoparamétricas en los puntos de la malla, y es de esperar que la superficie interpolada tenga un comportamiento suave y poco oscilatorio. En particular,  $\alpha(\mathbf{f})=0$  si los valores  $F_{ij}$  se han tomado de una superficie plana.

Operando, es inmediato observar que  $\alpha(\mathbf{f})$  puede expresarse en forma matricial,

$$\alpha(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^t \mathbf{M} \mathbf{f}$$

donde  $\mathbf{M}$  es una matriz de  $N \times N$ , simétrica y semidefinida positiva, que puede calcularse fácilmente a partir del conocimiento de  $N = n \cdot m$ .

Para obtener el vector  $\mathbf{f}$  que minimiza  $\mathbf{f}^t \mathbf{M} \mathbf{f}$  con la restricción  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{z}$ , y con el fin de evitar las matrices mal condicionadas que aparecen a menudo cuando se utilizan en este caso los multiplicadores de Lagrange, parece más conveniente minimizar directamente el funcional,

$$\omega(\mathbf{f}) = \lambda \cdot \mathbf{f}^t \mathbf{M} \mathbf{f} + (1 - \lambda) (\mathbf{B} \mathbf{f} - \mathbf{z})^T (\mathbf{B} \mathbf{f} - \mathbf{z})$$

donde  $\lambda$  es un parámetro que puede ajustarse entre 0 y 1. Para valores de  $\lambda \approx 0$ , se da más importancia a que la norma del vector  $\mathbf{B} \mathbf{f} - \mathbf{z}$  sea pequeña, y por tanto a que la superficie interpole exactamente los puntos dados; en cambio, para valores de  $\lambda$  más elevados, se minimiza  $\alpha(\mathbf{f})$  a costa, en algunas ocasiones de no interpolar los puntos. No obstante, la minimización de  $\omega(\mathbf{f})$  proporciona siempre un vector solución  $\mathbf{f}$ , aunque la malla rectangular haya sido mal escogida y el sistema  $\mathbf{B} \mathbf{f} = \mathbf{z}$  sea incompatible.

Definiendo la matriz  $\mathbf{H}$  y el vector  $\mathbf{g}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \lambda \mathbf{M} + (1 - \lambda) \mathbf{B}^t \mathbf{B} \\ \mathbf{g} &= (1 - \lambda) \mathbf{B}^t \mathbf{z} \end{aligned}$$

el vector  $\mathbf{f}$  que minimiza  $\omega(\mathbf{f})$  es la solución del sistema lineal de dimensión  $N$ ,

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{g}$$

Por tanto, la obtención de la matriz  $F_{ij}$  de valores en una malla rectangular posee una complejidad  $O(N^3/3)$ . En una segunda fase, el cálculo de valores interpolados de la superficie se realiza ya con la fórmula clásica de los splines bicúbicos,

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{ij} \cdot C_i(x) \cdot C_j(y)$$

#### REFERENCIAS

1. H. Akima, "A method of Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting for Irregularly Distributed Data Points", *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 4, n.º 2, June (1978).
2. W. Boehm, G. Farin y J. Kahmann, "A survey of Curve and Surface Methods in CAGD" *Computer-Aided Geometric Design*, Vol. 1, p.p. 1-60, (1984).
3. P. Brunet, y Ll. Pérez Vidal, "Smooth Contour Line Construction with Spline Interpolation", *Questiio*, Vol. 8, n.º 3, Setembre, (1984).
4. P. Brunet, "Construcción de curvas y Superficies. Principios Matemáticos y Aplicaciones", *Novática*, Vol. 8, n.º 47-48, (1982).
5. P. Brunet, "La Interpolación amb Funcions Spline: Introducció Automática de les Condicions d'Extrem", *Questiio*, Vol. 6, n.º 4, Desembre (1982).
6. P. Brunet, D. Ayala y I Navazo, "An interactive Algorithm for the Generation of B-spline Surfaces" *Proc. of the ICS-83*, Nuremberg (1983).
7. P. Brunet, "On Surface Representation From Irregularly Distributed Data Points", *TSI*, Vol. 2, n.º 2, (1983).
8. P. Brunet, "Increasing the Smoothness of Bicubic Spline Surfaces". In Proc. of the Second Meeting on Surfaces in *Computer Aided Geometric Design*, North-Holland (1985).
9. F.J. Carrasco, "Estudio Comparativo de Algoritmos de generación de Contornos de Nivel", *Informe de Recerca*, DMI02-85, ETSEIB, (1985).

10. P.R. Cockrell, "A new General Purpose Method For Large Volume Production of Contour Charts", *Computer Graphics Forum*, Vol. 2, n.º 1, (1983).
11. G. Farin, "Smooth Interpolation to Scattered 3d Data", Surfaces in *Computer Geometric Design*, North Holland, (1983).
12. Forsythe, Malcom, Moler, "*Computer Methods for Mathematical Computations*", Prentice-Hall, (1977).
13. G. Hegron, "Algorithmes Elementaires de Decoupage et Traitements de Nature Geometric pour la Production d'Images par Ordinateur", Institut de Mathematiques et d'Informatique - *Université de Nantes*, Janvier (1983).
14. N. Jared y T. Varady, "Synthesis of Volume Modelling and Sculptured Surfaces in BUILD", *Proceedings of CAD'84*, Brighton.
15. C.L. Lawson, "*Software for  $C^1$  Interpolation*", Mathematical Software III, Ed. by J.R. Rice, (1977).
16. F.F. Little, "Convex Combination Surfaces", Surfaces in *Computer Aided Geometric Design*, North Holland, (1983).
17. G.M. Nielson y R. Franke, "Surface Construction Based upon Triangulations", Surface in *Computer Aided Geometric Design*, N.H. (1983).
18. M.J.D. Powell y M.A. Sabin, "Piecewise Quadratic Approximations on Triangles", *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 3, n.º 4, December, (1977).
19. D. Rogers, J. Adams, "*Mathematical Elements for Computer Graphics*" Mc. Graw-Hill, (1976).
20. D. Rogers, "*Procedural Elements for Computer Graphics*", (1985).
21. M.A. Sabin, "Contouring - A Review of Methods for Scattered Data", *Mathematical Methods in Computer Graphics and Design*, Ed. by K.W. Brodli Ac. Press, (1980).
22. S.G. Satterfield, D.F. Rogers, "A Procedure For Generating Contour lines from a B-Spline Surface", *IEEE Computer Graphics and Appl.*, April, (1985).
23. D. Shepard, "A two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data", Proc. 23rd Nat. Conf. ACM, (1968).
24. D.C. Sutcliffe, "Contouring over Rectangular and Skewed Rectangular Grids - An Introduction", *Mathematical Methods in Computer Graphics and Design*, Ed. by K.W. Brodli Ac. Press, (1980).