

## EL METODO DE GLIMM

GUILLERMO MARSHALL\*+

y

ANGEL MENENDEZ+

*Centro de Cálculo Científico  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
1429 Buenos Aires*

*Laboratorio de Hidráulica Aplicada - INCYTH  
Casilla de Correo 21  
1802 Aeropuerto Ezeiza*

### RESUMEN

En contraste con otros métodos numéricos tales como diferencias finitas o elementos finitos, el método de Glimm resuelve las ondas de choque y otras discontinuidades con relativa facilidad y sin necesidad de adicionar términos de viscosidad artificial. Desafortunadamente la literatura existente sobre dicho método es, en general, difícil de entender por aquellos que encaran su estudio por primera vez. Trataremos aquí de presentar una introducción sencilla del método de Glimm y sus principales aplicaciones.

### SUMMARY

Contrarily to other numerical methods such as finite differences or finite elements, the Glimm's Method resolves impact waves or other discontinuities with relative facility and without being necessary to add artificial viscosity terms. Unfortunately, the existing literature on this method is, in general, difficult to understand for those who study it for the first time. Here, we shall try to present a simple introduction on the Glimm's Method and its principal applications.

### INTRODUCCION Y CONSIDERACIONES GENERALES

Glimm<sup>2</sup> introdujo un método aproximado para la construcción de la solución de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. Esta construcción es la base para su elegante teorema de existencia. A partir de entonces hubo numerosas tentativas, sin éxito aparente, de utilizar dicha construcción como una herramienta computacional, ya que se intuía su utilidad para cierto tipo de problemas. Una década después Chorin<sup>1</sup> presenta los primeros resultados computacionales exitosos basados en la construcción de Glimm para problemas de dinámica de gases. Desde entonces se realizaron gran cantidad de trabajos y lo que se dió en llamar el método de Glimm (o el método de la

Recibido: Octubre 1985

\* Consejo Nacional de Investigaciones.

+ Universidad de Buenos Aires.

elección aleatoria o el método del muestreo uniforme) resultó ser una técnica de gran precisión en el tratamiento numérico de problemas con discontinuidades.

El método de Glimm consiste, en esencia, en realizar un muestreo estadístico de soluciones teóricas locales de problemas de Riemann. El poder de esta técnica radica en que las soluciones teóricas locales contienen información extensiva sobre el fenómeno de interacción elemental de ondas, y el muestreo estadístico evita la aparición de la viscosidad numérica típica de los métodos de diferencias finitas y elementos finitos. En particular, el método de Glimm permite el tratamiento automático de la formación espontánea y la evolución de discontinuidades (típicas de sistemas hiperbólicos no lineales).

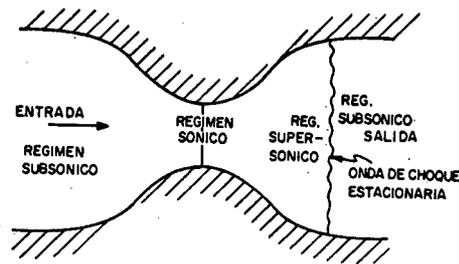


Figura 1.1. Flujo de un gas en una tobera convergente-divergente.

A continuación, se discuten brevemente algunos problemas físicos para los cuales el método de Glimm es especialmente útil. La Figura 1.1 muestra el flujo estacionario de gas en una tobera. Debido a las variaciones del área transversal existen cambios en el régimen de movimiento. En la zona divergente de la tobera se produce (por efecto de las condiciones a la salida) una transición entre los regímenes supersónico y subsónico a través de una onda de choque. El problema de una explosión se ilustra en la Figura 1.2.

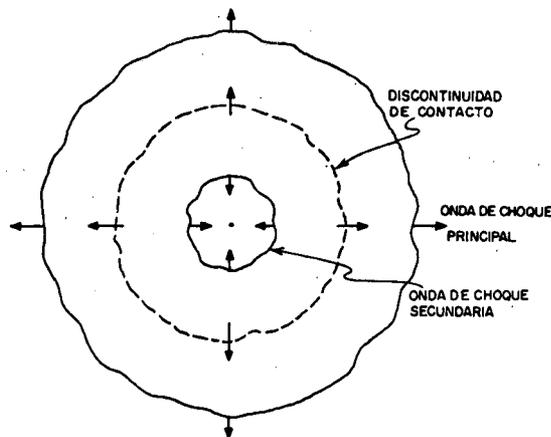


Figura 1.2. Problema de la explosión en atmósfera libre.

Inicialmente se tiene una zona de alta presión en el interior de una esfera de radio pequeño. En el proceso de igualación de presiones, se produce una onda de choque principal que se aleja del origen, una discontinuidad de contacto que avanza en la misma dirección y una onda de choque secundaria que se mueve en sentido contrario. Esta última es un “efecto de la curvatura”. Otro problema de interés en dinámica de gases es el de la difracción de ondas de choque. (Ver Figura 5.1).

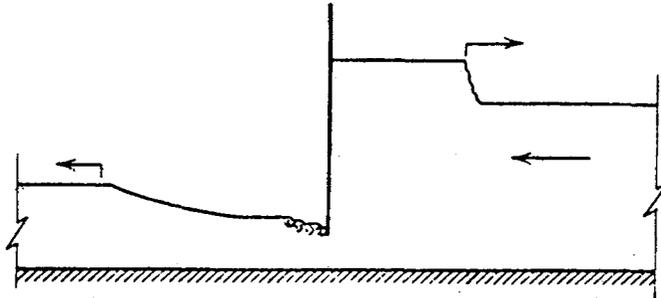


Figura 1.3. Onda de frente abrupto generada por el cierre parcial de una compuerta.

También en hidráulica existen problemas aptos para ser tratados por esta técnica. Tal es el caso del resalto hidráulico o de las ondas de frente abrupto generadas por la operación de compuertas (ver. Figura 1.3) o la rotura de una presa de embalse.

Finalmente el método de Glimm se utiliza exitosamente en la simulación del desplazamiento de un fluido bifásico en un medio poroso. Este problema se presenta, por ejemplo, en la recuperación secundaria y terciaria en reservorios de petróleo.

## EL METODO DE GLIMM. INTRODUCCION

La forma general de las ecuaciones a resolver por el método de Glimm es la siguiente:

$$W_t + F(W)_x + G(W,x) = 0 \quad (2.1)$$

donde  $F(W)$  es una “densidad de flujo” y  $G(W)$  un “término fuente”. Se introducirá el método aplicándolo a la ecuación de onda escalar (homogénea) caracterizada por:

$$W = u \quad ; \quad F(W) = au \quad ; \quad G(W,x) = 0 \quad (2.2)$$

donde  $a = \text{constante}$ . A partir de dadas condiciones iniciales, el método de Glimm construye la solución por medio de una sucesión de dos pasos fraccionarios de igual extensión. En el instante de tiempo  $t_n = nk$  ( $k$  es el intervalo temporal de discretización), la solución  $u(x, t_n)$  se aproxima por una serie de estados constantes que se extienden sobre intervalos de longitud  $h$ , tal cual se ilustra en la Figura 2.1. Utilizando como valor inicial esa función continua a trozos, se construye la solución teórica de la ecuación (2.1), entre  $t_n$  y  $t_{n+1/2}$ . Esta solución teórica surge de superponer las soluciones locales a los sucesivos “problemas de Riemann” (uno para cada punto  $x_{i+1/2} = (i + 1/2)h$ ). El proble-

ma de Riemann para la ecuación (2.1) queda definido por las siguientes condiciones iniciales:

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1 = \text{const. para } x < 0 \\ u_2 = \text{const. para } x > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Si  $u_2 \neq u_1$ , las condiciones (2.3) corresponden a una discontinuidad inicial. La solución de este problema de Riemann es trivial: la discontinuidad se traslada, sin deformarse, a lo largo de la curva característica con pendiente  $dx/dt = a$  que pasa por  $x = 0$ . Esto determina las soluciones locales, si se asocia  $u_1$  y  $u_2$  con  $u_i^n$  y  $u_{i+1}^n$ , respectivamente, para cada valor de  $i$ . La construcción de la solución numérica para  $t_{n+1/2}$ , es decir, la determinación de los valores de  $u$  a ser asignados a cada nodo  $x_{i+1/2}$ , se realiza por medio de un muestreo estadístico de la solución teórica  $u(x, t_{n+1/2})$ , dentro de cada intervalo espacial  $[ih, (i+1)h]$ . Esto significa tomar

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = u(X_i, t_{n+1/2}) \quad (2.4)$$

donde  $X_i = (i+1/2 + \theta_i/2)h$ , siendo  $\theta_i$  un número generado al azar en el intervalo  $[-1,1]$ . Entonces,

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} u_{i+1}^n & \text{si } \theta_i h > ak \\ u_i^n & \text{si } \theta_i h < ak \end{cases} \quad (2.5)$$

tal cual se observa en la Figura 2.2

Mediante un procedimiento idéntico se avanza la solución desde  $t_{n+1/2}$  hasta  $t_n$ , centrándose nuevamente la solución numérica en nodos con índice entero  $i$ .

Lógicamente, la superposición de las soluciones de los problemas de Riemann correspondientes a cada nodo, puede llevarse a cabo siempre y cuando las discontinuidades no interactúen entre sí. Esto implica que debe verificarse la condición de Courant-Friedrichs-Lewy

$$\frac{h}{k} > |a| \quad (2.6)$$

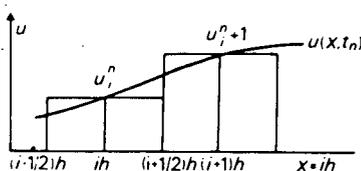


Figura 2.1. Aproximación de  $u(x, t_n)$  por una función constante a trozos.

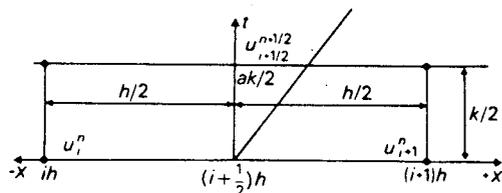


Figura 2.2. Solución del problema de Riemann para la ecuación (2.1)-(2.2).

Una idea de la bondad del método la brinda la siguiente comparación. De acuerdo a la solución teórica del problema, cualquier discontinuidad inicial se desplazará, luego de un tiempo  $T$ , una distancia  $X = aT$  respecto de su posición inicial, sin deformarse. La correspondiente distancia  $X_n$  calculada por el método de Glimm puede expresarse como

$$X_n = \sum_{j=1}^{2n} \eta_j \quad (2.7)$$

donde  $n = T/k$  y  $\eta_j$  son variables aleatorias independientes, pero idénticamente distribuidas, con una densidad de probabilidad que, de acuerdo a la Figura 2.2, está dada por

$$\begin{aligned} \text{Prob} [\eta_j = -h/2] &= \frac{h-ak}{2h} \\ \text{Prob} [\eta_j = h/2] &= \frac{h+ak}{2h} \end{aligned} \quad (2.8)$$

De las ecuaciones (2.7) y (2.8) surge que el valor esperado y la varianza de  $X_n$  son, respectivamente,

$$\begin{aligned} E[X_n] &= aT \\ \text{Var}[X_n] &= \frac{k}{a}(q^2 - a^2)T \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde  $q = h/k$ . Se observa que el valor esperado coincide exactamente con la solución teórica. Es más, la ecuación (2.5) muestra que la propagación se realiza sin deformación. Es decir que este método no produce atenuación ni dispersión numéricas, a diferencia de los métodos numéricos dependientes de la malla de discretización, tal como diferencias finitas. Finalmente se ve que, para  $q$  y  $T$  fijos,  $\text{Var}[X]$  tiende a cero para  $k$  tendiendo a cero, lo cual prueba la convergencia del método.

Chorin<sup>1</sup> desarrolló las estrategias para la elección de los valores de  $\theta_i$ , que resultaron cruciales para el éxito del método como herramienta de predicción. En primer lugar, Chorin introdujo la idea de elegir  $\theta_i = \theta = \text{const.}$  para cada paso de tiempo, lo cual evita la aparición de estados constantes espúrios. En segundo lugar, propuso dividir el intervalo  $[-1,1]$  en  $m_2$  subintervalos ( $m_2 < n$ ) y elegir el valor de  $\theta$  para cada paso de tiempo en cada uno de los subintervalos  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m_2$ ) de acuerdo a la fórmula  $n_{i+1} = (m_1 + n_i) \bmod m_2$ , donde  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ) son enteros primos y  $n_0$  ( $n_0 < m_2$ ) es arbitrario. Este procedimiento reduce considerablemente la varianza de la solución (respecto, por ejemplo, del valor dado por la ecuación (2.9)). Una leve modificación de esta estrategia es especialmente efectiva para tener en cuenta las condiciones de borde: los subintervalos se separan en dos grupos, de acuerdo a si pertenecen al semi-intervalo  $[-1,0]$  o al  $[0,1]$ , y los sucesivos valores de  $\theta$  se eligen alternadamente en cada grupo.

La Figura 2.3 muestra resultados numéricos para la evolución de una discontinuidad, obtenidos con distintos valores de  $m_1$  y  $m_2$ . Se observa el carácter estadístico de la

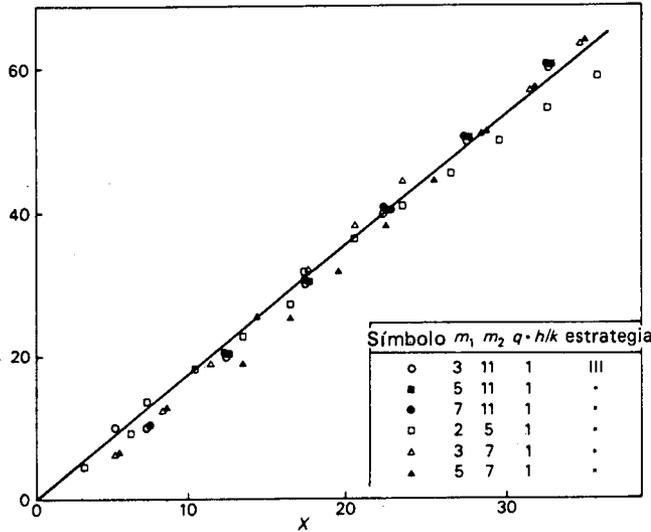


Figura 2.3. Evolución de una discontinuidad, calculada por el método de Glimm.

solución numérica. En efecto, la posición calculada de la discontinuidad fluctúa alrededor del valor exacto. Los valores óptimos de  $m_1$  y  $m_2$  parecerían ser, de entre los probados,  $m_1 = 5$  y  $m_2 = 11$ . Estos son los utilizados por los autores en los cálculos posteriores.

La extensión natural del método de Glimm para resolver ecuaciones inhomogéneas consiste en hallar la solución teórica del correspondiente problema de Riemann. Como esto puede ser, en general, complicado o, incluso, imposible Marshall y Menéndez<sup>7</sup> introdujeron la idea de utilizar la idea de utilizar la solución teórica aproximada a primer orden en  $k$ . Este procedimiento se ilustrará con la ecuación escalar caracterizada por

$$W = u \quad ; \quad F(W) = u^2/2 \quad ; \quad G(W,x) = bu \tag{2.10}$$

donde  $b = \text{constante} > 0$ . La ecuación (2.1) – (2.10) puede ser reescrita en forma característica como

$$\frac{du}{dt} = -bu \quad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} = u \tag{2.11}$$

La solución al problema de Riemann para la ecuación (2.11) se muestra cualitativamente en la Figura 2.4. Como resultado de la no linealidad de la ecuación, la discontinuidad inicial se transforma en una onda simple centrada. Si  $u_1 < u_r$ , la onda simple es una onda de rarefacción; si  $u_1 > u_r$ , es una onda de choque que se propaga con la velocidad

$$S = \frac{1}{2}(u_1 + u_r) e^{-bt} \tag{2.12}$$

La integración de la ecuación (2.11) puede aproximarse por

$$u(x(k),k) = (1 - bk) u_0 + o(k^2) \tag{2.13}$$

$$x(k) = x(0) + u_0 k + o(k^2) \tag{2.14}$$

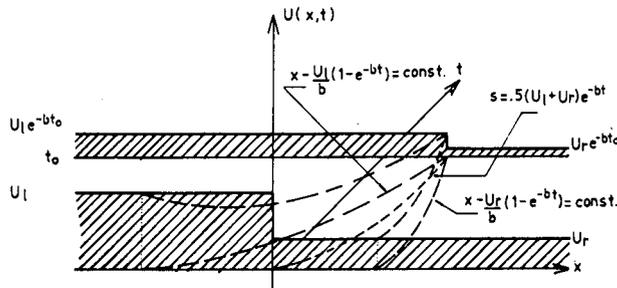
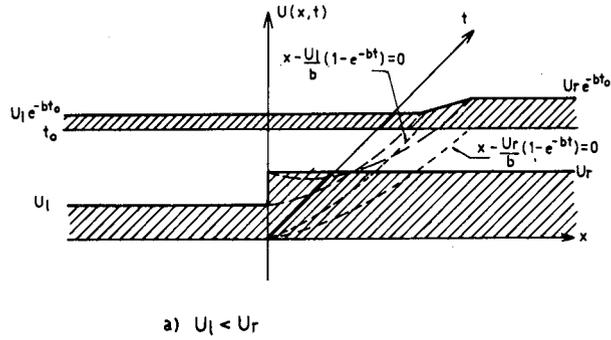


Figura 2.4. Solución del problema de Riemann para la ecuación (2.1) - (2.10)

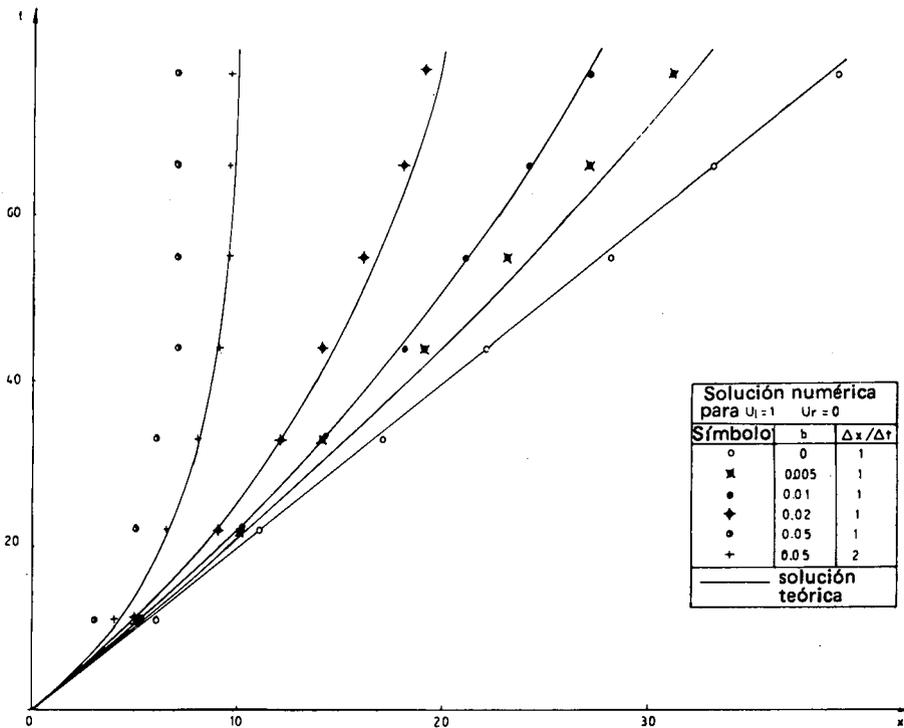


Figura 2.5. Evolución de una onda de choque, calculada por el método de Glimm.

donde  $u_0 = u(x(0), 0)$ . La ecuación (2.13) muestra que tomar  $k = 0$  es equivalente a tomar  $b = 0$ . Esto significa que  $u_0$  coincide con la solución de la ecuación homogénea, que es conocida. Más aún, de la ecuación (2.14) surge, entonces, que las curvas características coinciden, a primer orden en  $k$ , con las correspondientes a la ecuación homogénea, que también son conocidas. Con esta información, la solución  $u(x, k)$  puede calcularse para cualquier valor dado de  $x$ .

Resultados numéricos obtenidos con esta metodología para el caso de propagación de una onda de choque se muestran en la Figura 2.5, para distintos valores de  $b$ . Se observa un buen acuerdo con la solución teórica.

Un procedimiento alternativo para tratar ecuaciones inhomogéneas fue propuesto por Sod<sup>9</sup>, consistente en una técnica de desdoblamiento de dos pasos. En el primer paso, el término inhomogéneo es removido y la ecuación homogénea resultante es resuelta por el método de Glimm. En el segundo paso, se resuelve por diferencias finitas la ecuación diferencial ordinaria resultante de considerar solamente el término inhomogéneo, es decir

$$W_t + G(W, x) = 0 \tag{2.15}$$

utilizando como condición inicial la solución obtenida en el paso anterior. Si bien para el presente ejemplo (ecuación (2.1) - (2.10)) ambos métodos son equivalentes, el método de Sod, aunque menos riguroso, resulta, en general, más simple que el propuesto por Marshall y Menéndez. Más aún, con la metodología de Sod es posible tratar sistemas de ecuaciones no estrictamente hiperbólicas. Tal es el caso, por ejemplo, del modelo para el desplazamiento unidimensional de un fluido bifásico inmiscible en un medio poroso, caracterizado por la ecuación (2.10), con

$$W = u ; F(W) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(1-u)^2} , G(W, x) = -[k(u)u_x]_x \tag{2.16}$$

donde  $u$  es la saturación de la fase mojanete,  $x$  y  $t$  las variables espacial y temporal, respectivamente,  $\alpha$  una constante y  $k(u)$  un coeficiente genérico de difusión que se supone "pequeño" (ver Laggiard y Marchall<sup>4</sup>). Las posibles soluciones al problema de Riemann correspondiente, tomando  $G(W, x) = 0$ , se muestran cualitativamente en la Figura 2.6. Debido a que  $F(W)$  no es convexa, la discontinuidad inicial evoluciona como una perturbación compuesta por una onda de choque y una de rarefacción.

Resultados numéricos para la evolución de una discontinuidad inicial se presentan en la Figura 2.7. Se observa como la presencia del término de difusión  $G(W, x)$  con  $k(u) \cong 0.017$  suaviza el frente de onda.

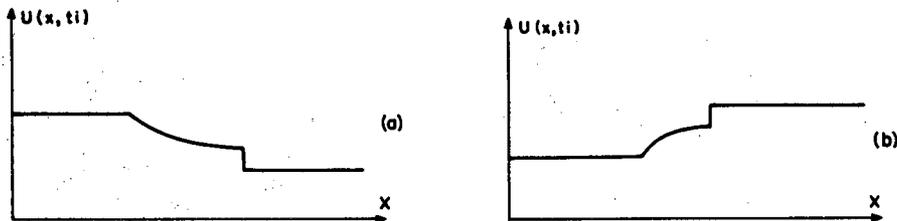


Figura 2.6. Solución de problema de Riemann para la ecuación (2.1) - (2.16) con  $G(W, x) = 0$ , a)  $u_1 > u_r$  y b)  $u_1 < u_r$ .

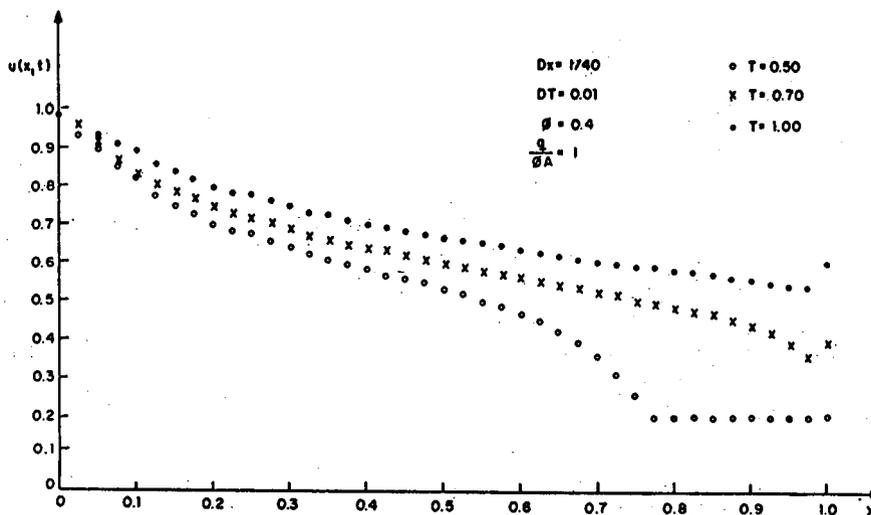


Figura 2.7. Evolución de una onda de choque con difusión calculada con el método de Glimm.

### FLUJO EN AGUAS POCO PROFUNDAS

Las ecuaciones unidimensionales para aguas poco profundas, o ecuaciones de Saint Venant, pueden expresarse de la forma (2.1), con

$$W = \begin{bmatrix} uh \\ h \end{bmatrix}, F(W) = \begin{bmatrix} u^2h + gh^2/2 \\ uh \end{bmatrix}, G(W,x) = \begin{bmatrix} -hR(W) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde  $u$  es la velocidad del agua,  $h$  la profundidad,  $g$  la aceleración de la gravedad y  $R(W)$  un término que representa los efectos de la fricción y la pendiente del fondo. Las coordenadas  $x,t$  adquieren ahora el significado habitual de espacio y tiempo. La aplicación del método de Glimm al sistema homogéneo (es decir, considerando  $G(W,x) \equiv 0$ ) fue realizada por Marshall y Menéndez<sup>5</sup>, utilizando la analogía con dinámica de gases. Más tarde, Marshall y Menéndez<sup>6</sup> desarrollaron la aplicación directa, que se discute brevemente a continuación.

La aplicación del método de Glimm a cualquier sistema hiperbólico requiere resolver el correspondiente problema de Riemann. Para el sistema (2.1) - (3.1), el problema de Riemann está caracterizado por las siguientes condiciones iniciales:

$$W(x,0) = \begin{cases} W_1 = \text{const. para } x < 0 \\ W_2 = \text{const. para } x > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

La solución de las ecuaciones (2.1) - (3.1) - (3.2) con  $G(W,x) \equiv 0$ , se ilustra en la Figura 3.1. La discontinuidad inicial se transforma en "ondas de depresión, y/u "ondas

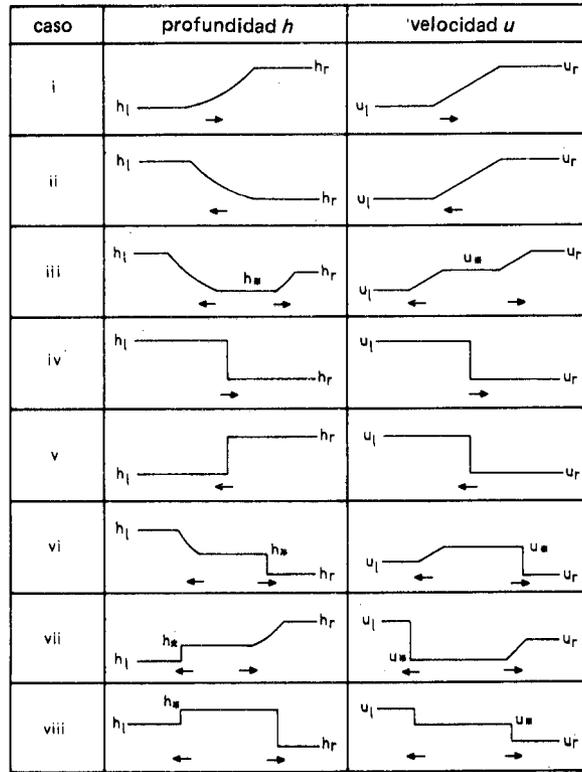


Figura 3.1. Solución del problema de Riemann para las ecuaciones (2.1) - (3.1), con  $G(w,x) = 0$ .

de frente abrupto”, dependiendo de los valores iniciales. Entre ambas ondas se genera un estado constante  $u_*, h_*$ . Mediante un método iterativo, la solución puede calcularse numéricamente para cualquier conjunto de valores  $(h_1, u_1, h_r, u_r)$ .

Resultados numéricos obtenidos por el método de Glimm para el problema de rotura instantánea de presas (que, casualmente, coincide con el problema de Riemann para  $u_1 = u_r = 0$ ) se muestran en la Figura 3.2, juntamente con la solución teórica. El acuerdo es satisfactorio. Se observa que el estado constante es calculado exactamente, y que el frente abrupto es computado con resolución prácticamente infinita. La posición calculada del frente abrupto no es exacta más que en promedio. El carácter estadístico del método se manifiesta más claramente en el cómputo de la onda de depresión, que muestra fluctuaciones alrededor de la solución teórica. Es interesante observar la calidad de los resultados incluso para mallas de discretización “gruesas” (Fig. 3.2 (b)).

Marshall y Menéndez<sup>7</sup> también extendieron la aplicación del método de Glimm al sistema completo (es decir, con  $G(W,x) \neq 0$ ), introduciendo la idea, ya explicada en la sección anterior, de hallar la solución teórica del problema de Riemann a primer orden en  $k$ . Esta se obtiene integrando a lo largo de las curvas características que, en este orden de aproximación, coinciden con las correspondientes a  $G(W,x) = 0$ , las cuales son conocidas. El proceso de integración es distinto para cada uno de los ocho casos mostrados en la Figura 3.1. El desarrollo completo se presenta en la citada referencia. A continuación, se muestran algunos resultados numéricos.

La Figura 3.3 corresponde al problema de la rotura instantánea de una presa teniendo en cuenta los efectos de la fricción. Un caso con fricción y pendiente de

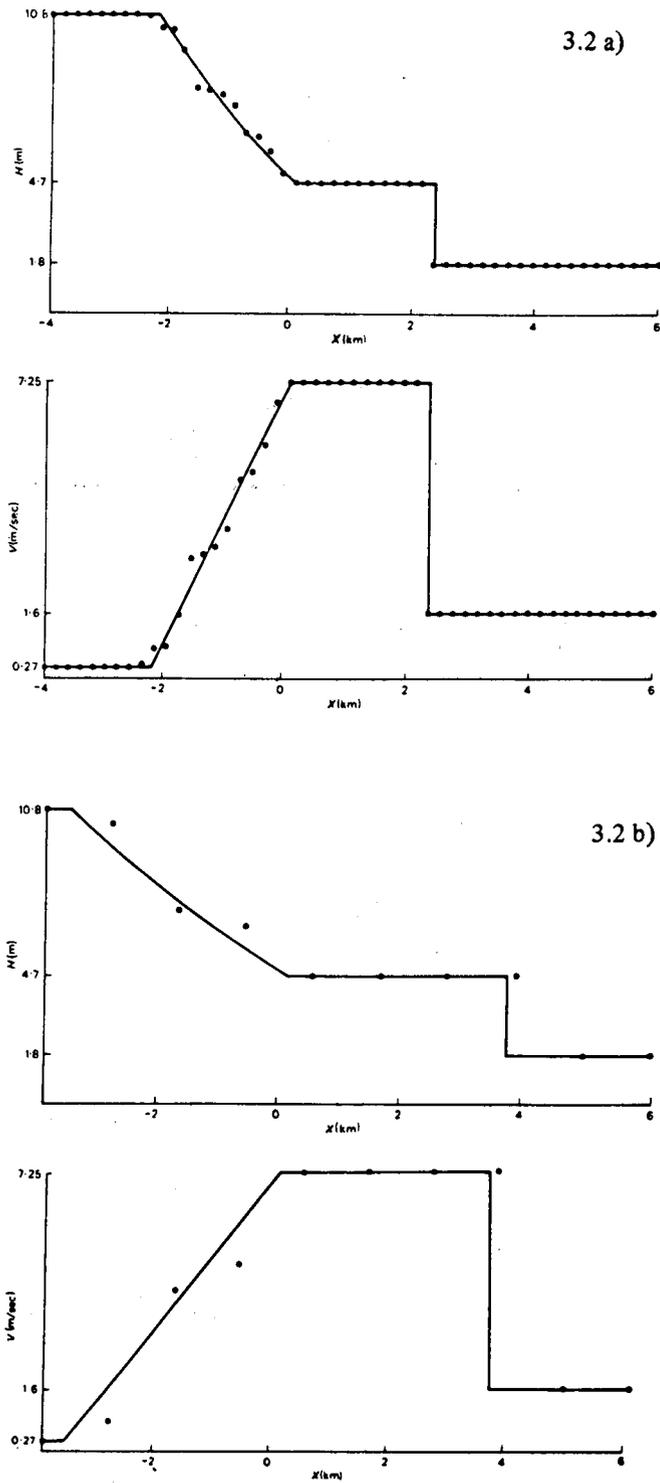


Figura 3.2. Solución del problema de Riemann para el caso de rotura instantánea de presas, calculada por el método de Glimm.

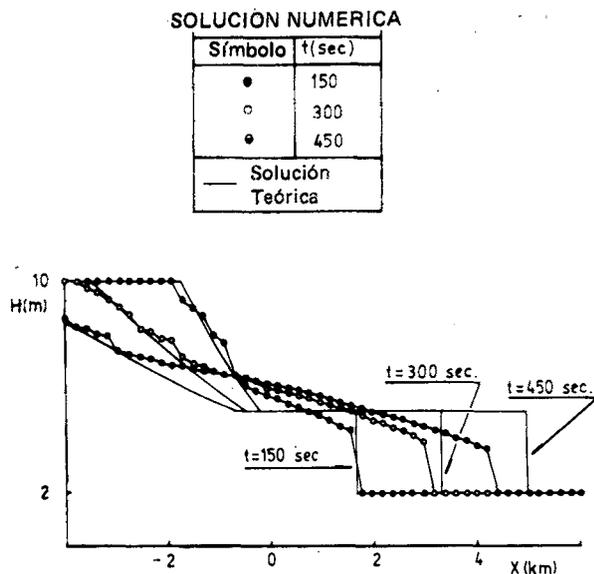


Figura 3.3. Rotura de presas con efectos de fricción, calculada con el método de Glimm (en línea llena se muestra la solución teórica para fricción nula).

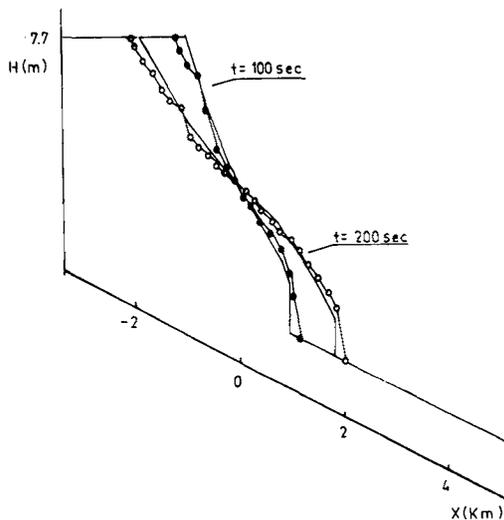


Figura 3.4. Rotura de presas con fricción y pendiente de fondo, calculada con el método de Glimm (en círculos) y por diferencias finitas (en línea llena).

fondo se muestra en la Figura 3.4, observándose un buen acuerdo con los resultados obtenidos por Ré, utilizando diferencias finitas sobre las curvas características.

Con una metodología similar pueden calcularse flujos con simetría cilíndrica, Marshall y Menéndez<sup>7</sup>. La Figura 3.5 muestra resultados para el problema de rotura instantánea a través de una sección transversal uniformemente convergente.

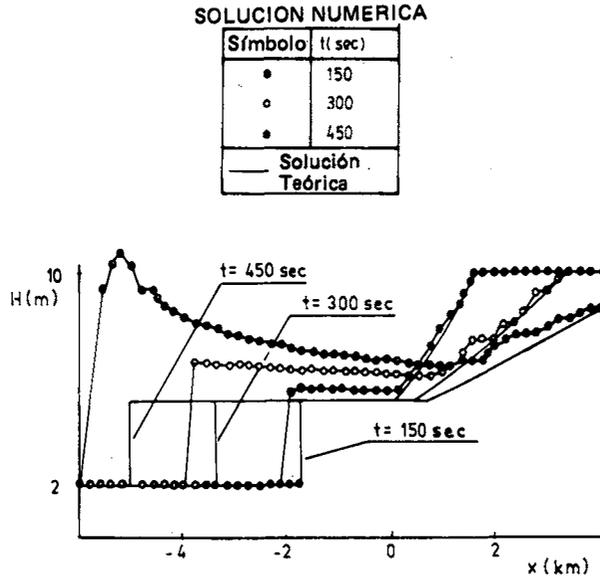


Figura 3.5. Rotura de presas a través de una sección convergente, calculada con el método de Grimm (en línea llena se muestra la solución teórica para sección uniforme).

### FLUJOS COMPRESIBLES CUASI-UNIDIMENSIONALES

Bajo esta denominación se incluyen flujos compresibles en conductos con variación del área transversal, y flujos compresibles con simetría cilíndrica y esférica. Las correspondientes ecuaciones de conservación se escriben de la forma (2.1), con

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ e \end{bmatrix}, F(W) = \begin{bmatrix} \frac{m}{\rho} \\ \frac{m^2}{\rho} + p \\ \frac{m}{\rho}(e+p) \end{bmatrix}, G(W,x) = \frac{a'(x)}{a(x)} \begin{bmatrix} \frac{m}{\rho} \\ \frac{m^2}{\rho} \\ \frac{m}{\rho}(e+p) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $p$  la presión termodinámica,  $m = \rho u$  la densidad de flujo de masa (siendo  $u$  la velocidad),  $e = p/(\gamma - 1) + m^2/(2g)$  la energía interna por unidad de masa (siendo  $\gamma$  la constante adiabática), y

$$a(x) = \begin{cases} \text{área} & \text{para flujos en conductos} \\ 2\pi x & \text{para flujos con simetría cilíndrica} \\ 4\pi x^2 & \text{para flujos con simetría esférica.} \end{cases} \quad (4.2)$$

La solución del sistema (2.1) - (4.1) por el método de Glimm puede llevarse a cabo utilizando el mismo procedimiento que en la sección anterior o, alternativamente, recurriendo a la técnica de pasos fraccionarios de Sod (ver sección 2). En ambos casos, es necesario resolver el problema de Riemann para el sistema homogéneo asociado.

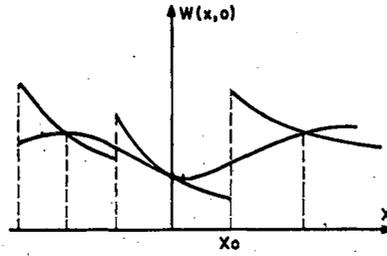


Figura 4.1. Aproximación de una función continua por una función compuesta de soluciones de estacionarias a trozos.

Una variante, propuesta por Glimm y colab<sup>3</sup>, resulta particularmente apropiada para resolver problemas cuasi-estacionarios. Esta consiste en aproximar las distribuciones espaciales de las variables no por una sucesión de estados constantes, sino por soluciones estacionarias a trozos, tal cual se ilustra en la Figura 4.1 Esto significa que ahora debe resolverse un problema de Riemann “generalizado”, que está caracterizado por las condiciones iniciales

$$W(x,0) = \begin{cases} W_1(x) & \text{para } x < 0 \\ W_2(x) & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

donde  $W_1$  y  $W_2$  son soluciones del problema estacionario

$$F(W)_x + G(W,x) = 0 \quad (4.4)$$

tal cual se ilustra en la Figura 4.2. Las soluciones del problema de Riemann generalizado resultan, en general, más complicadas que las del problema de Riemann standard. Por ejemplo, además de una onda de choque y una discontinuidad de contacto que avanza en sentido contrario, los efectos de curvatura pueden producir una onda de choque secundaria que viaja en la misma dirección que la onda de rarefacción, tal cual se muestra en la Figura 4.3.

Naturalmente, cuando la solución buscada es estacionaria, el método de Glimm generalizado provee la solución exacta.

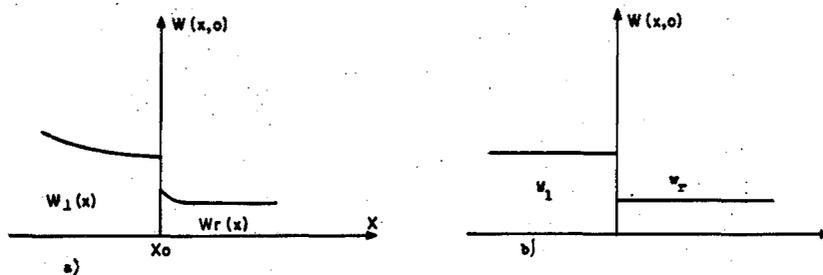


Figura 4.2. Valores iniciales para a) problema de Riemann generalizado y b) problema de Riemann standard.

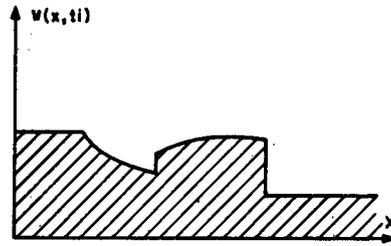


Figura 4.3. Una solución del problema de Riemann para la ecuación (2.1) - (4.1).

El método de Glimm generalizado fue utilizado para resolver el problema de flujo de un gas compresible en una tobera convergente-divergente (ver Fig. 1.1), que corresponde a las condiciones iniciales en un túnel de viento supersónico. La Figura 4.4 muestra el cálculo de la variación de la presión a lo largo del eje de la tobera, juntamente con la solución teórica y la calculada usando el método de Sod. Comparando con esta última, se observa que el método de Glimm generalizado prácticamente no produce, para este problema, fluctuaciones espurias. Esto queda más dramáticamente ilustrado en la Figura 4.5, donde se presentan las líneas isobáricas en el plano  $x-t$ .

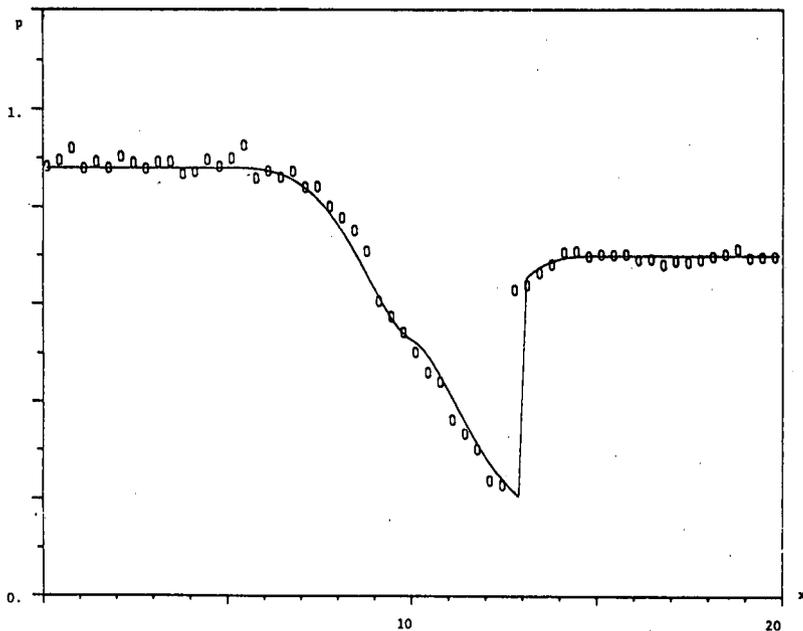


Figura 4.4. Variación de la presión a lo largo de la tobera: a) método de Sod.

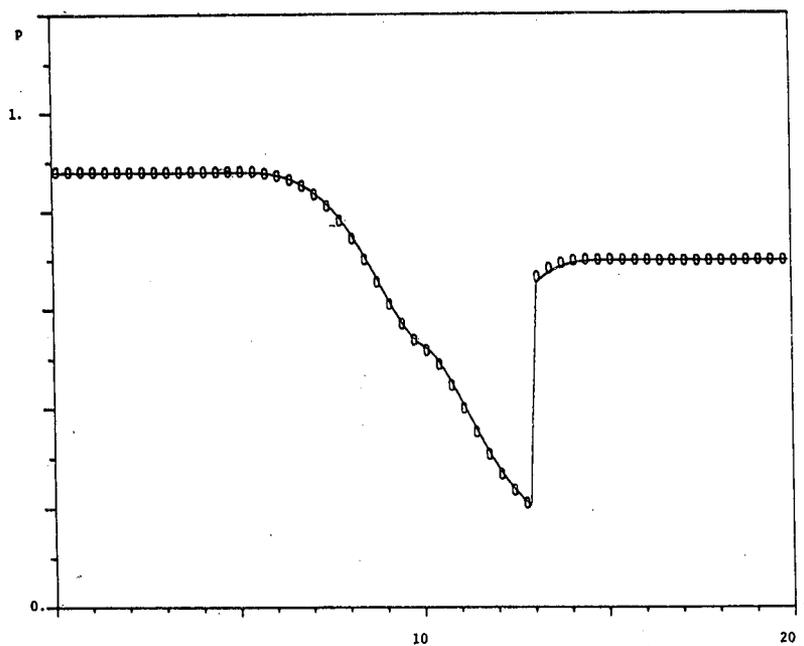
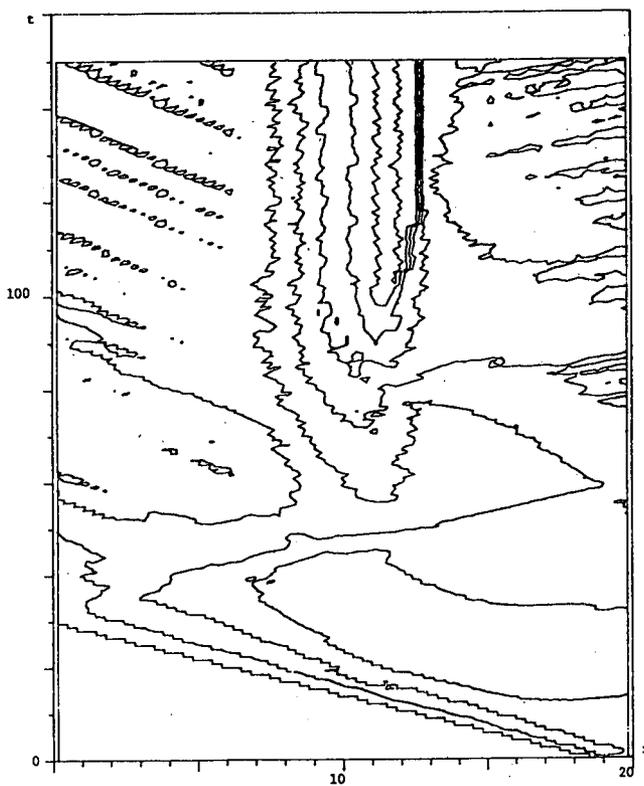


Figura 4.4. b) método de Glimm.

Figura 4.5. Líneas isobáricas en el plano  $x-t$ . a) método de Sod.

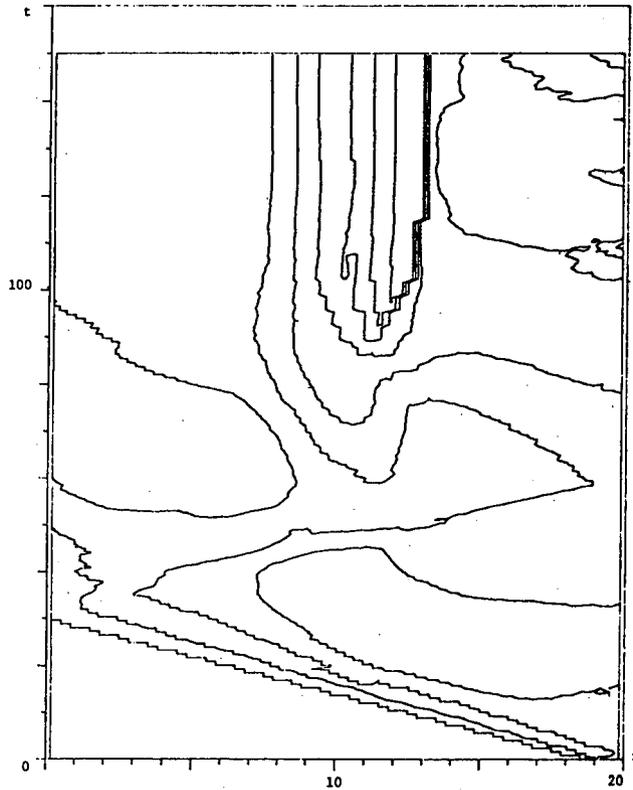


Figura 4.5. b) método de Glimm.

FLUJOS SUPERSONICOS BIDIMENSIONALES ESTACIONARIOS

Los problemas de difracción de ondas de choque pueden ser descritos en forma aproximada por un sistema hiperbólico de leyes de conservaciones de la forma

$$W_t + F(W)_x + G(W)_z = H(W,r) \tag{5.1}$$

donde  $r, z$  y  $t$  son las variables independientes espacio-temporales, y

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ n \\ E \end{bmatrix}, \quad H(W,r) = -\frac{(d-2)}{r} \begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho \\ mn/\rho \\ m/\rho(E+P) \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

$$F(W) = \begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho+P \\ mn/\rho \\ m/\rho(E+P) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G(W) = \begin{bmatrix} n \\ mn/\rho \\ n^2/\rho+P \\ n/\rho(E+P) \end{bmatrix}$$

Aquí  $\rho$  es la densidad,  $m = \rho u$  y  $n = \rho v$ ,  $u$  y  $v$  son los componentes de la velocidad en las direcciones  $r$  y  $z$ , respectivamente,  $E$  es la energía total,  $P$  es la presión termodinámica y  $d$  es la dimensión del espacio. Estas ecuaciones están suplementadas con la ecuación de estado

$$P = P(\rho, E - (m^2 + n^2)/2\rho) \quad (5.3)$$

Asumimos que el gas es politrópico, de modo que

$$P(\rho, e) = (\gamma - 1)e \quad (5.4)$$

donde  $e$  es la energía específica. El sistema (5.1) a (5.4) va acompañado de condiciones iniciales y de contornos apropiadas.

Muchos problemas interesantes pueden ser descriptos por el sistema no evolucionario asociado, es decir

$$F(W)_x + G(W)_z = H(W, r) \quad (5.5)$$

El sistema (5.5) puede ser: globalmente hiperbólico en el caso de flujo supersónico, mixto hiperbólico y elíptico en el caso de flujo supersónico con zona subsónica, y globalmente elíptico en el caso de flujo subsónico. Esta distinción es muy importante pues el comportamiento de dichos flujos difiere entre sí notablemente. Una variada gama de problemas estacionarios son puramente supersónicos y pueden ser descriptos, en consecuencia, por un sistema hiperbólico de leyes de conservación.

Existe una analogía entre flujo estacionario supersónico y flujo evolucionario unidimensional. Este último puede ser descripto por un sistema de ecuaciones como el (2.1) - (4.1). Esta analogía se ilustra en la Figura 5.1. El flujo evolucionario unidimensional mostrado en la Figura 5.1 (a) corresponde al problema de un pistón que se acelera y luego se detiene bruscamente. El flujo estacionario supersónico equivalente, mostrado en la Figura 5.1 (b), está producido por una cuña plana bidimensional. En ambos casos aparecen un onda de choque y una de rarefacción. La segunda produce la difracción de la primera.

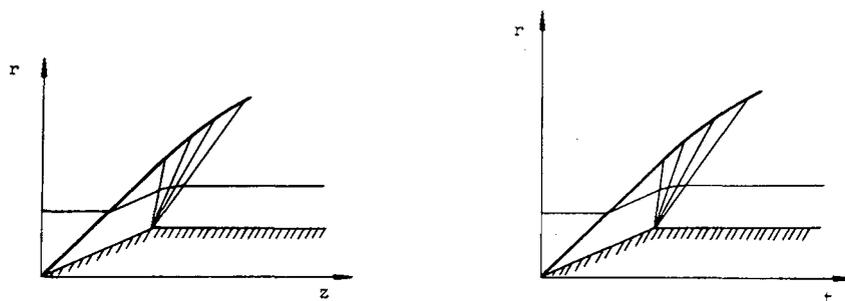


Figura 5.1. Analogía entre flujo evolucionario unidimensional y flujo supersónico estacionario bidimensional:

- a) flujo producido por la aceleración y desaceleración bruscas de un pistón,
- b) flujo supersónico alrededor de una cuña plana.

El ejemplo precedente pone en evidencia que cualquier procedimiento de cálculo de "marcha en el tiempo" puede también ser utilizado para flujo estacionario supersónico en dos dimensiones espaciales. Sólo se requiere considerar a una de las variables espaciales ( $r$  ó  $z$ ) como una variable temporal ficticia. En particular, el método de Glimm resulta especialmente apto para este tipo de problemas. Su utilización requiere formular y resolver el correspondiente problema de Riemann. Los detalles de este procedimiento, un tanto engorrosos, se omitirán del presente trabajo (ver Marshall y Plohr<sup>8</sup>).

Resultados numéricos para el problema de la cuña se presentan en la Figura 5.2. Los obtenidos por el método de Glimm se comparan con los calculados por diferencias finitas sobre las características (de trabajosa implementación), observándose un buen acuerdo.

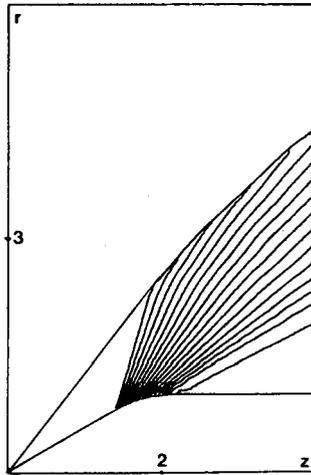


Figura 5.2. Flujo supersónico sobre una cuña plana,  
a) método de las características.

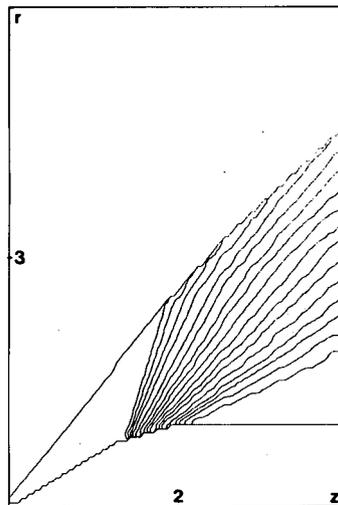


Figura 5.2. b) método de Glimm.

## REFERENCIAS

1. A.J. Chorin. *J. Comput. Phys.* **23**, 517, (1976).
2. J. Glimm. *Comm. Pure Appl. Math.* **18**, 697, (1965).
3. J. Glimm, G. Marshall and B. Plohr, *Advances in Appl. Math.* **5**, 1. (1984).
4. E. Laggiard y G. Marshall. *CNEA-NT 9/82*, (1982).
5. G. Marshall and R. Menéndez. *J. Compt. Phys.* **39** 1, (1981).
6. G. Marshall and A.N. Menéndez. *Adv. Water Resources* **4**, 125, (1981a).
7. G. Marshall and A.N. Menéndez. *J. Comput. Phys.* **44**, 167, (1981b).
8. G. Marshall and B. Plohr. *J. Comput. Phys.*, en prensa, (1984).
9. G. Sod. *J. Fluid Mech.* **83**, pt. 4, 787, (1977).

## APENDICE

Como ilustración, se presenta un listado en lenguaje FORTRAN para la resolución de la ecuación  $u_t + u u_x = 0$  con condiciones iniciales:  $u = u_1$  para  $x < 0$  y  $u = u_r$  para  $x > 0$ , utilizando el método de Glimm. Las variables de entrada son:

N = número de nodos.  
 $N_1$  = número de nodos con  $u = u_1$ .  
 $I_1, I_2$  = valores iniciales para generar la secuencia de números aleatorios.  
M = número de pasos de tiempo.  
MED = control de impresión.

NI =  $n_0$   
 $M_1 = m_1$   
 $M_2 = m_2$   
U0 =  $u_1$   
UF =  $u_r$   
Q =  $h/k$

```

DIMENSION U(101)
READ(6,100)N, N1, I1, I2, M, MED, NI, M1, M2
100  FORMAT(I5)
      READ(6,110)U0, UF, Q
110  FORMAT(F10.0)
      N2=2*N
      N12=N1*2
      NIU=N2+1
      NIA=N2-1
      NI=NI-M1
      DO 10 I=2, N2, 2
      U(I)=U0
      IF(I. GT. N12)U(I)=UF
10   CONTINUE
      DO 50 J=1, M
      L=0
40   NI=NI+M1
      IF(NI. GE. M2)NI=NI-M2
      HN=NI
      HM=M2
      R=RAN(I1, I2)
      R=(2. *(HN+R)/HM -1.)*Q
      WRITE(6, 101)R
101  FORMAT(12F6.2)
      IF(L. EQ. 1) GO TO 42
      DO 20 I=3, NIA, 2
      CALL RIEMAN(U(I-1), U(I+1), R, U(I))
20   CONTINUE
      U(1)=U0
      U(NIU)=UF
      L=1
      IF(MED. GE. 0)GO TO 40
      WRITE(6,101)(U(I), I=1, NIU, 2)
      GO TO 40
42   DO 30 I=2, N2, 2
      CALL RIEMAN(U(I-1), U(I+1), R, U(I))
30   CONTINUE
      IF(MED) 43, 43, 44
44   IE=J/IAB5(MED)
      IF(MED*IE-J) 50, 43, 50
43   WRITE(6, 101)(U(I), I=2, N2, 2)
50   CONTINUE
      END
      SUBROUTINE RIEMAN (UL, UR, R, UM)
      IF (UL. GT. UR) GO TO 10
      IF (R. GT. UR) GO TO 30
      IF (R. LT. UL) GO TO 20
      UM=R
      GO TO 40
10   UP= 5*(UR+UL)
      IF (R. GT.UP) GO TO 30
20   UM=UL
      GO TO 40
30   UM=UR
40   CONTINUE
      RETURN
      END

```