

METODOLOGIA PARA LA DETERMINACION DE LA PERMEABILIDAD DE UN YACIMIENTO GASIFERO APLICANDO SIMULACION NUMERICA Y REGRESION NO LINEAL

ENRIQUE A. DARDERES*

VICTORIA C. VAMPA*

OSCAR M. SORARRAIN**

y

MIRTHA S. BIDNER***

*Laboratorio de Ingeniería de Reservorios,
Departamento de Ingeniería Química,
Facultad de Ingeniería*

**Universidad Nacional de La Plata,
Calle 1 esquina 47,
(1900) La Plata, Argentina.*

***Universidad de Buenos Aires,
Ciudad Universitaria,
(1428) Buenos Aires, Argentina.*

****Departamento de Física,
Facultad de Ciencias Exactas,
Universidad Nacional de La Plata,
Calle 49 y 115,
(1900) La Plata, Argentina.*

RESUMEN

La ecuación diferencial parcial, no lineal, de segundo orden que describe el flujo radial de un gas real a través de un medio poroso es resuelta utilizando diferencias finitas¹. Para ello se la discretiza en coordenadas cilíndricas, componente radial, logrando un esquema en diferencias finitas consistente, conservativo y estable^{2,3,4,5}. Este esquema es implícito en transmisividades y presiones. El modelo numérico permite la determinación de la permeabilidad del medio poroso al flujo de un gas real aplicando el método inverso⁶: se ajustan las soluciones numéricas a las mediciones experimentales de la presión efectuadas en un pozo productor de gas mediante la aplicación de técnicas de optimización. Este procedimiento se aplica a la interpretación de ensayos de pozos gasíferos. Las presiones estimadas por el modelo numérico utilizando la permeabilidad óptima concuerda satisfactoriamente con las presiones medidas durante un ensayo de pozo a caudal constante (test drawdown^{7,8,9}).

Recibido: Enero 1988

SUMMARY

The second order non-linear partial differential equation, which describes the radial flow of a real gas through a porous medium, is solved by applying a finite-difference¹ technique. The differential equation in cylindrical coordinates is discretized obtaining a finite-difference consistent, conservative and stable^{1,2,3,4,5} scheme. This scheme is implicit in transmissivities and pressures. The numerical model allows the determination of the porous medium real gas permeability by applying the inverse method⁶: numerical solutions are adjusted to measured gas well pressures by means of optimization techniques. This procedure is applied to gas well testing analysis. Pressures estimated with pressures measured during a drawdown test^{7,8,9}.

INTRODUCCION

Se considera el flujo transitorio de un gas real a través de un medio poroso sujeto a las siguientes restricciones:

- 1- el medio poroso es indeformable (porosidad constante), homogéneo e isótropo, la permeabilidad es independiente de la presión;
- 2- el flujo es monofásico, isotérmico y los efectos gravitacionales se desprecian;
- 3- el flujo es laminar y obedece a la ley de Darcy¹⁰;
- 4- el gas es real y se verifica la ecuación de estado¹¹:

$$\rho = \frac{P M}{Z R T} \quad (1)$$

En estas condiciones dicho flujo está gobernado por la ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden¹²:

$$\nabla \left(\frac{K}{\mu Z} P \nabla P \right) + q \frac{R T}{M} = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{Z} \right) \quad (2)$$

donde ρ es la densidad del gas (ecuación (1)), P es la presión del gas, M su peso molecular y μ su viscosidad, R es la constante de los gases, T la temperatura del medio poroso, y por lo tanto del gas, K la permeabilidad del medio poroso al flujo del gas, ϕ su porosidad y Z el factor de desviación del gas real considerado. El término fuente q es la masa de gas extraída (o inyectada) por unidad de volumen y tiempo. Z y μ dependen de P .

La ecuación diferencial (2) con sus adecuadas condiciones iniciales y de borde puede resolverse numéricamente sin ulteriores restricciones respecto de las propiedades del gas.

Sin embargo, las primeras soluciones numéricas que se encuentran en la literatura fueron realizadas para el caso particular de un gas ideal ($Z = 1$) y considerando flujo unidimensional en coordenadas cartesianas y cilíndricas componente radial¹³. En 1966 dos trabajos presentan soluciones para el caso del flujo de un gas real hacia un pozo de producción. Ambos introducen el concepto de pseudopresión de un gas real hacia un pozo de producción. En el trabajo de Al'Hussainy et al.¹² se transforma a la ecuación diferencial (2) en términos de la pseudopresión adoptando una forma "cuasi-lineal" semejante a la ecuación de difusividad para líquidos. Por lo tanto los autores utilizan

las soluciones analíticas de esta última ecuación. El inconveniente reside en que la compresibilidad y la viscosidad (y por ende la difusividad) para el caso de gases reales dependen de la presión.

Paralelamente, la ecuación (2) escrita en términos de la pseudopresión es resuelta por Russell et al.¹⁴ mediante un método de Crank-Nicolson iterativo. Wattenbarger et al.¹⁵ resolvieron numéricamente la misma ecuación pero incluyendo el efecto de turbulencia. Dranchuk et al.¹⁶ incluyen además la dependencia de la permeabilidad con la presión de acuerdo con el efecto Klinkenberg^{17,18} presentando también soluciones numéricas.

La ecuación diferencial (2) correspondiente al flujo unidimensional en coordenadas cartesianas fue resuelta por Darderes et al.¹ mediante distintos esquemas iterativos en diferencias finitas: uno explícito en transmisividades e implícito en presiones y otro totalmente implícito; complementándose este último mediante el método de Newton-Raphson generalizado.

En este trabajo se resuelve el flujo radial transformando adecuadamente a la ecuación diferencial (2) en coordenadas cilíndricas, componente radial, mediante cambios de variables y definiciones de nuevos parámetros. De tal modo se logra un esquema en diferencias, para el caso planteado, idéntico, en su aspecto, al esquema en diferencias para el caso unidimensional en coordenadas cartesianas presentado por Darderes et al.¹; consecuentemente valen las consideraciones acerca de estabilidad y convergencia allí expuestas por estos autores para el presente caso.

El objetivo central de esta propuesta es aplicar el método inverso⁶ al flujo de un gas real. Se minimizan las diferencias entre las presiones calculadas por el modelo numérico y las presiones medidas durante un ensayo de pozo de gas (test drawdown^{7,8,9}), variando la permeabilidad. La variación se efectúa mediante el Método de Fibonacci^{19,10}.

W. W-G. Yeh²¹ emplea el método inverso desarrollando un algoritmo para la identificación de parámetros en una ecuación diferencial que describe una acuífera en un medio inhomogéneo. En este caso los parámetros elegidos son: el coeficiente de almacenamiento y las transmisividades, estas últimas son funciones de la variable espacial. Aquí la variable dependiente es el potencial del flujo en la acuífera, que posee dimensiones de longitud, ajustando los valores calculados de ésta a observaciones de la misma obtenidas dentro del sistema.

La estimación de la permeabilidad del medio poroso al flujo del gas, es uno de los propósitos de los ensayos de pozos gasíferos^{7,8,9}. Esta estimación se realiza habitualmente con procedimientos analítico-gráficos que a veces incluyen superposición de curvas, es decir ajuste visual a curvas tipo de los datos medidos^{7,8,9,22,23}. Recientemente se ha propuesto la aplicación de técnicas de optimización para la interpretación de los ensayos de pozos petrolíferos, empleando modelos de flujos de fluidos ligeramente compresibles.

La ecuación de difusividad que rige el flujo de petróleo hacia un pozo tiene solución analítica por transformada de Laplace; de esta manera Guillot et al.²⁴ calculan la presión y sus derivadas respecto de la permeabilidad (y otros parámetros característicos del reservorio y del flujo) en el espacio de la transformada de Laplace e invierten numéricamente esas derivadas para poder aplicar técnicas de regresión no lineal.

Pero el flujo de un gas real está gobernado por una ecuación no lineal, que no posee

solución cerrada. Por eso, en este trabajo se resuelve la ecuación numéricamente. Por último para determinar la permeabilidad se ajustan las soluciones numéricas a los datos medidos aplicando técnicas de optimización.

MODELO MATEMATICO. ESQUEMA EN DIFERENCIAS FINITAS

De la ecuación diferencial (2) se obtiene la siguiente ecuación de difusión isotérmica de un gas real en un reservorio homogéneo, isótropo e indeformable con simetría cilíndrica para la componente radial:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\lambda}{Z} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + q' = \frac{\phi C}{Z} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3)$$

donde $\lambda = \frac{K}{\mu}$, $q' = 2q \frac{RT}{M}$, $\psi = P^2$ y C es la compresibilidad del gas dada por $C = \frac{1}{P} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dP}$.

Las condiciones iniciales y de contorno consideradas son las siguientes: flujo nulo en el borde exterior del reservorio (es decir, en $r = r_e$ donde r_e es el radio del cilindro de drenaje^{7,8,9}), caudal volumétrico de producción constante en el pozo (cuyo radio es $r = r_w$) y presión inicial uniforme a través de todo el reservorio.

Expresando a la ley de Darcy en coordenadas cilíndricas, componente radial, se obtiene:

$$\frac{M q_M}{\rho} = - 2 \pi \lambda h r \frac{\partial P}{\partial r} \quad (4)$$

siendo q_M el caudal molar (moles de gas por unidad de tiempo) y h la altura de la formación porosa (o sea del cilindro de drenaje). Combinando la ecuación de estado (1) con la expresión (4) y despejando q_M se obtiene:

$$q_M = - \frac{\pi h}{R T} \left(\frac{\lambda}{Z} \right) r \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (5)$$

Ahora pueden expresarse las condiciones iniciales y de contorno de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= \psi_{\text{inic}} & t = 0, & \quad 0 \leq r \leq r_e \\ \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} &= 0, & \forall t > 0, & \quad r = r_e \\ q_M &= - \frac{\pi h}{R T} \left(\frac{\lambda}{Z} \right) r \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r}, & \forall t > 0, & \quad r = r_w \end{aligned}$$

Una aproximación en diferencias finitas consistente para la ecuación diferencial (3) es de la forma

$$\frac{1}{r_i(r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}})} \left[\left(\frac{\lambda}{Z} \right)_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1} - r_i} \right) - \left(\frac{\lambda}{Z} \right)_{i-\frac{1}{2}} r_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \right) \right] + q'_i = \Gamma_i \Delta t \psi_i \quad (6)$$

donde

$$q'_i = 2 \frac{R T}{M} q_i, \quad \Gamma_i = \left(\frac{\phi C}{Z} \right)_i \text{ y } \Delta t \psi_i = \frac{\psi_i^{n+1} - \psi_i^n}{\Delta t}$$

Aquí Δt indica el paso en el tiempo y tanto n como $n + 1$ el nivel de tiempo correspondiente en la discretización temporal.

Multiplicando a la ecuación en diferencias (6) por

$$C_{v_i} = \frac{\pi h}{R T} r_i (r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}}) \quad (7)$$

y discretizando la expresión (5) como sigue

$$q_{Mi+\frac{1}{2}} = - \frac{\pi h}{R T} \left(\frac{\lambda}{Z} \right)_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1} - r_i} \right) \quad (8)$$

se llega a que

$$-(q_{Mi+\frac{1}{2}} - q_{Mi-\frac{1}{2}}) + C_{v_i} q'_i = C_{v_i} \Gamma_i \Delta t \psi_i \quad (9)$$

lo cual da significado físico a la discretización consistente efectuada en (6) ya que los $q_{Mi+\frac{1}{2}}$ son los caudales molares entrantes y salientes, respectivamente, del i -ésimo bloque de la grilla circular que se describirá más adelante.

Para obtener un esquema en diferencias conservativo, con su correspondiente matriz simétrica asociada, deben imponerse las siguientes dos condiciones²:

- 1- la ecuación discretizada (8) debe proporcionar el caudal molar exacto para un dado $\Delta \psi$ (caída del cuadrado de la presión) con λ/Z constante;
- 2- el volumen discretizado, proporcional a C_{v_i} , debe ser igual al volumen real del i -ésimo bloque de la grilla circular dado por:

$$V_i = \pi h (r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2) \quad (10)$$

Luego, la condición 1- puede escribirse así:

$$q_{Mi+\frac{1}{2}} = q_{MB} = \text{constante} \quad (11)$$

siendo q_{MB} la integración de la expresión (5), suponiendo estado estacionario ($q_{MB} = \text{constante}$), entre los bloques i e $i + 1$; lo cual da

$$q_{ME} = - \frac{\pi h}{R T} \left(\frac{\lambda}{Z} \right) \frac{(\psi_{i+1} - \psi_i)}{\ln \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)} \quad (12)$$

Entonces comparando (8) con (12) se ve que la condición 1- se cumple si

$$r_{i+\frac{1}{2}} = r_{i+\frac{1}{2}}^L = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)} \quad (13)$$

En cuanto a la condición 2- se ve que ésta se verifica si

$$2 r_i (r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}}) = r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2 \quad (14)$$

Las relaciones (13) y (14) no pueden satisfacerse simultáneamente para cualquier elección de los bordes. Para satisfacer simultáneamente a las condiciones 1- y 2- se transforma según $\eta = r^2$ a la ecuación diferencial (3), obteniéndose:

$$4 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\lambda}{Z} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + q' = \frac{\phi C}{Z} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (15)$$

cuya aproximación consistente en diferencias finitas multiplicada por el volumen real, dado en (10), de la i -ésima celda circular resulta:

$$\begin{aligned} & 2\pi h \left(\frac{\lambda}{Z} \right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{2 \eta_{i+\frac{1}{2}}}{(\eta_{i+1} - \eta_i)} (\psi_{i+1} - \psi_i) - 2\pi h \left(\frac{\lambda}{Z} \right)_{i-\frac{1}{2}} \\ & \frac{2 \eta_{i-\frac{1}{2}}}{(\eta_i - \eta_{i-1})} (\psi_i - \psi_{i-1}) + V_i q'_i = V_i \Gamma_i \Delta_t \psi_i \end{aligned} \quad (16)$$

Dividiendo por RT y definiendo

$$q_{Mi+\frac{1}{2}} = - 2 \frac{\pi h}{R T} \left(\frac{\lambda}{Z} \right) \eta_{i+\frac{1}{2}} \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\eta_{i+1} - \eta_i} \quad (17)$$

se obtiene nuevamente la ecuación (9). Teniendo en cuenta las expresiones (8) y (13) se observa que se cumplen las condiciones 1- y 2- si se impone que

$$\frac{2 \eta_{i+\frac{1}{2}}}{\eta_{i+1} - \eta_i} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^L}{r_{i+1} - r_i} \quad (18)$$

y

$$\eta_{i+\frac{1}{2}} - \eta_{i-\frac{1}{2}} = r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2 \quad (19)$$

La relación (19) es trivial y siempre se satisface. En cuanto a la relación (18) se utiliza para hallar los $\eta_{i\pm\frac{1}{2}}$ que resultan

$$r_{i+\frac{1}{2}}^2 = \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{\ln\left[\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)^2\right]} \quad (20)$$

Reemplazando (18) en (16) se llega a:

$$T_{i+\frac{1}{2}} (\psi_{i+1} - \psi_i) + T_{i-\frac{1}{2}} (\psi_{i-1} - \psi_i) + V_i q_i' = V_i \Gamma_i \Delta_t \psi_i \quad (21)$$

siendo

$$T_{i+\frac{1}{2}} = 2 \pi h \left(\frac{\lambda}{Z}\right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^L}{(r_{i+1} - r_i)} \quad (22)$$

Entonces, se obtiene el esquema en diferencias consistente y conservativo (21) si las transmisividades, $T_{i\pm\frac{1}{2}}$, se calculan con las expresiones logarítmicas en r dadas en (13), y si los bordes de los bloques, para el cálculo del volumen de cada celda circular $r_{i\pm\frac{1}{2}}$, se calcula según la expresión logarítmica en r^2 dada por (20).

Se establece el siguiente criterio para calcular los puntos representativos de los bloques de la grilla circular:

- Para flujo en estado estacionario en un medio homogéneo se deduce, considerando la ecuación (12), que igual espaciamiento en $\ln(r)$ resultará en igual caída del cuadrado de la presión. Entonces si se desea una grilla de N puntos en la cual $r_1 = r_w$ y $r_N = r_e$ se obtiene:

$$\frac{\ln(r_e/r_w)}{N-1} = \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)$$

de donde surge la siguiente fórmula de recurrencia²

$$r_i = r_w \left(\frac{r_e}{r_w}\right)^{\frac{i-1}{N-1}} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

Esta elección de los puntos representativos de los bloques verifica que la distancia entre éstos es cada vez menor a medida que $r \rightarrow r_w$, lo cual es esencial para mantener uniforme la precisión de los resultados numéricos en todos los puntos de la grilla.

La grilla circular obtenida mediante (23) presenta el aspecto altamente irregular que se ve en la Figura 1.

METODOLOGIA DE LA INTERPRETACION DE LOS ENSAYOS DE POZOS GASIFEROS APLICANDO EL PROBLEMA INVERSO

Para realizar estudios de ingeniería de yacimientos gasíferos y pronósticos de producción es necesario conocer los parámetros característicos de la roca-reservorio: permeabilidad y porosidad. Su medición directa en el laboratorio sobre muestra de roca presenta graves inconvenientes. Por un lado la extracción de las muestras que se

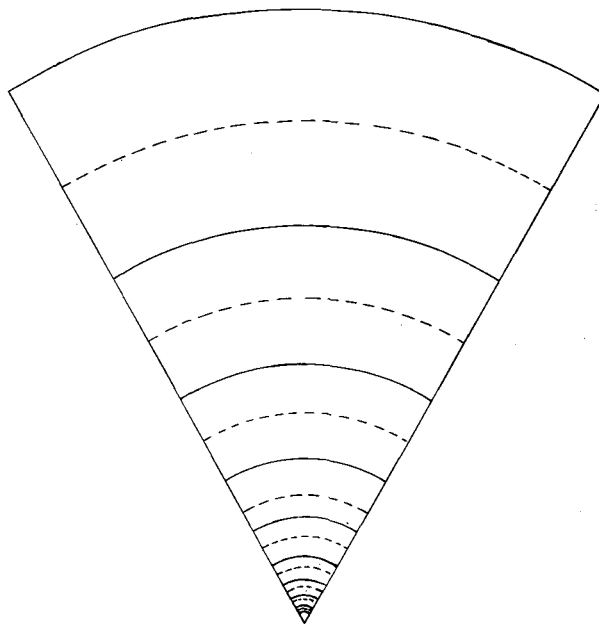


Figura 1. Grilla circular en la cual los puntos representativos de sus bloques se calculan según (23) —trazo continuo—. Los puntos interbloques —trazo discontinuo— se calculan con la expresión (20). Se tomó $N = 10$ en (23) con $r_e = 0.20m$ y $r_w = 0.004m$.

realiza parando la perforación de los pozos es costosa. Por el otro, la representatividad de dichas pequeñas muestras (del orden de pocos centímetros cúbicos) es, obviamente, relativa frente a las dimensiones de un yacimiento. Por eso se han diseñado mediciones indirectas de ambos parámetros.

La porosidad se puede determinar con varias técnicas físicas de perfilajes de pozo abierto: sónica, de densidad, neutrónica y de rayos gamma.

La permeabilidad, en cambio, se puede estimar mediante los ensayos de pozos en producción. El más difundido de los ensayos es el "drawdown test" que consiste en medir la presión dinámica en el fondo del pozo, $P_{wf}(t)$, durante un período de flujo a caudal constante; comenzando desde un valor estabilizado de la presión en el reservorio.

El análisis convencional de las mediciones de presión recabadas durante el ensayo a caudal constante con el fin de estimar la permeabilidad, se realiza con procedimientos gráficos y/o con ajuste visual a curvas tipo^{7,8,9,22}.

Ambos procedimientos están basados en la solución analítica de una modificación de la ecuación de flujo (2). La modificación consiste en introducir el concepto de pseudo-presión de gases reales para obtener una forma "cuasi-lineal" de dicha ecuación¹².

Esta solución se utiliza para construir curvas tipo para distintos valores del parámetro permeabilidad. Con este método, la permeabilidad se determina buscando visualmente cual curva tipo se ajusta mejor a los datos medidos. El ajuste es visual y, por lo tanto, subjetivo.

La propuesta de esta comunicación es ajustar los resultados del modelo numérico a las mediciones experimentales recabadas durante el ensayo, variando el parámetro permeabilidad y manteniendo fijos los demás parámetros del modelo.

Se tiene entonces un problema de regresión no lineal: se busca el valor de K que permita obtener el mejor ajuste a las presiones medidas. Si se denota mediante $\Delta P_{wf}^{exp}(t_l)$, $l = 1, \dots, n$, a las caídas de presión experimentales registradas en los tiempos t_l durante un ensayo de pozo a caudal constante y por $\Delta P_{wf}^{num}(t_l, K)$ a las soluciones del modelo numérico para los mismos tiempos entonces el valor de K buscado será aquel que minimice a la función objetivo siguiente:

$$SSR(K) = \sum_l [\Delta P_{wf}^{exp}(t_l) - \Delta P_{wf}^{num}(t_l, K)]^2 \quad (24)$$

La elección del método para la resolución del problema de optimización planteado se realizó teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- la función a minimizar (24) depende de una sola variable;
- no es posible obtener la derivada de la función objetivo sino numéricamente;
- es posible determinar a priori un intervalo de soluciones posibles $(0, K_1)$ siendo K_1 el valor que se obtiene integrando la ley de Darcy en el cilindro de drenaje bajo la suposición de producción a caudal constante (valor del caudal en el ensayo) y flujo en estado estacionario. Esto es

$$K_1 = \frac{q_{st} \mu_{inic} \ln(r_e/r_w)}{2\pi h(P_{inic} - P_{atm})} \quad (25)$$

donde los subíndices *inic* y *st* indican a la presión inicial del reservorio y medida en condiciones standard (1 atm y 15°C) respectivamente.

Uno de los métodos de búsqueda directa más eficiente para el caso de una sola variable es la búsqueda de Fibonacci (Fibonacci search)^{19,20}. Este algoritmo utiliza la estrategia óptima para reducir el intervalo de incertidumbre para un número dado de evaluaciones de la función. Se basa en la sucesión de Fibonacci que satisface $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ con $F_0 = F_1 = 1$ y $k = 2, \dots, n$ (los F_k se denominan números de Fibonacci), siendo necesaria una sola evaluación de la función en cada paso de iteración. Luego de N evaluaciones el intervalo final de incertidumbre es de longitud $1/F_N$ veces el intervalo original, entonces N se determina de acuerdo a la precisión deseada. La unicidad de la solución se dedujo cambiando los valores iniciales de K y observando que la solución resulta independiente de éstos.

EJEMPLO DE APLICACION

Para ejemplificar el procedimiento expuesto se utilizan datos de un reservorio y de un ensayo de pozo a caudal constante, que fueron publicados por Al'Hussainy et al.²². En la Tabla I, se presentan los datos del reservorio: presión inicial, espesor de la formación productiva, radios del pozo y externo, temperatura, porosidad y porcentaje de volumen poral ocupado por el gas. En la Tabla I(b), se muestran la variación de las propiedades del gas con la presión. En la Tabla I(c), se vuelcan las mediciones del ensayo, es decir, la evolución en el tiempo de la presión dinámica en el fondo del pozo a

nivel de la capa productora de gas. El caudal del ensayo, en condiciones de reservorio, fue $q = 0.524 m^3/s$.

(a) Datos del reservorio
$P_i = 2300 \text{ psia} = 15858 \text{ KPa}$
$h = 10 \text{ ft} = 3.048 \text{ m}$
$r_w = 0.5 \text{ ft} = 0.152 \text{ m}$
$r_e = 2980 \text{ ft} = 908 \text{ m}$
$T = 130^\circ\text{F} = 327,59^\circ\text{K}$
$\phi = 0.1$
$S_g = 77\% \text{ del volumen poral}$

(b) Propiedades del gas		
Presión [kPa]	Factor de desviación Z	Viscosidad [Pa.s]
2758	0.95	1.17×10^{-5}
5516	0.90	1.25×10^{-5}
8274	0.86	1.32×10^{-5}
11033	0.81	1.46×10^{-5}
13789	0.80	1.65×10^{-5}
16547	0.81	1.80×10^{-5}

Tabla I. (a) Datos del reservorio. (b) Variación de las propiedades del gas con la presión

Los valores de la presión dinámica para los ocho tiempos de la Tabla I(c), se muestran también como puntos aislados en la Figura 2. En la evolución de la presión pueden distinguirse tres etapas:

- 1- Flujo temprano, en los primeros minutos de producción; aquí el comportamiento está dominado por la capacidad de acumulación del gas en el pozo (wellbore storage) y por el efecto pelicular (skin effect) que es una alteración de la permeabilidad en las inmediaciones del pozo debido a daños producidos durante la perforación y cementación del mismo.

(c) Mediciones del ensayo drawdown		
1	t, [s]	Presión dinámica, ΔP_{wf} [kPa]
1	835.2	12790
2	1440	12659
3	2160	12507
4	2880	12452
5	3600	12390
6	7200	12121
7	14400	11880
8	21600	11742

(d) Errores de los ajustes obtenidos		
$\varepsilon(t_i)$ [%]		
	8 puntos	5 puntos
	1.06	-
	0.44	-
	0.41	-
	0.03	0.31
	0.22	0.11
	0.20	0.10
	0.44	0.13
	0.63	0.30
$\ \varepsilon\ _2$	1.47	0.47

Tabla I. (c) Mediciones de presión a lo largo del tiempo realizadas durante un ensayo de pozo a caudal constante $q = 0.524 \text{ m}^3/\text{s}$. (d) Errores de los ajustes obtenidos con la metodología propuesta; incluyendo o no los puntos iniciales afectados por el borde interno.

- 2- Flujo transitorio, en el cual se establece el flujo radial hacia el pozo. Está gobernado por la ecuación (3), el medio poroso se comporta como infinito, pues aún no cuentan

los efectos de borde exterior.

- 3- Flujo en estado pseudo-estacionario, dominado por los efectos de borde exterior (caudal nulo en el radio de drenaje). También está gobernado por la ecuación (3).

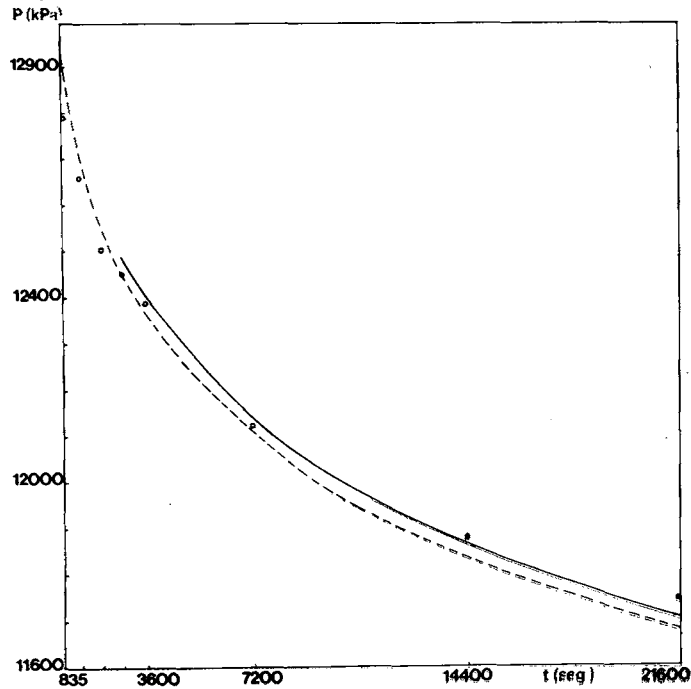


Figura 2. Los círculos representan las mediciones de $P_{wf}(t)$ durante el ensayo drawdown considerado. El trazo discontinuo corresponde al ajuste de los ocho puntos medidos y el continuo a las cinco últimas mediciones del ensayo.

En consecuencia, la ecuación diferencial parcial (3) representa el flujo en las dos últimas etapas, pero no puede simular el flujo temprano.

A efectos de encontrar la permeabilidad del medio, se estima primero un valor inicial con la ecuación (25). Este resulta:

$$K_1 = 2.70 \times 10^{-13} \text{ m}^2 = 274 \text{ mD}$$

Con este valor inicial se aplica la metodología propuesta tomando en cuenta:

- a) los ocho puntos de presión medidos. El valor final de la permeabilidad al cabo de minimizar la función objetivo (24) es,

$$K = 0.411 \times 10^{-14} \text{ m}^2 = 4.16 \text{ mD}$$

Los errores relativos porcentuales del ajuste obtenido, están definidos mediante la siguiente expresión:

$$\varepsilon(t_l) = \left| \frac{R_l}{P_{wf}^{exp}(t_l)} \right| \times 100 \quad (26)$$

donde

$$R_l = \Delta P_{wf}^{exp}(t_l) - \Delta P_{wf}^{num}(t_l, K) \quad (27)$$

Los valores de $\varepsilon(t_l)$ se muestran en la Tabla I(d). Se define como error global del ajuste a la norma euclídea del vector error relativo porcentual cuyas componentes están dadas por (26)

$$\|\varepsilon\|_2 = \sum_{i=1}^N [\varepsilon(t_i)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

- b) excluyendo los primeros puntos, afectados por el flujo temprano, la permeabilidad y la norma del error resultaron en cada caso:

7 puntos	$K = 0.415 \times 10^{-14} \text{ m}^2 = 4.20 \text{ mD}$	$\ \varepsilon\ _2 = 1.00$
6 puntos	$K = 0.416 \times 10^{-14} \text{ m}^2 = 4.21 \text{ mD}$	$\ \varepsilon\ _2 = 0.82$
5 puntos	$K = 0.417 \times 10^{-14} \text{ m}^2 = 4.22 \text{ mD}$	$\ \varepsilon\ _2 = 0.47$

En la Figura 2 se muestran los resultados numéricos de $P_{wf}(t)$ correspondientes al ajuste realizado considerando todas las mediciones (ocho puntos) y las cinco últimas (cinco puntos).

Evidentemente el mejor ajuste posible se logra cuando se descartan los puntos iniciales dominados por efectos no considerados en la ecuación diferencial (3).

En realidad, con la misma metodología utilizada se podría incluir otros parámetros. Por ejemplo, el efecto pelicular, la posibilidad de flujo turbulento en los alrededores del pozo, la capacidad de almacenamiento del mismo o, también, la porosidad de la formación.

La inclusión de los dos primeros parámetros mencionados, es objeto de un estudio paralelo²⁵. La porosidad no se determina con este método porque su medición mediante perfilaje eléctrico de pozos es generalmente satisfactoria y brinda la posibilidad de conocer aún su variación a lo largo de la capa productiva, es decir, $\phi(Y)$, siendo Y la distancia vertical.

Ahora bien, la inclusión de más de un parámetro obliga a aplicar técnicas de optimización multivariantes²⁵.

CONCLUSIONES

Se aplica el método inverso a la determinación de la permeabilidad de un medio poroso al flujo unidimensional en coordenadas cilíndricas componente radial de un gas real. El flujo está gobernado por una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden, uno de cuyos parámetros es la permeabilidad. Esta ecuación es resuelta aplicando un esquema en diferencias finitas totalmente implícito, e iterando sobre sus coeficientes variables. Los coeficientes variables se originan en la dependencia de las propiedades del gas con la presión. A efectos de estimar la permeabilidad, se ajusta el modelo numérico descripto a las mediciones de presión en pozo productor de gas. El ajuste se realiza aplicando el método de los mínimos cuadrados y la técnica de optimización de Fibonacci. Es decir, se minimiza la suma de los cuadrados de los residuos, variando la permeabilidad, con el método de Fibonacci. Los residuos son la diferencia entre los valores de presión medidos y los calculados por el modelo numérico.

Se muestra un ejemplo de aplicación simultánea del modelo numérico y la técnica de Fibonacci a las mediciones de presión obtenidas durante un ensayo de un pozo gasífero en producción a caudal constante ("test drawdown"). En dicho ejemplo se obtiene la permeabilidad de la roca-reservorio que rodea al pozo. El conocimiento de la permeabilidad es de gran utilidad en los estudios y diseños de la Ingeniería de Yacimientos de Gas. Las presiones estimadas con el modelo numérico utilizando la permeabilidad óptima concuerdan en forma satisfactoria con las medidas durante el ensayo, siempre que se eliminen las mediciones iniciales dominadas por los efectos de borde en el pozo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC) por el apoyo financiero recibido durante el desarrollo de este trabajo.

REFERENCIAS

1. E.A. Darderes, O.M. Sorarrain y M.S. Bidner, "Simulación Numérica del flujo Unidimensional de un Gas Real a través de un Medio Poroso", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 4, 2, pp. 151-174, (1988).
2. K. Azziz and A. Settari, "Petroleum Reservoir Simulation", Elsevier Applied Science Publishers, (1985).
3. R.D. Richtmyer and K.W. Morton, "Difference methods for initial-value problems", Second Edition. Interscience Publishers, a division of John Wiley and Sons, (1967).
4. G. Marshall, "Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales", Tomo 1: *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Editorial Reverté Argentina S.A., (1985).
5. G. Marshall, "Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales", Tomo 2: *Ecuaciones en derivadas parciales*. Editorial Reverté Argentina S.A., (1986).

6. J. Carrera y S.P. Neuman, "El problema inverso de la hidrología subterránea: Estado del arte y método de solución", *Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 2, no. 1, pp. 3-25, (1985).
7. "Gas Well Testing: Theory and Practice", *Energy Resources Conservation Board (ERCB)*, Alberta, Canadá, (1979).
8. D.A.T. Donohue and T. Ertekin, "Gas Well Testing Theory, Practice and Regulation", *International Human Resources Development Corporation (IHRDC)*, Boston, (1982).
9. R.C. Earlougher Jr., "Advances in Well Test Analysis", Henry L. Doherty Series, Monograph Vol. 5, *Society of Petroleum Engineers of AIME*, (1977).
10. M. King Hubbert, "Darcy's Law and the Field Equations of the Flow of Underground fluids", *Jour. Pet. Tech.*, pp. 222-239, (1956).
11. M. Muskat, "Physical Principles of Oil Production", *IHRDC*, (1981).
12. R. Al'Hussainy, H.J. Ramey and P.B. Crawford, "The Flow of Real Gases Through Porous Media", *Jour. Pet. Tech.*, pp. 624-636, (1966).
13. G.H. Bruce, D.W. Peaceman, H.H. Rachford Jr. and J.D. Rice, "Calculations of Unsteady-State Gas Flow Through Porous Media", *Soc. Pet. Eng. J.*, pp. 79-92, (1953).
14. D.G. Russell, J.H. Goodrich, G.E. Perry and J.F. Bruskotter, "Methods for Predicting Gas Well Performance", *Jour. Pet. Tech.*, pp. 99-108, (1966).
15. R.A. Wattenbarger and H.J. Ramey Jr., "Gas Well Testing With Turbulence, Damage and Wellbore Storage", *Jour. Pet. Tech.*, pp. 877-887, (1968).
16. P.M. Dranchuk and J. Flores, "Non-Darcy Transient Radial Gas Flow Through Porous Media", *Soc. Pet. Eng. J.*, pp. 129-139, (1975).
17. R.P. Monicard, "Properties of Reservoir Rocks: Core Analysis", *Institut Français du Pétrole Publications*, Gulf Publishing Company, (1980).
18. J. Bear, "Dynamics of fluids in porous media", American Elsevier Publishing Company, Inc. New York, (1972).
19. P.E. Gill, W. Murray and M.H. Wright, "Practical Optimization", Academic Press, Inc., (1981).
20. J. Kowalik and M.R. Osborne, "Methods for Unconstrained Optimization Problems", American Elsevier Publishing Company Inc., New York, (1968).
21. W.W.-G. Yeh, "Optimal Identification of Parameters in an Inhomogeneous Medium with Quadratic Programming", *Soc. Pet. Eng. J.*, pp. 371-375, (1975).
22. R. Al'Hussainy and H.J. Ramey Jr., "Application of Real Gas Flow Theory to Well Testing and Deliverability Forecasting", *Jour. Pet. Tech.*, pp. 637-642, (1966).
23. K. Azziz, J.R. Eickmeier, M. Fogarasi and G.A. Gregory, "Gradient Curves for Well Analysis and Design", *The Canadian Institute of Mining and Metallurgy*, Vol. 20, (1979).
24. A.Y. Guillot and R.N. Horner, "Using Simultaneous Downhole Flow-Rate and Pressure Measurements to Improve Analysis of Well Test", *Soc. Pet. Eng. J.*, pp. 217-226, (1986).
25. E.A. Darderes, V.C. Vampa, O.M. Sorarrain and M.S. Bidner, "Gas Well Testing Analysis Using Finite-Difference Models and Optimization Techniques", *Revue de l'Institut Français du Pétrole* (En prensa).