Collect. Math. **46**, 1–2 (1995), 49–56

Une fonction eulérienne formelle

G. Cauchon

Laboratoire d'Equations aux Dérivées Partielles et Physique Mathématique,

U.R.A. 1870, U.F.R. Sciences - B.P. 347, 51062 Reims Cedex, France

Dédié à la mémoire du Professeur Paul Dubreil

Abstract

In this paper, we state and prove a formal version of a factorisation theorem, a particular case of which, due to A. Unterberger [2], concerns the operator $p^2+q^2-\lambda^2$ where $\lambda\in]1/2,+\infty[$ and p,q are operators on the Poincaré half plane $\{z\in\mathbb{C}\,|\,Re(z)>0\}$, such that $[p,q]=q$.

As this factorisation involves operators in the form $\Gamma(ap+b)$ (defined in the sens of the spectral theory), where Γ is the well known Euler function and $(a,b)\in(\mathbb{C}\backslash\{0\})\times\mathbb{C}$, we construct a formal version for those operators, and explain why this construction cannot be done in terms of formal series in p.

Introduction

Cet article a pour origine un travail de A. Unterberger [2], qui démontre une formule de factorisation qui, après quelques transformations, s'écrit:

$$\boxed{p^2+q^2-\lambda^2 = X_\lambda^{-1}\left(1-\frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^{1/2}(p+\lambda)\left(1-\frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^{1/2}(p-\lambda)X_\lambda} \tag{1}$$

où:

- $\alpha=2\pi$
- λ est un réel supérieur à $1/2$.
- p et q sont les opérateurs de $L^2(\Pi)$, où $\Pi=\{z\in\mathbb{C}\,|\,Re(z)>0\}$ est le demi-plan de Poincaré muni de la mesure invariante $x^{-2}dxdy\,(x=Re(z)\,;\,y=Im(z))$, définis par:

$$p = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad q = -x\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Ils sont anti-autoadjoints et vérifient la relation de commutation $[p,q] = q$.

- $X_\lambda = \varphi_\lambda(p)$ où φ_λ est la fonction méromorphe définie par $\varphi_\lambda(z) = \alpha^{-z}\frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1-\frac{z}{2})}$, Γ désignant la fonction d'Euler classique. Cet opérateur commute avec p.

Dans tout ce qui suit, on adopte le point de vue (formel) suivant: k désigne un corps commutatif de caractéristique nulle, q désigne une indéterminée sur k, $k((q))$ désigne le corps des séries de Laurent formelles $\sum_{n\geq n_0} a_n q^n (n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in k)$, et R désigne la k-algèbre des opérateurs différentiels formels $k((q))[p;\delta]$ où δ désigne la dérivation d'Euler $q\frac{d}{dq}$ de $k((q))$, de sorte que les deux indéterminées p et q vérifient encore la relation de commutation $[p,q] = q$.

On se propose d'établir une version formelle de l'égalité (1) dans laquelle $(1 - \frac{q^2}{4\alpha^2})$ est défini de manière habituelle dans $k((q))$, et les éléments $X_\lambda (\lambda \in k)$ sont définis par

$$X_\lambda = \alpha^{-p}\frac{\Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}+1-\frac{p}{2}\Big)}\,,$$

ce calcul prenant un sens dans une k-algèbre R', extension de R, que nous construisons dans le paragraphe II.

Nous verrons, part ailleurs, que les X_λ ne peuvent pas être définis en termes de séries (de Laurent) formelles en p (ou en $1/p$).

I. Une factorisation dans R

Soit $(\alpha,\lambda,\mu) \in (k\backslash\{0\}) \times k \times k$ et l'opérateur

$$H = p + \lambda - \frac{q^2}{4\alpha^2}(p+\mu) \in R = k((q))[p,\delta]\,.$$

La théorie des connexions méromorphes régulières ([1] chap. III) permet de prévoir que les R-modules à gauche $R_{/RH}$ et $R_{/R(p+\lambda)}$ sont isomorphes, d'où on déduit:

Lemme I.1

Il existe $(\varphi_0,\varphi_1) \in \big(k((q))\backslash\{0\}\big) \times \big(k((q))\backslash\{0\}\big)$ *tel que* $H = \varphi_0(p+\lambda)\varphi_1$.

Démonstration: Il existe un élément non nul φ de $k((q))$, identifié à $R_{/R(p+\lambda)}$, tel que $H\varphi = 0$ dans $R_{/R(p+\lambda)}$, de sorte que $H\varphi = Q(p+\lambda)$ $(Q \in R)$.

Par un argument de degré, on a $Q \in k((q))$, et il suffit de prendre $\varphi_0 = Q$ et $\varphi_1 = \varphi^{-1}$. $\square$

L'identification des coefficients de p dans H et $\varphi_0(p+\lambda)\varphi_1$ conduit à l'égalité

$$\varphi_0\varphi_1 = 1 - \frac{q^2}{4\alpha^2}\,.$$

Dans $k((q))$ identifié à $R_{/R(p+\lambda)}$, on a: $\big(\forall\, \varphi \in K((q))\big) p\varphi = \delta(\varphi) - \lambda\varphi$, de sorte que $H\varphi = 0$ si et seulement si φ est solution de l'équation différentielle

$$\Big(1 - \frac{q^2}{4\alpha^2}\Big)qy' - (\mu - \lambda)\frac{q^2}{4\alpha^2}y = 0 \quad \Big(y \in k((q)),\ y' = \frac{dy}{dq}\Big)\,.$$

Ceci équivaut à:

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{y'}{y} = \frac{(\mu-\lambda)\dfrac{q}{4\alpha^2}}{1 - \dfrac{q^2}{4\alpha^2}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = a\left(1 - \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^{\frac{\lambda-\mu}{2}} \qquad (a \in k)\,.$$

On peut donc prendre $\varphi = \big(1 - \frac{q^2}{4\alpha^2}\big)^{\frac{\lambda-\mu}{2}}$, ce qui conduit à $\varphi_1 = \big(1 - \frac{q^2}{4\alpha^2}\big)^{\frac{\mu-\lambda}{2}}$ et $\varphi_0 = \big(1 - \frac{q^2}{4\alpha^2}\big)^{1-\frac{\mu-\lambda}{2}}$. On en déduit, en prenant $\mu = \lambda + 1$:

Lemme I.2

$\big((\alpha,\lambda) \in (k\backslash\{0\}) \times k\big)$

$$p + \lambda - \frac{q^2}{4\alpha^2}(p+\lambda+1) = \left(1 - \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^{1/2}(p+\lambda)\left(1 - \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^{1/2}.$$

D'où, en multipliant à droite par $p - \lambda$, la factorisation suivante dans R :

Proposition I.3

$\big((\alpha,\lambda) \in (k\backslash\{0\}) \times k\big)$

$$\boxed{p^2 - \lambda^2 - \frac{q^2}{4\alpha^2}(p+\lambda+1)(p-\lambda) = \Big(1 - \frac{q^2}{4\alpha^2}\Big)^{1/2}(p+\lambda)\Big(1 - \frac{q^2}{4\alpha^2}\Big)^{1/2}(p-\lambda).} \tag{2}$$

On peut montrer que cette formule (2) est encore vraie dans la situation décrite dans l'introduction, de sorte que X_λ est un opérateur inversible qui commute avec p, et qui vérifie

$$\boxed{X_\lambda q^2 X_\lambda^{-1} = \frac{q^2}{4\alpha^2}\big(p+\lambda+1\big)(\lambda-p)\,.} \tag{3}$$

Il nous reste donc à construire une k-algèbre R', extension de R, qui contient une famille $(X_\lambda)_{\lambda\in k}$ d'éléments inversibles, commutant avec p, et vérifiant la formule (3) ou, ce qui revient au même, la formule:

$$\boxed{q^{-2} X_\lambda q^2 = \frac{X_\lambda}{4\alpha^2}(p+\lambda+1)(\lambda-p)\,.} \tag{4}$$

II. Construction de l'algèbre R'.

La relation de commutation $[p,q]=q$ s'écrit encore $pq=q(p+1)$, de sorte que R se plonge naturellement dans la k-algèbre

$$A = k(p)\big((q;\sigma)\big)$$

dont les éléments sont les séries de Laurent $\sum_{n\geq n_0} q^n f_n(p)$ ($n_0\in\mathbb{Z}$) à coefficients, notés à droite, $f_n(p)$ dans $k(p)$ le corps des fractions rationnelles en l'indéterminée p à coefficients dans k; la structure de k-algèbre de A étant définie de manière habituelle au moyen de la règle de commutation

$$fq = q\sigma(f) \qquad \big(\forall\, f\in k(p)\big)\,,$$

où σ est le k-automorphisme de $k(p)$ qui transforme p en $p+1$.

II.1. Modification du problème

Proposition II.1

Pour construire une k-algèbre R', entension R, qui contient une famille $(X_\lambda)_{\lambda\in k}$ d'éléments inversibles, commutant avec p, et vérifiant (4), il suffit de construire un corps commutatif K extension de $k(p)$, qui vérifie les conditions suivantes:
i) σ se prolonge en un automorphisme de K (encore noté σ).
ii) K contient une famille $(X_\lambda)_{\lambda\in k}$ d'éléments nons nuls vérifiant:

$$\sigma^2(X_\lambda) = \frac{X_\lambda}{4\alpha^2}(p+\lambda+1)(\lambda-p) \quad (\forall\,\lambda\in k)\,.$$

Démonstration: Il suffit de prendre $R' = K\big((q;\sigma)\big)$. $\square$

On pourrait envisager de prendre pour K un corps de séries de Laurent formelles en p.

Cette idée se heurte aux deux obstacles majeurs suivants:

- Si $K = k((p))$ est le corps des séries de Laurent $\sum_{n \geq n_0} a_n p_n (n_0 \in \mathbb{Z},\ a_n \in k)$, il n'existe pas de prolongement naturel (c'est-à-dire continu relativement à la topologie p-adique) de σ à K.

En effet, on a $\frac{1}{1-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n$, alors que $\sigma\big(\frac{1}{1-p}\big) = -\frac{1}{p}$ n'est pas égal à $\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(p)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (p+1)^n$, cette série n'étant pas convergente.

- On peut tenter de contourner ce premier obstacle en prenant $K = k((u))$, le corps des séries de Laurent $\sum_{n \geq n_0} a_n u^n (n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in k)$ en $u = \frac{1}{p}$.

En effet, on a $\sigma(u) = \frac{u}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, u^{n+1}$ et on prolonge σ en un automorphisme de K en posant, pour tout $s = \sum_{n \geq n_0} a_n u^n$, $\sigma(s) = \sum_{n \geq n_0} a_n \sigma(u)^n$ (cette série étant bien convergente).

Cependant, la fonction méromorphe $\varphi_\lambda(z) = \alpha^{-z} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1-\frac{z}{2}\right)}$ ayant un point singulier essentiel, et non un pôle, à l'infini, il est très improbable qu'on puisse trouver dans K des éléments non nuls $X_\lambda (\lambda \in k)$ vérifiant la conditiion ii) de la proposition II.1.

Le lemme suivant prouve que c'est en fait impossible:

Lemme II.2

Si $\lambda \in k$, il n'existe aucun élément X_λ de $k((u)) \backslash \{0\}$ muni de l'automorphisme σ construit ci-dessus, et vérifiant la condition ii) de la proposition II.1.

Démonstration: Soit $X_\lambda \in k((u)) \backslash \{0\}$ tel que

$$\sigma^2(X_\lambda) = \frac{X_\lambda}{4\alpha^2}(u^{-1} + \lambda + 1)(\lambda - u^{-1})\,.$$

Alors si X_λ a pour valuation (en u) $v(X_\lambda) = n_0$, $\sigma^2(X_\lambda)$ a pour valuation $v\big(\sigma^2(X_\lambda)\big) = n_0 - 2$.

Ceci est impossible car il résulte de la construction de σ que $v\big(\sigma(s)\big) = v(s)$ pour tout $s \in k((u)) \backslash \{0\}$. $\square$

II.2. La fonction eulérienne formelle $\Gamma(ap+b)$.

Soit $\mathcal{B}$ une partie de k obtenue en choisissant un élément, et un seul, dans chacune des classes d'équivalence de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur k par:

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}\,.$$

Soit $T = k(p)[X_{a,b}]$ l'anneau (commutatif) des polynômes à coefficients dans $k(p)$ en une famille (infinie) de variables $(X_{a,b})$ où (a,b) décrit l'ensemble $(k\backslash\{0\}) \times \mathcal{B}$.

Posons $S = \{ap + b \mid (a,b) \in (k\backslash\{0\}) \times k\}$. C'est une partie de $k(p)$.

Convention. On note $\Gamma : S \to T$ l'application définie de la manière suivante:

1) Si $(a,b) \in (k\backslash\{0\}) \times \mathcal{B}$, alors $\Gamma(ap+b) = X_{a,b}$.

2) Soit $(a,b) \in (k\backslash\{0\}) \times k$ avec $b \notin \mathcal{B}$, de sorte qu'on peut écrire de manière unique: $b = b_0 + n$ où $b_0 \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{Z}$ $(n \neq 0)$.

- Si $n > 0$, alors $\Gamma(ap+b) = (ap + b_0 + n - 1)\dots(ap+b_0)X_{a,b_0}$
- Si $n < 0$, alors $\Gamma(ap+b) = \frac{1}{(ap+b_0-1)\dots(ap+b_0-m)}X_{a,b_0}$

où $m = -n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Proposition II.2.1

L'application Γ ci-dessus vérifie les propriétés suivantes:
1) Γ est à valeurs dans $T\backslash\{0\}$.
2) Si $(a,b) \in (k\backslash\{0\}) \times k$, alors $\Gamma(ap+b+1) = (ap+b)\Gamma(ap+b)$.

Démonstration: C'est une conséquence immédiate de la construction de Γ. $\square$

Proposition II.2.2

L'automorphisme σ de $k(p)$ se prolonge en un automorphisme encore noté σ, de T qui vérifie:

$$\big(\forall\,(a,b) \in (k\backslash\{0\}) \times k\big) \quad \sigma\big(\Gamma(ap+b)\big) = \Gamma\big(a(p+1)+b\big).$$

Démonstration: On sait qu'il existe un unique prolongement de σ en un endomorphisme, encore noté σ, de T qui vérifie:

$$\big(\forall\,(a,b) \in (k\backslash\{0\}) \times \mathcal{B}\big) \quad \sigma(X_{a,b}) = \Gamma(ap+a+b).$$

On déduit de la définition de Γ et de la proposition II.2.1 que $\sigma\big(\Gamma(ap+b)\big) = \Gamma(ap+a+b)$ $\big(\forall\,(a,b) \in (k\backslash\{0\}) \times k\big)$.

De même, il existe un (unique) prolongement de σ^{-1} en un endomorphisme σ' de T tel que:

$$\big(\forall\,(a,b) \in (k\backslash\{0\}) \times \mathcal{B}\big) \quad \sigma'(X_{a,b}) = \Gamma(ap-a+b).$$

Il vérifie, comme ci-dessus,

$$\sigma'\big(\Gamma(ap+b)\big) = \Gamma(ap-a+b) \quad \big(\forall\,(a,b) \in (k\backslash\{0\}) \times k\big).$$

Alors $\sigma'\sigma$ et $\sigma\sigma'$ sont des endomorphismes de T qui induisent l'identité sur $k(p)$ et vérifient: $\big(\forall\,(a,b) \in (k\backslash\{0\}) \times \mathcal{B}\big)\sigma'\sigma(X_{a,b}) = \sigma'\big(\Gamma(ap+a+b)\big) = X_{a,b}$ et $\sigma\sigma'(X_{a,b}) = \sigma\big(\Gamma(ap-a+b)\big) = X_{a,b}$. On a donc $\sigma'\sigma = \sigma\sigma' = Id_T$, de sorte que σ est bien un automorphisme de T. $\square$

II.3. Le corps K.

Notons U la k-algèbre $T[X]$ et prolongeons l'automorphisme σ à U en posant:

$$\sigma(X) = \frac{1}{\alpha} X \, .$$

Observons que, si on pose $X = \alpha^{-p}$, on a encore: $\sigma(X) = \alpha^{-(p+1)}$.

Par construction, U est un anneau commutatif, unitaire, intègre. Notons K son corps de fractions. On sait que σ se prolonge (de manière unique) en un automorphisme, encore noté σ, de K.

Proposition II.3.1

Le corps commutatif K, extension de $k(p)$, construit ci-dessus, possède la propriété suivante. Dans l'algèbre des séries de Laurent tordues $R' = K\big((q;\sigma)\big)$, les opérateurs $p^2+q^2-\lambda^2$ $(\lambda \in k)$ vérifient:

$$p^2+q^2-\lambda^2 = \; X_\lambda^{-1}\left(1-\frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^{1/2}(p+\lambda)\left(1-\frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^{1/2}(p-\lambda)X_\lambda$$

$$\textit{où} \quad X_\lambda = \alpha^{-p}\frac{\Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}+1-\frac{p}{2}\Big)} \, .$$

Démonstration: On a, par construction de l'automorphisme σ,

$$\begin{aligned}\sigma^2(X_\lambda) = \; & \alpha^{-(p+2)}\frac{\Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2}+\frac{p}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}-\frac{p}{2}\Big)} = \frac{X_\lambda}{\alpha^2}\Big(\frac{p}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{\lambda}{2}-\frac{p}{2}\Big) \, . \\ = \; & \frac{X_\lambda}{4\alpha^2}(p+\lambda+1)(\lambda-p) \, .\end{aligned}$$

D'où le résultat par la proposition II.1. $\square$

Observation. Lorsque $k = \mathbb{C}$, $k(p)$ s'identifie au corps $k(z)$ des fonctions rationnelles sur $\mathbb{C}$. On peut alors prendre pour K le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ muni de l'automorphisme σ défini par

$$\sigma\big(f(z)\big) = f(z+1) \, .$$

Références

1. A. Borel et al., *Algebraic D-Modules,* Perspectives in Mathematics, vol. 2, Academic Press Inc., Orlando, 1987.
2. A. Unterberger, *Calcul de Weyl construit sur une autre relation de commutation que celle d'Heisenberg.* Manuscrit non publié, Département de Mathématiques de l'Université de Reims, France, 1983.