SCIENTIA gerundensis, 21: 105-124 (1995)

TRANSFORMACIÓ DE POLÍEDRES REGULARS MITJANÇANT EL GIR DE LES SEVES ARESTES

Luis Sánchez-Cuenca
Universitat de Girona,
Escola Politècnica Superior,
Departament d'Arquitectura i Enginyeria de la Construcció.

RESUM

Les relacions que hi ha entre els políedres regulars, entre si i entre aquests i els semiregulars, permeten obtenir els uns dels altres mitjançant operacions geomètriques molt simples. En aquest article s'insisteix en aquest tema ja conegut, encara que per mitjà d'un nou procediment utilitzable mitjançant ordinador. Aquest procediment, que consisteix en el gir de les arestes amb la seva conversió prèvia en arcs geodèsics, mostra la seva eficàcia en relacionar el conjunt dels 20 políedres regulars i arquimedians. Però el més interessant és que es pot generalitzar per a altres superfícies polièdriques i a partir d'aquí pot servir per a definir noves formes de trames estructurals.

RESUMEN

Las relaciones que existen entre los poliedros regulares entre sí y entre ellos y los semirregulares permiten obtener unos de otros mediante operaciones geométricas muy simples. En este artículo se insiste en este tema ya conocido, aunque a través de un nuevo procedimiento utilizable mediante ordenador. Este procedimiento, que consiste en el giro de las aristas previo a su conversión en arcos geodésicos, muestra su eficacia al relacionar el conjunto de los 20 poliedros regulares y arquimedianos. Pero su mayor interés puede estar en que puede generalizarse para otras superficies poliédricas y a partir de ellas puede servir para definir nuevas formas de tramas estructurales.

ABSTRACT

The connexions between regular polyhedra and between semiregular and regular polyhedra allow to obtain one from another by simple geometric transformations. In this paper we treat with this well known theme, although by means of a new procedure that we can use with the computer. This proceeding, that consists on the rotation of the edges previously converted into its geodesic arcs, shows here its efficiency in relating the 20 regular and semiregular polyhedra. But an added interest could be that it can be generalised and if we use it with other polyhedric surfaces we'll be able to obtain new types of structural grids.

Keywords: polyhedra, rotations, structural grids, virhedra.

INTRODUCCIÓ

Per als matemàtics, la geometria clàssica és una disciplina ja tancada i definitivament resolta, cosa que justificaria l'escassa atenció que avui se li dedica. Per als no estrictament matemàtics, aquesta geometria manté encara el seu poder de suggestió, i la seva consideració com a disciplina tancada no impedeix que continuï essent un camp obert a la investigació tant per les seves aplicacions pràctiques en el món de la tecnologia com per la càrrega simbòlica que comporta.

Els políedres constitueixen, dins aquesta geometria tancada i resolta, una estructura encara més tancada. De fet, el conjunt de políedres regulars i semiregulars ja va ser proposat amb caràcter definitiu pels grecs. Els noms pels quals els coneixem, platònics els regulars i arquimedians els semiregulars, ho evidencien. Però això no és obstacle perquè no puguem continuar-hi especulant. Prova d'això és que no fa tant de temps que les consideracions de Buckminster Fuller sobre l'icosàedre, l'esfera i les seves línies geodèsiques varen obrir un terreny ple de possibilitats en el camp de les estructures. I encara Fuller es va permetre alhora proposar amb la seva *energetic and sinergetic geometry* gairebé una teoria filosòfica.

En aquest article, aprofitant aquest caràcter tancat del conjunt dels políedres, s'analitzen les interrelacions que es produeixen entre ells i que els permeten transformar-se els uns en els altres. L'estudi es realitza des d'un punt de partida particular com és el gir de les seves arestes, i els resultats que proporciona el procediment confirmen, com es podria esperar, l'estreta relació que hi ha entre tots els políedres entre si, fins al punt que bé es podria dir que només hi ha un sol políedre, la geometria interna del qual prediu tots els altres. L'estudi té un caràcter especulatiu, però sense perdre de vista les aplicacions que poguessin realitzar-se en el camp de les trames estructurals, cosa que constitueix el seu objectiu últim.

RELACIONS ENTRE POLÍEDRES

Els políedres estan estretament relacionats entre si i de maneres molt diverses. Una d'aquestes relacions és la que apareix entre ells, ja siguin regulars o arquimedians, i els seus duals o conjugats. Recordem que políedre dual d'un altre és el que s'ha obtingut per correspondència entre vèrtex d'un i cara de l'altre, de manera que aquesta resulti perpendicular a la direcció que uneix el vèrtex del primer amb el seu centre.

Aquest concepte de políedre dual, que per als semiregulars o arquimedians produeix resultats no fàcilment intuïbles, en el cas dels regulars els produeix amb caràcter immediat, fins al punt que el conjunt de políedre regular i el seu conjugat s'obté directament unint de manera ordenada els centres de les cares d'un d'ells. En aquest cas les arestes del políedre dual resulten perpendiculars una a una a les del políedre original.

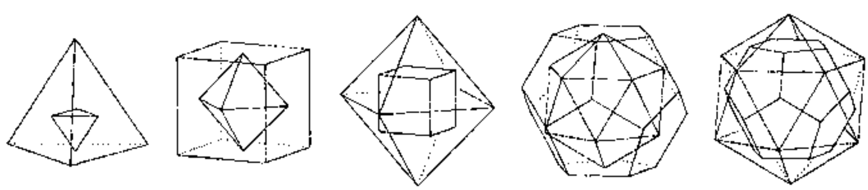

Figura 1. Els cinc políedres regulars i els seus conjugats o duals obtinguts unint els centres de les cares. Les arestes del nou políedre resulten perpendiculars una a una a les del políedre original.

Aquesta perpendicularitat entre arestes servirà de punt de partida per a la proposta d'aquest article. És a dir, el políedre dual o conjugat d'un políedre regular es pot obtenir mitjançant el gir de 90° de cada una de les arestes del políedre original, la intersecció d'aquestes prolongacions determinaran els vèrtexs del políedre dual.

Ara bé, en punts intermedis d'aquests girs, és a dir, entre 0° i 90°, veurem quins resultats s'obtenen i comprovarem que és precisament en aquests girs intermedis que el procediment produeix resultats més interessants.

Una altra relació prou coneguda és la que es produeix entre els políedres regulars i els arquimedians. Qualsevol d'aquests es pot obtenir com a transformació d'un políedre regular mitjançant truncament de vèrtexs, bisellament d'arestes o mitjançant una combinació d'ambdós. Aquestes transformacions també es poden aconseguir mitjançant un gir de les arestes d'un políedre regular, gir que correspondrà precisament a un d'aquests angles intermedis (entre 0° i 90°) assenyalats anteriorment.

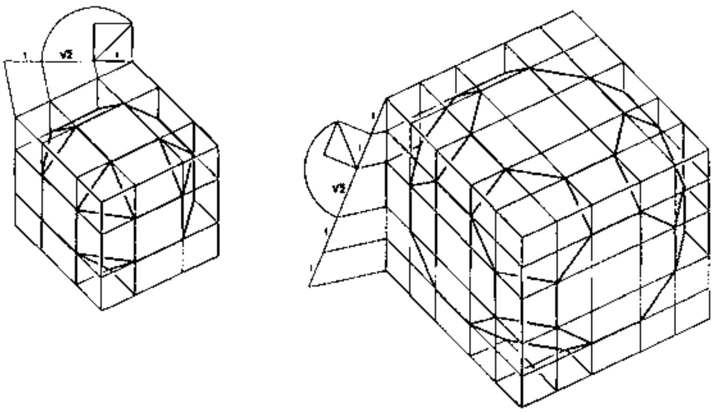

Figura 2. Exemple del políedres arquimedians obtinguts a partir del cub mitjançant una combinació de truncament de vèrtexs i bisellatges d'arestes (1).

A partir d'ara, i per identificar amb claredat cada un dels políedres, s'utilitzarà la notació de HUYBERS segons la figura 3.

GIR DE LES ARESTES EN ELS POLÍEDRES REGULARS

El procediment que es descriu consisteix a girar simultàniament un cert angle totes i cadascuna de les arestes d'un políedre regular. L'eix de gir serà un radi de la seva superfície envoltant, és a dir, de la seva esfera circumscrita passant en cada cas pel punt mitjà de l'aresta girada. En aquestes condicions aresta girada i eix resulten perpendiculars.

Quan el gir és de 90° les prolongacions d'aquestes arestes girades es troben en els nous vèrtexs del políedre dual, tal com s'ha assenyalat abans. Però quan l'angle de gir és menor de 90° les prolongacions de les arestes no es troben una vegada girades i, per tant, queden desconnectades. Es pot veure aquest efecte en un cub a la figura 4.

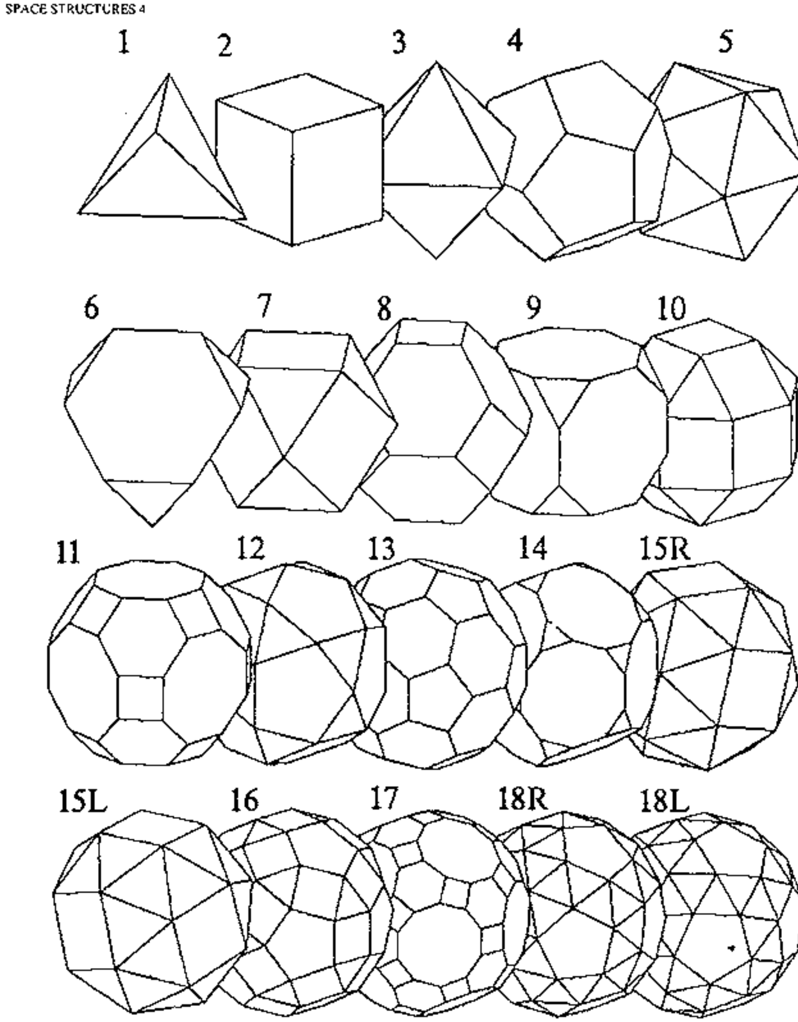

Figura 3. El conjunt dels 20 políedres regulars i arquimedians segons Huybers (2). P15 i P18 apareixen amb les seves dues variants, la dextrogira i la levogira.

Per assegurar que es produirà aquesta connexió i que es pot completar el procés se seguiran els passos següents:

1. Les arestes es converteixen prèviament en arcs geodèsics de la seva esfera circumscrita.

2. Es giren aquests arcs utilitzant com a eix de gir el radi de l'esfera que passa en cada cas pel punt mitjà de les arestes i del seu arc geodèsic corresponent. Una vegada girats es prolonguen els arcs de manera que es pugui assegurar la seva intersecció. Aquesta intersecció, que no es produïa en el cas de les arestes, serà sempre

possible en el cas dels arcs, ja que aquests, una vegada girats, continuen estant sobre la mateixa superfície esfèrica.

3. Les interseccions deixen els arcs geodèsics dividits en tres parts que resulten simètriques respecte del centre de l'arc. Al mateix temps, el vèrtex en què concorrien les arestes i els seus arcs geodèsics es descomponen en una forma poligonal de tants elements com arestes o arcs geodèsics formaven el vèrtex.

4. Reconvertint aquests arcs subdividits en les seves cordes a manera de noves arestes s'obté una espècie de forma polièdrica, diferent de l'original, que és la que donarà lloc a les transformacions d'un políedre en un altre.

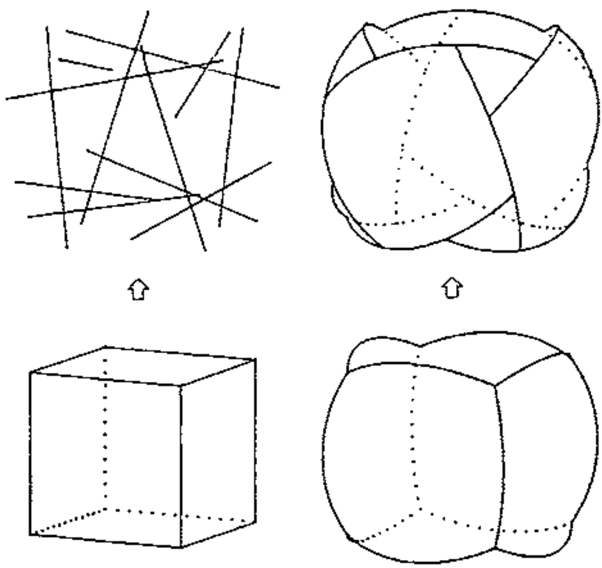

Figura 4. Les arestes queden desconnectades una vegada girades. Els arcs geodèsics asseguren en canvi la seva intersecció.

VIREDRES

Descrit el mètode, que per a les figures de l'article s'ha utilitzat mitjançant el programa AUTOCAD 12, certs angles de gir aplicats a les arestes produeixen resultats de particular interès.

En primer lloc, quan l'angle de gir és l'adequat (un angle δ diferent per a cada un dels cinc políedres regulars) l'arc queda dividit en tres parts iguals a les quals correspondran cordes també iguals, i els extrems continuaran estant sobre la superfície de l'esfera circumscrita del políedre original. Aquestes cordes, a manera de noves arestes, configuren una espècie de forma polièdrica que hem anomenat "viredre", fent referència al fet que procedeix de virar les arestes d'un políedre que és el seu punt de partida (3).

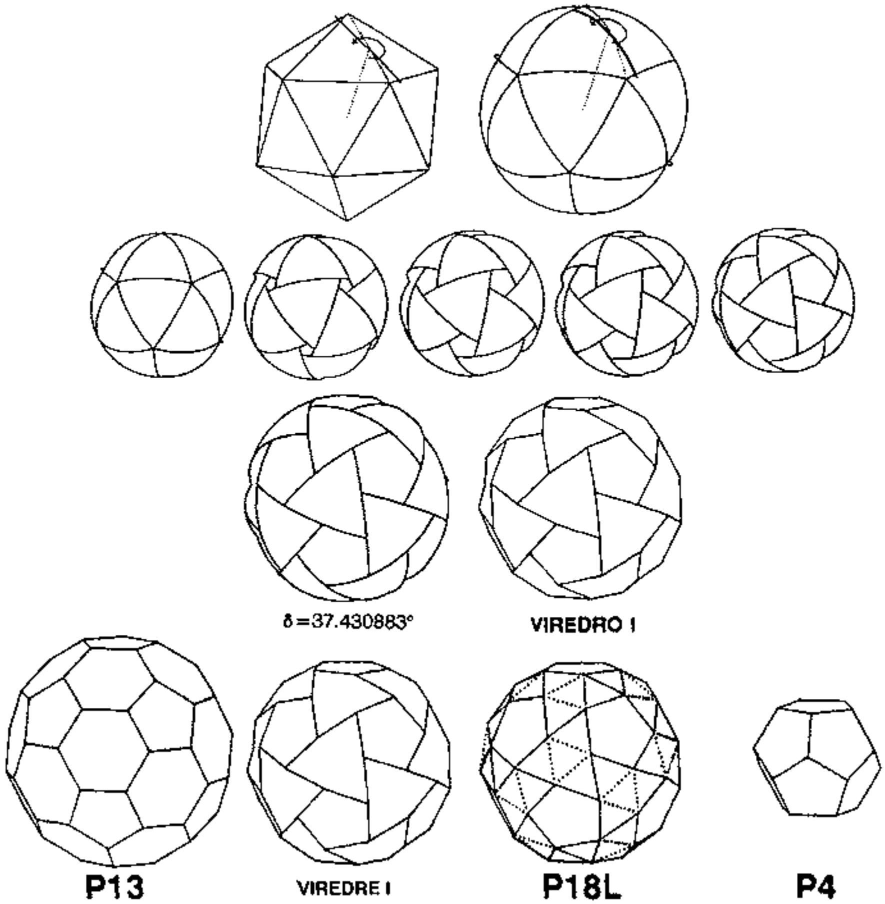

Figura 5. La figura explica com es genera el viredre de l'icosàedre. A la part inferior, el viredre en les seves posicions estesa (a l'esquerra) i comprimides (a la dreta). Es pot observar que en aquest últim procés els pentàgons resten constants en la mida. Petits girs d'aquestes cares pentagonals, conservant l'orientació del seu pla, allunyen o acosten els seus vèrtexs, cosa que produeix diferents formes polièdriques, totes inscriptibles en una esfera.

Aquest viredre, diferent per a cada un dels políedres regulars, té algunes propietats característiques, com ara que, amb articulacions en els seus enllaços pot variar la mida de manera coherent, és a dir, conservant la seva condició d'estar inscrit en una esfera en què el seu radi alhora també varia. El viredre pot així expandir-se fins a transformar-se en un políedre arquimedià, o comprimir-se fins a transformar-se en el políedre conjugat del políedre original. En una posició comprimida intermèdia els seus vèrtexs coincideixen amb els de l'altre políedre, arquimedià en general.

En segon lloc, amb un altre angle de gir també característic i diferent per a cada políedre regular, els arcs, un cop girats, es troben en el seu punt mitjà i l'arc es divideixen en dues parts iguals. En reconvertir en cordes l'arc dividit, aquestes cordes a manera d'arestes configuren un políedre d'arestes iguals, generalment un arquimedià, que es pot inscriure en la mateixa esfera circumscrita del políedre original.

Finalment, quan l'angle de gir de les arestes del políedre regular original és de 90° el transformat és, com ja s'ha assenyalat abans, el seu políedre conjugat o dual.

En resum, mitjançant el gir de les seves arestes, cada políedre regular pot transformar-se, de manera directa o bé per mitjà del seu viredre corresponent, en una sèrie de políedres regulars o arquimedians, segons els casos, i, per tant, inscriptibles en una esfera en la qual el radi variarà entre límits bastant amplis.

En les figures que segueixen es mostren aquestes transformacions amb indicacions dels diferents angles de gir necessaris en cada cas i dels diferents radis de les esferes circumscrites corresponents.

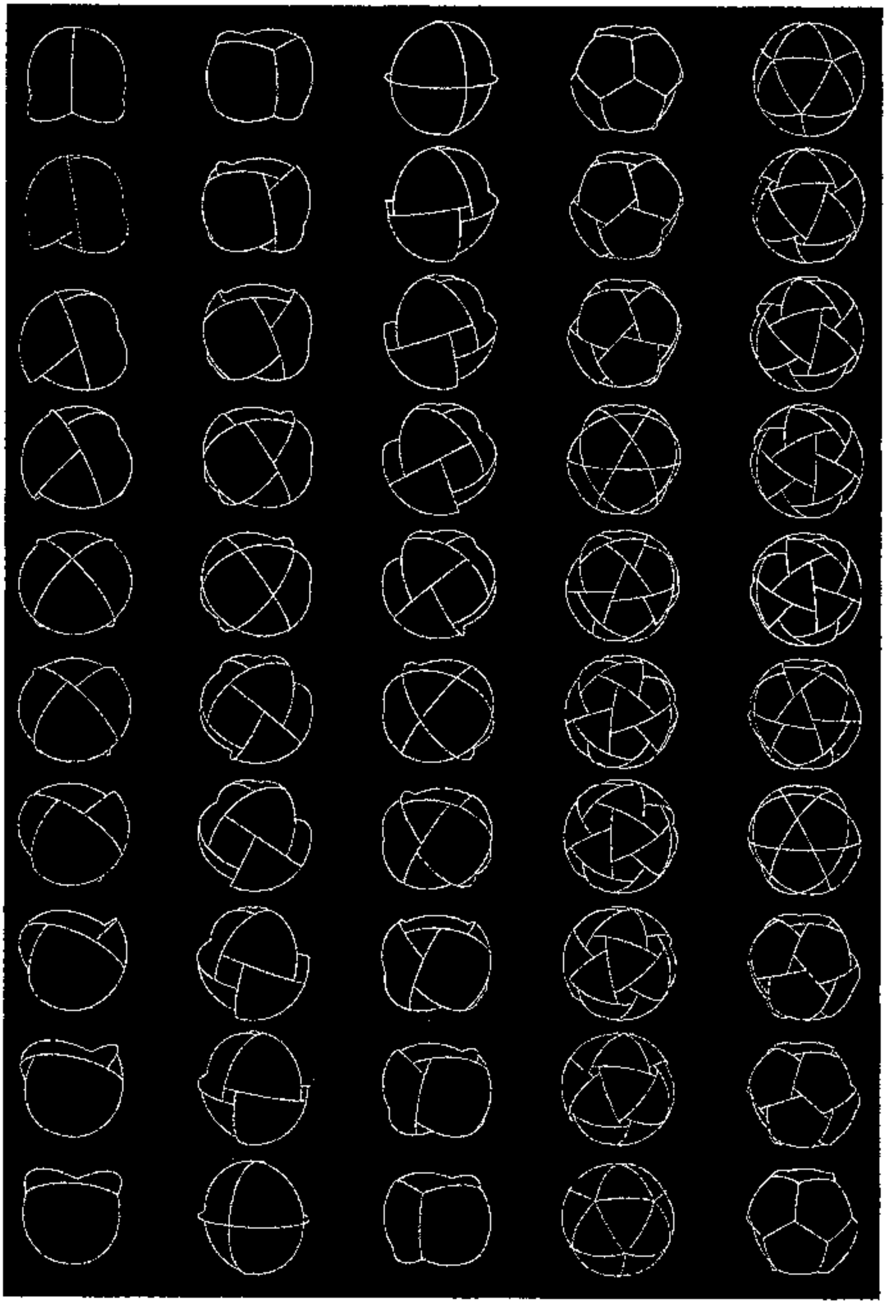

Figura 6. El gir d'arestes (més ben dit, dels seus arcs geodèsics) en cada un dels 5 políedres regulars. A cada columna es passa des d'un políedre regular fins al seu conjugat amb posicions intermèdies que corresponen a altres políedres (vegeu les figures 8 a 12).

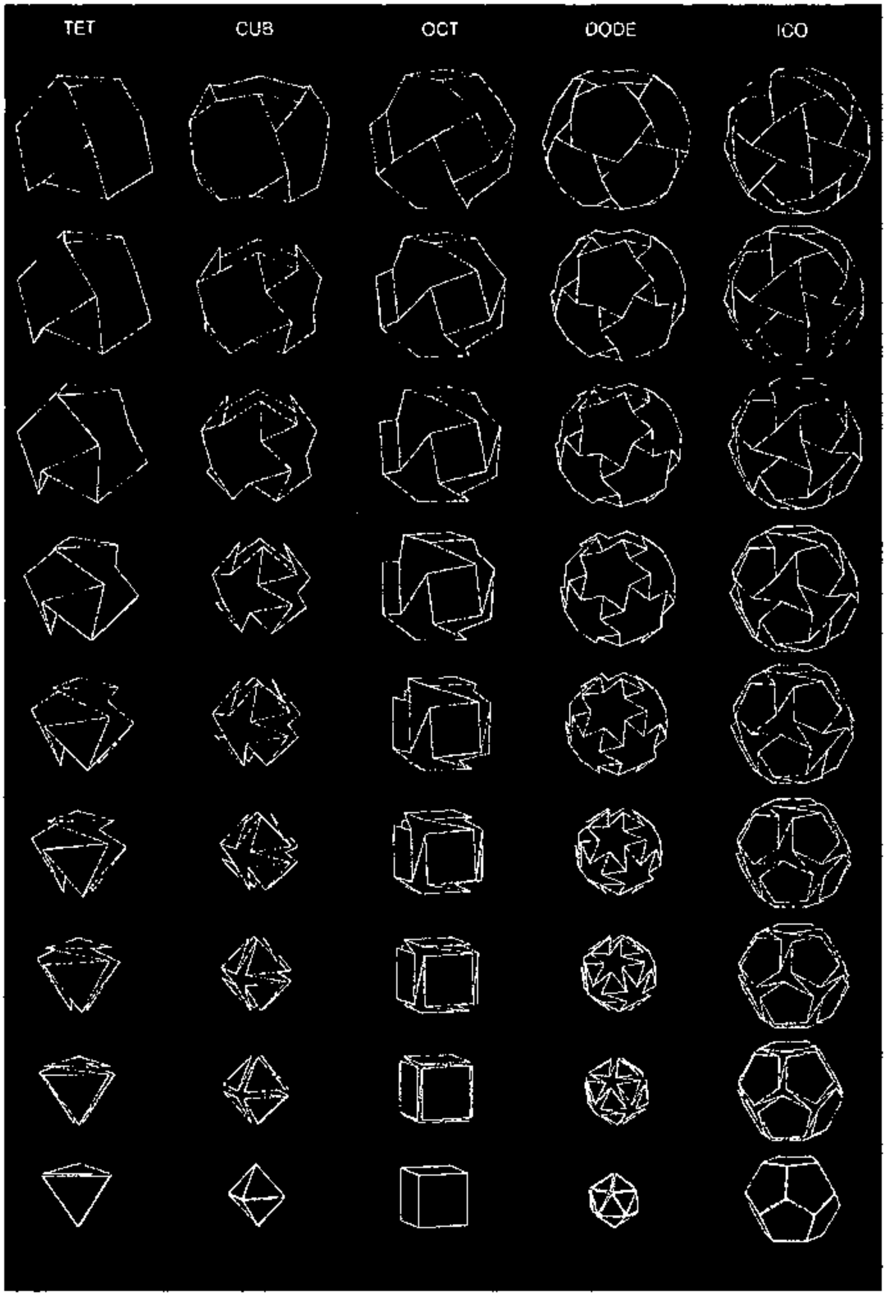

Figura 7. Variació de la mida del políedre de cada un dels 5 políedres. En qualsevol de les fases, els vèrtexs es troben sobre la superfície d'una esfera i coincideixen en una fase intermèdia amb els d'un políedre arquimedià (vegeu les figures 8 a 12).

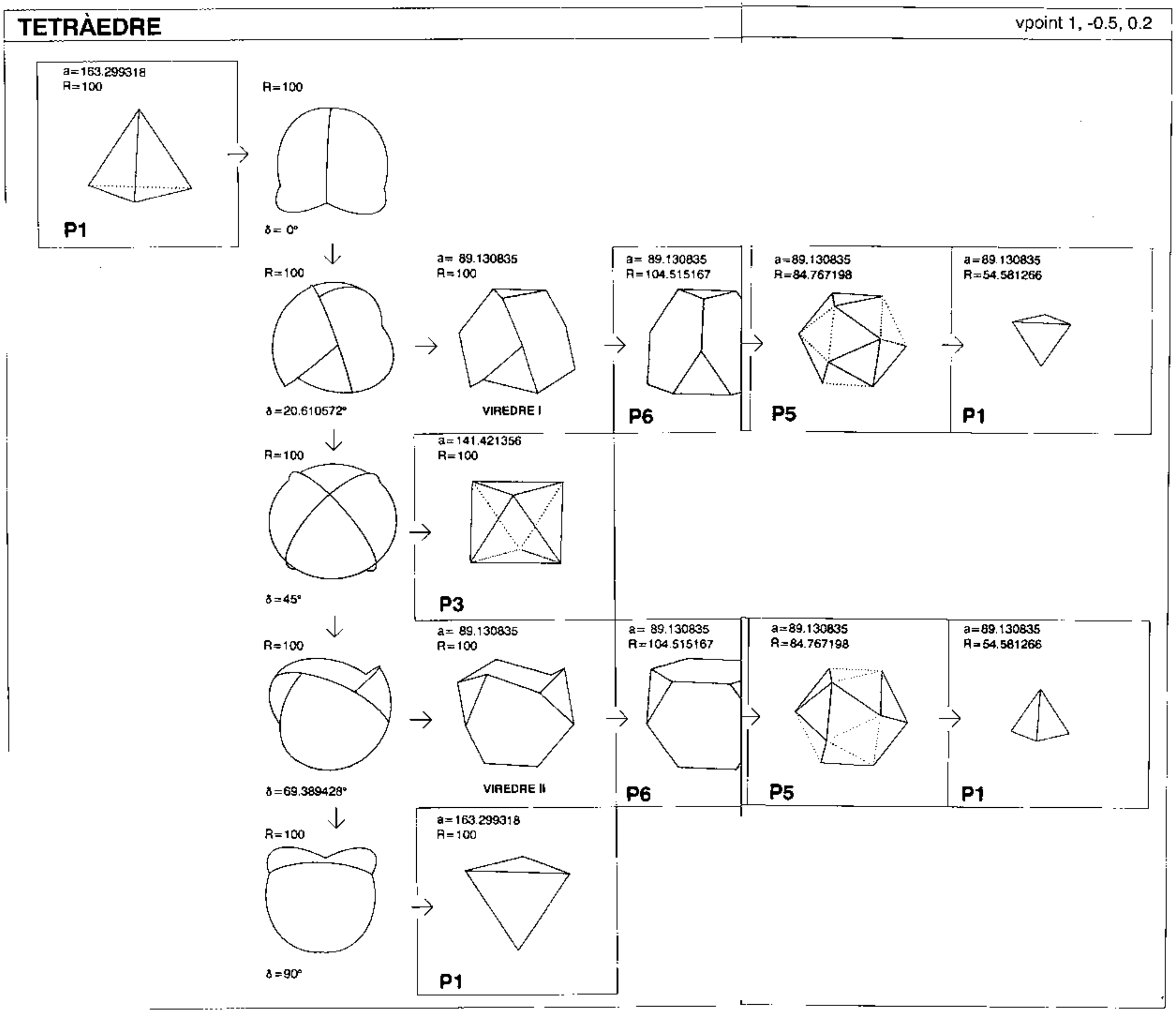

Figura 8. TETRÀEDRE. P1

De manera directa es transforma en P3 i en P1 com el seu conjugat. Per mitjà dels seus viredres es transforma estès en P6 i, comprimit, en P5 i de nou en si mateix i en el seu conjugat, és a dir, en P1 en ambdós casos.

R és el radi de l'esfera circumscrita en cada cas.

a és l'aresta de la forma polièdrica, la longitud de la qual és constant en cada viredre i els seus derivats.

δ és l'angle en el qual ha estat girada l'aresta del políedre regular (o el seu arc geodèsic) en cada cas.

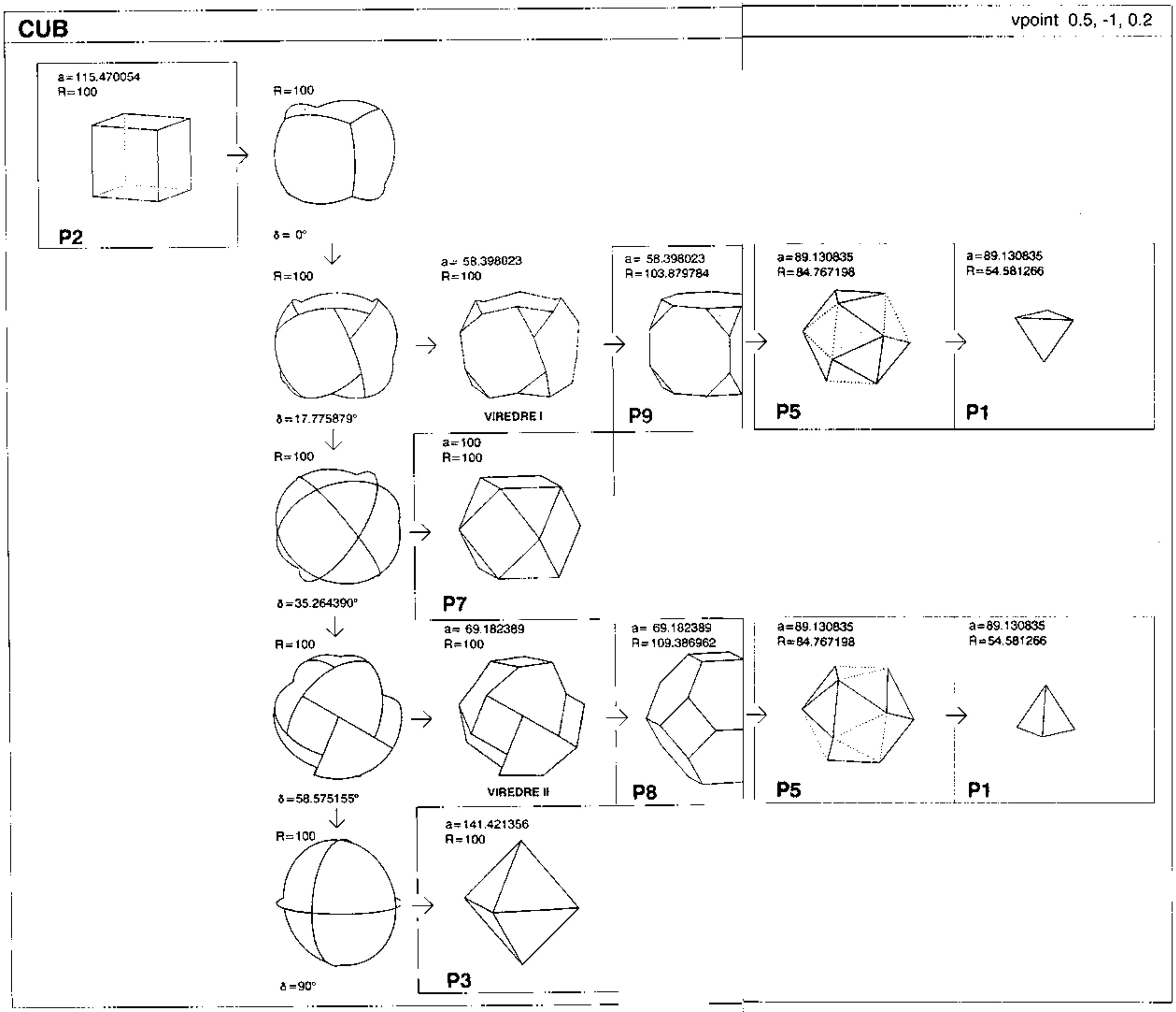

Figura 9. CUB. P2

De manera directa es transforma en **P7** i en P3 com el seu conjugat. A través dels seus viredres es transforma estès en P9 i P8 i, comprimit, en P15R i de nou en si mateix i en el seu conjugat, és a dir, en P2 i en P3.

R és el radi de l'esfera circumscrita en cada cas.

a és l'aresta de la forma polièdrica, la longitud de la qual és constant en cada viredre i els seus derivats.

δ és l'angle en el qual ha estat girada l'aresta del polièdre regular (o el seu arc geodèsic) en cada cas.

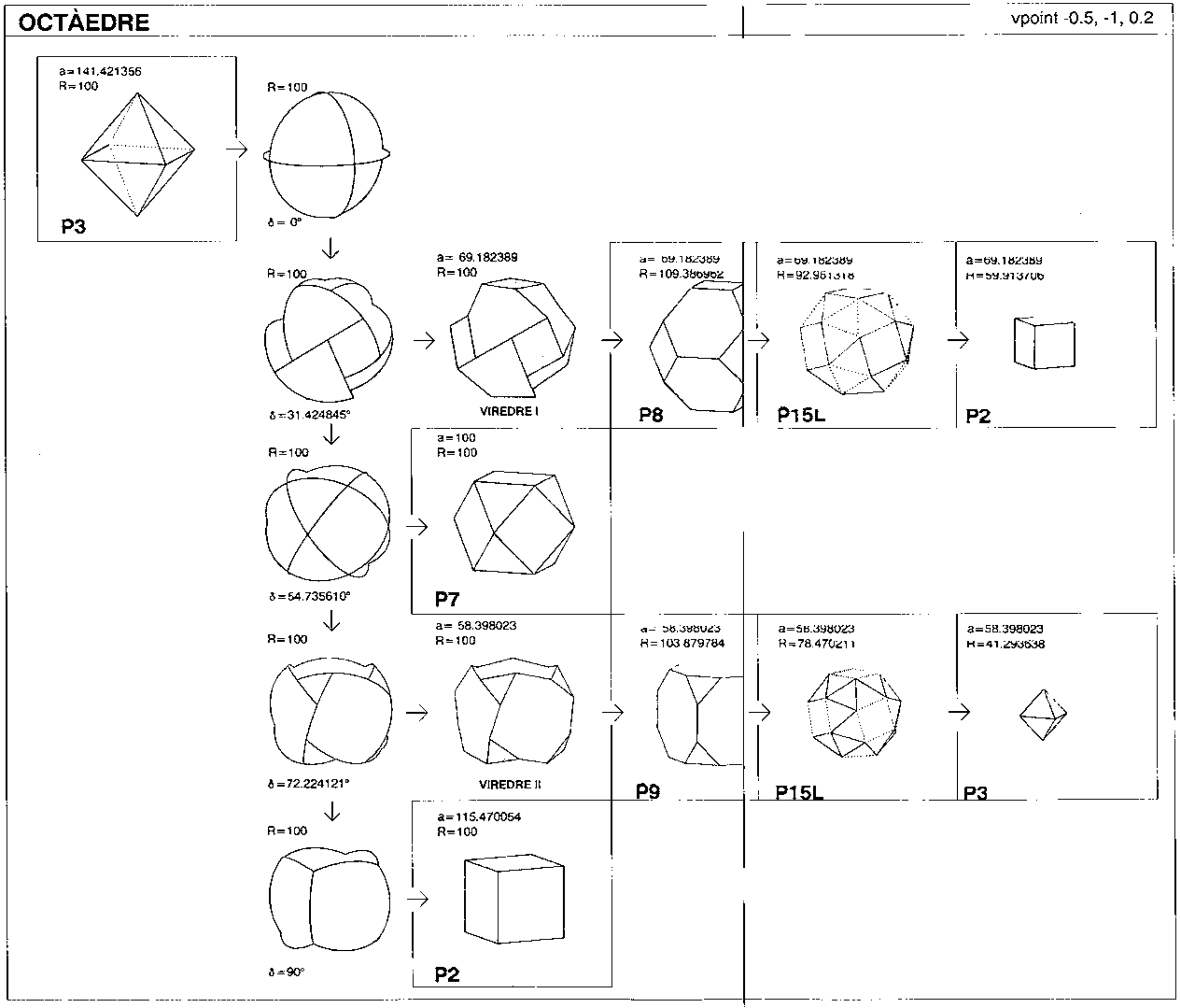

Figura 10. OCTÀEDRE. P3

De manera directa es transforma en P7 i en P2 com el seu conjugat. Per mitjà dels seus viredres es transforma estès en P8 i P9 i, comprimit, en P15L i de nou en si mateix i en el seu conjugat, és a dir, en P3 i en P2.

R és el radi de l'esfera circumscrita en cada cas.

a és l'aresta de la forma polièdrica, la longitud de la qual és constant en cada viredre i els seus derivats.

δ és l'angle en el qual ha estat girada l'aresta del políedre regular (o el seu arc geodèsic) en cada cas.

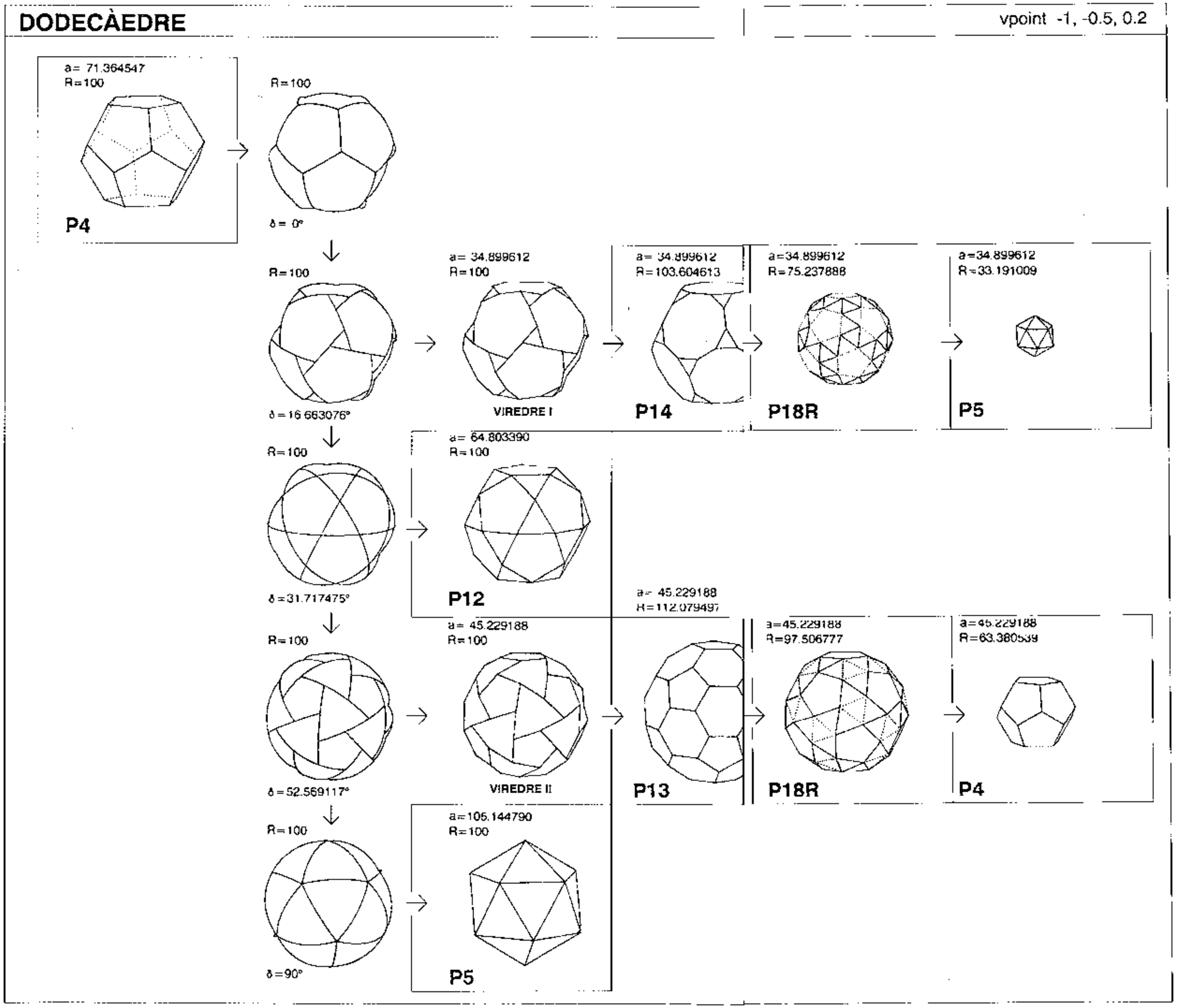

Figura 11. DODECÀEDRE. P4

De manera directa es transforma en P12 i en P5 com el seu conjugat. Per mitjà dels seus viredres es transforma estès en P14 i P13 i, comprimit, en P18R i de nou en si mateix i en el seu conjugat, és a dir, en P4 i en P5.

R és el radi de l'esfera circumscrita en cada cas.

a és l'aresta de la forma polièdrica, la longitud de la qual és constant en cada viredre i els seus derivats.

δ és l'angle en el qual ha estat girada l'aresta del políedre regular (o el seu arc geodèsic) en cada cas.

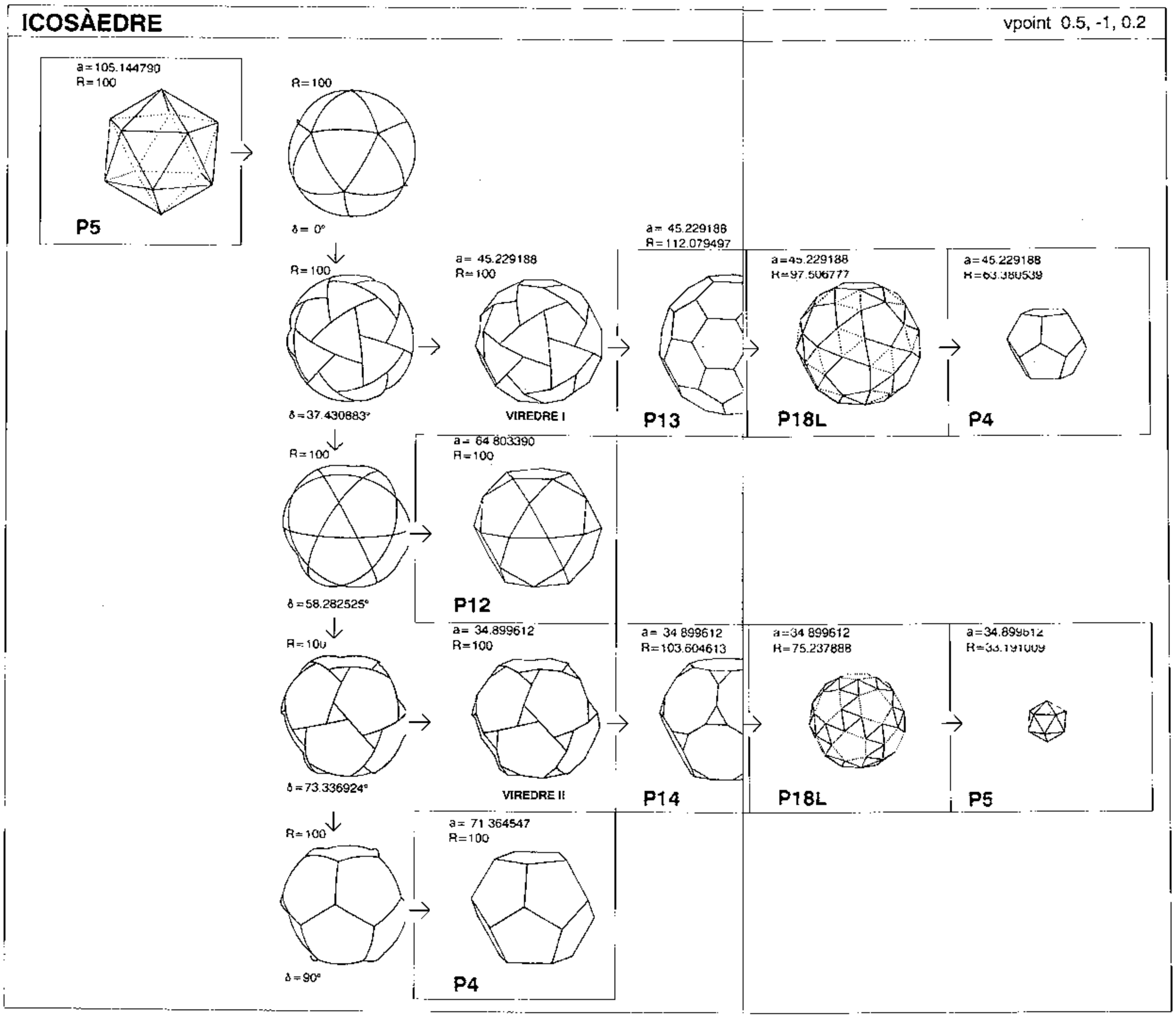

Figura 12. ICOSÀEDRE. P5

De manera directa es transforma en P12 i en P4 com el seu conjugat. Per mitjà dels seus viredres es transforma estès en P13 i P14 i, comprimit, en P18L i de nou en si mateix i en el seu conjugat, és a dir, en P5 i en P4.

R és el radi de l'esfera circumscrita en cada cas.

a és l'aresta de la forma polièdrica, la longitud de la qual és constant en cada viredre i els seus derivats.

δ és l'angle en el qual ha estat girada l'aresta del políedre regular (o el seu arc geodèsic) en cada cas.

CONCLUSIONS

El conjunt dels políedres regulars i arquimedians queda així relacionat mitjançant del gir de les seves arestes, ja sigui directament o per mitjà del viredre corresponent, de manera que qualsevol es pot obtenir per aquests procediments com a transformat d'algun altre.

N'hi ha quatre, P10, P11, P16 i P17, que no apareixen en les figures d'aquest article, ja que s'obtenen de manera més particular. P10 i P16 s'obtenen des de P3 i P5, respectivament, mitjançant girs d'arestes d'un valor tal que deixen els arcs geodèsics dividits en la proporció $1{:}\sqrt{2}{:}1$, de manera que la corda corresponent a $\sqrt{2}$ passaria a ser la diagonal d'una de les cares quadrades del políedre transformat (vegeu la figura 2).

Alhora, P11 i P17 s'obtenen a partir de P3 i P5 amb angles de gir d'arestes que divideixen l'arc geodèsic en la proporció $1{:}1{:}\sqrt{2}$, amb les mateixes consideracions anteriors respecte a la corda corresponent al valor $\sqrt{2}$.

Bibliografia

(1) SANCHEZ GALLEGO, J.A., *Geometria descriptiva,* Edicions UPC, Barcelona, 1993. Pàg. 189.

(2) HUYBERS, P., The formation of polyhedra by the rotation of polygons, *Space structures,* 4, Londres, 1993, pàg. 1097-1108.

SANCHEZ-CUENCA, L., Geometría flexible para las estructuras de barras, *Informes de la construcción*, vol. 45, núm. 430, març/abril 1994, Pàgs. 31-42.

Mathmatical models H. M. CUNDY and A.P. ROLLETT Tarquin Publications 3ª edición 1981.