Publl. Mat. U.A.B.
nº 6 des. 1977

UN TEOREMA DE COINCIDENCIA

J. Cerdà

Si $\varphi(t) = kt$ $(0 \leq k < 1)$, el teorema de la aplicación contractiva asegura la existencia y unicidad de solución para

$$g(x) = x,$$

supuesta $g: X \to X$ tal que $d(g(x), g(y)) \leq \varphi[d(x,y)]$, si $x, y \in X$ y si X es espacio métrico completo.

El resultado subsiste (Boyd y Wong, 1969) si se sustituye $\varphi(t) = kt$ por cualquier función de contracción o función $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ continua por la derecha tal que $\varphi(\varepsilon) < \varepsilon$ si $\varepsilon > 0$. Veamos cómo la situación se extiende a un "teorema de coincidencia", que en el caso $X = Y$ métrico completo y $f = \mathrm{Id}$ da lugar al teorema de Boyd y Wong:

Teorema: Sean φ función de contracción, X espacio topológico, Y espacio métrico y $f, g: X \to Y$ dos funciones que cumplen:

(1) f ó g es propia (*)

(2) f es continua exhaustiva (ó $f(X) \supset g(X)$)

(3) $\overline{g(X)}$ es completo (p.e., Y completo)

(4) $d(g(x), g(y)) \leq \varphi[d(f(x), f(y))]$ si $x, y \in X$

Entonces f y g son constantes sobre $S = \{x : f(x) = g(x)\}$ ("unicidad") y S no es vacío (existencia).

(*) La antiimagen de un compacto es compacta.

Demostración: Observar que $d(g(x),g(y)) \leq d(f(x),f(y))$, $<$ si $f(x) \neq f(y)$. Para la "unicidad" observar que de $x,y \in S$ resulta

$$d(g(x),g(x)) \leq d(f(x),f(y)) = d(g(x),g(y)),$$

de modo que ha de ser $f(x) = f(y)$.

Para la existencia elegimos $x_0 \in X$, $x_1 \in f^{-1}g(x_0)$, $x_2 \in f^{-1}g(x_1), \ldots$ (hipótesis (2)) y queda construida $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que

$$g(x_n) = f(x_{n+1}) ,$$

y resulta

$$d(g(x_n),g(x_{n-1})) = d(f(x_{n+1}),\ f(x_n)) \searrow 0 \qquad (a)$$

por ser decreciente $[d(g(x_n),g(x_{n-1})) \leq d(f(x_n),f(x_{n-1}))= = d(g(x_{n-1}),g(x_{n-2}))]$ y, sisu límite es ε, ha de ser $\varepsilon = 0$, pues φ es continua por la derecha y por tanto $\varphi(\varepsilon)= = \lim\limits_n \varphi\, [d(f(x_n),f(x_{n-1}))] \geq \lim\limits_n d(g(x_n),g(x_{n-1})) = \varepsilon$. Ha de ser $\varphi(\varepsilon) < \varepsilon$ si $\varepsilon > 0$.

Veamos que $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, o sea $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, es de Cauchy. Si no, existe $\varepsilon > 0$ para el que se pueden determinar

$$k \leq p_k < q_k \quad \text{enteros (para todo } k \in \mathbb{N})$$

tales que

$$d(f(x_{q_k}),\ f(x_{p_k})) \geq \varepsilon \qquad \text{(b)}$$

y, si se toma q_k el menor posible,

$$d(f(x_{q_k-1}),\ f(x_{p_k})) < \varepsilon \quad . \qquad \text{(c)}$$

De (b), (c) y (a) resulta

$$r_k := d(f(x_{q_k}),\ f(x_{p_k})) \underset{k \to \infty}{\to} \varepsilon \text{ (por la derecha)} \qquad \text{(d)}$$

ya que

$$\varepsilon \leq r_k \leq d(f(x_{q_k}), f(x_{q_k-1})) + d(f(x_{q_k-1}), f(x_{p_k})) <$$

$$< d(f(x_{q_k}), f(x_{q_k-1})) + \varepsilon \underset{k}{\to} \varepsilon \ .$$

Por otra parte, utilizando (a) y (d),

$$r_k \leq d(f(x_{q_k}), f(x_{q_k+1})) + d(f(x_{q_k+1}), f(x_{p_k+1})) + d(f(x_{p_k+1}), f(x_{p_k})) \leq$$

$$\leq d(f(x_{q_k}), f(x_{q_k+1})) + \varphi(r_k) + d(f(x_{p_k+1}), f(x_{p_k})) \underset{k}{\to} \varphi(\varepsilon) \text{ y sería}$$

$\varepsilon \leq \varphi(\varepsilon)$, en contradicción con $\varepsilon > 0$ y $\varphi(\varepsilon) < \varepsilon$.

Existe $\lim_n g(x_n) = \lim_n f(x_n) = y \in \overline{g(X)}$ y, si p.e. f es propia (hipótesis (1)), existe $x \in X$ punto de acumulación de $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset f^{-1}[\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}]$. Al ser f y g continuas, f(x) y g(x) son puntos de acumulación de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y de $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, o sea

$g(x) = \lim g(x_n) = \lim f(x_n) = f(x)$.

REFERENCIAS

D.W. Boyd & J.S.W. Wong: Proc. Amer. Math. Soc.,20(1969) 458-464.