H- ESPAIS

M. Castellet

L'objectiu d'aquesta conferència és donar una visió general de la teoria dels H-espais per als no-especialistes en aquesta matèria i al mateix temps plantejar algunes qüestions i problemes actuals sobre H-espais de dimensió finita.

1. H-espais

1.1. Definició

Un H-espai és un espai topològic X amb punt base e junt amb una aplicació continua $m: X \times X \to X$ tal que

a) $m \mid e \times X \simeq 1_X \simeq m \mid X \times e$;

és a dir, m és una multiplicació amb "unitat homotòpica e".

Equivalentment, si $\nabla : X \vee X \to X$ és el plegament ("Faltungsabbildung") i $i : X \vee X \to X \times X$ la inclusió natural, la condició a) equival a $\nabla \simeq m_0 i$, és a dir, a la commutativitat homotòpica del diagrama.

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "m"] & X \\ X \vee X \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "\nabla"'] & \end{tikzcd}$$

Cal remarcar, en tot això, que totes les homotòpies han de respectar els punts base.

1.2. Exemples

Els grups de Lie, els grups topològics, S^7={Octaves de longitud 1} (la multiplicació a S^7 té invers però no és associativa).

1.2.2. Els espais de llaços: Sigui Y un espai topològic arbitrari amb punt base; l'espai de llaços de Y és l'espai $\Omega Y = \mathrm{Map}_0(S^1, Y)$. La multiplicació m ve donada per la composició de llaços i el llaç trivial és una unitat homotòpica.

1.3. Motivacions per l'estudi dels H-espais

1.3.1. Considerar els H-espais com una generalització dels grups de Lie. Moltes propietats dels grups de Lie valen també per a H-espais de dimensió finita.

1.3.2. A la categoria $\mathcal{H}\mathcal{T}op$ (d'espais topològics puntejats i classes d'homotopia d'aplicacions contínues), $[Y,X]_0$ és un grup sempre que X sigui un H-espai amb associativitat homotòpica i amb inversos homotòpics.

1.4. Dues preguntes

Considerem espais del tipus d'homotopia d'un complex connex de dimensió finita.

1.4.1. Donat Y, existeix alguna estructura de H-espai a Y? L'interès es centra a trobar condicions necessàries.

1.4.2. Classificar els H-espais de dimensió finita (és a dir H-espais del mateix tipus d'homotopia que un complex de dimensió finita).

2. Cohomologia dels H-espais

2.1. La prehistòria dels H-espais

A la segona conferència sobre Topologia, celebrada a Genève l'octubre del 1935, l'Elie Cartan (1869-1961) va parlar de la topologia dels grups de Lie (5); al final de la conferència en Cartan va exposar el següent teorema, que dóna l'estructura homològica dels grups de les quatre classes de Killing-Cartan: "L'annell d'intersecció d'un tal espai és isomorf, en cada dimensió, a l'anell d' intersecció d'un producte cartesià $S^{m_1} \times S^{m_2} \times \ldots$; el polinomi de Poincaré (és a dir, el polinomi en una variable els coeficients del qual són els nombres de Betti) és, per tant, $(1+t^{m_1})(1+t^{m_2})\ldots$; els m_i són senars i poden donar-se explícitament."

Aquest teorema fou demostrat, amb mètodes molt diferents, per Lev Pontriagin, Richard Brauer i Charles Ehresmann. Només els 5 grups excepcionals s'escapen d'aquesta descripció de llur anell de cohomologia. En Cartan va acabar senyalant: "És d'esperar que es trobarà també un procés general que expliqui la forma tan particular dels polinomis de Poincaré dels grups simples tancats".

Fou en Heinz Hopf (1894-1971) qui, al 1939, va entrar en relació amb aquest desig d'en Cartan en estudiar aplicacions $F: RP^m \times RP^m \to RP^m$. En Hopf va demostrar: "Si existeix una tal F tal que per a les homologies mòdul 2 es tingui $F(\text{punt} \times \text{recta}) \simeq \text{recta}$, $F(\text{recta} \times \text{punt}) \simeq \text{recta}$, llavors $m+1$ és una potència de 2" (8). F pot considerar-se com un producte a RP^m i les relacions del teorema de Hopf com l'existència d'una unitat. Estudiant aquestes aplicacions amb l'ajut del "Unkehrungshomomorphismus" (que en Hopf ja havia considerat sota la influència d'en Salomon Lefschetz durant la seva estada a Princeton, al 1928), va demostrar que l'associativitat de l'aplicació no es fa servir per a res.

2.2. Les àlgebres de Hopf

Al 1941 es va publicar en els Annals of Mathematics el treball d'en Hopf "Ueber die Topologie der Gruppen-Manningffaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen"(9) en el qual s'introduïen els H-espais (H de Hopf!) de cara a estudiar els grups de Lie desde un punt de vista no analític sino homotòpic.

Entre altres coses en Hopf va demostrar: " Si X és un H-espai connex de dimensió finita, $H^*(X;Q) \cong E_Q(x_1,\dots,x_l)$ (àlgebra exterior sobre Q amb l(=rangX) generadors x_i de dimensions senars)."

La demostració d'en Hopf funciona, més o menys, així: El diagrama homotòpicament commutatiu

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, hook] \arrow[dr, "1x"] & \\
X \times X \arrow[r, "m"] & X \\
X \arrow[u, hook] \arrow[ur, "1x"'] &
\end{tikzcd}$$

dóna un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
 & H^*(X;Q) & \\
H^*(X;Q) \arrow[ur, "1"] \arrow[r, "m^*"] \arrow[dr, "1"'] & H^*(X\times X;Q) \cong H^*(X;Q) \otimes H^*(X;Q) \arrow[u] \arrow[d] & \\
 & H^*(X;Q) &
\end{tikzcd}$$

La resta de la demostració d'en Hopf és purament algebraica. S'obté, doncs, una comultiplicació (m^*) a $H^*(X;Q)$ i, per tant, $H^*(X;Q)$ és una àlgebra d' Hopf (m^* és un homomorfisme d'àlgebres). En Hopf classifica, alesh hores, les àlgebres de Hopf de dimensió finita sobre Q. (Tots els teoremes sobre àlgebres de Hopf tenen conseqüèn cies importants per als H-espais!)

2.3. Els resultats d'en Browder

Borel (Armand), Milnor (John, 1931-) i Moore (John C. 1923-) van iniciar l'estudi de les àlgebres de Hopf sobre un cos arbitrari, els resultats dels quals van utilitzar en W. Browder (1933-) per a demostrar els següents resultats (4)

2.3.1. Teorema

Sigui X un H-espai connex finit

(i) Sigui $H_n(X;Z)$ el més alt grup d'homologia de X no trivial; aleshores $H_n(X;Z) \cong Z$.

(ii) Sigui c un generador de $H_n(X;Z)$. Aleshores, l'aplicació

$$H^1(X;Z) \rightarrow H_{n-1}(X;Z)$$
$$\xi \rightarrow \xi \cap c$$

és un isomorfisme (i, per tant, X és un complex de Poincaré)

2.3.2. Teorema

Sigui X un H-espai connex finit de rang 1. Aleshores, X és homotòpicament equivalent a S^1, S^3, S^7, RP^3 o RP^7. Hi ha una única estructura possible a S^1, 12 classes d'homotopia de multiplicacions a S^3 i 120 a S^7.

Aquest teorema dóna una resposta parcial a les dues preguntes de 1.4, però, en canvi, el teorema 2.3.1. no és suficient, en contra del què alguns esperaven, per a demostrar quines esferes admeten una estructura de H-espai.

3. Esferes que són H-espais

Clarament S^1, S^3 i S^7 són H-espais.

Que aquestes són les úniques 3 esferes possibles ho va demostrar Adams (John Frank, 1930-) al 1960 (2).

3.1. Teorema

Si S^n és un H-espai, aleshores n=1,3,7.

3.2. Història de la demostració

Del teorema d'en Hopf, que he citat abans, se'n desprèn que n ha d'ésser senar, però qualsevol S^{2n+1} compleix les condicions del teorema 2.3.1. d'en Browder.

S'han de buscar, doncs, nous camins i s'utilitza, altre cop, una idea d'en Hopf: "la construcció d'en Hopf":

Donada una aplicació $m: S^n \times S^n \to S^n$, en Hopf considera l'espai $CS^n \times S^n \cup S^n \times CS^n$, que conté $S^n \times S^n$, al qual estén la multiplicació m de la manera següent:

$$
\begin{array}{ccc}
S^n \times S^n & \xrightarrow{m} & S^n \\
\cap & & \\
CS^n \times S^n \cup S^n \times CS^n & \xrightarrow{H(m)} & C^+S^n \cup C^- S^n \\
(x, [t,y]) & \longmapsto & [t, x\cdot y] \\
([t,x], y) & \longmapsto & [t, x\cdot y]
\end{array}
$$

No és gens difícil veure que $CS^n \times S^n \cup S^n \times CS^n$ és homeomorf a S^{2n+1} (en el cas n=1, S^3 és la unió de dos torus plens) i, per altra part, trivialment, $C^+S^n \cup C^-S^n = SS^n \cong S^{n+1}$, d'on resulta una aplicació $H(m): S^{2n+1} \to S^{n+1}$.

En Hopf associa a H(m) un invariant numèric: "l'invariant de Hopf" i l'estudi de les esferes que són H-espais es redueix a l'estudi d'aplicacions $S^{2n+1} \to S^{n+1}$

d'invariant de Hopf 1.

A part de les contribucions d'en George W. Whitehead en limitar els nombres n que poden aparèixer, és Norman E. Steenrod (1910-1971) qui va il·luminar el problema des d'un altre punt de vista, considerar el con de l'aplicació H(m), que no és altre que PS^n (per exemple $PS^0 = RP^2$, $PS^1 = CP^2 = S^2 \cup e^4$, $PS^3 = S^4 \cup e^8$, $PS^7 = S^8 \cup e^{16}$) i demostrar que l'anell de cohomologia $H^*(PS^n, Z)$ és isomorf a $Z[a]/(a^3)$ amb $a \in H^{n+1}(PS^n; Z)$. (11).

Dit d'una altra manera, si m existeix, existeix un espai amb un tal anell de cohomologia.

Amb ajut de les operacions d'Stenrod, en José Adem va demostrar que si existeix un espai amb un anell de cohomologia com el d'abans, llavors $n = 2^q - 1$ (3) i, finalment, amb ajut de la teoria K n'Adams va demostrar que necessàriament $n = 1,3,7$.

4. Algunes respostes a les preguntes 1.4.

4.1. El H-espai de Hilton-Roitberg

Fins el 1968 es conjecturava que tot H-espai de dimensió finita era del mateix tipus d'homotopia que un grup de Lie, motiu pel qual no es va investigar adequadament aquests espais. Més concretament la conjectura era: Si X és un H-espai de dimensió finita, llavors existeix un grup de Lie G_x tal que X és homotòpicament equivalent a $G_x \times S^7 \times \ldots \times S^7$.

No va ésser fins al 1969 que en Peter John Hilton (1923-) i en Joe Roitbert van aclarir aquesta incògnita al estudiar fibrats sobre esferes amb fibra S^3. L'exemple que Hilton i Roitberg construeixen a (7), no sols prova que la conjectura era falsa, sinó que promou entre els topòlegs un gran interès pels H-espais.

El problema concret que estudiava en Hilton era el de cancel·lació: "$X\times Y \simeq X\times Z \Rightarrow Y\simeq Z$?". Va veure que això no és sempre cert i va donar l'exemple $X=S^3$, $Y=Sp(2)$, $Z=$ espai total M_7 del S^3- fibrat sobre S^7 induït per $S^7 \xrightarrow{10} S^7$ sobre el fibrat $Sp(1)=S^3\to Sp(2)\to S^7$; aleshores $S^3\times Sp(2)\simeq S^3\times M_7$ però $Sp(2)\not\simeq M_7$. A més a més con que $S^3\times Sp(2)$ és un H-espai, M_7 és ell mateix un H-espai, però M_7 no és homotòpicament equivalent a cap grup de Lie.

4.2. La construcció de nous H-espais

Des de 1969 són molts els autors que han trobat H-espais de dimensió finita nous, principalment pel mètode del "mixing of homotopy Types", mètode que usa àmpliament les tècniques de localització.

4.2.1. Localització

Sigui $\mathbb{P}_1\subset\mathbb{P}=\{$ nombres primers $\}$; posem $\mathbb{P}_2=\mathbb{P}-\mathbb{P}_1$ i $Z_{\mathbb{P}_1}=\{\frac{r}{q}\in Q \mid (q,\mathbb{P}_1)=1\}$

Sigui X un CW-complex connex Aleshores X es pot localitzar a $\mathbb{P}_1$; és a dir, existeix un espai $X_{\mathbb{P}_1}$ (la localització de X a $\mathbb{P}_1$) i una aplicació localització $l: X\to X_{\mathbb{P}_1}$ amb

a) $X_{\mathbb{P}_1}$ és $\mathbb{P}_1$- local ($\Leftrightarrow H_*(X_{\mathbb{P}_1};Z)$ és $\mathbb{P}_1$- local $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow H_*(X_{\mathbb{P}_1};Z)\cong H_*(X_{\mathbb{P}_1};Z)\otimes Z_{\mathbb{P}_1}$$

$$\Leftrightarrow H_*(X_{\mathbb{P}_1};Z) \text{ és un } Z_{\mathbb{P}_1}\text{ - mòdul}$$

En particular, $H_*(X_{\mathbb{P}_1};Z)$ no té p-torsió per $p\notin\mathbb{P}_1$

b) $l_*: H_*(X;A)\cong H_*(X_{\mathbb{P}_1};A)$ per tot $A=Z/_{pZ}$, $p\in\mathbb{P}_1$

i per $A = Q$.

Aquestes són les dues principals propietats de la localització. En particular b) diu que la p-torsió de H_*X és la de $H_*X_{\mathbb{P}_1}$, per tot $p \in \mathbb{P}_1$. (Mal dit : a X es fa fora la $\mathbb{P}_2$-torsió i es conserva la $\mathbb{P}_1$ torsió). Si $\mathbb{P}_1 = \emptyset$, llavors $X_\emptyset$ és la racionalització de X.

La localització commuta functorialment amb la formació de productes, llaços, suspensions... A més a més si X és un H-espai, llavors $X_{\mathbb{P}_1}$ és també un H-espai.

4.2.2. El mètode del "mixing of homotopy types"

Siguin ara X,Y H-espais amb $X_\emptyset \simeq Y_\emptyset$. Considerem el següent "pullback"

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X_{\mathbb{P}_1} \arrow[d, "l_1"] \\ Y_{\mathbb{P}_2} \arrow[r, "l_2"'] & Y_\emptyset \end{tikzcd}$$

on $X_{\mathbb{P}_1}$, $Y_{\mathbb{P}_2}$, $Y_\emptyset$ són H-espais i l_1, l_2 H-aplicacions (és a dir, compatibles amb les estructures de H-espai). Aleshores, es demostra que Z és també un H-espai, que és $\mathbb{P}_1$-equivalent a X i $\mathbb{P}_2$-equivalent a Y. Z es diu obtingut a partir de X i Y pel mètode del "mixing of homotopy types".

Aquest mètode és degut a l'Alexander Zabrodsky (13). Per exemple, si $X = Sp(2)$ i $Y = S^3 \times S^7$, amb una convenient elecció de $\mathbb{P}_1$ s'obté l'exemple de Hilton-Roitberg.

4.3. Alguns resultats

Moltes vegades utilitzant la tècnica comentada en l'apartat anterior, s'han demostrat teoremes en la linea de les preguntes 1.4. Vaig a fer una mena de miscel.lània de resultats (obtinguts per aquest mètode o per altres).

4.3.2. Per a complexes de rang 2, l'Adams va estudiar a (1) el cas $X \simeq S^p \cup e^q \cup e^{q+p}$ i va demostrar que, per $q > p+1 > 2$, (p,q) ha d'ésser algun dels parells (1,3),(1,7),(3,5),(3,7),(7,11) o (7,15) perquè X tingui estructura de H-espai. A més a més tots aquests possibles casos admeten una estructura de quasi-grup de Lie (H-espai del tipus d'homotopia d'un grup de Lie).

4.3.3. Fent servir la tècnica d'en Zabrodsky, en James Stasheff va demostrar al 1969 que la varietat M_7 de Hilton-Roitberg era del tipus d'homotopia d'un espai de llaços (10); el propi Zabrodsky va veure que les varietats anàlogues M_2 i M_8 no eren H-espais (12) i Guido Mislin (1941-) va construir, junt amb E. Curtis, 2 nous H-espais que són SU(3)-fibrats sobre S^7 (6).

5. Dues conjectures sobre el problema de classificació

Si X és un H-espai, sabem pel resultat d'en Hopf que $H^*(X,Q) = E_Q(x_1,\ldots,x_e)$ amb $\dim x_j = 2n_j - 1$, $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_e$, rang $X = e$. Posem tipus $(X) = (2n_1-1,\ldots,2n_e-1)$. Es presenten les dues qüestions següents:

5.1. Donat un rang fixe, trobar tots els tipus possibles. Per exemple, per rang $X = 1$ l'Adams va veure que els únics tipus possibles son 1,3,7. Per rang $X = 2$ també hem enumerat abans uns tipus possibles.

5.2. Donat un tipus fixe, trobar tots els tipus d'homotopia possibles (problema de classificació).

En resposta a aquestes 2 preguntes hi ha dues conjectures.

5.3. Donat un rang fixe, hi ha sols un nombre finit de tipus possibles.

Si es suposa que el H-espai és associatiu, aquesta conjectura és certa.

5.4. No existeix cap tipus nou, és a dir, tot tipus d'un H-espai pot realitzar-se amb producte de grups de Lie i S^7.

Aquesta conjectura ve avalada pel fet de que per tot H-espai X, $H^*(H,Q) \cong H^*(Y,Q)$ on Y és un grup de Lie, i pel fet de que és certa si es suposa que el H-espai és homotòpicament associatiu i lliure de torsió.

BIBLIOGRAFIA

(1) ADAMS, J.F. "H-spaces with few cells." Topology, 1 (1962), 67-72.

(2) ADAMS,J.F. "On the non existence of elements of Hopf invariant one" Ann. of Math., 72 (1960), 20-104

(3) ADEM, J. "The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology" Proc. Nat. Acad. Sci. USA,38 (1952), 720-726.

(4) BROWDER, W "Fiberings of spheres and H- spaces which are rational homology spheres" Bull. A.M.S. 68(1962), 202-203.

(5) CARTAN, E. "La topologie des gruopes de Lie" Act. Sci. Ind. 358, Hermann (1936)

(6) CURTIS,E.B. & MISLIN,G. "Two new H-spaces" Bull. A.M.S. 76 (1970), 851-852

(7) HILTON,P.J. & ROITBERG, J. "On principal S^3-bundles over spheres" Ann. of Math. 90 (1969), 91-107.

(8) HOPF, H. "Ein topologiseher Beitrag zur reellen Algebra" Comment. Math. Helv. 13 (1940), 219-239.

(9) HOPF, H. "Ueber die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen" Ann. of Math. 42,(1941), 22-52.

(10) STASHEFF,J.D. "Manifolds of the homotopy type of (non-Lie) groups" Bull. A.M.S. 75 (1969), 998-1000.

(11) STEENROD,N.E. "Reduced powers of cohomology classes" Ann. of Math. 56 (1952), 47-67.

(12) ZABRODSKY, A. "The classification of simply connected H-spaces with three cells" Math. Scand. 30 (1972), 193-210.

(13) ZABRODSKY,A. "Homotopy associativity and finite CW-complexes." Topology, 9 (1970), 121-128