ATRIBUIR UN SIGNIFICADO A LA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LA VISUALIZACIÓN*

Figueiras, Lourdes y Deulofeu, Jordi
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen. En el artículo se analiza la utilización de diagramas visuales en la resolución de problemas y su efecto sobre el significado que se atribuye a la matemática. En el trabajo se presta atención a la interacción de tres perspectivas –sociológica, cultural y cognitiva–, desde las cuales se han desarrollado investigaciones diversas sobre visualización.

Palabras clave. Visualización, concepciones, creencias, resolución de problemas.

Assigning meaning to mathematics trhough visualization

Summary. Some important aspects on the use of visualization during problem solving processes and its effect on giving significance to mathematics are analized in this paper. The research presented here highlights the interaction among three different backgrounds supporting actual investigations on visualization: sociological, cultural and cognitive.

Keywords. Visualization, conceptions, beliefs, problem solving.

INTRODUCCIÓN

En el contexto de la educación matemática existe una tendencia claramente identificable cuyo objetivo es hacer del razonamiento visual una práctica aceptable y habitual para el aprendizaje. Dicho objetivo tuvo una especial influencia didáctica a partir de los años noventa. Los trabajos de Zimmermann y Cunningham (1991), por ejemplo, o los monográficos de la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (Peters et al., 1992 y 1992 II) llamaron la atención de la comunidad matemática sobre aspectos diversos de la utilización de diagramas visuales.

Importantes aportaciones desde la didáctica de la matemática han enfocado las investigaciones didácticas sobre visualización desde tres diferentes perspectivas: cultural, cognitiva y sociológica (Dreyfus, 1994). Nuestro interés es profundizar en la interacción de estos tres enfoques para poder analizar de manera compleja el efecto de la visualización sobre el significado que los estudiantes atribuyen a la matemática. De cada uno de ellos mencionamos a continuación los aspectos que resultan especialmente relevantes para este trabajo.

Desde un enfoque cultural atenderemos el obstáculo que supone para muchos estudiantes, y también profesores, aceptar que una demostración visual pueda ser realmente una demostración matemática. Esto es debido a que se asume un lenguaje implícito en el cual *han de expresarse* las demostraciones y tiene consecuencias sobre la concepción que se tiene acerca de la matemática. Diversos autores han expresado que dicha asunción depende del contexto histórico en el que se lleva a cabo la demostración (Kautschitsch, 1994). Por otra parte, en los últimos veinte años se ha amplificado de manera notable la intuición de que el conocimiento de la historia *promueve* la reflexión sobre la actividad matemática como una actividad humana, haciéndose, por tanto, inseparable de la cultura (Rowe, 1996).

Desde un enfoque cognitivo se tendrán en cuenta las investigaciones que profundizan en el proceso de traducción entre una imagen visual y su correspondiente analítica, y las condiciones que pueden hacer que una imagen intuitiva facilite o limite el razonamiento y la resolución de un problema (Calvo, 2001).

El enfoque sociológico, por último, aportará las referencias necesarias para atender la diversidad de estudiantes y su galería de imágenes visuales, los diferentes niveles de conocimiento en matemáticas y el nivel de experto del profesor.

Es evidente que la consideración de estas tres perspectivas como soporte teórico que se utilizará en la interpretación del proceso de resolución de un problema requiere de una definición holística del término *visualización*: nos referiremos a las representaciones intuitivas y geométricas que pueden presentar las ideas y los conceptos matemáticos, que permiten al estudiante la exploración de un problema y, al menos, una primera aproximación a su solución. Además, pertenecen igualmente al ámbito de la visualización del proceso, la actividad de encontrar la imagen o la relación entre esa imagen y el problema que se está resolviendo (Arcavi, 2003). En cualquier caso, nos alejamos de lo que algunas corrientes psicológicas consideran como una técnica perceptiva que pretende la reestructuración de componentes propiamente cognitivos (De Guzmán, 1996).

Para presentar de un modo operativo el objetivo de la investigación, es necesario atender a una nueva clasificación que describe los tres roles fundamentales de la visualización para el estudiante de matemáticas (Arcavi, 2003):

1) Actuar como soporte e ilustración de resultados simbólicos.

2) Resolver el conflicto entre soluciones correctas simbólicas e intuiciones incorrectas.

3) Reorganizar ciertas características de los conceptos, muchas de las cuales pueden ser obviadas por las soluciones formales.

A esta sistematización de aspectos funcionales que se atribuyen a la visualización, queremos añadir, con este trabajo, una nueva categoría: potenciar un cambio de concepción respecto a la matemática. En particular, destacaremos el cambio desde una idea de demostración que consiste en la aplicación de una cadena de resultados simbólicos, a una concepción basada en la sucesión de ideas y argumentos lógicos, no necesariamente expresados a través del lenguaje simbólico. Cuando se genera este tipo de concepción, según veremos más adelante, las demostraciones de carácter visual ofrecen un mayor convencimiento que las demostraciones simbólicas.

En conclusión, nuestro objetivo es analizar cómo, los estudiantes, en la interacción de los que se han llamado componentes sociológico, cognitivo y cultural de la visualización pueden dar significado a la demostración en el proceso de solución de un problema.

LA RELACIÓN ENTRE LA TEORÍA Y LA PRÁCTICA

El contenido que se presenta en este artículo forma parte de una investigación llevada a cabo en un curso de matemáticas para estudiantes de primer curso de magisterio. La asignatura tiene como finalidad ilustrar que, en la contextualización histórica de los problemas, está la clave para comprender la evolución de la matemática, y que es posible encontrarle un sentido a partir de ellos. La enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas tiene aspectos muy positivos que han sido recogidos en conocidas referencias bibliográficas (Arcavi, 2003; Polya, 1965; Shoenfeld, 1985). Además, la contextualización histórica de los contenidos proporciona una manera de trabajar a la que, en general, los estudiantes no están habituados y que hasta la fecha suele romper con una secuencia que tienen muy interiorizada, según la cual primero se aprenden conceptos y las técnicas cuyo origen se desconoce y luego se aplican a la resolución de problemas.

Dado el carácter eminentemente práctico de esta investigación, en el sentido que utiliza una experiencia concreta en un aula de magisterio, se discute a continuación la perspectiva desde la cual se ha considerado la relación entre la teoría (o investigación educativa) y la práctica (o experiencia didáctica). Esta relación ha sido atendida por numerosos autores, dentro y fuera del ámbito de la educación matemática. El trabajo de Malara y Zan (2002) analiza en profundidad esta relación y ofrece importantes argumentos que avalan la realización de trabajos en los que se supera la disyunción. Tal y como sugiere Díaz Godino (1991), la coexistencia de diferentes opciones a la hora de concebir una investigación puede ser vista como natural, ya que propicia el desarrollo de estrategias de observación y producción de conocimiento. La polarización entre los ámbitos teórico –o de investigación– y práctico –o de innovación– tiene consecuencias a la hora de determinar los criterios de calidad de las investigaciones y tiene también consecuencias en la teoría misma, especialmente en lo que se refiere a la formación del profesorado (Bartolini Bussi y Bishop, 1998). La mayoría de los procesos que habitualmente se consideran por separado como característicos de la investiagción teórica o de la innovación didáctica están íntimamente relacionados; ambos hacen referencia al cambio en los profesores e investigadores y pueden ser considerados como un mismo objeto. Desde nuestra investigación, por tanto, se concibe la educación matemática como una ciencia aplicada o ciencia de la práctica, que no se dirije a la producción de un conocimiento abstracto de algún aspecto educativo, sino a un cambio en la actitud de la enseñanza basado en buena parte en un marco práctico (Malara y Zan, 2002).

A lo largo de nuestro proceso de análisis, en ningún momento hemos tratado de ofrecer una muestra *representativa* en términos estadísticos, sino una representatividad de carácter cualitativo, que recoja diferentes situaciones en las que los estudiantes dan sentido a su experiencia matemática. Nuestra intención no es, ni siquiera, desarrollar ejemplos de casos que evidencien la certeza de determinadas teorías o presentar alternativas didácticas que pretendan mejorar la práctica docente, sino percibir la investigación como el pretexto para conocer mejor la experiencia de los estudiantes.

METODOLOGÍA

Se eligió analizar la experiencia de los estudiantes a través de lo que hemos definido como *movimientos*, que son indicios de cambio en cuanto a la forma en la que los estudiantes se relacionan con la actividad matemática. Nos interesa analizar movimientos tales como explicitar un interés por una cierta temática que antes no existía, vacilaciones en el proceso de argumentación acerca de la calidad o cualidades de un problema y, en general, impresiones que involucran una nueva forma de acercamiento a la actividad matemática. En consecuencia, esta investigación podría calificarse como de *estudio de casos*, teniendo en cuenta que lo que nos interesa analizar son los movimientos que se producen en los estudiantes. Este énfasis en el *movimiento* permite enfatizar el efecto de la discusión y la interacción en las aportaciones individuales.

En este artículo discutimos el proceso de resolución de un problema clásico –el problema de Herón– y el análisis de uno de los movimientos detectados en una estudiante. El estudio de este caso ha permitido establecer conclusiones importantes para relacionar la visualización con el significado atribuido a la actividad matemática cuando intervienen aspectos culturales, cognitivos y sociológicos.

Los estudiantes escribieron informes a lo largo del curso en los que recogían sus reflexiones en torno a la resolución de problemas y los aspectos que consideraban más significativos para su formación. Desde el momento en el que propusimos que los estudiantes escribieran sus reflexiones pensábamos que quien escribe tiene la oportunidad de *darse cuenta* de cuál es su proceso de conocimiento. Mediante la escritura se crea un registro textual que, al ser leído, permite volver una y otra vez sobre las propias creaciones, sobre las vacilaciones o sorpresas, de manera que desde esta lectura puede impulsarse la creación de significado. Además, tal y como fue diseñada la experiencia, las reflexiones escritas por los estudiantes son el reflejo de una trayectoria con rasgos mucho más íntimos y particulares que en las discusiones orales que se producen en el transcurso de la clase (experiencia colectiva), donde la interacción de cada uno de los participantes proporciona otra dimensión a la experiencia del conocimiento sobre la actividad matemática (Figueiras, 2003).

En el análisis del caso que se presenta en este artículo, juega un papel importante el planteamiento y el modo en el que se llegó a la solución del problema de Herón. Tanto la contextualización histórica del problema como una descripción sistemática de lo que aconteció desde las perspectivas cognitiva y sociológica se presentan en las próximas secciones.

PERSPECTIVA CULTURAL: LA CONTEXTUALIZACIÓN HISTÓRICA DEL PROBLEMA

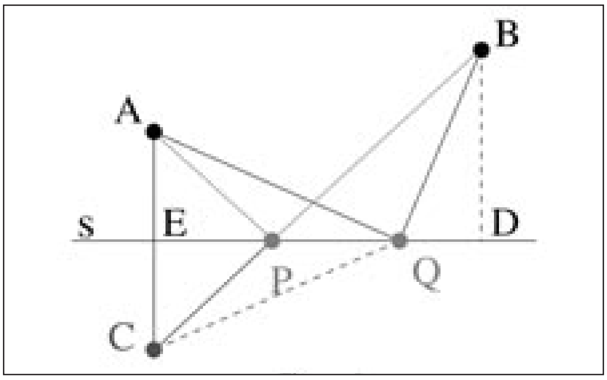
Formulamos el problema de Herón de la siguiente manera (Courant y Robbins, 1941):

«Dada una recta *s* y dos puntos *A* y *B* en el mismo lado de la recta, ¿para qué punto *P* en *s* es $\overline{AP} + \overline{PB}$ el camino más corto que une *A* y *B*?»

A continuación presentamos una solución del problema y su contextualización histórica con el objetivo de analizar posteriormente las conjeturas de los estudiantes desde la perspectiva del problema ya resuelto. La información histórica que se discutió junto al planteamiento del problema es importante porque tuvo un efecto notable en el proceso de reflexión de los estudiantes. En particular, se había compartido con ellos información acerca de las características de la matemática griega y los métodos axiomáticos de demostración.

El problema se encuentra resuelto en la *Catoptrica* de Herón, una obra que contiene problemas cuyo propósito es construir espejos con formas diversas, o combinarlos, para que produzcan reflejos de una determinada manera (Heaht, 1921). Puede encontrarse un recorrido histórico del problema de Herón en Figueiras (2003). La construcción geométrica llevada a cabo en la demostración de Herón es la que se utiliza habitualmente para resolver este problema (Fig. 1).

Figura 1



Sea *C* el simétrico del punto A respecto de la recta *s*, de manera que la recta determinada por el segmento AC es perpendicular a *s*. La recta que une los puntos *B* y *C* interseca a *s* en un punto *P*, que es el punto buscado (Fig. 1).

Una vez conjeturado cuál es el punto *P* solución del problema, es necesario demostrar que para cualquier otro punto *Q* sobre la recta, la longitud $\overline{AQB}$ es mayor que la longitud $\overline{APB}$:

$$AP = CP \text{ y } AQ = CQ$$
$$AP + PB = CB \text{ y } AQ + QB = CQ + QB$$

El resultado buscado se desprende de la desigualdad triangular para los lados del triángulo *CBQ*:

$$AP + PB = CB < CQ + QB = AQ + QB$$

Herón no plantea el problema en términos de hallar el camino mínimo entre dos puntos A y B dados pasando por una recta s. Lo plantea como un problema de óptica y toma como hipótesis que los ángulos <APE y <BPD, de incidencia y reflexión, son iguales. Construye, entonces, el punto C como la intersección de la recta BP con la perpendicular a s por A. Esto le permite afirmar que, cuando un rayo de luz se quiebra al incidir sobre un punto en s, este punto ha de marcar el camino más corto que conecta el ojo (en A) con el objeto (en B). Al plantear el problema, Herón dice que «la naturaleza no hace nada en vano» (Heath, 1921, p. 353) y es por eso que los rayos de luz han de viajar de la manera más rápida posible; por tanto, recorriendo un camino mínimo. Este tipo de razonamiento concuerda con el esfuerzo de sistematización racional característico en los constructores de máquinas griegos, de los que Herón es un representante. El autor griego recuerda que tal sistematización «debe partir de lo que es evidente y cuya causa es evidente; [...] quien quiere avanzar en el descubrimiento de las causas ha de partir de uno o varios principios físicos y relacionar con ellos todas las cuestiones que se presenten» (Vernant, 1965, p. 285).

En la época clásica, por tanto, se trata de un problema relacionado con la reflexión de la luz. Posteriormente el problema pasaría a ser considerado como un problema de los que se clasifican como de máximos y mínimos. Fermat, por ejemplo, al aplicar su método de máximos y mínimos, lo propone como uno de los casos para mostrar que la solución obtenida coincide con las soluciones obtenidas por métodos clásicos (Fermat, 1891-1912). Hasta el siglo XVII, en que el programa de Descartes algebriza notablemente todos los problemas de geometría, la utilización de los diagramas visuales para la resolución de problemas era absolutamente común y, en particular, formaba parte de las demostraciones que escribieron los geómetras griegos (Davis, 1993).

PERSPECTIVA COGNITIVA: CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS EN LA CONJETURA DEL PROBLEMA

Durante la sesión en la cual se planteó el problema surgieron cinco construcciones geométricas visuales que fueron utilizadas como conjeturas. Aparecen resumidas en la tabla I.

Todas ellas buscan el punto *P* en la intersección de líneas construidas a partir de la recta *s* y los puntos *A* y *B*. Se da por supuesto que el punto *P* ha de estar situado entre los puntos *E* y *D* obtenidos de la intersección de *s* con sus perpendiculares por los puntos *A* y *B* respectivamente.

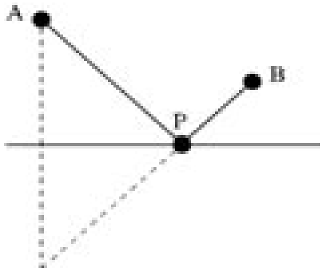
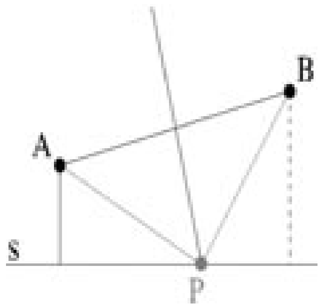
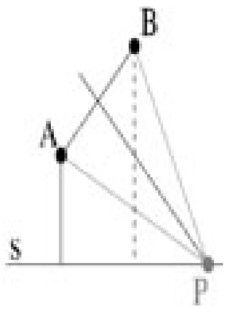
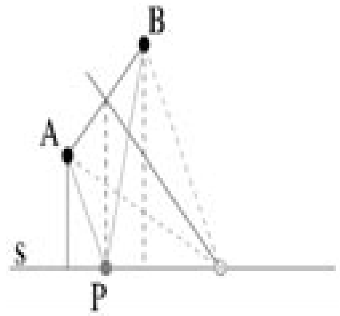
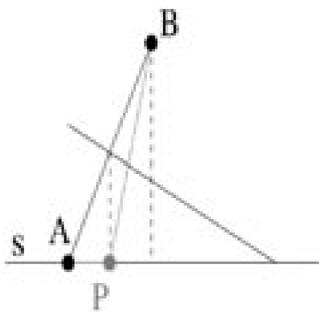
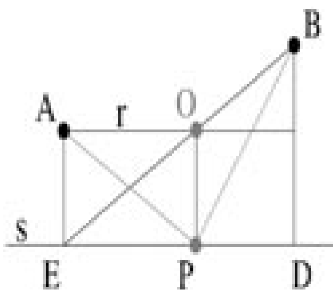
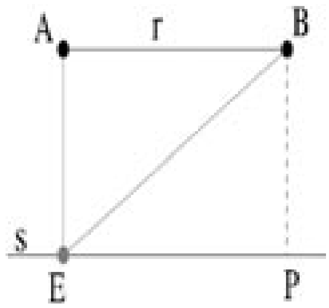
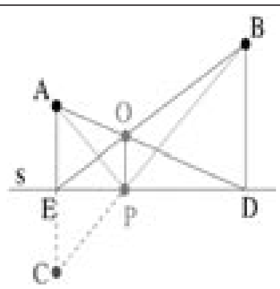
Hemos considerado la clasificación de estas cinco conjeturas en dos categorías, según las características del diagrama geométrico construido:

C1. Conjeturas constructivas de base la experiencia o el conocimiento matemático previo

Pertenecen a esta categoría las tres primeras conjeturas que aparecen en la tabla I. La primera de ellas coincide con la que Herón propone para solucionar el problema y ha sido discutida ya en la sección anterior. En la segunda se determina *P* como el punto en el que la mediatriz del segmento corta la recta *s*. Considerar el punto *P* sobre la mediatriz entre *A* y *B* permite *equilibrar* la distancia entre los dos segmentos de la quebrada. Ante su refutación con un caso en el cual el punto *P* ha salido fuera del segmento *ED*, surge una nueva construcción, (conjetura 3) en absoluta dependencia con la anterior y que asegura que el punto buscado se encuentra siempre sobre el segmento deseado sin renunciar a la consideración del punto medio (punto de equilibrio) del segmento AB: *P* es el punto de intersección de la recta *s* con su perpendicular por el punto medio del segmento. También esta conjetura se refuta fácilmente tomando *A* muy cercano a *s*.

La construcción del diagrama visual que se utiliza para conjeturar la solución del problema tiene su origen en la consideración de la mediatriz, a cuyos puntos se les atribuye inmediatamente *alguna* propiedad respecto a su distancia a los extremos del segmento, que induce a considerar la construcción como una buena conjetura para resolver el problema. En este momento, consideramos la visualización como imagen y como proceso y, en este sentido está estrechamente relacionada con lo conceptual más que con lo puramente perceptual.

Tabla I
Conjeturas para resolver el problema de Herón.

Conjetura		**Contraejemplos o validación**
1. *P* es la intersección entre *s* y la recta que une *B* con el simétrico de *A* respecto de *s*.		Construcción sugerida por Herón. El punto *P* proporciona la solución del problema.
2. *P* es el punto en el que la mediatriz del segmento corta la recta *s*.		
3. *P* es el punto de intersección de la recta *s* con su perpendicular por el punto medio del segmento.		
4. *r* es la perpendicular a la recta por *A*. *O* es el punto de intersección de las rectas *r* y *EB*. *P* es el punto de intersección de la recta *s* con su perpendicular por *O*.		
5. *O* es el punto de intersección de las rectas *EB* y AD. *P* es el punto de intersección de la recta s con su perpendicular por *O*.		La conjetura conduce a la solución correcta. Un caso particular del teorema de incidencia de Pappus permite comprobar que el punto *P* coincide con la solución propuesta en la construcción de Herón.

C2. Conjeturas constructivas espontáneas

Las conjeturas 4 y 5 son obtenidas mediante una construcción que no sigue ninguna estrategia procedimental o conceptual aparente, salvo conseguir que el punto resulte entre los extremos *E* y *D*. Aparentemente iguales en cuanto a la forma de creación del diagrama, la cuarta es sencilla de refutar de nuevo con una situación extrema; la quinta, sin embargo, resulta ser cierta.

Fueron dos estudiantes trabajando juntos quienes propusieron esta última conjetura. Ellos mismos habían propuesto también la que conduce a la solución del problema considerando el simétrico del punto *A* respecto de la recta *s* (conjetura 1). Los estudiantes comprobaron que el punto *P* que obtenían con ambas construcciones coincidían en todos los ejemplos que ellos mismos se planteaban. Sin embargo, visualizar el punto *P* obtenido mediante la construcción de la conjetura 5 como la solución al problema es extremadamente menos intuitivo[1]. Una demostración de que el punto *P* obtenido mediante esta construcción es solución al problema puede obtenerse de las relaciones de semejanza entre los pares de triángulos *ADE - ODP* y *BED - OEP:*

Si se demuestra que los ángulos < APE y < BPD son iguales, el problema está resuelto, y esto es cierto por semejanza, pues:

$$\frac{AE}{OP} = \frac{ED}{PD} \text{ y } \frac{BD}{OP} = \frac{ED}{EP}$$

de donde se tiene que:

$$\frac{AE}{EP} = \frac{BD}{PD}$$

En consecuencia, los triángulos AEP y BDP son semejantes y se tiene la igualdad de ángulos deseada.

PERSPECTIVA SOCIOLÓGICA: LA SOLUCIÓN DEL EXPERTO

El diagrama visual que se generó a partir de la conjetura número 5 no produjo cambio alguno en la evolución de los estudiantes hacia la solución del problema; sin embargo, surgió, por parte del profesor, la siguiente interpretación geométrica del diagrama visual creado:

La figura en cuestión puede ser considerada como la representación de un caso particular del teorema de incidencia de Pappus y se demuestra de manera inmediata que el punto *P* obtenido en la conjetura coincide con el punto *P* que se obtenía en la construcción de la solución propuesta por Herón.

Teorema de Pappus: *Si los seis vértices de un hexágono se sitúan de manera alternante sobre un par de rectas secantes, entonces son colineales los puntos O, P, O', tales que* (Fig. 2):

O es el punto de intersección de las rectas 36 y 54.

O' es el punto de intersección de las rectas 14 y 32.

P es el punto de intersección de las rectas 16 y 52.

Entonces los puntos O', O, P están alineados.

Figura 2
Teorema de Pappus.

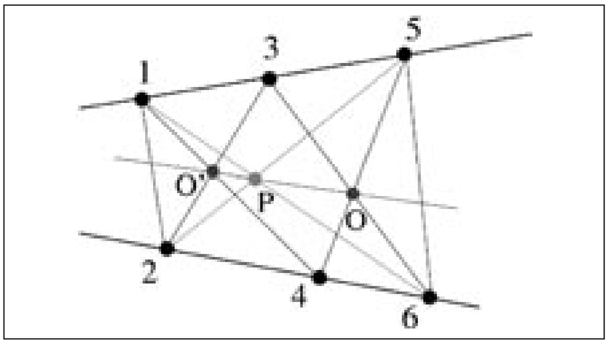
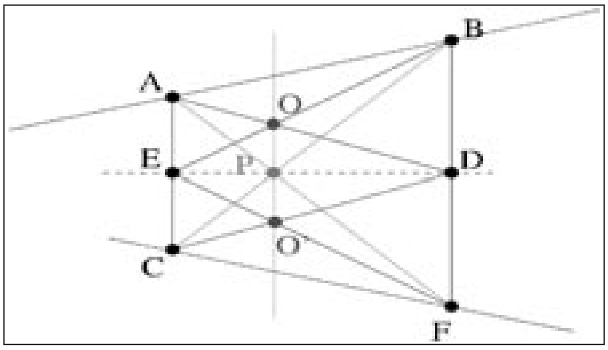


Figura 3
El problema de Herón y el teorema de Pappus.



Para los estudiantes, las construcciones ofrecidas en las conjeturas 4 y 5 parten del trazado geométrico de rectas y puntos a las que se impone la única y trivial condición de que el punto resultante esté en algún lugar entre E y D. La visualización de dicha figura por parte de quienes no tienden a hacer este tipo de costrucciones espontáneas, pero están familiarizados con otros problemas geométricos, lleva a activar su propia biblioteca visual. En cualquier caso, el procedimiento de creación es el que se pone al servicio de la solución de problemas e inspira soluciones creativas. En este caso, el conocimiento del teorema de Pappus y de la solución del problema de Herón permite al profesor –en su interacción con los estudiantes– concluir en la validez de la conjetura.

Desde una perspectiva sociológica, por lo tanto, es posible conectar esta conjetura para la solución del problema dada por los estudiantes con la experiencia acumulada del profesor en la utilización de diagramas visuales. Muchos profesores poseen una galería de imágenes visuales muy elaborada, de gran eficacia en su trabajo, de manera que son capaces de relacionar de manera natural y sin esfuerzo aparente modos de demostración eficaces para la solución de problemas. Desde este punto de vista, la utilización de diagramas visuales permite establecer relaciones no sólo entre objetos matemáticos sino entre resultados.

Nos hemos centrado, en este epígrafe, en describir y apuntar resultados que surgen de la interacción de las perspectivas cognitiva y sociológica en el proceso de solución del problema. A continuación, analizaremos qué reflexiones en torno a la naturaleza matemática pueden generar en los estudiantes la observación y participación, activa o no, en un proceso de resolución de problemas con estas características.

EFECTO DE LA VISUALIZACIÓN SOBRE EL SIGNIFICADO DE LA DEMOSTRACIÓN: ANÁLISIS DE UN CASO

A cada uno de los estudiantes se les pidió al comienzo y final del curso que planteasen un problema de matemáticas que les pareciese interesante y justificaran su elección. En este artículo nos centraremos únicamente en el análisis de los informes escritos por una de las estudiantes que participaron en el curso, y en los dos problemas planteados por ella. En sus registros textuales se detectó un movimiento que definimos como «hacia una matemática como ciencia de la demostración». Éste es el caso que analizamos a continuación, del cual se desprende cómo llega a darse un significado a la actividad matemática a través de la demostración.

El problema propuesto por la estudiante al iniciar el curso fue el siguiente:

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 y 12 cm y la hipotenusa de otro triángulo semejante al anterior mide 100 cm. Calcula la hipotenusa del primer triángulo y los catetos del segundo.

El enunciado propuesto evoca una perspectiva de la matemática como materia escolar en un contexto tradicional, en tanto que el sentido de *utilidad* que se da a la actividad se refiere a una práctica que involucra la semejanza de triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras. Si bien es cierto que el ejercicio va más allá de una aplicación directa de una fórmula o la consideración de una cierta razón de semejanza, no deja de ser un ejercicio de traducción de técnicas algebraicas muy utilizadas en el ámbito académico. La medida es considerada como un apartado del currículo escolar de matemáticas y, por tanto, este tipo de ejercicios son útiles, ya que permiten consolidar conceptos y relaciones que surgen en el contexto normativo del aula.

A lo largo del curso, esta estudiante fue elaborando una posición teórica que le permitiría construir su propia posición en relación con la matemática. La estudiante explicita y hace énfasis en que el momento más interesante del curso fue la discusión del problema de Herón.

En el momento de finalizar el curso, la estudiante plantea un nuevo problema, esta vez introducido por un preámbulo que refleja el efecto de sus reflexiones escritas:

Creo que lo más interesante de este curso ha sido la demostración del porqué el problema se realizaba de tal manera y no de otra que hemos ido realizando de cada uno de los ejercicios propuestos. Por este motivo, ***lo más adecuado para la propuesta de este último problema creo que es alguno que requiera una demostración y no necesariamente una resolución matemática.***

Si de todas las clases que han transcurrido durante estos meses que llevamos haciendo esta asignatura me dijeran que obligatoriamente tengo que escoger uno de tantos «momentos» que se han dado, supongo que me decantaría por la clase en la que se realizó la explicación del «problema de Herón» ya que me resultó fascinante la manera de demostrar que la solución del problema era ésa y el porqué de ésta (aunque he de reconocer que no conseguí solucionarlo por mí misma).

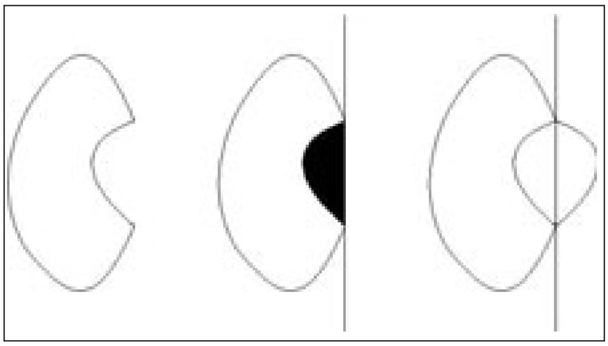
A continuación se incluye el enunciado y la solución que ella misma presenta del problema.

El problema que propongo es el siguiente: Si existe una curva de área máxima para un perímetro dado, ¿qué forma debería tener dicha curva?

Nuestra primera respuesta ante un problema como éste sería decir que esta curva tendría que ser circular. Esto es lo que llamaríamos una respuesta intuitiva, ya que sabemos que es la respuesta correcta (algunos dirían que es la respuesta más lógica), pero no sabemos cómo demostrar que estamos en lo cierto y que es esta forma y no otra: como sabemos, en matemáticas, intuición y demostración no es lo mismo aunque se puede obtener la respuesta correcta con un razonamiento equivocado.

En un principio diré que la respuesta correcta es que esta curva debería ser circular, pero vamos a realizar la demostración del porqué:

a) Primer paso: *La curva ha de ser convexa*



Supongamos que la curva propuesta tiene un entrante (parte ensombrecida). Si trazamos una recta que corte la curva en dos puntos y formamos una nueva curva (de igual longitud que la inicial) aumentaríamos el área de esta figura: por tanto, la conclusión es que la curva ha de ser convexa.

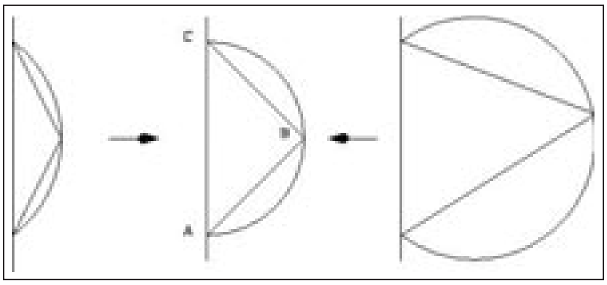
b) Segundo paso: *Cogemos la mitad de la curva y el ángulo «subtendido» por su diámetro es siempre recto.*

El ángulo subtendido es aquél que se forma cuando se trazan rectas desde cada extremo del diámetro al punto de la curva.

Supongamos que este ángulo no es recto: si fuera menor, podríamos aumentar el área de la curva y, si fuera mayor de 90º, tendríamos que estrechar el ángulo.

c)Tercer paso: *La curva debe ser un círculo*

El ángulo ABC es de 90º, ya que el ángulo cuyo arco es un semicírculo es de 90º.



d) Cuarto paso: *Debido a que cada semicurva es un semicírculo y ambas se empalman en un mismo diámetro,* la curva completa es un círculo.

El problema planteado es el conocido en el ámbito de las matemáticas como el *problema isoperimétrico,* discutido en profundidad en referencias clásicas de matemáticas (Courant y Robbins, 1941). El problema isoperimétrico puede ser catalogado como uno de los problemas de máximos y mínimos, que eran ya conocidos por los matemáticos de la antigua Grecia y que resultan interesantes desde muchos puntos de vista. Se trata, en primer lugar, de un tipo de problemas cuyo enunciado es claro, conciso y fácil de entender, pero cuya solución completa es muy compleja. La comparación de áreas de figuras que tienen formas diversas pero igual perímetro fue uno de los problemas que se trataron en la antigua matemática griega. La solución del problema para el caso de una curva cualquiera, sin embargo, fue muy posterior y la más conocida es una de las desarrolladas por Jacob Steiner (Courant y Robbins, 1941). La estudiante esboza precisamente esta demostración aunque se muestra muy vaga en sus explicaciones.

Surge aquí la relación entre dos elementos interesantes de analizar desde la interacción entre las perspectivas cultural y cognitiva: la distinción entre lo que considera una idea intuitiva y una sistematización de razonamientos verbales acompañada de dibujos geométricos, contextualizada en el método de demostración de la matemática griega y la utilización casi exclusiva de diagramas visuales para referirse a una demostración. La estudiante expresa así esta relación:

[...] *esto es lo que llamaríamos una respuesta intuitiva ya que sabemos que es la respuesta correcta (algunos dirían que es la respuesta más lógica) pero no sabemos cómo demostrar que estamos en lo cierto y que es esta forma y no otra; como sabemos, en matemáticas, intuición y demostración no es lo mismo aunque se puede obtener la respuesta correcta con un razonamiento equivocado.*

En consecuencia, alrededor de este problema la estudiante concentra su proceso de maduración en torno a qué son las matemáticas. A la mención de lo que es un razonamiento intuitivo, se añade la distinción planteada en la introducción del problema entre una «resolución matemática, y una demostración. Se ponen en juego tres aspectos fundamentales, interdependientes, de la matemática como una actividad que se ocupa de resolver problemas mediante *demostraciones*: intuiciones y conjeturas; fórmulas y algoritmos (a lo que se llama «resolución matemática»), y demostraciones.

Este problema (al igual que el primero que propuso) pertenece a una temática curricular, puesto que se centra en la relación entre perímetro y área, pero su naturaleza es completamente distinta a la del primero: el acento se pone en la la exploración y especialmente en la demostración. Además, la utilización de heurísticos se manifiesta de manera indirecta al introducir una reflexión entre lo que constituye una idea intuitiva y una demostración.

Es en el momento de reflexión final ante el planteamiento del problema con el que se cierra el curso cuando se hace evidente el movimiento que analizamos (considerar la matemática como «la ciencia de la demostración»). Para que tal movimiento se produzca es decisiva, como la misma estudiante indica, su experiencia a lo largo del curso con la resolución de problemas. La estudiante pone en tela de juicio sus propias argumentaciones y eso le permite romper con la idea de aplicación para encontrar el sentido de la actividad matemática en la demostración.

CONCLUSIONES

En el proceso de solución del problema de Herón, la visualización, entendida a la vez como percepción y como proceso para llegar a la solución de un problema, puede ser analizada desde las tres perspectivas descritas en el comienzo de este artículo –cultural, sociológica y cognitiva–. A lo largo del artículo hemos detallado cómo, en su interacción, estas perspectivas pueden generar un nuevo significado para la demostración.

Desde una perspectiva cultural, activa la reflexión sobre la metodología del quehacer matemático. Juegan en este sentido un papel de importancia fundamental: *a*) la contextualización histórica de los problemas; *b*) el reconocimiento de construcciones llevadas a cabo en otro momento histórico; y *c*) la discusión y puesta en común de conjeturas y estrategias que parten de diferentes niveles conceptuales. Estos aspectos brindan la posibilidad de pensar en la matemática desde otro punto de vista, distinto del de una ciencia aplicada.

La visualización tiene, entre otras, un componente cultural que ha sido señalado por autores diversos. Al contextualizar históricamente un problema, es posible contemplar el proceso mismo de visualización como algo sujeto a un momento y a una condición histórica determinada y su análisis, desde distintas perspectivas en interacción permite valorar la influencia de este componente cultural en el proceso de su resolución. El ejemplo del problema de Herón y las soluciones planteadas –por una parte, desde la geometría clásica tal y como propone Herón y, por otra, la que propone Fermat en su método para la determinación de máximos y mínimos, de carácter algebraico– ilustran este hecho. Desde una perspectiva cognitiva, el modo en el que los estudiantes construyen estas imágenes es fundamental y revela diferentes niveles de maduración matemática.

Desde la elaboración de conjeturas a partir de un concepto elemental y conocido que trata de plasmar la idea de equilibrio –mediatriz, punto medio de un segmento– a lo que hemos llamado en esta investigación construcciones *espontáneas*.

Desde una perspectiva sociológica, es fundamental considerar qué relación con la matemática ha establecido quien resuelve el problema, para poder determinar cuándo un diagrama visual puede conducir a la solución de un problema o no. Desde el punto de vista de la construcción, cualquiera de las conjeturas tercera o cuarta de las expuestas en la tabla I resulta exactamente igual para aquellos estudiantes que no tenían relación con el teorema de Pappus, pero despierta, en el conocedor de otros teoremas de la matemática, la activación de recursos e imágenes que conducen a solucionar el problema como un caso particular de otro.

Atendiendo a las tres perspectivas de manera global, la visualización ha de ser entendida como un proceso que se comparte entre los estudiantes y el profesor. Existen diferentes estilos de visualización y el hecho de que un estudiante, que no necesariamente participa de forma explícita en la resolución del problema, sea espectador de las imágenes que el resto de compañeros genera puede llegar a influir en el significado que otorga a la demostración y, en particular, al papel que juegan las construcciones geométricas en el proceso de solución de un problema.

El objetivo de familiarizar a los estudiantes con la construcción e interpretación de diagramas visuales en el proceso de resolución de un problema no es únicamente hacer posible que una imagen conduzca a la solución, sino activar tanto sus herramientas conceptuales como su reflexión sobre lo que significa resolver el problema (encontrar conjeturas y posteriormente demostrar) y sobre el significado mismo de la demostración.

NOTAS

[*] Este artículo forma parte de la tesis doctoral: «Historia, matemáticas y realidad. El caso de la medida en la formación inicial de maestros», realizada por Lourdes Figueiras bajo la dirección de Jordi Deulofeu, en el Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona. El artículo ha sido escrito en el marco del proyecto «Pensamiento matemático avanzado: procesos cognitivos de aprendizaje y fenómenos de enseñanza» (CICYT, BXX2000-0069).

[1] En la terminología de Ibañes (2001) se trata de un «esquema de prueba inductivo», que constituye, para muchos estudiantes, una verdadera demostración mientras no evolucione a otros esquemas más ricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, P. (1996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *UNO*, 8, pp. 7-18.

ARCAVI, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, pp. 215-241.

BARTOLINI BUSSI, M.G. (1998). Theoretical and empirical approaches to classroom interaction, en Biehler, R., Scholz, R.W., Strässer, R. y Winkelmann, B. (eds.). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, pp. 121-132. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BISHOP, A.J. (1998). Research and practioners, en Kilpatrick, J. y Sierpinska, A. (eds.). *Mathematics education as a research domain: a search for identity*, pp. 33-45. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

CALVO, C. (2001). «Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral». Tesis doctoral. Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.

COBB, P. (1998). The tension between theories of learning and instruction in mahematics education. *Educational psychologist*, 23, pp. 87-103.

COURANT, R. y ROBBINS, R. (1941). What is mathematics? Nueva York: Oxford University Press.

DE GUZMÁN, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático.* Madrid: Pirámide.

DÍAZ GODINO, J. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática, en Gutiérrez, A. *Área de conocimiento, didáctica de la matemática*, pp. 105-148. Madrid: Síntesis.

DAVIS, P.J. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24, pp. 333-344.

DREYFUS, T. (1994). Imagery and reasoning in mathematics and mathematics education, en Robitaille, D., Wheeler, D. y Kieran, C. *Selected lectures from the 7th ICME.* Quebec: Université Laval.

FERMAT, P. (1891-1912). Methodus ad disquirendam maximam et miniman, en Tannery, P., Henry, C. Vol III. *Oevres de Fermat*, pp. 121-149.

FIGUEIRAS, L. (2003). «Historia, matemáticas y realidad. El caso de la medida en la formación inicial de futuros maestros». Tesis doctoral. Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.

FIGUEIRAS, L. y DEULOFEU, J. (2002). History of math, stories of diversity. A proposal for pre-service teacher training. Comunicación presentada en la *54th Conference of the CIEAEM.* Vilanova i la Geltrú, 12 al 19 de julio.

FISCHBEIN, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, pp. 139-162.

HEATH, T.L. (1921). *A history of greek mathematics.* Vols. I, II. Nueva York: Dover.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2001). Pruebas visuales en trigonometría. *AULA*, 10, pp. 103-116.

KAUTSCHITSCH, H. (1994). «Neue» Anschaulichkeit durch «neue» Medien. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematic*, 94(3), pp. 79-82.

MALARA, N.A. y ZAN, R. (2002). The problematic relationship between theory and practice, en Lyn, D. (ed.). *Handbook of international research in mathematics education*. Nueva Jersey: Mahwah.

PHILIPPOU, G.N. y CHRISTOU, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, pp. 189-206.

POLYA, G. (1965). *Mathematical discovery*, 2. Nueva York: Wiley.

ROWE, D.E. (1996). New trends and old images in the history of mathematics, en Calinger, R. (ed.). *Vita mathematica. Historical research and its integration with teaching*. MAA Notes, 40, pp. 3-16. Nueva York: Academic Press.

SHOENFELD, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.

VERNANT, J.P. (1965). *Mythe et pensée chez les grecs.* Trad. cast. (1993). *Mito y pensamiento en la Grecia antigua.* Barcelona: Ariel.

ZIMMERMANN, W. y CUNNINGHAM, S. (eds.) (1991). *Visualization in teaching and learninig mathematics*. Mathematical Association of America, Notes, 19.

PETERS, V. et al. (1992). Analysis: Visualization in mathematics and didactics of mathematics, part 1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 26, pp. 77-92.

PETERS, V. et al. (1992 II). Analysis: Visualization in mathematics and didactics of mathematics, part 2. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 26, pp. 109-132.

[Artículo recibido en octubre de 2003 y aceptado en noviembre de 2004]