Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 25, núm. 2, 2010. Pàg. 171–210. DOI: 10.2436/20.2002.01.31

Presentació i anàlisi de la *Suma de la art*

Segona part: Anàlisi dels continguts

Josep Pla i Carrera

> [...] no ab aquell stilat scriure/que entrels doctes es acustumat mas be satisfet a la feruor daquells:qui de tal art ignorants tenen desig:siẽ adoctrĩats [...]
>
> **Francesc Santcliment**

Resum Com ja vaig indicar en la primera part, l'objectiu principal de l'article —publicat en el *Butlletí* en dues parts— és fer una anàlisi dels continguts aritmètics i comercials de la *Suma* de Santcliment [14]. D'això tracta, doncs, aquesta segona part que, alhora que completa i complementa la primera, clou l'article.

Paraules clau: Història de la matemàtica del segle XV, aritmètiques comercials.

Classificació MSC2010: 01A40, 01A75.

Preàmbul

Aquesta segona part —que constitueix el nucli del treball— la dedicarem a l'anàlisi dels continguts aritmètics i a les aplicacions de la *Suma* de Santcliment.[1] De fet, consta solament de dues parts: La primera, seccions 1.1 i 1.2, conté una anàlisi anàloga —però més breu— a la que trobem a la introducció de la Joana Escobedo [16], la lectura de la qual aconsello. La segona —que constitueix el gruix de l'article— consta de la resta de les seccions; en aquestes es fa una presentació acurada dels continguts de les lliçons de la *Suma*. Nosaltres les analitzarem, però, en sis seccions separades: la presentació de les figures (§ 2), les mesures emprades (§ 3), les quatre espècies (§ 4), els trencats i les espècies corresponents (§ 5), la regla de tres (§ 6), les aplicacions (§ 7) [companyies, canvis i barates] i, com a darrer mètode de resolució, la falsa posició (§ 8), que Santcliment aplica als aliatges (§ 9); el text s'acaba amb un recull de set problemes sense classificar (§ 10).

1 D'ara endavant, m'hi referiré amb el nom de *Suma*.

1 Presentació succinta de la *Suma*

S'escau, encara que sigui de forma breu, fer una presentació de l'autor, de l'obra i de les parts de què consta.

1.1 Introducció al text i a l'autor

Sabem ben poc de Francesc Santcliment, però el que sí que sabem és el que diu ell mateix a la cloenda de la *Suma*:

> Per mĩ̃ja del diuinal adiutori fonch aca/bada la suma present sobre lart de arisme/tica per mi Francesch Sanctcliment enla/insigna ciutat de Barcelona aquella en/senyant:iatsia no ab aquell stilat scriure/que entrels doctes es acustumat/mas be satisfet a la feruor d̃aquells:qui de tal/art ignorants tenen desig:siẽ adoctrĩats/tant quant la flaquesa dela mia intelligẽ/sia ma cõsentit.[2]

Aquestes paraules posen de manifest que la *Suma* fou escrita per Francesc Santcliment a la ciutat de Barcelona, on ensenyava aritmètica.[3]

Jaume Paradís i Antoni Malet i, sobretot, Joana Escobedo ens recorden fins a quin punt el text restà en l'oblit durant els segles XVII i XVIII. Això no obstant, l'obra és d'un interès innegable, atès que fou publicada tan sols vuit o nou anys després de l'aparició de la impremta a Espanya.[4] De la data de l'edició en tenim constància gràcies al colofó de Santcliment: «Stampada fou lapresent obra en Bar/celona per Pere posa preuere en lany/Mil quatrecents vytanta dos.»[5]

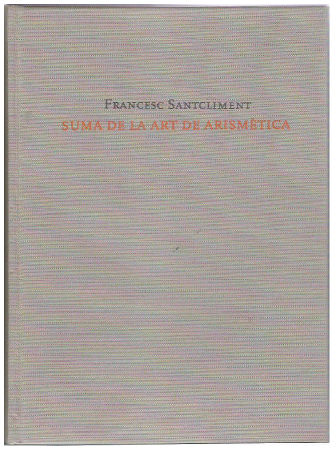


FIGURA 1: Edició de la BC de la *Suma* de Santcliment [16].

Observem que Santcliment no escriu la data usant les xifres romanes, com era costum fins aquell moment, sinó que l'expressa amb lletres, i ho fa d'acord amb la descripció numèrica de les xifres indoaràbigues tal com les descriu a l'inici de la *Suma*.

Fou la primera aritmètica que s'editàa la península Ibèrica, incloent-hi l'estat actual de Portugal. A més, fou escrita en català i per un personatge

2 Vegeu [14, foli 135v]. D'ara endavant ens referirem a [14], esmentant solament el nombre del foli acompanyat de r (recto) o v (verso), si es tracta, respectivament, de la part de davant o de darrere del full.

3 Paradís i Malet [11, p. 494] fan notar que Bohigas i Amadeus afegeixen que «malgrat alguns intents, no ha estat encara demostrat que Francesc de Santcliment sigui, també, el traductor del *Fiore di virtú*». La introducció de Joana Escobedo ofereix una aproximació a la vida i a l'obra de Santcliment, a la seva procedència i vinculació amb d'altres obres.

4 Aquest fet és confirmat en dues històries de la impremta aparegudes a final del segle XVIII.

5 Vegeu el foli 136r.

de la terra. La següent obra autòctona fou escrita en castellà.[6] Es tracta del *Tratado Subtilisimo de Arismetica y de Geometria* [1512],[7] del frare Juan de Ortega [Palència (Espanya) ∼1480–?, ∼1568], que s’edità a Lleó l’any 1512. Havien passat trenta anys des de l’edició de la *Suma* de Santcliment.[8] El fet és important perquè, com fa notar amb molt d’encert Karpinski,

> [...] un dels misteris del progrés de l’aritmètica indoaràbiga a Europa és el fet que no es conegui cap tractat d’aritmètica hispànica anterior al de final del segle XV. Des del segle XII al XIV, els àrabs dominaven una part important de la península Ibèrica i havien aconseguit establir-se en alguns indrets aïllats d’Europa. Com ja hem indicat, aquest fou un dels elements que van permetre un contacte efectiu amb la matemàtica d’aquella època, ben coneguda pels àrabs que contribuïren a difondre-la. A Espanya i Portugal el camí estava ja preparat per descobrir les Amèriques i també per al descobriment, igualment revolucionari, de Nicolaus Copernicus [1473–1543]. I, no obstant això, manquen els documents en les llengües vernacles d’Espanya i Portugal.[9]

Aquest fet, per si sol, confereix a l’obra de Santcliment una importància notable, que esdevé encara més valuosa quan constatem que «no és essencialment diferent» dels tractats italians de Treviso, de Borghi, de la part comercial del de Pacioli, ni tampoc del de Calandri [segle XV].[10]

El valor de la *Suma* de Santcliment és, doncs, innegable. Aquesta vàlua no li és desconeguda a l’autor, atès que afirma: «La qual suma fonch re/goneguda per lo reuerent mestre rapita/en aquesta e en les altres arts e en sacra/theologia meritissimo laureat/e p̄ lo ho/norable en Jachme serra olim mestre/a la seca de Perpĩya.»[11]

6 Aquesta circumstància és important perquè, dels 258 llibres impresos a l’Espanya catalanoparlant, 151 eren en llatí, 3 en castellà i 104 en català, un fet que contrasta amb la relació entre el llatí i el castellà a l’Espanya castellanoparlant. De les 583 edicions, 240 eren en llatí davant de les 343 en castellà [11, p. 495].

7 «És un bon llibre, de nivell molt superior al de Santcliment, però tampoc no tingué cap mena d’influència ni dins ni fora de la península» [11, p. 495]. L’obra, tanmateix, fou reeditada el 1534, 1537 i 1542. Indiquem, de passada, que l’any 1503, a València, s’editià l’*Aritmetica* i la *Geometria* de Thomas Bradwardine [10], un escolàstic anglès del segle XIV.

8 A la seva introducció, Joana Escobedo discuteix el text de Saragossa, esmentat a [13, p. 46], del qual es conserva un exemplar a la Biblioteca de la Universitat de Càller (Sardenya), i la possibilitat que sigui un text, en castellà, de Santcliment. És interessant comparar les seves opinions amb les que sosté Malet a [15, p. 40–44].

9 Vegeu [8, p. 412].

10 Vegeu [8, p. 412]. El text de Calandri «es diferencia de tots els altres —i això el fa únic— perquè s’estén àmpliament en els problemes, i evita discutir les subdivisions tècniques de l’aritmètica». És a dir, omet la descripció dels algorismes que suposa ja coneguts i assimilats pel lector i s’endinsa directament en les aplicacions. Això no obstant, quan ha d’efectuar les operacions concretes, a voltes, ho fa detalladament, quelcom que permet de reconstruir els seus algorismes. Notem, de passada, que l’algorisme de divisió de Calandri és l’actual. Per tal de poder establir les semblances i diferències d’aquestes aritmètiques cal, com ja he indicat a [13, nota 63, p. 75], un estudi comparatiu detallat que posi de manifest, d’una banda, les possibles interrelacions que hi ha entre aquestes i, d’una altra, la diversitat de la qualitat, la complexitat, la generalització, el rigor i la metodologia de cada una de les obres.

11 Vegeu el foli 135v. La paraula *òlim* és arcaica i significa [4, volum VI, p. 480] ‘en altre temps’.

L'obra de Santcliment és una aritmètica concebuda com una eina útil per a calcular i resoldre els nombrosos problemes numèrics associats a la vida comercial de l'època. Aquest esperit utilitari i didàctic és comú en totes les aritmètiques comercials del moment, indicades en la classificació dels textos de la figura 1 de la part primera.[12] Són textos comercials en els quals, un cop ben establert el sistema numèric indoaràbic i els seus algorismes aritmètics de sumar, restar, multiplicar i dividir, s'ofereix un grapat força important de problemes que es resolen amb aquests algorismes, i d'exemples que el fan planer i entenedor. Les definicions brillen per la seva absència.[13] Les que hi ha són sempre definicions utilitàries i/o descriptives i, en cap cas, no pretenen ser rigoroses. S'oblida la presentació teoricodeductiva de les obres clàssiques i la necessitat de basar-ho tot en axiomes.[14] Són obres que, en les aplicacions, limiten la potència matemàtica a la proporcionalitat.

Llurs autors tenen una voluntat explícita de fer-les didàctiques i clares. Un fet indiscutible, que palesa aquesta voluntat didàctica i divulgadora, el posa de manifest el mateix Santcliment a la cita esmentada anteriorment quan diu que vol «adoctrinar» tots els que tenen «desig». Per això evita el llatí, llengua dels erudits, i tria la llengua popular, el català. El problema rau, en tot cas, en la capacitat del mestre: «siẽ adoctriats —diu— tant quant la flaquesa de la mia intelligẽsia ma cõsentit».

Malgrat aquesta voluntad didàctica, el text és força extens i dens per al nivell de l'època. Per comprendre'l, cal un bon domini de la lectura i una habilitat notable en l'escriptura, perquè les operacions que s'han d'efectuar cal escriure-les. Aquestes dues habilitats eren més aviat escasses.

1.2 Índex i descripció de l'obra [folis 1r–3v]

L'obra consta de 136 folis en quart —entre 24 i 28 línies cada foli i uns 38 espais per línia. Això fa que sigui equivalent, en extensió, a un llibre actual d'unes 100 pàgines.[15] L'extensió és, en part, fruit de la voluntat didàctica que porta l'autor a detallar tots els passos i descripcions dels algorismes, a multiplicar els exemples amb escreix, desenvolupant-ne tots els detalls i a oferir un nombre important de problemes aclaridors.

Més complicat és el significat de «mestre ràpita», atès que ràpita fa referència a una «espècie de mesquita o santuari fortificat on vivien els guerrers encarregats de la defensa de les fronteres musulmanes» [4, volum VII, p. 137]. La «seca», en canvi, és la casa on es batia la moneda. Ve de l'àrab *sàkka* [4, volum VII, p. 728].

12 Vegeu [13, p. 46].

13 Solament l'obra de Sacrobosco intenta donar unes definicions precises.

14 Sabem que Jordanus Nemorarius [Borgentreich (prop de Warburg, Alemanya), ~1200–al mar, 1237] havia elaborat una *Arithmetica* seguint l'esquema dels *Elements* d'Euclides, és a dir, presentant l'aritmètica com una ciència deductiva, basada en postulats adequats. Un cop establerts, la resta de les propietats aritmètiques s'havia de demostrar. Aquesta aritmètica, escrita en llatí, no té, però, res a veure amb les aritmètiques comercials a les quals ens estem referint [5].

15 Vegeu [8, p. 413].

L’autor és directe i en quatre línies deixa ben establert l’objectiu de l’obra:

> A Laor e gloria de deu e dela hu//
> mil uerge Maria mare sua co//
> mença lo libre appellat Suma//
> de la art de Arismetica. Lo ql//
> diuisirem en .15.parts. çoes en nombrar//
> aiustar/restar/multiplicar/dimidiar/par//
> tir/regla de tres ab diuersitat de raons/ʒ//
> panyies/cambis/barates trẽcats ab to//
> tes les.4.species/sou de fi ab diuersitat//
> de billons/de una e dues falses posicions//
> progressiõs/e proporciõs.Deles quals//
> parts ho species breument empero a suf//
> ficiencia aci enlo present tractat parlarẽ.[16]

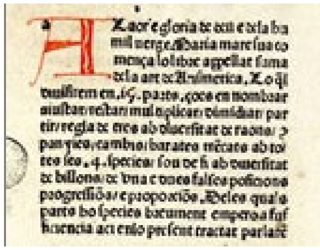


FIGURA 2: Inici de la *Suma*

És l’*índex* de l’obra. Consta de 15 capítols.[17] Per indicar-ne el nombre usa els símbols indoaràbics que introdueix més tard. D’antuvi dedica 40 folis [folis 1r–40v] a explicar-nos la manera de «denominar» els nombres usant el sistema decimal posicional indoaràbic i els algorismes de les quatre operacions elementals, incloent-hi les proves.[18] Després ve la regla de tres [folis 41r–54r], una eina indispensable per a resoldre els problemes numèrics que consisteixen a determinar una quantitat desconeguda que depèn d’altres, sempre que hi hagi proporcionalitat. Amb aquesta eina de càlcul pot resoldre força problemes mercantils. Més endavant —al bell mig de la regla de tres— introdueix els *trencats*[19] i les seves *espècies* [folis 54r–83v].[20] El capítol 13 il·lustra la tècnica de la *falsa posició* [folis 114v–124r] —l’eina de càlcul que permet resoldre els problemes *algèbrics lineals*.[21]

Abans d’endinsar-nos en l’anàlisi detallada del text, seguint Malet i Paradís, fem un comentari general:

> Els diferents algorismes i regles són descrits a base d’exemples concrets, i mai no se’n dóna la justificació teòrica. En canvi, és constant la preocupació per explicar el significat dels conceptes introduïts. Per exemple, quan Santcliment parla de la multiplicació de trencats sembla que serveix per contestar [la pregunta] «Com q̇t demanaue: la mitat dela terça part dela q̃rta part dela quinta part de una liura que valrà».[22]

Un altre tret que cal destacar és l’absència de la simplificació teòrica que suposaria presentar, d’entrada, el cas general, amb la conseqüent pèrdua, és

16 Vegeu el foli 1r. El símbol ʒ abreuja «com»; és a dir, la part 8 es titula «companyies». He reproduït el text tal com es troba a la *Suma* sense modernitzar-ne ni l’escriptura ni l’ortografia dels mots. El símbol // indica el final de línia; el símbol / el trobem en el text original.

17 El trobem molt més detallat i clar a la *Introducció* de Joana Escobedo.

18 No fa cap esment de l’extracció de les arrels, ni quadrades ni cúbiques.

19 Karpinski adverteix del fet que aquest mot és genuí de Santcliment, mentre que els altres són d’influència italiana.

20 Per a Santcliment, les *espècies* són les operacions, tant en el cas dels enters com dels trencats.

21 És un mètode molt antic que ja es troba en la matemàtica egípcia del ~1800 aC.

22 Vegeu el foli 62v, i [9, p. 552].

clar!, de claredat metodològica i didàctica. La divisió, per exemple, s'ensenya pas a pas: d'antuvi s'ensenya a dividir per (un nombre d')una xifra, després per un de dues, etc.;[23] o bé, a l'hora d'explicar les operacions amb trencats, un cas

com $\frac{m}{n} + p$ mai no és considerat com un cas particular de $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$, i tots dos s'expliquen, sempre a base d'exemples concrets, per separat. Tampoc no és visible cap mena de preocupació per les propietats de les operacions.

En aquests llibres es pot constatar, i això és un fet de la màxima importància: l'ampliació del concepte de nombre. Els autors distingien els nombres *enters* (*iusts*, com diu Santcliment) i *amb escaig*; per a ells tant nombre és 3, com $3 + \frac{1}{2}$, com $\sqrt{2}$. Només per això, la més elemental d'aquestes obres ja hauria de ser considerada superior a qualsevol de les aritmètiques escolàstiques.[24]

2 «De nombrar e conexer les figures» [folis 1r–3v]

Santcliment comença precisant el mot «nombrar» [foli 1r]. Significa expressar amb paraules els nombres que són representats simbòlicament per mitjà de les figures. Les «figures» són els símbols amb els quals s'expressen simbòlicament els nombres. Tot seguit explica que només hi ha deu xifres i que, amb aquestes deu xifres, és possible representar tots els nombres possibles: els més petits de deu, usant les xifres; el deu, per mitjà de 10, i els més grans de deu repetint el deu les vegades que calgui i afegint-li una part al deu; és a dir, un nombre inferior a deu. Les nou primeres figures «se appellen chifres», o més pròpiament encara «figures significatives». La desena s'anomena «xifra», o «figura de nores», o «zero», i això és així perquè no val res, però fa que les altres xifres valguin el que cal segons el lloc que ocupen.

Les xifres són

Són ben iguals a les del devanagari —l'alfabet amb el qual s'escriuen algunes llengües de l'Índia, entre elles el sànscrit— i, de retruc, a les de Leonardo da Pisa, Sacrobosco i Villedieu, que les havien heretat, via les *gubar* o, en tot cas, via el camí no gaire clar que portà al *Còdex Vigilanus*, però en cap cas via les procedents de Bagdad.[25] Com era habitual en aquesta mena de textos, Santcliment distingeix el *zero* de totes les altres. No val res, però dóna valor, segons la posició, a les altres. És, per tant, indispensable.

Les altres valen, respectivament, d'esquerra a dreta,

un, dos, tres, quatre, cinc, sis, set, vuit, nou,

fins que «entro a la deena que no val res».

23 Aquesta manera de fer és la mateixa que la dels textos algorísmics del segle XIII.
24 Vegeu [9, p. 552].
25 Vegeu [12, p. 124–129; 134–141].

Després diu que, per nombrar els nombres, només calen tres nombres generals: els simples, les desenes i les centenes [foli 1v]. I ensenya a llegir un nombre escrit usant les xifres. Ho fa, com és natural, a poc a poc. El text és un degoteig clar, però lent, en el qual queda palès que els nombres s'han de considerar en grups de tres, començant per la mà dreta. Aleshores, de dreta a esquerra, tenim unitats, desenes i centenes [foli 2r]. Ara bé, per poder-lo llegir, cal tenir en compte, quan són ternes completes, la manera de designar la segona terna quan avancem cap a l'esquerra, i la tercera, etc. Per a la segona terna diu que cal usar el nom de «milia», per a la tercera, de «milmilia», per a la quarta, «milmilmilia» o «milmilions», etc. [foli 2v].

En definitiva, doncs, cal dividir el nombre en grups de tres i enumerar-los; els grups parells són milions i els senars són grups de mil. Si en tenim $4, 6, \ldots$ direm, respectivament, mil milions, mil milions de milions… No cal seguir llegint el text. És suficient veure [foli 3r] com cal llegir «lo eximpli seguent en les chifres:»

$$\begin{array}{l} \quad\ 6 \qquad 5 \qquad 4 \qquad 3 \qquad 2 \qquad 1 \\ 75/321/897/523/489/234/567. \end{array}$$

Aquesta part o capítol acaba amb l'afirmació: «E axi appar manifestam̃t:que tots los nõbres se regeixen per lo nombre de.10» [foli 3v].[26]

3 Les unitats de mesura de la *Suma*

Culturalment aquests problemes tenen una certa rellevància perquè donen una informació força acurada d'algunes de les unitats de mesura que, pels volts del 1482, s'usaven, principalment, a Barcelona.

A [15, p. 59–60], hi trobem un apèndix titulat «Alguns preus i unitats (monetàries i de mesures)», que reproduïm aquí:

> *Unitats monetàries*
>
> La unitat monetària més usada en la *Suma* de Santcliment és la lliura catalana. La lliura valia vint sous, i cada sou dotze diners. Els diners es dividien en malles (mitjos diners) i pugeses (quarts de diner), que circulaven en forma de moneda de coure o llautó encunyada localment. Les grans unitats monetàries citades al costat de la lliura són el ducat, l'alfonsí, el florí, l'escut i els timbres.
>
> L'equivalència entre aquestes monedes no és constant, en el sentit que diferents exemples o problemes resolts en el llibre proporcionen equivalències diferents […]. Segons Santcliment l'equivalència oficial era:
>
> 65 ducats = 78 lliures catalanes = 1 marc d'or fi,

26 Curiosament, però, no llegeix detingudament el nombre de l'exemple. No obstant això, d'acord amb les seves regles, s'hauria de llegir:

> setanta-cinc milions de milions de milions tres-cents vint-i-un mil vuit-cents noranta-set milions de milions cinc-cents vint-i-tres mil quatre-cents vuitanta-nou milions dos-cents trenta-quatre mil cinc-cents seixanta-set.

és a dir, un valor de vint-i-quatre sous per ducat [foli 130r].

[...] A continuació resumeixo les principals equivalències de la *Suma*:

1 lliura = 20 sous,		1 sou = 12 diners,		1 diner = 2 malles,
1 ducat = 24 sous,		1 alfonsí = 36 sous,		1 malla = 2 pugeses,
1 florí = 17 sous,	o bé	1 florí = 11 sous,		1 escut = 22 sous.

Les lliures aragoneses (mencionades en un exercici en el foli 96v) no valien el mateix que les catalanes. L'equivalència entre ambdues monedes es pot deduir del valor del florí d'or, que a Catalunya valia disset sous i a Aragó quinze o setze sous (segons l'exercici, les lliures, catalanes o aragoneses, sempre valen vint sous). Santcliment també esmenta ducats i lliures de Milà, lliures de Pisa i sous de Mallorca.

Resum de les principals equivalències:

1 sou català = 16/17 sous aragonesos = 22/17 sous de Mallorca,
1 sou català = 5/2 sous milanesos = 25/6 sous de Pisa.

Unitats de pes:

1 càrrega	=	3 quintars,
1 quintar	=	4 roves,
1 rova de Barcelona	=	26 lliures (a d'altres llocs en podia valer 25 o 27),
1 lliura	=	12 unces (~400 gr).

Unitats de longitud: 1 peça = 12 canes, 1 cana = 8 pams (~ 1, 5 metres).

Unitats de volum (*de gra*): 1 quartera = 12 quartans (~ 70 litres),
1 faneca = 1 3/4 quartans

Unitats de temps: 1 mes = 30 dies, 1 dia = 12 hores.

Alguns preus:

1 quintar de pebre	=	20 lliures,	1 cana de drap	=	19/20/30 sous (en tres problemes diferents),
1 càrrega de pastell	=	5 lliures,			
1 quintar de sucre	=	7 lliures,	1 quintar de mel	=	26 sous,
1 rova de safrà	=	26 lliures,	1 rova de seda (en madeixa)	=	3 lliures,
1 lliura de canyella	=	4 sous,	1 marc d'or fi	=	78 lliures (preu oficial a la seca de Barcelona).

4 Les quatre espècies

Un cop introduïts els nombres, cal dedicar l'atenció a les quatre operacions o, com diu Santcliment, a les 4 *espècies*.

4.1 «Lo aiustar» [folis 3v–10r]

D'antuvi cal aclarir el significat del terme. «Aiustar» és fer de molts nombres un sol nombre que valgui com tots aquests, i no pas menys [foli 3v].

Tot seguit explica com cal fer-ho per «aiustar» i la seva explicació és clara. Introdueix un apartat que titula «Per metre la regla en pratica» [foli 4r]. Primerament, precisa com cal escriure els nombres que cal sumar. Després dóna les regles que s’han de seguir per tal d’efectuar la suma. Finalment ho aclareix amb un exemple.

Les regles que s’han de seguir són les següents:

1. Posar els nombres en ordre; és a dir, col·locar els uns dessota dels altres de manera que les figures de les xifres es corresponguin, començant per la dreta.
2. Ajuntar totes les figures d’un ordre. Si el resultat no és superior a la desena, s’escriu el total a sota de les figures sumades; si la supera, hem de col·locar allò que supera l’ordre de les desenes a sota de les figures que estem afegint, i l’ordre de les desenes, reservat, s’afegeix a les xifres de l’ordre superior.

L’exemple —el va comentant— serveix per aclarir la regla pràctica [foli 4v]:

Les xifres de la dreta són totes iguals a xifra; juntes donen xifra, que col·loquem a la dreta.

	5	7	3	2	0.
	8	9	5	7	0.
	3	2	5	7	0.
1	7	9	4	6	0.

Ara sumem les xifres de segon ordre, que són: 2/7/7. Dóna 16. Però, com que la suma és superior a deu, només col·loquem, al lloc de les desenes, el 6.

La desena —que correspon al 10— l’afegim a l’ordre superior; és a dir, a les xifres o ordre de la centena. Aleshores, 1 que en tinc, i 3, i 5, i 5, fan 14. Posem el 4, i guardem l’1 —que correspon al 10— per a l’ordre superior, i així successivament [folis 4v i 5r]. Tot seguit explica la raó «de portar-ne», i aclareix que, si la suma de les figures dóna dues, tres, etc. desenes, aleshores a l’ordre superior cal afegir-hi, respectivament, 2, 3, etc.[27]

A continuació, seguint les pautes del *Liber abbaci*, diu com cal «aiustar moltes partides en una per lliures sous e diners segons diverses quantitats». És a dir, com cal afegir *quantitats heterogènies*. N’ofereix un exemple on, com podem constatar fàcilment, 1 sou val 12 diners, i una lliura, 20 sous [foli 5v].

	5 732 081 lliures (2)	15 sous (2)	7 diners
	9 370 894 lliures	13 sous	9 diners
	8 573 201 lliures	19 sous	11 diners
Suma.	23 676 178 lliures	9 sous	3 diners

Després dóna una descripció clara, semblant a la de Fibonacci, de la «proua general en les aiustacions», que és la *prova del nou*. I tot seguit hi afegeix un exemple, que correspon a la suma següent de lliures [folis 6r–6v]:

Sumem el 5 i el 7 del 573. Dóna 12. Li traiem 9. Obtenim 3, que afegim als 3 del 573 que encara no hem usat. Dóna 6.

6	573 lliures
3	201 lliures
3	975 lliures
3	1 749 lliures
3	3

El col·loquem a l’esquerra del 573, en una nova columna, tal com indica la figura adjunta. Fem el mateix amb el 201 i amb el 975. Obtenim, respectivament, 3, i 3. Els col·loquem a la columna de l’esquerra.

27 Vegeu el foli 5r. Hi ha una gran analogia amb Fibonacci i la tècnica de «guardar a la mà».

Els números 6, 3, 3 corresponen a la «prova» de cada fila.

Ara fem el mateix amb la suma 1 749. S'obté 3. Finalment, sumem les proves 6, 3, 3, i els apliquem també la prova. Dóna tres, que és el mateix que dóna la prova de la suma.

És a dir, la suma de les proves, un cop li hem aplicat la prova, dóna el mateix que la prova de la suma. Això és la prova de la suma [foli 6v].[28]

4.2 «De sostraure» [folis 10r–18r]

També en aquesta ocasió cal tractar dues qüestions: aclarir el significat de l'operació, i establir-ne l'algorisme [folis 10r–10v].

«Sostraure» consisteix a treure un nombre d'un altre més gran. En l'operació de sostraure només hi ha dos nombres: aquell que treu, i aquell del qual es treu. També ara, com en la suma, s'escriuen figura a figura, però el més gran és el que es col·loca damunt. El que sostrau, figura a figura, al dessota, sempre començant per la mà dreta [foli 10v].

Tot seguit recalca que la sostracció s'obté traient el petit del gran que és la suma d'ambdós. I aleshores ens ensinistra en l'art de sostraure.

Ho vincula al comerç, quan diu [foli 11r] que el nombre més gran es pot considerar el «préstec»i el més petit la «paga».

Presta.	5 732
Paga.	5 729

Dóna *dues* regles [foli 10v] que corresponen a les dues possibilitats que poden presentar-se en una resta, si tenim en compte que el nombre de dalt ha de ser necessàriament més gran que el nombre de baix.[29]

O el més gran té més ordres que el més petit, *com succeeix* en l'exemple adjunt, o ambdós tenen el mateix nombre d'ordres. En aquest segon cas, necessàriament hi ha un ordre de dalt la xifra del qual és més gran que la corresponent del mateix ordre en el nombre de baix, «començant per la mà esquerra», essent els anteriors tots iguals con en l'exemple de «presta» i «paga» anterior.

7 3 2 4	⟵	4 ordres
9 8 7	⟵	3 ordres,

Aquest és el cas de l'exemple del préstec i la paga, en què tots són iguals fins al tercer ordre, a partir de la mà esquerra, on a dalt hi ha un 3 i a baix, un 2.

Un cop col·locats els nombres correctament —el més gran a damunt, el més petit a sota, ordre amb ordre, començant per la dreta—, què pot passar? Calen quatre regles, que corresponen a les diferents possibilitats amb què ens podem trobar [folis 11r–12v]:

1. Si llevem d'una figura una altra d'igual posarem 0 sota el lloc de la figura.
2. Si llevem una figura d'una altra que és més gran, s'ha d'escriure allò que de major té, «de dret a aquella figura».

28 Després aplica el mètode a la suma d'altres quantitats heterogènies. La més notable és la que realitza «aiustant» florins, ducats i alfonsins, en què cada florí és igual a 17 sous i 3 diners, cada ducat a 24 sous i 5 diners, i cada alfonsí a 36 sous i 9 diners [foli 7r].

29 L'ordenació numèrica correspon, en l'escriptura indoaràbiga, a l'*ordre lexicogràfic*.

3. Si la xifra de dalt —per exemple el 5— és menor que la de baix, que en l'exemple és el 7, no es pot fer. Aleshores, cal agafar una desena completa.

   Com que no podem treure 7 unitats de 5, les traiem de la desena que hem agafat. Queden 3 unitats, que cal afegir a les cinc que hi ha. En total, tenim 8 unitats que posem al lloc de les unitats. Però ara, de desenes, en tenim 8, de les quals en traiem tres. En queden cinc, que és el que col·loquem al lloc de les desenes [foli 12r].

   $$\begin{array}{r} 95 \\ 37 \\ \hline 58 \\ \hline \end{array}$$

   De fet, fa el que s'indica a la figura de la dreta.

4. Si es donés el cas que, a la figura de la dreta, o en qualsevol altre indret, hi trobéssim un 0, aniríem a la desena corresponent i aleshores posaríem el que quedés. És la resta. La desena manllevada l'afegim a la figura que hi ha a sota a l'esquerra. Així:

   $$\begin{array}{r} 7\,520 \\ 6\,497 \\ \hline 1\,023 \end{array}$$

Heusací l'exposició de l'algorisme de restar, idèntic a l'actual, explicat amb claredat, i acompanyat d'exemples adients. Santcliment, a més, intenta justificar el perquè de les seves regles: n'agafem 10 perquè és un nombre perfecte, del qual és fàcil restar qualsevol xifra. Això, afirma, «ho comprenem bé». En segon lloc, qualsevol nombre del davant val 10 dels que segueixen i, quan n'agafem 10, el que fem és augmentar en una desena les desenes que tenim al davant [foli 12v].

Tot seguit ho aplica a quantitats monetàries —«per fer-ho calen dues sumes [quantitats], el préstec i la paga»— i tot seguit estableix la prova de la sostracció, seguint Sacrobosco. Vegem-ne l'exemple concret següent [folis 13v–14v]:[30]

Presta.	572 lliures	12 sous	4 diners	Suma de la qual cal fer la sostracció.
Paga.	497 lliures	14 sous	8 diners	Suma que fa l'acte de sostraure.
Resta.	074 lliures	17 sous	8 diners	Resta: quantitat amb què la major és major.
Proua.	572 lliures	12 sous	4 diners	Prova: cal aiustar la paga i la resta.

No es limita pas a aquest únic exemple, sinó que en dóna d'altres en els quals entren en joc quarts, onzes, lliures, roves, quintars, càrregues, i posa de manifest que l'algorisme és una eina útil en problemes comercials. Aquest és, no ho oblidem, l'objectiu clau de l'obra.

El darrer exemple de la sostracció fa referència a mesures de pes [folis 16v–17r]:[31]

30 Recordem que 1 lliura val 20 sous i 1 sou val 12 diners. Cal, doncs, que manllevem 1 sou que val 12 diners. Li traiem 8 diners i en queden 4 que, amb els 4 que teníem, fan 8. Ara, dels 12 sous que hi ha, cal treure'n 15 —els 14 de la paga i el que hem manllevat en fer l'operació anterior. Ens trobem que, de bell nou, no podem fer l'operació. Cal, doncs, manllevar 1 lliura, que val 20 sous. Li traiem els 15 i ens en queden 5 que afegits als 12 donen 17. Finalment, hem de treure 498 lliures —que corresponen a les 497 de la paga i a la que hem manllevat a l'operació anterior— a les 572 del préstec.

31 Des del punt de vista de l'anàlisi de la *Suma* és molt interessant que el lector, quan intenti resoldre els problemes, vagi redescobrint les diverses unitats de mesura que usa Santcliment.

543 càrregues	2 quintars	3 roves	12 ll	5 unces	3 quarts
539 càrregues	2 quintars	3 roves	14 ll	5 unces	3 quarts
003 càrregues	2 quintars	3 roves	24 ll	0 unces	0 quarts
543 càrregues	2 quintars	3 roves	12 ll	5 unces	3 quarts

4.3 «De multiplicar» [folis 18r–25v]

Al foli 18r, Santcliment introduiex el «Capitol que ensenya de multiplicar».

En la multiplicació intervenen dues sumes:[32] el «multiplicant» —que és la més petita— i la que s'ha de multiplicar o «multiplicat» —que és la més gran [foli 18r–18v].[33] La major es col·loca al damunt i la menor al dessota, sempre començant per la dreta ordre a ordre [foli 18v].

Tot seguit cal col·locar una ratlla que les separi de les que es van produint en la multiplicació [foli 19r].

5 789	.Multiplicat.
487	.Multiplicant.

Tot rau a explicar l'algorisme de multiplicar. Per reeixir en aquesta art, cal conèixer la *taula de multiplicar*, que ofereix tot seguit i que explica, filera a filera [19v].[34]

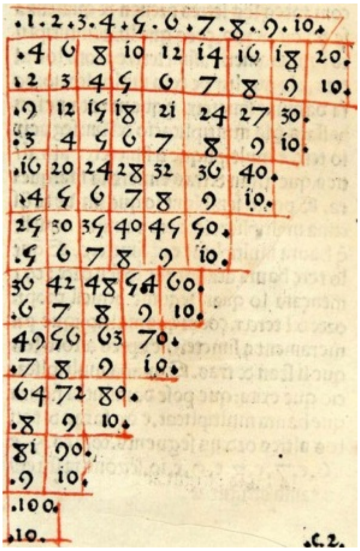
L'algorisme s'explica amb cura i tota mena de detalls [20v–25v]. En primer lloc cal multiplicar cada xifra del multiplicand, començant per la mà dreta, per totes les xifres del multiplicador, començant també per la dreta i avançant cap a l'esquerra. El que s'obté d'aquestes multiplicacions —d'acord amb la *taula de multiplicar* [vegeu la figura 3]— s'ha de posar al dessota de la línia de separació, ordenadament. Les unitats en el lloc de les unitats, les desenes en el de les desenes, les centenes en el de les centenes i així totes. Quan s'hagi multiplicat per la primera figura del multiplicador, comencem amb la segona —«que està en desenes». La multiplicació es fa de forma anàloga a la primera, però ara el primer cal col·locar-lo, de dret, al lloc de les desenes, perquè estem multiplicant per desenes. Quan passem al tercer nombre del multiplicador fem el mateix raonament, canviant les desenes per les centenes [foli 20r–20v].

Aleshores, abans d'explicar l'algorisme de multiplicació, ofereix les dues figures que reproduïm a continuació. En la de la dreta, hi ha un zero en el multiplicador, mentre que en la de l'esquerra, no n'hi ha cap. La regla, en ambdós casos, és la mateixa, si es té en compte que la multiplicació d'una figura qualsevol per zero és sempre zero. Santcliment no explicita mai aquest fet, si bé queda prou clar en l'exemple [folis 20v–21r].

32 De moment ensenya a multiplicar nombres enters. La multiplicació de nombres heterogenis s'ensenya tot seguit. La dels nombres trencats, més endavant.

33 Nosaltres els anomenem, respectivament, el *multiplicador* —la petita— i el *multiplicand* —la gran.

34 Els nombres del damunt de cada fila són els resultats de multiplicar el que hi a sota per dos, tres, quatre, etc. fins a deu; per tres, quatre, etc. fins a deu; per quatre, cinc, etc. fins a deu; etc.



• 1 • 2 • 3 • 4 • 5 • 6 • 7 • 8 • 9 • 10 •

4 2	6 3	8 4	10 5	12 6	14 7	16 8	18 9	20 10
9 3	12 4	15 5	18 6	21 7	24 8	27 9	30 10	
16 4	20 5	24 6	28 7	32 8	36 9	40 10		
25 5	30 6	42 7	48 8	54 9	50 10			
36 6	42 7	48 8	54 9	60 10				
49 7	56 8	63 9	70 10					
64 8	72 9	80 10						
81 9	90 10							
100 10								

FIGURA 3: Taula de multiplicar de la *Suma* [foli 19r]

$$\begin{array}{r} \boxed{5\,7\,2\,3} \\ 3\,5 \\ \hline 2\,8\,6\,1\,5 \\ 1\,7\,1\,6\,9 \\ \boxed{2\,0\,0\,3\,0\,5} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 8 & \\ 1 & + & 1 \\ & 8 & \end{array},$$

$$\begin{array}{r} \boxed{4\,5\,7\,3} \\ 2\,0\,1 \\ \hline 4\,5\,7\,3 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 9\,1\,4\,6 \\ \boxed{9\,1\,9\,1\,7\,3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 3 & + & 3 \\ & 1 & \end{array}.$$

La descripció de la pràctica de multiplicar la dóna detalladament, basant-se en l'exemple següent, al qual aplica la *prova del nou* [folis 21v–23v]:

Es comença a multiplicar per la mà dreta. S'usa el mètode de *retenir a la mà*. Així:

$3 \times 4 = 12$, el 2 es col·loca al davall de la línia que hi ha entre les quantitats donades i les que s'obtenen en multiplicar, i es reté l'1.

$3 \times 2 = 6$ i l'1 retingut fan 7. Es posa a l'esquerra del 2, sota el 7 del multpilicador.

$3 \times 3 = 9$, es col·loca sota el 5.

$3 \times 7 = 21$, l'1 es col·loca al costat del 9 i es reté el 2.

$3 \times 5 = 15$, i dos que es retenen fan 17. Es col·loquen a l'esquerra de l'1.

En definitiva, doncs, la primera fila de les multiplicacions és 171/972. De manera anàloga la segona fila serà 401/268, i la tercera, 286/620. Cal col·locar-les tal com mostra la figura següent d'acord amb el que hem dit abans.

5 7 3 2 4		3
5 7 3	0	0.
1 7 1 9 7 2		6
4 0 1 2 6 8		
2 8 6 6 2 0		
3 2 8 4 6 6 5 2		

La primera correspon a les unitats, la segona, a les desenes i la tercera, a les centenes. Finalment, ho sumem tot. S'obté 32/846/652.

Un cop efectuada la multiplicació, explica com es fa la prova del nou. Al davall de la creu s'hi posa la prova del nou del multiplicador. Al damunt, la del multiplicand.

S'efectua el producte d'aquestes dues xifres i se li aplica la prova del nou. El resultat es col·loca al braç dret. La prova del nou de «la suma general de la multiplicació» es posa al braç esquerra. Cal que els braços dret i esquerra coincideixin [folis 23v–24r]:[35]

	3	
0		0.
	6	

Després ofereix exemples de multiplicacions de multiplicador *heterogeni*.[36] Per exemple, si volem conèixer el preu de «23 càrregues a raó de 15 sous i 7 diners cada una», cal efectuar l'operació següent:

	23 càrregues a raó de 15 sous 7 diners			
	161 diners		5	
	13 sous 5 diners	8		8.
	115 sous		7	
	23 sous			
Suma.	358 sous 5 diners			
Reduïda:	17 lliures 18 sous 5 diners			

Observem que, d'antuvi, s'obtenen 161 diners. Són el resultat de multiplicar les 23 càrregues pels 7 diners. Cal reduir-los a sous i diners per tal de poder-los afegir als 115 + 230 = 345 sous, que s'obtenen al multiplicar les 23 càrregues pels 15 sous. La reducció està íntimament vinculada a la divisió, ja que cal determinar el quocient i el romanent, però Santcliment encara no n'ha parlat. És la cinquena espècie, o sigui la de la divisió. Un cop feta la reducció dels 161 diners s'obtenen 13 sous 5 diners. Per tant, tenim 358 sous i 5 diners. Però, 358 sous valen 17 lliures 18 sous.

En definitiva, doncs, si féssim la reducció —Santcliment no la fa perquè, per poder-la fer, cal l'espècie de dividir i encara no l'ha introduïda—, tindríem:

	15 sous	7 diners
		23 càrregues
17 lliures	18 sous	5 diners

35 A la *Suma*, a la part inferior de la creu, hi ha erròniament un zero.
36 Vegeu els folis 25r–25v. Santcliment l'anomena «multiplicació per coses desemblants».

4.4 «De partir» [folis 25v–40v]

La darrera espècie és la que més li costa de detallar. Segueix la tècnica de fer-ho lentament, primer quan el divisor té una figura, després dues, a continuació tres, etc.

0			
2	0	0	
5	7	3	Suma
1	9	1	Parts
3			partidor

La seva tècnica és la de passar ratlla,[37] malgrat que Santcliment no la passa mai explícitament. S'obté, doncs, el mètode conegut com a *mètode de la galera*.[38]

Comença indicant que «partir» és contrari de multiplicar. D'una suma n'hem de fer parts. En l'operació de partir —com indica la figura adjunta— cal col·locar, d'entrada, la suma que volem partir. A sota, deixant una línia en blanc, hi col·loquem el «partidor», que indica quina quantitat ha de tenir cada part. En aquesta línia en blanc, hi col·locarem el nombre de parts.[39]

Abans d'explicitar l'algorisme de divisió diu com cal col·locar el partidor respecte de la suma i això tant si el partidor té una sola xifra com si en té moltes. Hi ha només dues possibilitats. Considerem, començant per l'esquerra, el número del mateix ordre que el partidor. Si és més gran o igual que el partidor, aquest es col·loca al seu dessota començant per la figura de l'esquerra de la suma. Si és més petit, caldrà col·locar-lo també al dessota, però començant per la segona figura de l'esquerra de la suma. Per exemple [folis 27v–28r]:

5 7 3;	5 8 9;	5 7 3 4;	3 8 5 7 2;	3 8 5 7 2;	
3	6	9	1 2	4 7	etcètera.

Tot seguit dóna les quatre regles que calen per a «la pratica de aquesta specia».

Regla primera Dividir un nombre en dues parts [folis 27r–27v]. L'explica aplicant-la al número 358. La meitat del nombre de l'esquerra —que és per on cal començar— és 1 i en resta 1. Aquest romanent val deu unitats de l'ordre de la dreta. En tenim 15. La meitat és 7 i en resta 1. Tenim, doncs, 18 unitats. La meitat és 9. En definitiva, la meitat del nombre 358 és el nombre 179.

Regla segona Dividir una suma per un nombre d'una sola figura, com per exemple 589 dividit per 6 [folis 27v–28r]:

---

37 Vegeu la figura de la p. 187.

38 Vegeu [17, edició 1953, II, p. 137], o [2, edició castellana de 1986, p. 282–283].

39 Vegeu el foli 26r. En termes actuals, la suma que volem partir és el dividend, el partidor és el divisor, i les parts, el quocient. Observem que, a voltes, utilitza tinta vermella per remarcar les ratlles i les xifres que intervenen en les espècies i que considera més significatives que les altres.

Col·loquem la suma i el partidor de forma adequada, tal com hem indicat abans. Veiem que el 6 cap 9 vegades dins el 58. El col·loquem entre el 8 i el 6. Aleshores, atès que $9 \times 6 = 54$, llevem el 54 del 58. En resten 4, que col·loquem damunt del 8. Seguidament correm el partidor un lloc cap a la dreta. Així queda col·locat dessota del 9 del 49, perquè al 5 i al 8 se'ls ha passat ratlla. Mirem quantes vegades el 6 cap dins el 49. Hi cap 8 vegades. Col·loquem el 8 entre el 6 i el 9. Del 49 llevem $6 \times 8 = 48$. L'1 de la diferència el col·loquem damunt del 9. Obtenim que la part és exactament $98\,\frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{c} 5\,8\,9 \\ \hline 6 \\ \hline\hline 0\,4 \\ 5\,8\,9 \\ \hline 9 \\ \hline 6 \\ \hline\hline 0 \\ 0\,4\,1 \\ 5\,8\,9 \\ \hline 9\,8 \\ \hline 6\,6 \end{array}$$

Veiem que, en aquest text, Santcliment introdueix, com féu Fibonacci gairebé dos segles abans, els *trencats*, però encara no els ha definit.

Prova del nou

$$\begin{array}{ccc} & 8 & \\ 4 & + & 4. \\ & 6 & \end{array}$$

I la *prova del nou de la divisió* la fa col·locant el partidor —que val 6— al peu de la creu i la prova del nou de les parts —que val 8— al cim de la creu. Després multiplica ambdós nombres i el resultat el suma al romanent —dóna 49. Aleshores, a tot plegat li aplica la prova del nou. Obté 4, que col·loca a la dreta de la creu. A l'esquerra hi col·loca la prova del nou de la suma 589 —que val 4. Cal que els dos braços de la creu coincideixin.

Regla tercera Dóna l'operació de partir una suma per un nombre de dues figures [folis `29r–30r`]. D'antuvi tracta de partir 38 572 en 12 parts. Ho fa de manera anàloga a l'anterior, detallant-ne, com és habitual, tots els passos. L'única diferència rau que, a l'hora de fer les multiplicacions i les diferències del nombre que hi ha a la suma, ho fa *gradualment* i *començant per l'esquerra*.

Primer de tot, hem de veure quantes vegades 12 cap dins del 38. Hi cap 3 vegades. Aleshores col·loquem el 3 dessota del 3 del 38.[40] Multipliquem el 3 per 1. El resultat el restem del 3 de la suma. Dóna 0. Després multipliquem el 3 pel 2. El resultat el restem del 8. Dóna 2. La primera partició s'ha acabat.

$$\text{Parts}\quad \begin{array}{l} \\ 3\,8\,5\,7\,2 \\ \hline \\ \hline 1\,2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \\ 3\,8\,5\,7\,2 \\ \hline 3 \\ \hline 1\,2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} 0 \\ 3\,8\,5\,7\,2 \\ \hline 3 \\ \hline 1\,2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} 0\,2 \\ 3\,8\,5\,7\,2 \\ \hline 3 \\ \hline 1\,2 \end{array} \Longrightarrow$$

Abans de començar la partició següent, cal córrer el 12 un lloc cap a la dreta. Això es fa per tal de tenir-lo situat sota el 25. Ara cal veure quantes vegades el 12 cap dins del 25. Hi cap 2 vegades. Aquest valor —de la segona partició— es col·loca al lloc de les parts, a la dreta del 3 que havíem obtingut amb anterioritat. Ara, de bell nou, multipliquem 2 per 1. Dóna 2.

40 De fet, Santcliment solament dóna la darrera figura de les que nosaltres, a poc a poc, anirem veient amb l'explicació corresponent.

El restem del 2 del 25. S’obté el valor 0. A continuació multipliquem 2 per 2. El resultat el restem del 5. Dóna 1.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 0\,2 \\ 3\,8\,5\,7\,2 \\ \hline 3\,2 \\ \hline 1\,2\,2 \\ \;\,1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \;\,0 \\ 0\,2\,1 \\ 3\,8\,5\,7\,2 \\ \hline 3\,2 \\ \hline 1\,2\,2 \\ \;\,1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \;\,0\,0 \\ 0\,2\,1\,5 \\ 3\,8\,5\,7\,2 \\ \hline 3\,2\,1 \\ \hline 1\,2\,2\,2 \\ \;\,1\,1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \;\,0\,0\,1 \\ 0\,2\,1\,5\,4 \\ 3\,8\,5\,7\,2 \\ \hline 3\,2\,1\,4 \\ \hline 1\,2\,2\,2\,2 \\ \;\,1\,1\,1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \;\,\;\,\;\,0 \\ \;\,0\,0\,1 \\ 0\,2\,1\,5\,4 \\ 3\,8\,5\,7\,2 \\ \hline 3\,2\,1\,4 \\ \hline 1\,2\,2\,2\,2 \\ \;\,1\,1\,1 \end{array}.$$

Abans de començar la tercera partició, el 12 es desplaça un lloc cap a la dreta, per tal de col·locar-lo sota el 17. Mirem quants cops el 12 cap dins del 17. Hi cap 1 cop. L’1 el col·loquem a la dreta del 2 de les parts. Després multipliquem i restem tal com hem fet en els casos anteriors.

Finalment el 12 es desplaça un lloc a la dreta i mirem quantes vegades el 12 cap dins del 52. Són 4. Aleshores 4 per 1 dóna 4, que restat de 5, dóna 1. Queden 12 unitats, de les quals n’hem de restar 8 que s’obtenen multiplicant 4 per 2. Per fi, en queden 4.

Val la pena indicar que, en aquella època, el més normal era *passar ratlla*. La figura que s’obtindria, si passessim ratlla a les xifres —un cop usades en els càlculs, deixant solament les del quocient o *parts* i del romanent— seria l’adjunta.

$$\begin{array}{l} 0\,2 \\ \cancel{3}\,\cancel{8}\,5\,7\,2 \\ \hline 3 \\ \hline \cancel{1}\,\cancel{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \;\,0 \\ 0\,\cancel{2}\,1 \\ \cancel{3}\,\cancel{8}\,\cancel{5}\,7\,2 \\ \hline 3\,2 \\ \hline \cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{2} \\ \;\,\cancel{1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \;\,0\,0 \\ 0\,\cancel{2}\,\cancel{1}\,5 \\ \cancel{3}\,\cancel{8}\,\cancel{5}\,\cancel{7}\,2 \\ \hline 3\,2\,1 \\ \hline \cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{2}\,\cancel{2} \\ \;\,\cancel{1}\,\cancel{1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \;\,\;\,\;\,0 \\ \;\,0\,0\,\cancel{1} \\ 0\,\cancel{2}\,\cancel{1}\,\cancel{5}\,4 \\ \cancel{3}\,\cancel{8}\,\cancel{5}\,\cancel{7}\,\cancel{2} \\ \hline 3\,2\,1\,4 \\ \hline \cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{2}\,\cancel{2}\,\cancel{2} \\ \;\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1} \end{array}$$

Després, seguint la descripció d’abans, fa la prova del nou. Així queda establerta la divisió d’un nombre arbitrari en qualsevol nombre de parts sempre que aquestes estiguin compreses entre el 10 i el 99.[41]

Regla quarta Dóna la divisió per nombres de tres o més figures. Vegem succintament alguns exemples de la *Suma*:

1. Dividir el nombre 72 102 en 237 parts [folis `34r-35r`].

   El 237 cap 3 vegades dins del 721. El posem sota el 7. Fem:

41 Aquest mètode l’aplica també a: 99 750 dividit en 19 parts, 7 850 en 40, i 7 894 en 73 [folis `30r-33v`].

$3 \times 2 = 6$, que restem de 7. Dóna 1.
$3 \times 3 = 9$, que restem de 12. Dóna 03.
$3 \times 7 = 21$, que restem de 31. Dóna 10.

```
  005
 0124
 13084
 72102
 -----
 304
 -----
 23777
  233
   2
```

Ara correm el 237 un lloc cap a la dreta i dividim 100 entre 237. Dóna 0. El col·loquem al costat de 3, i correm el 237 un lloc cap a la dreta. El 237 cap 4 cops dins del 1 002. El col·loquem a la dreta del 0. Fem:

$4 \times 2 = 8$, que restem de 10. Dóna 02.
$4 \times 3 = 12$, que restem de 20. Dóna 08.
$4 \times 7 = 28$, que restem de 82. Dóna 54.

Primer restem el 2 del 8. Dóna 6. Després restem el 8 del 62. Dóna 54. Així doncs, 72 102 dividit per 237 dóna $304\,\frac{18}{79}$.

2. Dividir el nombre 5 732 894 en 45 738 parts:

La configuració de Santcliment —és la de l'esquerra— conté abreujaments, alguns errors aritmètics, i falta un 1 en el romanent. Amb tots els passos, tindríem la configuració correcta de la dreta.

```
   0556
   2198
   34434
  015548
  126903
  5732894
  -------
  125
  -------
  4573888
   45733
    457
```

```
     1
    0456
    2498
    35434
   015548
   1269034
   5732894
   -------
   125
   -------
   4573888
    45733
     457
```

3. Finalment, per ajustar la divisió al comerç tracta «lo partir» aplicat a quantitats heterogènies o «desemblants» [folis 37r–40v].

Un problema serà suficient per copsar la qüestió:

> Convertir 457 florins en ducats, sabent que cada florí val 17 sous i 5 diners, i cada ducat, 24 sous i 9 diners [foli 39v].[42]

A banda de la «prova del nou del partir» [folis 35r–36v] dóna la prova segons la qual dividir és el contrari de multiplicar. És a dir, afegint el romanent al resultat de multiplicar el divisor i el quocient, s'obté la suma [folis 36r–36v].

La pràctica d'aquesta prova és la següent:

42 D'entrada, convertim els 457 florins en diners multiplicant-los per 209 diners. [Són els diners d'un florí, atès que 17 sous i 5 diners, valen $304 + 5 = 309$ diners.] En total tindrem 95 513 diners. Cada ducat val 297 diners. [Reduïm: $24 \times 12 + 9 = 297$ diners.] Per tant, hem de dividir 95 513 diners per 297. S'obté el nombre de ducats que corresponen als florins. Són 321 ducats, 14 sous i 8 diners.

4 5 7 3 8		
1 2 5		
2 2 8 6 9 0		0
9 1 4 7 6		0 ——— 0 .
4 5 7 3 8		
5 7 1 7 2 5 0	Suma	8
1 5 6 4 4		
5 7 3 2 8 9 4	Total	

Pel que fa a la presentació dels algorismes, l’obra de Santcliment és, en definitiva, força anàloga a la de Fibonacci. La suma, la resta i la multiplicació les presenta en la forma actual. La divisió, en canvi, basada en la tècnica de passar ratlla, però sense passar-la explícitament, és diferent i pren l’estructura d’un *vaixell*.[43]

Amb aquesta exposició Santcliment acaba la presentació de l’escriptura en xifres indoaràbigues i dels algorismes de càlcul, que és l’objecte d’estudi de la primera part de l’obra. Però —com ja he indicat abans—,[44] l’objectiu de les aritmètiques de la segona meitat del segle XV i, en particular, de la *Suma* no era pas aquest. Com insinuen els exemples d’operacions amb quantitats heterogènies no pretenien ser simplement un text algorísmic. L’objectiu era força més ambiciós. Aquesta afirmació queda justificada si observem que només 40 folis r i v dels 136 r i v de la *Suma* es dediquen a les operacions. Escassament una tercera part.

La resta de l’obra es dedica a les aplicacions i, en aquesta anàlisi que fem dels continguts de la *Suma*, no les podem passar per alt, començant per la regla bàsica: la *regla de tres*.

5 «Els nombres que diem de trencats» [folis 54r–68v]

Ara bé, per qüestions de claredat expositiva, abans d’introduir la regla de tres, veurem com maneja Santcliment els nombres trencats. A la *Suma*, però, s’introdueixen quan fan falta. És a dir, al bell mig de la regla de tres perquè, en els problemes mercantils —quan se’ls aplica la regla de tres—, apareixen amb naturalitat els trencats. Santcliment hi dedica un grapat de pàgines: descriu què són els trencats, com es fa per reduir-los al mateix denominador i finalment diu com s’operen.

El contingut de la setena espècie [folis 54r–68v] és breument el següent. Els *nombres trencats* són aquells que no són enters o que contenen parts d’un enter.[45] Són indispensables en l’art de la mercaderia. Tot nombre trencat consta de dos nombres que s’escriuen l’un a dalt i l’altre a baix, separats per una barra. El de dalt és el *nombrador* —el numerador— perquè compta el nombre de

43 Vegeu la nota 38.
44 Vegeu [13, §3.2, p. 55].
45 Per a un estudi molt complet de les fraccions, vegeu [1].

parts trencades. El de baix és el *denominador* perquè dóna nom, o fa palès, el tipus de parts trencades: mitjos, terços, quarts, cinquens, etc. El denominador fa referència a un enter, mentre que el numerador fa referència al nombre de parts sense arribar a completar l'enter. S'escriuen com ho fem actualment: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$.

Tot seguit cal aprendre a reduir-los, sumar-los, restar-los, multiplicar-los i dividir-los, i a conèixer el valor que tenen [folis 54r–54v]. Vegem, com fins ara, seguint de prop Santcliment, l'aritmètica dels nombres trencats.

5.1 «De reduir-los» [folis 55r–58r]

Això vol dir reduir-los a comú denominador. Fa dos casos: quan només hi ha dos trencats i quan n'hi ha més de dos.

1. Quan n'hi ha dos.

Es pren com a numerador de cada trencat, un cop reduïts, el producte del numerador abans de reduir-lo pel denominador de l'altre abans de reduir-lo i, com a denominador dels nombres reduïts, el producte dels denominadors abans de reduir-los. Així [foli 56v], si volem reduir $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$, cal fer el que s'indica a la figura de la dreta.

$$\begin{array}{c} 10/12 \\ \hline \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}. \\ 15 \end{array}$$

S'obtenen, doncs, els trencats $\frac{10}{15}$ i $\frac{12}{15}$.

2. Quan n'hi ha més de dos, recorre al mínim comú denominador.[46]

A l'hora de reduir $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$, observa que tots els denominadors estan continguts en el 12. Aleshores divideix 12 per cada un dels denominadors i el resultat obtingut el multiplica pel numerador corresponent. És a dir [folis 57r–57v]:

$$\begin{array}{cccc} 6 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \multicolumn{4}{c}{\text{el nombre}} \\ \multicolumn{4}{c}{12} \end{array}$$

5.2 «De aiustar-los» [folis 58r–59v]

Aquí tot rau a reduir-los —tal com hem vist abans— i després sumar els numeradors, tal com fem actualment. Els exemples són prou aclaridors:

1. Volem sumar $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$ [58v–59r].

Els reduïm: els $\frac{2}{3}$ es converteixen en $\frac{8}{12}$, i el $\frac{3}{4}$, en $\frac{9}{12}$. Sumem 8 i 9. Dóna 17. El dividim per 12 per saber quants enters fan. Fan 1 i $\frac{5}{12}$. És la suma dels $\frac{2}{3}$ i dels $\frac{3}{4}$ ajuntats.

Gràficament, ho expressa d'acord amb la figura [foli 59r]:

$$\begin{array}{c} 17 \\ 8 \quad 9 \\ \hline \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} \\ 12 \end{array} \quad 1\ \frac{5}{12}.$$

2. Volem sumar, per exemple, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{5}{6}$ [folis 59r–59v].

Els reduïm.[47] Un cop reduïts a 12, tenim que $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ i $\frac{5}{6}$ de 12 són, respectivament, 6, 8, 3 i 10. Sumem 6, 8, 3, 10. Obtenim 27, que partim per 12, que és el denominador comú. En resulten 2 enters i $\frac{3}{12}$ que val $\frac{1}{4}$.

Gràficament, s'expressa així [foli 59v]:

$$\begin{array}{cccc} 6/ & 8/ & 3/ & 10 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{6}. \\ \multicolumn{4}{c}{\text{lo nombre}} \\ \multicolumn{4}{c}{12} \end{array}$$

46 Santcliment no explicita mai la forma d'obtenir-lo.

47 Hom constata la diferència que hi ha entre sumar i reduir. En la reducció posem de manifest, si n'hi ha, els enters que conté el trencat.

5.3 «De restar-los» [folis 59v-61v]

$$\boxed{\begin{array}{cc} 9 & 8 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}.} \\ \multicolumn{2}{c}{12} \end{array}}$$

Restem $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.

Reduïm, com abans, i restem els numeradors [foli 60r], com veiem a la figura de la dreta. Dóna $\frac{1}{12}$.[48]

5.4 «Segueixse lo multiplicar en nom trencat [folis 61v-64r]»

Ofereix cinc exemples, un cop ha establert la regla de multiplicar, que és l'actual:

Per multiplicar dos nombres trencats es multipliquen els numeradors —i s'obté el numerador del producte— i els denominadors —i s'obté el denominador del producte [foli 61v].[49]

5.5 «Partir en nom trencat» [folis 64r-66r]

Dóna la regla següent. Reduïm els dos trencats que volem dividir al mateix denominador. Aleshores els partim com si fossin nombres enters. Seguidament dóna sis exemples.

Vegem el primer, que consisteix a dividir $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$ [foli 64v].

$$\boxed{\begin{array}{lcc} 1 & & \\ \underline{9} & 8 & 8 \\ \underline{1} & 9 & - \\ 8 & & 9 \end{array}}$$

Reduïm els dos trencats i obtenim que $\frac{3}{4}$ és $\frac{9}{12}$, i que $\frac{2}{3}$ és $\frac{8}{12}$. Dividim 9 per 8.

Obtenim 1 i $\frac{1}{8}$.[50]

5.6 «D'abreviar» [folis 66r-66v]

Per simplificar un trencat, cal trobar un nombre que permeti dividir alhora, en parts iguals, el numerador i el denominador. Es fan les divisions corresponents i es prenen els resultats respectius com a nou numerador i denominador.

Volem reduir 36 quaranta-vuitens [folis 66r-66v]:

Tant el 36 com el 48 es poden dividir per quatre. Fem les divisions i obtenim 9 dotzens. Tant el 9 com el 12 es poden dividir per 3. Fem les divisions i obtenim 3 quarts, que és el resultat simplificat.

6 De la regla de tres [folis 41r-54r; 68v-83v]

Un cop disposa de tots els algorismes de càlcul, Santcliment estableix un *primer mètode* de resolució de problemes: la *regla de tres*. Aquesta tècnica —juntament amb les *regles* de *falsa posició* i de *doble falsa posició*— és d'ús corrent en les

48 També diu [folis 60v-61v] com cal fer-ho per restar d'un trencat sol molts trencats. Vull restar $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{9}$ de $\frac{4}{5}$, i d'un enter, com ara l'1, un trencat com ara $\frac{2}{3}$, o dos, com ara $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$. Tot es fa ben naturalment, i no cal insistir-hi.

49 Després explica el cas particular en què un dels nombres trencats és un enter. Només cal considerar l'enter com un trencat de denominador unitat [folis 61v-62r].

50 Contràriament, si haguéssim volgut dividir $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$, hauríem hagut de dividir 8 per 9. La divisió fora aleshores $\frac{8}{9}$ [folis 64v].

aritmètiques d'aquesta època. Es basa en la teoria numèrica de la proporció i permet de resoldre un bon grapat de problemes. Aquells en què es demana una quantitat, a partir de tres (o més) de donades, sempre que, entre elles, es pugui establir una llei de proporcionalitat: la tercera és a la quarta com la primera és a la segona. Així, en la resolució de les *equacions de primer grau*, s'evita el llenguatge algèbric.

Comença, de fet, per l'*art de la mercaderia*. En aquesta art, els problemes són resolubles per *proporcionalitat directa*.[51] Francesc Santcliment, conscient de la importància d'aquest mètode, li dedica un nombre notable de pàgines: del foli 41r al 54r per a problemes sense trencats, i del foli 68v al 83v per a problemes amb trencats.

De fet, el mètode permet resoldre qualsevol problema de la forma: «si tant val tant, que valra tant».

Calen dues quantitats semblants i una de desemblant, i funciona de la forma següent:

> Si A_1 objectes de tipus a es corresponen amb B_1 de tipus b,
> quants de tipus b correspondran a A_2 objectes de tipus a?

La resposta és clara. Els correspondran exactament [foli 41r]:[52]

$$B_2 = \frac{A_2 \times B_1}{A_1}.$$

Un cop descrit el mètode, l'aplica a gran quantitat de problemes: problemes relatius a monedes [folis 43r–45v], draperia [folis 45v–48v], pesos [folis 48v–51v], mesures [folis 51v–54r], etc.

Seguint de prop, com fins ara, la *Suma*, veurem quatre exemples concrets —dos sense trencats i dos amb trencats— i la manera com els resol Santcliment.

1. Si 7 valen 5, quant valdran 9? [foli 42r].

Els 7, que són certs, fan de divisor. Els 9, que són incerts, cal multiplicar-los pels 5 que corresponen als 7 que són certs. S'obté:

$$\boxed{\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 4 & 5 \\ \hline & 6 \\ \hline & 7 \end{array}}$$

2. Si 3 peces valen 57 lliures, 7 sous i 9 diners, què costaran 2 canes, 3 pams i $\frac{3}{4}$? [foli 45v].

D'entrada, reduïm les diferents unitats que intervenen. Així, 3 peces valen 36 canes. Les 36 canes són 288 pams. I els pams són 1 152 quarts. I així tenim el divisor expressat en una sola unitat.

---

51 «No té gaire sentit fer especulacions sobre quin fou el domini en què el concepte de raó va aparèixer per primera vegada. [...] El trobem en Nicòmac de Gerasa, que l'aplica a l'aritmètica, en Èudox, que l'aplica a la geometria, i en Teó de Smirna [segle I], que l'aplica a la música. Més tard, els comerciants d'Orient van adonar-se que, amb facilitat, podien aconseguir resultats vertaders en certs tipus de problemes numèrics fent servir un mètode que, amb el pas dels anys, s'ha convertit en la *regla de tres*. És molt corrent trobar-lo en les aritmètiques comercials, si bé és, de fet, una simple aplicació de la proporció» [Smith, D. E. [1925], edició de 1953, II, 477–478]. Smith dedica les pàgines 477 a 494 a l'anàlisi d'aquest mètode de càlcul mercantil.

52 És clar que, implícitament, suposem que hi ha proporcionalitat directa entre els objectes de tipus a i els objectes de tipus b. És a dir, que la raó existent entre la quantitat A d'objectes de tipus a i la quantitat B d'objectes de tipus b és constant. És a dir, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$.

Ara fem el mateix amb el «contrari»: De les 57 lliures, 7 sous, i 9 diners en fem diners. S'obté un total de 13 773 diners, que constitueixen el multiplicand. Finalment, la tercera partida, 2 canes, 3 pams i $\frac{3}{4}$, són 79 quarts.

Ara el problema ja es pot resoldre: Multipliquem els 13 773 diners pels 79 quarts, i dividim el producte obtingut pels 1 152 quarts, perquè el que es demana és, de fet,

Si 1 152 quarts valen 13 773 diners, què valdran 79 quarts?[53]

I, aplicant la *regla de tres*, s'obté el valor demanat: $\frac{13\,773\times 79}{1\,152}$. Així diu:

> Les ▪ 2 ▪ canes ▪ 3 ▪ palms ▪ $\frac{3}{4}$ ▪ costaran 944 ▪ diners e ▪ $\frac{1}{2}$ ▪ e deles norantesis pts de pugesa la una pt[54] seriẽ per tot ▪ 3 ▪ liures, 18 ▪ ss ▪ 8 ▪ dr̃s ▪ $\frac{1}{2}$ ▪ e ▪ 1 ▪ norãtasise de pugesa.[55]

3. Si $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ són $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{5}$ d'una cosa, $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{7}$ quant seran? [foli 69v].

Aquí cal conèixer com es sumen, multipliquen i divideixen els nombres trencats,[56] atès que el problema equival, de fet, al problema:

Si $\frac{5}{6}$ d'una cosa són $\frac{19}{20}$ d'una altra, $\frac{23}{21}$ de la primera, quant seran de la segona?

Santcliment usa un mètode de simplificació ben antic —el trobem ja en els matemàtics egipcis—: Consisteix a treure denominadors introduint un factor.[57]

Així, si s'agafa el valor 42,[58] aleshores, les fraccions de la primera cosa es transformen en 35 i 46 respectivament.

El problema és, doncs:

Si a 35 li corresponen $\frac{19}{20}$, què correspon a 46?

El resultat, amb vintens, és:

$$\boxed{\begin{aligned} 46\times\frac{19}{35}\,\text{vintens} &= \frac{874}{35}\,\text{vintens} = \left(24+\frac{34}{35}\right)\,\text{vintens} = \\ &= \frac{24}{20}+\frac{34}{35}\,\text{vintens} = 1+\frac{4}{20}+\frac{34}{35}\,\text{vintens.} \end{aligned}}$$

4. Si 3 florins i $\frac{1}{3}$ en 3 mesos han guanyat 7 ducats i $\frac{1}{5}$, 7 florins i $\frac{1}{2}$ en 5 mesos i 7 dies, quant guanyaràn? [foli 70r].

D'antuvi es redueix tot a una quantitat homogènia. Així s'obté:

> Si ▪ 20 ▪ sisens en ▪ 90 ▪ dies guanyen ▪ 36 ▪ cinquens de ducat: 45/sisens en ▪ 157 ▪ dies que guanyaran?[59]

53 Vegeu el foli 46v.
54 Recordem que, d'acord amb les equivalències, de la secció § 3, 1 diner val quatre pugeses.
55 Observem amb quina facilitat Santcliment passa de quantitats heterogènies a homogènies, i a l'inrevés.
56 Vegeu la secció § 5.
57 És la base de la falsa posició. Val solament en els problemes de proporcionalitat.
58 Així desapareixen els denominadors, i el problema esdevé un problema entre nombres enters.
59 Vegeu els folis 70r–71r. Cal indicar que, en la solució final que dóna Santcliment, hi ha un petit error [15, p. 362, nota 54]. No és, però, un error de càlcul. Els errors de la *Suma* són pocs i, en gairebé tots els casos, són errors de càlcul o de transcripció. Mai no són errors de concepte.

La figura corresponent als càlculs d'aquest problema és [folis 70v–71r]:

	20	florins		0		7 0 6 5	florins	0 0	
	90	dies	0		0	3 6	quints	0 3 1	
florins	1 800	partidor		0		4 2 3 9 0		1 7 2 5	
						2 1 1 9 5		2 5 4 3 4 0	quints
	157	dies				2 5 4 3 4 0	quints	1 4 1	quints de ducat
	45	florins						1 8 0 0 0 0	
	785							1 8 0 0	
	628							1 8	
	7 065	la multiplicació dels dies							

Són les operacions que corresponen al que en llenguatge actual seria:

$$\boxed{x = 36 \times \frac{45 \times 157}{90 \times 20} \text{ quints} = 141\frac{540}{1\,800} \text{ quints} = 28\frac{1}{5} \text{ ducats } \frac{3}{10} \text{ quints de ducat.}}$$

Aquest problema és interessant perquè, a més d'usar trencats, és una *regla de tres composta*.

Santcliment no explicita mai com cal fer una regla de tres d'aquesta mena, però, quan en fa, el mètode és absolutament correcte. El pot haver deduït fixant, en un primer pas, el temps. I, en un segon pas, deixant-lo mòbil. Això és vàlid quan la proporcionalitat és directa en tots els components.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \text{A } \frac{10}{3} \text{ florins li corresponen, en un cert temps, } \frac{36}{5} \text{ ducats.} \\[2ex] \text{A } \frac{15}{2} \text{ florins li corresponen, en el mateix temps, } z \text{ ducats.} \end{array}\right\} z = \frac{\frac{15}{2} \times \frac{36}{5}}{\frac{10}{3}}.}$$

Ara bé, z ducats s'obtenen en 90 dies. Òbviament, obtindrem $\frac{z}{90}$ ducats per dia i, en 157 dies, n'obtindrem $x = \frac{z \times 157}{90}$.

7 De les aplicacions de la regla de tres

Un cop disposem de l'eina podem resoldre tota mena de *problemes de mercaderia*. Per això, a partir d'ara, Santcliment estudia les *companyies* [folis 83v–91r], els *canvis* [folis 91v–106r] i les *barates* [folis 106r–114v]. Veurem exemples de cada un d'aquests tipus de problemes seguint fidelment l'obra de l'insigne autor català.

7.1 Companyies [folis 83v–91r]

Aquesta part —la novena de la *Suma*— no és gaire extensa. Tracta dels guanys d'una societat formada per dos o tres socis que han fet aportacions de capitals diferents durant el mateix temps, o bé d'un mateix capital (o de capitals diferents) en temps diferents.

Són problemes en els quals intervenen tres coses. Les parts aportades, el temps durant el qual s'aporten i els guanys que s'obtenen en aquest temps.

La regla també és simple. El guany total s’ha de multiplicar per cada una de les parts aportades. El resultat s’ha de dividir pel total de parts aportades.[60]

Tot seguit diu que la regla de companyies s’efectua per la regla de tres [foli 84r].

1. Vegem-ne l’exemple [foli 84v]:[61]

> [Tres socis] han comprat el càrrec d’una nau. El primer n’ha pagat la meitat, el segon, una tercera part, i el tercer, una quarta part. Venen el càrrec i guanyen 357 lliures. Què li toca a cadascun d’acord amb el que ha pagat?

Sumem $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, un cop reduïts a dotze. Dóna 13.[62] És el preu del càrrec. Cada un d’ells ha de guanyar, respectivament, proporcionalment a 6, 4 i 3, que és el que ha aportat. Dividim 357 —que és el guany— per 13 —que és el divisor. És la part que cal repartir proporcionalment a allò que cadascun ha posat.

En definitiva [folis 85r], la figura de Santcliment és la següent.[63]

La pratica de la regla affigurada per $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

		2	2		
Primer	6	164 lliures	15 sous	4 diners	$\frac{8}{13}$
Segon	4	109 lliures	16 sous	11 diners	$\frac{1}{13}$
Tercer	3	82 lliures	7 sous	8 diners	$\frac{4}{13}$
partidor	13	357 lliures	0 sous	0 diners	0

prova

	0	1										0		
0	2	2				0	1				0	1		
1	8	6	0		0	1	3	1		0	2	3	5	
2	1	4	2	lliures	1	4	2	8	lliures	1	0	7	1	lliures
1	6	4	lliures		1	0	9	lliures			8	2	lliures	
1	3	3	3		1	3	3	3			1	3	3	
	1	1				1	1					1		

60 Vegeu el foli 84r. És curiós que, en l’explicació de la regla, no digui que les parts aportades s’obtenen multiplicant la part aportada per cadascun dels socis pel temps que l’hagi aportat. Malgrat tot això és el que fa en els exemples.

61 Hi manca un xic de text, en passar d’un foli al següent, malgrat que la numeració és correlativa.

62 És curiós que, els tres junts, paguen més del que val el càrrec. L’enunciat correcte fóra, de fet, el següent. El primer paga la meitat d’una quantitat desconeguda; el segon, una tercera part; i el tercer, una quarta part. Tots junts paguen el càrrec del vaixell. Suposant que la quantitat és 12, aleshores el càrrec del vaixell és 13. Aquí Santcliment fa servir falsa posició, que explica més endavant. Com es pot veure, la falsa posició és molt útil en problemes de proporcionalitat directa.

63 Si ens preguntem: quin és el significat d’aquesta figura?, veiem que, d’entrada, ofereix la solució: la part que ha de rebre cadascun. Fa la suma —que dóna 357 lliures— i comprova així la correcció del repartiment. Després dóna el càlcul. Al final de tot dóna les multiplicacions del guany per les parts que corresponen a cadascun. És el que fa al final de tot, on multiplica 357 per les parts —4, 6 i 3— que ha imposat cada un. En la figura del mig, divideix els resultats —2 142, 1 428 i 1 071— per 13. Obté, respectivament, 164 $\frac{10}{13}$, 109 $\frac{11}{13}$ i 82 $\frac{5}{13}$ lliures, que redueix a sous, i diners. És el que col·loca, com hem dit, al començament de tot.

El nombre és 12					El guany és de	357	lliures			
	3	5	7							6
			4			2	1	4	2	
1	4	2	8							
							3	5	7	
				Així apareix en la					3	
				pràctica damunt dita		1	0	7	1	

Seguidament ofereix exemples en què, en primer lloc, posa de manifest que el temps en què cada membre forma companyia és el mateix [folis 85v–88r]; després analitza el cas en què el temps d'imposició de cada membre de la companyia és diferent [folis 88r–91v]. La presentació de Santcliment és molt clara i elegant.

2. Aconsello l'anàlisi detallada de la manera com Santcliment presenta, en cada cas, «La pratica affigurada dela regla damuntdita» com al problema [folis 88r–88v]:

> Tres socis han fet companyia durant un any. El primer hi posa 3 florins i $\frac{1}{2}$. Però, de l'any que hi havia d'estar, només s'hi està 5 mesos i $\frac{1}{2}$. El segon, 4 florins i $\frac{1}{4}$ i només s'hi està 3 mesos i $\frac{2}{3}$. El darrer hi col·loca 2 florins i $\frac{2}{3}$, durant tot l'any. Es troben amb un guany de 3 ducats i $\frac{1}{5}$. Quina és la part del guany que li correspon a cadascun?

La pratica affigurada dela
regla damuntdita.

El guany és de 3 ducats i $\frac{1}{5}$

Primer	3 florins i $\frac{1}{2}$		temps	5 mesos i $\frac{1}{2}$	
Segon	4 florins i $\frac{1}{4}$	12	temps	3 mesos i $\frac{2}{3}$	6
Tercer	2 florins $\frac{2}{3}$	nombre	temps	12 mesos	nombre
42 dotzens de			33	sisens de	
51 florins			22	temps	
32			72		

		3	2	florins			5	1	florins				4	2	florins
		7	2	temps			2	2	temps				3	3	temps
		6	4			1	0	2				1	2	6	
2	2	4			1	0	2				1	2	6		
2	3	0	4	florins	1	1	2	2	florins		1	3	8	6	florins

D'entrada, doncs, reduïm els florins multiplicant-los per 12, i els temps, multiplicant-los per 6. Aquest és un dels avantatges de la proporcionalitat. Res no canvia, si es manté la proporcionalitat dels termes en joc. Tot seguit cal mirar quina és la quantitat de cadascun —s'obté multiplicant el temps d'imposició per la quantitat imposada. Les quantitats 2 304, 1 122 i 1 386 corresponen, respectivament, al tercer, al segon i al primer dels socis. Tot seguit posem l'atenció al guany:

El guany és de 16 quints de ducat.

Ara ja podem multiplicar cada part pel guany. Obtenim, respectivament, per al tercer, per al segon i per al primer socis, les quantitats:

0	2	3	0	4			1	1	2	2	florins		1	3	8	6	florins
0			1	6	quints				1	6	quints				1	6	quints
1	3	8	2	4			6	7	3	2			8	3	1	6	
2	3	0	4			1	1	2	2			1	3	8	6		
3	6	8	6	4	quints	1	7	9	5	2	quints	2	2	1	7	6	quints

Ara cal preocupar-se del divisor, que, de fet, és la suma de totes les parts. Per tant, val 4 812. Santcliment el dóna abans, amb la solució del problema.[64]

1 386 florins guanyen	$\frac{4}{5}$	2 928 parts del partidor
1 122 florins guanyen	$\frac{3}{5}$	3 516 parts del partidor
2 306 florins guanyen	$\frac{7}{5}$	3 180 parts del partidor
4 812 partidor		

Sumem els trencats —les parts del divisor. Donen 2 quints que, sumats als 4, 3 i 7 quints, fan un total de 16. Això prova que tot és correcte. Cal dividir, doncs, cada quantitat aportada pel divisor. És aleshores quan s'obté el resultat abans indicat.

	2		2				3		1				3	1	8		
0	6	9	3	8		0	5	5	2	6		0	8	2	9	0	
2	2	1	7	6	quints	1	7	9	5	2	quints	3	6	8	6	4	quints
	4		quints				3		quints				7		quints		
	4	8	1	2			4	8	1	2			4	8	1	2	

És a dir, el resultat és, doncs:

$$4 \text{ i } \frac{2\,928}{4\,812} \text{ quints}, \quad 3 \text{ i } \frac{3\,516}{4\,812} \text{ quints}, \quad 7 \text{ i } \frac{3\,180}{4\,812} \text{ quints}.$$

En definitiva, doncs, hem de calcular d'antuvi:

$$g = \frac{\text{guany}}{q_1 \times t_1 + q_1 \times t_2 + q_2 \times t_2}.$$ [65]

Aleshores el guany de cadascú és: $g_i = q_i \times t_i \times g, i = 1, 2, 3$.

7.2 Canvis [folis 91v–114r]

Amb el nom de *canvis* s'agrupen els problemes que consisteixen a canviar monedes i tota mena de sistemes de mesures. Conté molta informació sobre el tipus de monedes i de mesures més corrents en el comerç de la conca mediterrània de l'època de l'autor de la *Suma*. És simplement una aplicació

64 En el text de Santcliment hi ha l'error que hem copiat: el tercer sumand hauria de ser, d'acord amb les multiplicacions, 2 304 i no pas 2 306.

65 En el nostre cas, resulta que $g = \frac{16}{4\,812}$ quints. La resta és, doncs, ben fàcil.

de la regla de tres. Santcliment n'és conscient, quan diu que els canvis són semblants al mètode desenvolupat a la cinquena part [foli 91v]. Tanmateix, després de la part relativa a la regla de tres, és la part més llarga de la *Suma*, un fet que palesa, un cop més, la importància del text com a tractat de mercaderia.

Els exemples, encara que són molts, són ben senzills.

1. Et pregunto, quant valdran 10 timbres, si 5 florins d'or valen 6 timbres, 7 sous, i 5 diners? [foli 92r].
2. Si 57 ducats, 3 sous i 5 diners valen 39 alfonsins, 7 sous i 9 diners, quant val l'alfonsí? [foli 93v–94r].
3. Si 3 florins i mig valen 2 escuts i un terç, quant val un escut? [foli 95r].
4. Un mercader li diu a un canvista que vol canviar 409 lliures de moneda catalana i que, a canvi, vol moneda d'Aragó, i que sigui canviada a raó del que els florins d'or acostumen a valer a Catalunya i a Aragó. El mercader dóna el florí de Catalunya a raó de 17 sous i el canvista dóna el florí d'Aragó a raó de 15 sous. El mercader pregunta quantes lliures d'Aragó corresponen a 409 lliures catalanes. [foli 95v–96r].
5. Si 3 quarteres, 5 quartans i $\frac{3}{4}$ són el mateix que 7 fanegues i $\frac{2}{3}$, quants quartans fa una fanega? [foli 99r].

La simplicitat queda palesa, un cop s'han reduït totes les unitats a la unitat inferior. Només cal aplicar la regla de tres.

Considerem l'exemple segon.

D'antuvi, convertim els 57 ducats, 3 sous i 9 diners en diners. Ara, a aquests diners, els llevem els diners de 7 sous i 9 diners. Els diners que queden corresponen a 39 alfonsins. El que s'obté dividint serà el valor d'un alfonsí.

En la *Suma* trobem la figura [foli 94v]:

La resolució del problema

		5	7	ducats, 3 sous i 5 diners
		2	4	sous
	2	2	8	
1	1	4		
1	3	6	8	sous
			3	

	1	3	7	1	sous
			1	2	diners
	2	7	4	2	
1	3	7	1	/5	
1	6	4	5	7	diners

	1	6	4	5	7	diners
Sostraccio				9	3	diners
resta	1	6	3	6	4	diners

		0			
		1			
		3	2		
	0	4	0		
0	4	7	7	3	
1	6	3	6	4	diners
	4	1	9		diners
	3	9	9	9	
		3	3		

Cada alfonsí val, doncs, segons veiem en els càlculs, $419\,\frac{23}{39}$ diners. Un cop feta la reducció dóna 34 sous, 11 diners i $\frac{1}{2}$, i 14 trentanovens de pugesa.

7.3 Barates [folis 106r–114r]

És la desena part de la *Suma*. De fet, *baratar* és bescanviar una mercaderia per una altra que tingui el mateix valor. Aquesta tècnica, diu Santcliment, «és molt necessària en mercaderia». Cal conèixer-la per «tal de no ser enganyat» [foli 106r]. De fet, l’únic que cal saber és el valor de la mercaderia amb la qual canviem la nostra per tal que el valor d’ambdues sigui el mateix. El camí més adequat és convertir-ho tot a valor monetari.

La barata pot resultar una mica complicada d’entendre, però no ho és pas tant com sembla. Com diu Antoni Malet:

> La «filosofia» de la barata, com aquí ve il·lustrada, es fonamenta en els dos preus de les mercaderies, el de baratar i el «just» o en diners comptants. La justícia en el tracte consisteix en el fet que tots dos mercaders baratin incrementant els preus en comptants en la mateixa proporció o percentatge.[66]

Realment, què és el que es planteja? El que es planteja és que un dels dos mercaders ofereix a bescanvi una certa quantitat de mercaderia a un preu més elevat que el preu just, correcte, o al comptat. L’altre, en canvi, l’ofereix al preu just, i això no fora equitatiu. Per tant, cal saber quin és el preu de *baratar* que fa que ni l’un ni l’altre no guanyi ni perdi res en el bescanvi.

Per exemple,

> L’un té pebre i l’altre té drap. El primer, d’un quintar, en demana 25 lliures, malgrat que al comptat val 20 lliures. El segon demana el preu de 19 sous per cana, que és el preu al comptat. El draper vol saber quant li cal augmentar el valor del drap i quant drap li ha de donar per un quintar de pebre per tal que cap dels dos no sigui enganyat [folis 106v–108r].

Aleshores,

> A 20 lliures que val el quintar de pebre li hem sobrecarregat 5 lliures, als 19 sous que val la cana de drap, quant li haig de carregar?[67]

Santcliment ho passa a sous,[68] i té el problema següent:

Si 400 sous augmenten de 100 sous, 19 sous de quant han d’augmentar?

I dóna la figura que conté els càlculs:

	1	0	0	sous
		1	9	sous
	9	0	0	
1	0	0		
1	9	0	0	sous

0	3			
1	9	0	0	sous
	4	sous		
	4	0	0	

0	0			
3	6	0	0	sous
	9	diners		
	4	0	0	

66 Vegeu [15, p. 365, nota 86].

67 Una simple regla de tres.

68 De fet no calia, atès que augmenta una quarta part del valor del quintar.

La resposta és una quarta part de 19. És a dir, la cana cal vendre-la a $23\,\frac{3}{4}$ sous o, equivalentment, a 23 sous i 9 diners.[69]

8 Els mètodes de falsa posició [folis 114v–124r]

Arribem a la part més important des del punt de vista algèbric malgrat que, com ja he indicat a bastament, no s'ha de considerar pròpiament una tècnica d'àlgebra.[70] La *falsa posició* és molt antiga.[71] Fou molt usada a Egipte. En el *papir Rhind matemàtic* s'usa en moltes ocasions i serveix per resoldre problemes diversos.[72]

De fet, la *falsa posició* és un mètode de proporcionalitat directa i, per tant, és un cas particular de la regla de tres.

Abans de veure com descriu Santcliment aquest mètode, en farem una exposició en llenguatge actual.

Sabem que una quantitat a d'una mercaderia val, en total, un preu b, i volem saber el preu d'una unitat de la mercaderia. És a dir, volem conèixer el valor x per al qual $a\,x = b$.

El més senzill fora dividir b per a, i obtindríem el valor buscat.

Ara bé, també podem fer el següent. Podem atribuir, de moment, un valor x_0 que sigui *adequat* als càlculs; és a dir, que els simplifiqui.[73] Però amb aquest preu, la quantitat a de mercaderia valdria, de fet, $b_0 = a\,x_0$.

Aleshores, la qüestó que es planteja és la següent:

Si al preu x_0 li correspon el valor b_0, a quin preu li correspon el valor b?

Tenim que

$$b = \frac{b}{b_0}\,b_0 = \frac{b}{b_0}\,(a\,x_0) = a\,\left(\frac{b}{b_0}\,x_0\right) = a\,x.$$

D'això resulta que el valor buscat és: $x = \frac{b}{b_0}\,x_0$, i que s'obté simplement aplicant la regla de tres.

69 La resta és simple. Un quintar val 500 sous i una cana 23 sous i 9 diners. Dividint tenim el nombre de canes de drap que corresponen a un quintar de pebre, que són 21 i $\frac{1}{4}$ de pam i $\frac{13}{19}$ parts d'un quart de pam. Tot seguit Santcliment diu que, si vols comprovar la correcció del càlcul, l'únic que cal fer és comprovar que el valor de les canes és de 500 sous.

70 Vegeu [13, p. 56–59].

71 «A l'estudiant actual, que disposa d'un simbolisme molt bo —el de l'àlgebra—, li sembla impossible que els homes s'hagin sentit torbats davant una equació com ara $a\,x + b = 0$. Però aquesta era la situació en l'antiguitat quan es pretenia resoldre aquesta mena de problemes. Tanmateix, però, ja des de l'any 1800 aC, havien trobat un mètode. Avui l'anomenem el mètode de falsa posició. La regla ordinària que s'usà en l'edat mitjana sembla que prové de l'Índia, si bé van ser els àrabs de l'islam els qui la van ensenyar als estudiosos d'aquesta època. [...] Els àrabs l'anomenaven *hisab al-Khataayn* i per això els estudiosos medievals l'anomenaren *elchataym*. Pacioli, en la seva *Suma* (1494), l'anomena *el cataym*, un nom que probablement va treure del text de Fibonacci [...]» [17, edició de 1953, II, p. 437]. Al segle XVI, però, el nom d'aquest mètode és l'actual: *mètode de falsa posició*.

72 El lector interessat pot consultar els problemes 24 al 27; 30 al 34; 35 al 38 i 40 del papir Rhind, a [3, p. 50–58, 140, 145–146, 155-156].

73 Això és important quan es treballa amb fraccions.

És precisament aquesta tècnica tan antiga la que retrobem en els llibres de mercaderies, perquè els problemes que han d'aprendre els que tenen l'ofici de mercaders són lineals —de primer grau— i el mètode de falsa posició els pot ser d'utilitat.

Per això Santcliment, com és habitual, en fa una presentació clara, i després l'aplica als problemes d'aliatges.

Comença l'exposició de l'onzena part amb aquestes paraules [foli 114v]:

> Les posicions és una de les espècies més fortes en tota l'art de l'aritmètica. Comença suposant allò que és fals, però acaba amb allò que és veritat.[74]

Dóna tres tipus de posicions [foli 114v], que analitza amb molta cura.

8.1 Regla general de falsa posició [folis 114v–118v]

Suposem un valor adequat. El multipliquem pel que cal saber. El resultat el dividim pel valor obtingut amb la falsa posició.[75]

Seguidament ofereix un exemple canònic [foli 115r]:

> Hi ha una llança que té una meitat clavada al fang, una tercera part a l'aigua, i fora de l'aigua fa 7 pams i quart. Quina és la llargada de la llança?[76]

La resposta —atenent la naturalesa dels denominadors— la trobem així:

> Suposem que la llança fa exactament 6 pams. Aleshores té 5 parts dins l'aigua i el fang conjuntament. Només una part queda fora.

Ara el que cal preguntar-se és:

> Si 1 prové de 6, què prové de $7\,\frac{1}{4}$?

És una simple regla de tres. S'obté que la llargada del pal és de 43 pams i $\frac{1}{2}$.

8.2 Diferents menes de falsa posició [folis 114v–115r]

Després aclareix que, de mètodes de falsa posició, n'hi ha de tres menes:

Per aiustació [folis 115v–116r]. S'aplica als problemes de la forma $\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) x = b$.
Per sostracció [folis 116r–117r]. S'aplica als problemes de la forma $\left(\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right) x = b$.
Per multiplicació [folis 117r–117v]. S'aplica als de la forma $\left(\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}\right) x = b$.

---

74 Observem un fet curiós. Santcliment considera aquest mètode un dels més potents en tota l'art de l'aritmètica, a diferència de la regla de tres, que ho era en l'art de la mercaderia. Sembla, doncs, que hi ha un intent de distingir aquestes dues arts. No hi ha cap mena de dubte que és un mètode que, com ja hem vist, es feia servir a bastament per resoldre problemes numèrics de primer grau. El trobem, per exemple, entre molts d'altres, en els matemàtics: al–H̱wārizmī, l'àrab cristià Qosṭâ ib-Lûqâ al-Ba'albekî [†912], Abû Kâmil [∼900], Sinân ibn al-Fatḥ [x], Bhaskara [∼1114], al-Haṣṣâr [segle XII] Fibonacci [1202], Albanna [∼1300], Luca Pacioli [1494], Cataneo [1567], Pagani [1591], Tartaglia [1556], Peletier [1549], etc.

75 Vegeu l'explicació que suara hem donat.

76 Karpinski [8, p. 419] diu que només dos dels problemes de la *Suma* són de Santcliment. Aquest és un d'aquests problemes.

A continuació, dóna un exemple de cada tipus, i acaba amb un exemple, molt rar, en el qual fa, diu, falsa posició per ajustació i multiplicació ensems.[77]

> Se't proposa que cerquis un nombre[78] quan tant fos $\frac{1}{7}$ del primer com $\frac{1}{9}$ del segon, de manera que sumats i multiplicats donessin el mateix.[79]

Santcliment procedeix de la manera següent.

Agafa un nombre que dividit per 7 doni 1. És a dir, agafa el 7. Agafa un nombre que dividit per 9 també doni 1. És a dir, agafa el 9. Sumats donen 16. Divideix 16 per 9. Obté $1\,\frac{2}{9}$. És el primer nombre demanat. Tot seguit divideix el 16 per 7 i obté $2\,\frac{2}{7}$. Aquest és el segon nombre.[80]

Però, ens hem de preguntar:

Realment, què és el que fa Santcliment?

Una possible resposta és: Cerca dos nombres x, y que compleixin

$$\frac{1}{7}\,x = \frac{1}{9}\,y, \quad x + y = x\,y.$$

Si fem $x_0 = 7, y_0 = 9$. La falsa suma és 16. El fals producte és 63. Ara fem $x = 7 \times \frac{16}{63}, y = 9 \times \frac{16}{63}$. La suma ara val $16 \times (\frac{7}{63} + \frac{9}{63})$. El producte val $16 \times 16 \times \frac{7\times 9}{63\times 63} = \frac{16\times 16}{7\times 9}$. Òbviament, $\frac{16}{9} + \frac{16}{7} = \frac{(7+9)\,16}{9\times 7} = \frac{16}{9} \times \frac{16}{7}$.

Aquesta explicació, però, és molt sofisticada per a l'època. Podria haver procedit d'una de les formes següents, més simples i ajustades a les dades aritmètiques:

1. De fet, busquem un nombre x que $x + \frac{9}{7}\,x = \frac{9}{7}\,x^2$. És a dir, que $\frac{16}{7} = \frac{9}{7}\,x$. Aquest problema es pot resoldre per falsa posició. Fent $x_0 = 7$ s'obté 9, però volem $\frac{16}{7}$. Per tant, $x = \frac{16}{7\times 9} \times 7$. L'altre nombre s'obté de forma anàloga.
2. Si $x = 7\,A, y = 9\,B$, la primera condició implica que $A = B$. Per tant, $x + y = 16\,A$, $x\,y = 63\,A^2$ i $x + y = x\,y$. En resulta que $A = \frac{16}{63}$.
3. Atès que $A = B$, $\frac{x}{y} = \frac{7}{9}$. En resulta: $1 + \frac{7}{9} = x$.

Tanmateix, però, és difícil saber exactament el raonament ocult en la solució de Santcliment.

8.3 Regla de doble falsa posició [folis 118v–123v]

Ara, amb dues falsedats, diu, subtilment trobarem la veritat. Serveix per a qüestions difícils i «empatxades» [foli 118v].[81] I segueix, tot comparant-ho amb la regla gramatical segons la qual dues negacions fan afirmació. Diu: «Més i més, i menys i menys, resten. Menys i més, ajusten».[82] En aquesta regla cal

77 És l'únic problema de la *Suma* amb dues variables.
78 Cal llegir: dos nombres.
79 Vegeu els folis 117v–118r. Segons Karpinski, aquest és l'altre problema degut a Santcliment.
80 Tot seguit prova que efectivament el que ha fet és correcte [foli 118r].
81 Aquest mètode conté el d'una falsa posició [foli 118v].
82 Com que no disposa de notació algèbrica, li cal distingir els casos positius i negatius.

restar dues vegades, la primera resta dóna el divisor i la segona, la suma que s'ha de partir [foli `119r`].

De fet, volem resoldre un problema que mena a una equació del tipus

$$a\,x + b = c.$$[83]

Fem $x = x_1$ —primera falsa posició. Després, fem $x = x_2$ —segona falsa posició. Obtenim dues expressions de la forma:

$$a\,x_1 + b = c_1; \qquad a\,x_2 + b = c_2.$$[84]

Si restem les dues equacions anteriors,[85] obtenim l'equació lineal

$$a\,(x_1 - x_2) = c_1 - c_2.$$

Aleshores

$(x - x_1)$ correspon a $(c - c_1)$; $(x - x_2)$ correspon a $(c - c_2)$.[86]

Per tant,

$(x - x_1)\,x_2$, $(x - x_2)\,x_1$ corresponen, respectivament, a $(c - c_1)\,x_2$, $(c - c_2)\,x_1$.

La diferència $(x_1 - x_2)\,x = (x - x_2)\,x_1 - (x - x_1)\,x_2$ correspondrà, doncs, a la diferència $(c - c_2)\,x_1 - (c - c_1)\,x_2$. És a dir, $a(x_1 - x_2)\,x = (c - c_2)x_1 - (c - c_2)x_2$. En resulta que

$$x = \frac{(c - c_2)\,x_1 - (c - c_1)\,x_2}{c_1 - c_2},$$

que és la *regla de la doble falsa posició* tal com l'expressa Santcliment amb les precaucions, ja esmentades, sobre els signes.[87]

Vegem ara un dels exemples de la *Suma*:

> Un mercader ha comprat 3 peces de roba per 45 florins. La primera és blanca, la segona, verda, i la tercera, negra. La verda li costa el doble de la blanca i 4 florins més. La negra li costa tres vegades la verda i 5 florins menys. El mercader vol saber el preu de cadascuna de les robes per tal de no perdre res quan les torni a vendre.[88]

Santcliment raona així.

Suposem que la incògnita és el valor del drap blanc.[89] Com a primera falsa posició fa el valor del drap blanc igual a 5. Obté 56, que té 11 unitats [més]

83 De fet, podríem reduir-ho a una equació del tipus $a\,x = d$, on $d = c - b$ mesura la diferència. Aquesta equació és lineal i respon a la regla de tres. Però no és pas aquest el camí que segueix Santcliment, atès que, en el seu càlcul, el paràmetre b es manté fix.

84 Aquí pren sentit el «més, menys» de Santcliment. Pot esdevenir un dels tres casos següents: $c_1, c_2 > c$, $c_1, c_2 < c$, o $c_1 > c > c_2$. Això fa que els valors $c - c_i$, $i = 1, 2$, tinguin signes positius o negatius, i que les sumes puguin ser restes, i les restes, sumes. Aquesta circumstància és la que l'obliga a distingir casos. Ell, al foli `119v`, dóna tres exemples. Si $c_i > c$, $i = 1, 2$, aleshores restem $c_2 - c_1$, amb $c_2 > c_1$. Anàlogament, si ambdós són més petits que c. En el cas que l'un sigui més gran i l'altre més petit, les diferències, sempre agafades positives, es sumen.

85 És la primera resta i dóna el divisor $c_1 - c_2$.

86 Aquí és on entren en joc els signes, segons com siguin els nombres c_i, $i = 1, 2$, respecte de c.

87 Per a Santcliment les restes s'han de fer sempre restant el petit del gran.

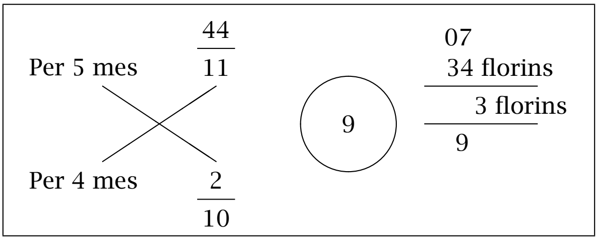
88 Vegeu els folis `120r-121v`.

89 L'equació en termes actuals és la següent: $x + 2x + 4 + 3(2x + 4) - 5 = 45$.

de diferència amb el valor real de 45. La segona falsa posició és 4. Li dóna una diferència [de més] de 2. Ara ja pot aplicar la regla. Per tant,

$$x = \frac{11 \times 4 - 2 \times 5}{11 - 2} = \frac{34}{9} = 3 \text{ florins i } \frac{7}{9}.$$

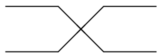
Santcliment presenta el càlcul en la forma abreujada següent [foli 120v]:

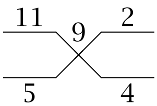


L'explicació del diagrama és aquesta:

La primera falsa posició, 5, dóna una diferència *positiva* d'11 unitats. La segona, 4, una, també *positiva*, de 2 unitats. Les resta, la diferència és 9. La col·loca dins la rodona. Multiplica 5 per 2. Obté 10. El col·loca dessota del 2. Anàlogament, multiplica 4 per 11. Obté 44. El col·loca damunt de l'11. La diferència és 34. La divideix per 9. Obté 3 florins, i 7 novenes parts.

Hi ha una gran semblança amb el *mètode de les escales* [*'Almbi'b kaffatain*]. En llatí, s'anomenà *Regula Balancis*. Aquest nom es deriva de la figura de la dreta.





Per tal de comprendre'n el funcionament amb claredat, l'usarem per resoldre el problema anterior.

Les línies ens ajuden a recordar la regla:

$$x = \frac{11\times4-2\times5}{9} = \frac{34}{9} = 3\,\frac{7}{9}.$$[90]

8.4 Regla de *doble posició i remoció* [folis 123v–124r]

En aquesta ocasió l'explicació és fosca.[91] El més curiós de tot és que l'únic exemple que dóna no serveix pas per aclarir-nos la regla en qüestió.

> Es un home que va set vegades a un deport.[92] La primera vegada triplica[93] els seus diners i perd 2 sous. La segona, els dobla, i en perd 9 de sous. La tercera, quatriplica[94] els seus diners i gasta 1 sou. La quarta, els triplica i gasta 8 sous. La cinquena, els multiplica per sis[95] i en gasta 2 de sou. La sisena, els dobla i en gasta 13. La setena, els triplica i en gasta 15. Quan mira el que li queda veu

90 El lector interessat a aprofundir-lo, pot consultar [17, edició de 1953, II, p. 440], en què Smith exposa la resolució d'un problema de Behà Eddîn [~1600].

91 Vegeu, a [15, p. 369, notes 111 i 112], la influència de l'escola aritmètica francoprovençal en la *Suma*.

92 Una mena de fira.

93 Santcliment diu «tresdobla».

94 «Quatredobla», en termes de Santcliment.

95 «Sisdobla».

que té exactament un sou. Es demana quants diners tenia la primera vegada que anà al deport?[96]

En termes actuals és el problema següent:

$$3\left(2\left(6\left(3\left(4(2(3x-2)-9)-1\right)-8\right)-2\right)-13\right)-15=1.$$

El valor de x és $2\,\frac{895}{2\,592}$, que òbviament és el que dóna Santcliment. Ara bé, com a falsa posició fa $x_1 = 2$, un valor que no sembla gaire correcte, atès que, en la segona anada al deport, tindria: $6x_0 - 13 = -1$ i, a partir d'aquí, tots els valors serien negatius. El valor final de la falsa posició, en aquest cas, seria -894. Ens hem quedat endarrere de 895 unitats. Això fa que el valor de x sigui 2 i $\frac{895}{2\,592}$, on $2\,592 = 3 \times 2 \times 6 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3$.

Podem interpretar aquest problema —i, de retruc, aquesta regla tan poc explícita en la qual «quan hom ha menys que no volem, lo devem llevar de ço que fa abaixar i metre de ço que fa creixer» [foli 123v]— com una transformació de tipus algèbric. Fem la falsa posició x_0. Obtenim $a\,x_0 + b = c_0$. Hem de corregir x_0. Però ara, en lloc de fer-ho, com fins ara, per proporcionalitat, ho fem per addició o per sostracció. És a dir, fem $x = x_0 + h$ i determinem h, que és allò que cal afegir o treure. Sabem que $c = c_0 + (c - c_0) = (ax_0 + b) + H$. Ara fem $H = a\,h$ i resulta que $h = \frac{H}{a} = \frac{c - c_0}{a}$. És el que fa Santcliment: $1 = -894 + H$, i $h = \frac{895}{2\,592}$. [Potser fóra més fàcil mirar-ho així: $a\,x + b = 1, a\,x_0 + b = -894$. D'on resulta: $a(x - x_0) = 895$. La resta és immediata.]

Aquest problema és prou sofisticat per tal que Santcliment digui «i no em cur de donar-ne la pràctica perquè ocuparia més matèria que el seu profit no requereix» [124v]. Fóra bo saber si aquest «més matèria» és una insinuació a la necessitat de recórrer a l'àlgebra, o bé si és una simple manera de parlar perquè li ha aparegut un nombre negatiu.[97]

9 Dels aliatges [folis 124v–132r]

L'art de mercaderia s'acaba amb els aliatges de metalls. Un cop hem establert, diu, les tres regles de les falses posicions, cal dir quelcom del fi de l'or i de la plata [foli 124v].

En aquest context, ofereix dues menes de problemes.

9.1 Dels grans de pes del diner

D'entrada estudia els grans de pes del diner.

Per comprendre el que fa, abans cal entendre la taula d'equivalències següent:

96 Vegeu el foli 124r.
97 També fóra d'allò més interessant saber —encara que Karpinski no ho digui— si aquest problema és original de Santcliment.

PES	MONEDA O LLEI	PES	MONEDA O LLEI
1 marc de fi		8 unces	12 diners
1 unça		24 diners	
1 diner		24 grans	
1 gra		24 palets	
	1 diner	16 diners	24 grans
	1 gra	16 grans	

És un xic complicada perquè presenta alhora diverses equivalències: 1) d'unitats de pes en unitats de pes; 2) d'unitats de pes en unitats de llei, i 3) d'unitats de llei en unitats de llei.[98]

En definitiva, doncs, un marc de fi (pes) val $\left\{\begin{array}{r}8 \text{ unces}\\ 192 \text{ diners}\\ 4\,608 \text{ grans}\end{array}\right\}$ de pes, i una unça de pes val $\left\{\begin{array}{r}24 \text{ diners}\\ 576 \text{ grans}\end{array}\right\}$ de pes.

Vegem ara un exercici senzill [foli 124v]:

> Un home té 5 marcs, 3 unces i 4 diners de pes, a 7 diners i 7 grans de llei. Es pregunta quant en té de fi.

Ara, per resoldre'l, Santcliment recorre a les equivalències de pes. En concret, fa:

Els 5 marcs, 3 unces i 4 diners en grans de pes són 24 864 grans (de pes). Ara bé, són a 7 diners i 7 grans de llei que valen 175 grans (de llei). Per tant,

x grans de llei	corresponen a	24 864 grans de pes
175 grans de llei	corresponen a	4 608 grans de pes d'un marc.

S'obtenen $944\,\frac{1\,248}{4\,608}$ grans de llei [folis 124v–126r].[99]

9.2 Dels aliatges

Després dóna la regla típica d'aliatges o de «billons».[100] La regla general és la següent: s'ha de multiplicar cada marc pel seu fi, i dividir-ho tot per la suma dels marcs.[101]

> Tenim 5 marcs d'argent que són a 9 diners de llei, 8 marcs a $10\,\frac{1}{4}$ diners de llei, i 2 marcs a 3 diners de llei. Ho fonem tot. Volem saber com serà la llei de la moneda obtinguda.

98 Fixem-nos que hi ha noms que es repeteixen però amb valors diferents. Per exemple, 1 diner de pes val 24 grans de pes; 1 diner de moneda val 16 diners de pes però 24 grans de moneda.

99 Els càlculs explícits de Santcliment s'acaben aquí, però ell ho passa aleshores a pes, tenint en compte que $\frac{1}{8}$ de gra de llei val 2 grans de pes. És a dir, $944\,\frac{1\,248}{4\,608}$ grans de llei = $15\,108\,\frac{1}{3}$ grans de pes. Si ara, d'acord amb la taula anterior, fem les reduccions pertinents, obtindrem: 3 marcs, 2 unces, 5 diners i $12\,\frac{1}{3}$ de grans de pes. En el text de Santcliment el resultat és diferent. Això només pot respondre a un error de càlcul, o de transcripció.

100 El nom de «billons» és el que es feia servir per indicar els aliatges.

101 Vegeu els folis 126r–126v: si les lleis dels aliatges són ℓ_1, ℓ_2, ℓ_2 i de cada metall n'aliem una quantitat m_1, m_2, m_3, obtenim la llei $\ell = \frac{m_1\,\ell_1 + m_2\,\ell_2 + m_3\,\ell_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

El resultat és

$$\ell = \frac{5 \times 9 + 8 \times 10\frac{1}{4} + 2 \times 3}{5 + 8 + 2} = \frac{133}{15} = 8 \text{ diners de llei } \frac{13}{15} \text{ diners de llei.}$$

El text de Santcliment dedica els folis 126v–132r als aliatges. D’aquests problemes en remarcarem dos que ens han semblat d’interès.

1. Primer exemple d’aliatge

   > Un joier té plata de quatre menes. De 4, 3, 9 i 12 diners de llei.[102] Vol fer monedes de 7 diners de llei, i en vol fer 30 marcs.[103]

   Aplicant la llei d’aliatges, obté un *problema indeterminat*:

   $$\frac{4x + 3y + 9z + 12u}{30} = 7.$$ [104]

2. Segon exemple d’aliatge

   > Un mercader té 7 marcs i 3 unces d’or a llei de 17 quirats, i vol saber quant té de fi.[105]

   El problema és ben senzill: Els 7 marcs, 3 unces d’or de llei a 17 quirats dóna 1 300 quirats. Ara dividim per 24, i obtenim 5 marcs, 1 unça i $\frac{19}{24}$ de fi.

10 Problemes de cloenda

El text aritmètic —després d’uns apunts molt poc interessants i molt simples de progressions que no mereixen cap mena de comentari[106] [folis 132r–132v]— acaba amb una col·lecció de set problemes, resolts sense cap mena d’explicació [folis 133r– 135r]. Molt probablement són d’arrel oriental. Els set problemes són els següents:

> **Problema 1**. Dos correus van l’un de Roma a Barcelona i l’altre de Barcelona a Roma. El primer ho fa en 17 dies, i el segon, en 15. Si surten el mateix dia i hora i la distància que hi ha entre Roma i Barcelona és 157 milles, quant temps passarà abans no es trobin i quin camí haurà recorregut casdacun?[107]

102 Santcliment diu «de lliga».

103 Vegeu els folis 128r–128v.

104 Santcliment el resol d’una manera molt particular que, si bé no és general, és útil en aquesta ocasió, atès que dues lleis estan per damunt de 7 i dues per davall. Fa, usant paraules, el que en llenguatge algèbric és: $12u + 3y = (7+5)u + (7-4)y$. Aleshores fem $y_0 = 5, u_0 = 4$. Anàlogament, $9z + 4x = (7+2)z + (7-3)x$. Aleshores fem $x_0 = 2, z_0 = 3$. Ara hem de repartir 30 marcs proporcionalment a 2, 5, 3 i 4. Això dóna 14, i volem que doni 30. Hem fet falsa posició. Per tant, $x = 2 \times \frac{30}{14}, y = 5 \times \frac{30}{14}, z = 3 \times \frac{30}{14}$, i $u = 4 \times \frac{30}{14}$. Ara només cal comprovar-ho. Vegeu els folis 128r–129r. Santcliment no fa cap mena de menció al fet que el problema és *indeterminat*, ni tampoc a les altres possibles solucions. Vegeu [15, p. 372, nota 124].

105 Vegeu el foli 129r. Cal saber que 1 marc d’or fi = 24 quirats, 1 quirat = 8 diners, 1 unça = 24 diners, 1 diner = 24 grans, 1 gra = 24 garroïnes, etc.

106 Vegeu [15, p. 373, nota 130].

107 Resposta: 7 dies i 11 i $\frac{5}{8}$ hores, suposant que un dia té 12 hores. El primer recorre 73 llegües i $\frac{19}{32}$ parts de llegua. Vegeu [15, p. 374, nota 132].

> **Problema 2.** Un mercader fa quatre viatges. En el primer doble el capital, en el segon el triplica, en el tercer el quadruplica, i en el quart, el quintuplica. En total ha guanyat 90 lliures. Quin era el seu capital inicial?[108]

> **Problema 3.** Un mercader demana que, si 4 i $\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{2}$ de 6 i $\frac{1}{4}$, quina serà la meitat de 7 i $\frac{1}{5}$?[109]

El problema 4 és molt semblant a l'anterior.

> **Problema 5.** Un home demana a un altre quina hora és. Li respon que l'$\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ del dia era passat, i s'esperava passar l'$\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{5}$.[110]

> **Problema 6.** Un mercader té 7 ducats menys un florí. En una altra terra valen 11 florins menys un ducat. Quant val el florí, si el ducat val 23 sous i 7 diners?[111]

> **Problema 7.** Un mercader té una peça d'or en la qual hi ha 3 marcs d'or en billó, de què hi ha $\frac{1}{3}$ d'or, $\frac{1}{4}$ d'argent, $\frac{1}{5}$ de coure i $\frac{1}{6}$ de plom. En vol agafar 6 unces i mitja i fer-ne una tassa. Quina quantitat de cada metall hi haurà?[112]

Amb aquesta lectura comentada —conjuntament amb la introducció i comentaris del text de Francesc de Santcliment a cura d'Antoni Malet, els articles d'Hernández Esteve i la introducció de Joana Escobedo— disposem d'un compendi seriós, acurat i molt complet que permet una lectura àgil i fàcil, i una comprensió total d'aquesta petita joia de l'aritmètica catalana.

Referències

[1] Benoit, Paul; Chemla, Karine; Ritter, Jim. *Histoire des fractions, fractions d'histoire*. Basilea: Birkhäuser-Verlag, 1992.

[2] Boyer, Carl Benjamin. *A History of mathematics*. Nova York: John Wiley & Sons, 1968. Revisat per Uta C. Merzbach el 1989. Traducció castellana de la primera edició de Mario Martínez Pérez. *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial, 1986.

[3] Clagett, Marshall. *Ancient Egyptian Science. A Source Book. Volume three. Ancient Egyptian Mathematics*. Filadèlfia: American Philosophical Society, 1999.

108 Resposta: 15 sous.

109 El problema l'hem transcrit textualment i el seu enunciat resulta un xic ambigu. Entenem que és un problema que relaciona quantitats heterogènies; és a dir, significa el següent: Sabent que a la meitat de 6 i un quart d'una certa quantitat (X) li correspon 4 i un terç d'una altra (Y), demana quant li correspondrà d'aquesta segona (Y) a la meitat de 7 i un cinquè de la primera (X). Tanmateix correspon a una simple regla de tres amb trencats.

110 Tanmateix el problema és inconsistent atès que totes les parts del dia fan més que una unitat. La solució que dóna Santcliment —amb la regla de repartiment, pròpia de les companyies— és $\frac{50}{77}$ parts de dia, que redueix a hores, quarts d'hora i parts de setanta-setens. Recordem el problema de la secció § 7.1. Hi ha un error del mateix tipus.

111 De fet, diu que 8 ducats = 12 florins. La resta és elemental.

112 És un problema de mescla en què hi ha també una incongruència. La solució, a més, és incorrecta. Vegeu [15, p. 375, nota 141].

[4] Corominas, Joan. *Diccionari etimològic i complementari de la llengua catalana*. Barcelona: Curial, 1980–1989. 9 v.

[5] Grant, Edward. «Jordanus Nemorarius». A: Gillespie, Charles Coulstons. [ed.]. *Biographical Dictionary of Mathematicians: reference biographies from the Dictionary of Scientific Biography*. Vol. II. Nova York: Charles Scribner's Sons, 1970, p. 1185–1192.

[6] Hernández Esteve, Esteban. «Una suma de aritmética anterior a la de Luca Pacioli: la «Suma de la Art de arismètica» de Francesch Sanct Climent (Barcelona, 1482)». *Contaduría. Universidad de Antioquía*, 26–27 (1995), p. 113–176.

[7] Hernández Esteve, Esteban. «El primer libro de matemáticas impreso en España: La «Suma de la Art de arismética» de Francesch Sanct Climent (Barcelona, 1482)». *Técnica contable*, 47 (1996), p. 769–774.

[8] Karpinski, Louis Charles. «The first printed arithmetic of Spain. Francesch Sanct Climent. *Summa de la Art de Arismetica*. Barcelona 1482». *Osiris*, 1 (1936), p. 411–420.

[9] Malet, Antoni; Paradís, Jaume. «500 aniversari de la primera aritmètica impresa a Catalunya i a la península Ibèrica». *Ciència*, 19 (1982), p. 550–554.

[10] Murdoch, John E. «Thomas Bradwardine». A: Gillespie, Charles Coulstons [ed.]. *Biographical Dictionary of Mathematicians: reference biographies from the Dictionary of Scientific Biography*. Vol. I. Nova York: Charles Scribner's Sons., 1970, p. 349–355.

[11] Paradís, Jaume; Malet, Antoni. «El primer llibre de matemàtiques a Catalunya». *L'Avenç*, 51 (1982), p. 493–495.

[12] Pla i Carrera, Josep. *Damunt les espatlles dels gegants*. Barcelona: La Magrana, 1998. Premi de Literatura Científica (Fundació Catalana per a la Recerca) de l'any 1998. Barcelona: UPC, Facultat de Matemàtiques, 2007. Reedició, amb les dues addendes matemàtiques.

[13] Pla i Carrera, Josep. «Presentació i anàlisi de la "Suma de la art de arismetica" de Francesc Santcliment». Primera part. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 25 (1) (2010), p. 43–80.

[14] Santcliment, Francesc. *La Suma de la Art de Arismetica*. Barcelona: Pere Posa, 1482. N'existeix un exemplar original a la Biblioteca de Catalunya que correspon a l'entrada R 093:51Esc 8º c.5. Sala de Reserva. També disposem de l'edició comentada i anotada d'Antoni Malet [15] i de l'edició facsímil de Joana Escobedo [16].

[15] Santcliment, Francesc. *Summa de l'art d'Aritmètica / Francesc Santcliment*. (Introducció, transcripció i notes a cura d'Antoni Malet). Vic: Eumo, 1998.

[16] Santcliment, Francesc. *La Suma de la Art de Arismetica*. Edició facsímil a cura de Joana Escobedo. Barcelona: Biblioteca de Catalunya, 2008.

[17] SMITH, David Eugene. *History of mathematics*. Toronto, Ontario: General Publishing Company, Ltd., 1923. Reimprès en dos volums. Nova York: Dover Publications, Inc, 1958.

DEPARTAMENT DE PROBABILITAT, LÒGICA I ESTADÍSTICA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA
jpla@ub.edu