

BUTLLETÍ DE LA SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES
Vol. 17, núm. 2, 2002. Pàg. 51-67

Un diàleg socràtic sobre les matemàtiques*

ALFRÉD RÉNYI

SÒCRATES Busques algú, estimat Hipòcrates?¹

HIPÒCRATES No, Sòcrates, ja l'he trobat: eres tu. T'he buscat a força llocs. A l'àgora m'han dit que t'havien vist passejant a la vora de l'Ilissos.² Així, seguint-te la pista, he vingut fins aquí.

SÒCRATES Doncs apa, digue'm per què has vingut. Després et voldria preguntar una cosa sobre la nostra discussió amb Protàgores.³ Encara te'n recordes?

HIPÒCRATES I m'ho preguntes? D'aleshores ençà no he passat ni un sol dia sense pensar-hi. He vingut a demanar-te consell precisament perquè no em puc treure del cap aquella conversa.

SÒCRATES Em sembla, estimat Hipòcrates, que vols parlar sobre el mateix que et vull preguntar. Les dues coses, doncs, han resultat ésser una de sola. Sembla que els matemàtics s'equivoquen quan diuen que dos no és mai igual a u.

HIPÒCRATES Sòcrates, ets un bruixot; precisament volia parlar amb tu sobre matemàtiques.

SÒCRATES Estimat Hipòcrates, saps molt bé que no sóc un matemàtic; per què no adreces la teva pregunta al famós Teodor?⁴

*Traducció i notes de Josep Maria Font.

1 No hi ha motius per creure que aquest personatge vulgui representar el matemàtic Hipòcrates de Quios (470-410 aC, aprox.), contemporani de Sòcrates (469-399 aC, aprox.), i a qui tampoc no s'ha de confondre amb Hipòcrates de Cos, el famós metge.

2 Riu que passa per Atenes. A la seva vora hi havia el «Liceu», l'escola filosòfica de Plató.

3 Protàgores: un dels primers i més famosos sofistes grecs (480-411 aC, aprox.). Entre altres matèries, (deia que) ensenyava la virtut. Dóna nom a un dels millors diàlegs escrits per Plató (428-348 aC, aprox.), on Protàgores i Sòcrates discuteixen sobre el tema a instàncies d'un jove anomenat Hipòcrates, que està pensant a fer-se deixeble de Protàgores.

4 Teodor (465-398 aC): matemàtic i filòsof de l'escola pitagòrica, va ser un dels mestres de Plató i també de Teetet. És especialment recordat per haver demostrat que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ..., $\sqrt{17}$ són incommensurables amb la unitat (com diríem avui, irracionals).

HIPÒCRATES Em deixes parat, Sòcrates: ets capaç de respondre les meves preguntes fins i tot abans que te les faci. He vingut a preguntar-te què et semblaria si em fes deixeble de Teodor. L'altra vegada, quan em volia fer deixeble de Protàgores i vam anar junts a veure'l, vas portar la discussió de tal forma que va quedar clar que Protàgores no sap ni què és el que ensenya. Per això m'hi vaig repensar i no el vaig seguir. Aquella discussió em va ajudar a veure què era el que no havia de fer, però no em va ensenyar què havia de fer. I encara ho estic rumiant. Vaig a banquets i al gimnàs amb colles de nois de la meva edat, i podria dir que m'ho estic passant bé, però això no m'arriba a satisfer. M'amoïna sentir-me com un ignorant. El que vull dir és que noto que els coneixements que tinc són francament insegurs. A la discussió amb Protàgores em vaig adonar que el que sé de nocions tan familiars com la virtut, la justícia o el coratge és ben lluny de ser satisfactori. Amb tot, crec que he fet un pas endavant, perquè ara veig clarament la meva pròpia ignorància.

SÒCRATES M'alegra força, estimat Hipòcrates, que m'entenguis tan bé. Sempre dic obertament que jo no sé res de res. *El que em diferencia de molta altra gent és que jo no em penso que sé allò que en realitat no sé.*⁵

HIPÒCRATES Això mostra la teva saviesa, Sòcrates. Però aquesta manera de saber no em satisfà. Desitjo amb vehemència coneixements certs i sòlids, i no seré feliç fins que no els aconseguixi. Constantment medito sobre quina mena de coneixement he d'intentar assolir. Fa poc Teetet⁶ em va dir que la certesa només existeix a les matemàtiques, i em va suggerir que n'aprenguéss amb el seu mestre, Teodor, que, segons ell, és el millor expert d'Atenes en nombres i en geometria. Però no vull tornar a caure en el mateix error de quan volia ser deixeble de Protàgores. Per tant, estimat Sòcrates, digue'm: aprenent matemàtiques amb Teodor, trobaré o no aquest coneixement segur que estic cercant?

SÒCRATES Si tu, fill d'Apol·lodor, vols aprendre matemàtiques, aleshores certament el millor que pots fer és anar amb el meu molt apreciat amic Teodor. Però has de ser tu qui decideixi si realment vols aprendre matemàtiques o no. Ningú no pot saber què necessites millor que tu mateix.

HIPÒCRATES Per què et resisteixes a ajudar-me, Sòcrates? Que potser t'he ofès sense voler?

SÒCRATES M'interpretes malament, jove amic meu. No estic pas enfadat; senzillament, em demanes una cosa impossible per a mi. Tothom ha de decidir

⁵ L'autor posa en itàlica les frases reproduïdes textualment de fragments que els diàlegs de Plató atribueixen a Sòcrates mateix. Vegeu, per exemple, els diàlegs «Apologia de Sòcrates» i «Protàgores», traducció de Joan Crexells i edició de Josep Vives (3a edició a la col·lecció «El Cangur Clàssics», vol. 172), Edicions 62, Barcelona, 1999.

⁶ Teetet (417-369 aC, aprox.): considerat el millor matemàtic de l'escola de Plató, apareix a diferents dels seus diàlegs i àdhuc n'hi ha un que duu el seu nom, on apareix també Teodor. Hom li atribueix gran part del contingut dels «Elements» d'Euclides sobre les magnituds incommensurables i la teoria de les proporcions d'Eudoxi, així com la invenció de l'octàedre i l'icosàedre.

per si mateix allò que vol fer. *Tot el que puc fer-hi jo és ajudar-te a donar a llum la teva decisió, com una llevadora.*

HIPÒCRATES T'ho prego, estimat Sòcrates, no em neguis aquest ajut, i si et va bé comencem ara mateix.

SÒCRATES Bé, si vols, ajaguem-nos a l'ombra d'aquest plàtan i comencem. *Però abans que res, digues: estàs disposat a dur la discussió com m'agrada a mi? Jo et faré preguntes i tu hi respondràs. Ja saps que d'una conversa així tot el que en trauràs serà veure més clarament allò que ja sabies, fer florir les llavors del coneixement que ja eren al teu enteniment.* Espero que no faràs com el rei Dàrius, que va occir l'encarregat de les seves mines perquè només havia tret coure d'una mina que el rei es pensava que contenia or. Suposo que no oblidaràs que cap miner no pot trobar en una mina res més que allò que la mina conté.

HIPÒCRATES Et juro que no em queixaré, però, per Zeus, comencem les excavacions d'una vegada!

SÒCRATES Molt bé. Aleshores digue'm: saps què és, la matemàtica? Suposo que deus saber quina cosa és allò que vols estudiar.

HIPÒCRATES Em penso que tots els nens ho saben. La matemàtica és una ciència, una de les més excel·lents.

SÒCRATES No t'he demanat que lloessis la matemàtica, sinó que em descriguessis la seva naturalesa. Per exemple, si jo et preguntava per l'art dels metges, tu em diries que aquest art s'ocupa de la salut i de la malaltia, i que el seu objecte és curar els malalts i preservar la salut. D'acord?

HIPÒCRATES Evidentment.

SÒCRATES Aleshores digue'm: l'art dels metges tracta de quelcom que existeix o de quelcom que no existeix? Si no hi hagués metges, existirien les malalties?

HIPÒCRATES Evidentment, i fins i tot més que ara.

SÒCRATES Considerem ara un altre ofici, per exemple el dels astrònoms. Estàs d'acord amb mi que els astrònoms estudien el moviment dels estels?

HIPÒCRATES I tant que sí.

SÒCRATES I si et pregunto si l'astronomia tracta de coses que existeixen, quin serà la teva resposta?

HIPÒCRATES Serà afirmativa.

SÒCRATES Existirien, els estels, si no hi hagués cap astrònom a tota la terra?

HIPÒCRATES Evidentment. I si Zeus amb la seva còlera exterminés tota la humanitat, els estels seguirien brillant al cel, de nit. Però, per què parlem d'astronomia, i no de matemàtiques?

SÒCRATES No siguis impacient, bon amic meu. Considerem algunes altres arts, per a comparar-les amb les matemàtiques. Com anomenes l'home que coneix tots els éssers que viuen als boscos o a les profunditats marines?

HIPÒCRATES L'anomenaria un científic, un estudiós de la natura viva.

SÒCRATES I afirmes que aquest home estudia coses que existeixen?

HIPÒCRATES Ho afirmo.

SÒCRATES I si dic que tot art o ofici s'ocupa de coses que existeixen, hi estàs d'acord?

HIPÒCRATES Completament.

SÒCRATES Doncs ara digue'm, jove amic, quin és l'objecte de les matemàtiques, quines són les coses que estudia el matemàtic?

HIPÒCRATES Això mateix li vaig preguntar jo a Teetet, i em va dir que la matemàtica estudia nombres i formes geomètriques.

SÒCRATES Bé, la resposta és clara, però, tu diries que aquestes coses existeixen?

HIPÒCRATES Per descomptat. Com en podríem parlar, si no existissin?

SÒCRATES Aleshores digue'm: si no hi hagués matemàtics, hi hauria nombres primers? Sí? I on serien?

HIPÒCRATES Realment, no sé què respondre't. És clar que si els matemàtics pensen sobre els nombres primers és que aquests deuen existir en la seva consciència, però si no hi hagués matemàtics els nombres primers no serien enlloc.

SÒCRATES Vols dir que hem d'admetre que els matemàtics estudien coses inexistents?

HIPÒCRATES Sí, em penso que ho hem d'admetre.

SÒCRATES Mirem-nos la qüestió des d'un altre angle. Fixa't, he escrit el nombre 39 en aquesta taula encerada. El veus?

HIPÒCRATES Sí, el veig.

SÒCRATES I el pots tocar amb la mà?

HIPÒCRATES Evidentment.

SÒCRATES O sigui, que malgrat tot potser sí que existeixen, els nombres?

HIPÒCRATES Sòcrates, tu em vols aixecar la camisa. Mira això, he dibuixat a la mateixa taula un drac amb set caps. Significa això que aquest drac existeix? No conec ningú que hagi vist un drac, i de fet estic convençut que els dracs no existeixen, excepte als contes de fades. Però fins suposant que jo estigués equivocac i que en algun indret més enllà de les Columnes d'Hèrcules⁷ hi hagués dragons, això no tindria res a veure amb el meu dibuix.

SÒCRATES Tens raó, Hipòcrates, i estic completament d'acord amb tu. Vol dir això que, malgrat que en puguem parlar i els puguem escriure, els nombres en realitat no existeixen?

HIPÒCRATES Evidentment.

SÒCRATES No ens precipitem a treure conclusions. Fem un altre intent. L'encerto si dic que podem comptar les ovelles que hi ha aquí al prat, o les abelles⁸ d'aquell rusc d'allí?

⁷ Nom de l'estret de Gibraltar en la mitologia grega; marcaven la fi del món conegut.

⁸ El joc fonètic *ovelles/abelles*, a l'original anglès és entre *sheep* i *ships*.

HIPÒCRATES Sí que ho podem fer.

SÒCRATES I les ovelles i les abelles existeixen?

HIPÒCRATES Clarament.

SÒCRATES Però, si les ovelles existeixen, aleshores el seu nombre deu ésser també quelcom que existeix, oi?

HIPÒCRATES Et burles de mi, Sòcrates. Els matemàtics no compten ovelles; això és feina dels pastors.

SÒCRATES Vols dir que allò que els matemàtics estudien no són els nombres de les ovelles o de les abelles, o d'altres coses existents, sinó que estudien els nombres en si mateixos, i que per tant s'ocupen d'una cosa que només existeix al seu cap?

HIPÒCRATES Sí, això és el que vull dir.

SÒCRATES Abans m'has dit que, segons Teetet, els matemàtics estudien nombres i formes geomètriques. Què passa amb les formes? Si et pregunto si les formes existeixen, què em respon?

HIPÒCRATES Evidentment que existeixen. Podem veure la forma d'una àmfora bonica, per exemple, i també apreciar-la amb les nostres mans.

SÒCRATES Tinc un problema, però: si mires una àmfora; què veus, l'àmfora mateixa o la seva forma?

HIPÒCRATES Veig les dues coses alhora.

SÒCRATES És el mateix que mirar un xai: veus el xai i veus també la seva llana, oi?

HIPÒCRATES Trobo que és una comparació molt encertada.

SÒCRATES Doncs jo, aquesta comparació, la trobo tan coixa com Hefest.⁹ Podem xollar el xai i veurem per separat el xai sense la seva llana, i la llana del xai sense el xai. Tu podries separar de manera similar l'àmfora i la seva forma?

HIPÒCRATES Evidentment que no, i m'atreviria a dir que ningú no ho pot fer, això.

SÒCRATES I, malgrat tot, segueixes creient que pots veure una forma geomètrica?

HIPÒCRATES Estic començant a dubtar-ho.

SÒCRATES A més, si els matemàtics estudiessin la forma de les àmfores, no els anomenaríem terrissaires?

HIPÒCRATES Evidentment.

SÒCRATES Si els matemàtics estudiessin la forma de les àmfores, no seria Teodor el millor terrissaire? He sentit molta gent lloant-lo, però ningú no m'ha dit que sàpiga res de ceràmica. De fet, dubto que pugui fer la més simple peça de terrissa. O potser els matemàtics s'ocupen de les formes de les estàtues, o dels edificis?

9 Hefest: déu grec, fill de Zeus, que era coix; correspon al Vulcà romà (el de la farga).

HIPÒCRATES Si ho fessin, serien escultors o arquitectes.

SÒCRATES Bé, amic meu, hem arribat a la conclusió que els matemàtics, en estudiar geometria, no tracten de les formes d'objectes existents, com les àmfores, sinó de formes que existeixen només al seu pensament. D'acord?

HIPÒCRATES Per força.

SÒCRATES Ara, que hem establert que els matemàtics s'ocupen de coses que no existeixen en realitat sinó només al seu pensament, examinem l'afirmació de Teetet que tu has mencionat, que la matemàtica ens forneix coneixements més fiables i dignes de confiança que qualsevol altra ciència. Digues, te'n va posar algun exemple?

HIPÒCRATES Sí, per exemple va dir que no podem saber exactament quant hi ha d'Atenes a Esparta. Evidentment la gent que hi ha anat coincideixen en el nombre de jornades de camí, però és impossible saber exactament la distància en peus. Per altra banda, gràcies al teorema de Pitàgores, podem dir quina és la llargada de la diagonal d'un quadrat. També va dir que és impossible donar el nombre exacte de gent que viu a Grècia. Si algú intentava comptar tota la gent, mai no tindria la quantitat exacta, perquè mentre anés comptant, alguns ancians moririen i naixerien alguns infants, de forma que el nombre total seria correcte només aproximadament. En canvi, si preguntes a un matemàtic quantes arestes té un dodecàedre regular, et dirà que el dodecàedre té 12 cares, cadascuna amb 5 arestes, en total 60; però com que cada aresta ha estat comptada dues vegades, perquè pertany a dues cares, el nombre d'arestes del dodecàedre regular és 30, i aquesta xifra és fora de tot dubte.

SÒCRATES Va afegir més exemples?

HIPÒCRATES Una pila, però no els recordo pas tots. Va dir que en la realitat mai no hi ha dues coses exactament iguals. No hi ha dos ous que siguin exactes; fins les columnes del temple de Posidó són lleugerament diferents les unes de les altres, però en canvi podem estar segurs que les dues diagonals d'un rectangle són exactament iguals. Va citar Heràclit, que deia que tot el que existeix canvia constantment, i que el coneixement segur només és possible per a les coses que no canvien mai, com per exemple els parells i els senars, la línia recta i el cercle.

SÒCRATES Amb això en tinc prou. Aquests exemples m'han convençut que en matemàtiques podem aconseguir uns coneixements que són fora de tot dubte, cosa impossible a d'altres ciències o a la vida de cada dia. Ara anem a resumir els resultats de la nostra investigació sobre la naturalesa de les matemàtiques. Dic bé si dic que hem arribat a la conclusió que la matemàtica estudia coses que no existeixen i arriba a saber tota la veritat sobre elles?

HIPÒCRATES Sí, això és el que hem establert.

SÒCRATES Ara bé, estimat Hipòcrates, no trobes ben misteriós, per Zeus, que hom pugui saber més sobre coses que no existeixen que no pas sobre coses que sí que existeixen?

HIPÒCRATES Si ho presentes així, és certament un misteri. Segur que hi ha algun error a les nostres argumentacions.

SÒCRATES No, hem procedit amb la màxima cura i hem controlat cada pas de l'argumentació; no hi pot haver cap error al nostre raonament. Escolta, recordo una cosa que ens pot ajudar a resoldre l'enigma.

HIPÒCRATES Doncs explica'm-ho de seguida, perquè estic ben desconcertat.

SÒCRATES Aquest matí he estat a la sala del segon magistrat, on compareixia l'esposa d'un fuster del poblet de Pithos acusada d'haver enganyat el seu marit i d'haver-lo assassinat, amb l'ajut del seu amant. La dona protestava i jurava per Àrtemis i per Afrodita que ella era innocent, que mai no havia estimat ningú més que el seu marit, i que el marit havia mort a mans d'uns pirates. Hom havia cridat molts testimonis; uns deien que la dona era culpable, d'altres que era innocent. Ha estat impossible esbrinar què havia passat de debò.

HIPÒCRATES Que et tornes a burlar de mi? Primer em confons completament, i després en comptes d'ajudar-me a trobar la veritat m'expliques històries.

SÒCRATES No t'empipis, amic meu. Tinc raons de pes per a parlar-te d'aquesta dona, que és impossible saber si és culpable o no. Una cosa sí que és segura: aquesta dona existeix. L'he vista amb els meus propis ulls, i pots preguntar-ho a qualsevol dels que hi eren; entre ells hi havia alguns homes dignes de tota confiança, que no han mentit en tota la seva vida.

HIPÒCRATES El teu testimoni em basta, estimat Sòcrates. Admetem que la dona existeix. Què té a veure això amb la matemàtica?

SÒCRATES Més del que et penses. Però abans, digue'm, coneixes la història d'Agamèmnon¹⁰ i Clitemnestra?

HIPÒCRATES Tothom la sap, aquesta història. L'any passat vaig veure la trilogia d'Èsquil al teatre.

SÒCRATES Doncs explica-me-la, en poques paraules.

HIPÒCRATES Mentre Agamèmnon, rei d'Argos, era a Troia fent la guerra, la seva esposa, Clitemnestra, feia l'amor amb Egist, un cosí del seu marit. Quan Agamèmnon va tornar a casa, després de la caiguda de Troia, la seva muller i el seu amant el van assassinar.

SÒCRATES I digue'm, Hipòcrates, estàs segur que Clitemnestra era culpable?

HIPÒCRATES No entenc per què em preguntes una cosa així. La història no ofereix dubtes. Homer conta que quan Ulisses va visitar l'infern hi va trobar Agamèmnon, que li va explicar ell mateix la seva dissort.

SÒCRATES Però, tu estàs segur que Clitemnestra i Agamèmnon i la resta dels personatges de la història van existir realment?

HIPÒCRATES Potser em desterrarien si ho digués públicament, però segons la meva opinió avui dia, després de tants segles, és impossible tant de

¹⁰ Agamèmnon: segons la llegenda, cap de l'exèrcit grec que assetjà Troia; a partir de la Iliada d'Homer, apareix sovint a la literatura grega (Eurípides, Èsquil) i universal.

demostrar com de desmentir la veritat de les històries contades per Homer. Però això és irrellevant. Quan t'he dit que Clitemnestra era culpable, no parlava de la Clitemnestra real, hagi o no existit, sinó de la Clitemnestra de la nostra tradició homèrica, de la Clitemnestra de la trilogia d'Èsquil.

SÒCRATES Puc dir, doncs, que de la Clitemnestra real no en sabem res? Fins dubtem de la seva existència; en canvi, pel que fa a la Clitemnestra personatge de la trilogia d'Èsquil estem segurs que era culpable i que va matar Agamèmnon, ja que així ens ho diu Èsquil.

HIPÒCRATES Sí, per descomptat. Però, per què insisteixes en tot això?

SÒCRATES De seguida ho veuràs. Deixa'm resumir el que hem aclarit. Sobre la dona de carn i ossos jutjada a Atenes aquest matí, és pràcticament impossible esbrinar si és culpable o no, i en canvi de Clitemnestra, que és un personatge d'una tragèdia i que probablement mai no ha existit, no dubtem que sigui culpable. D'acord?

HIPÒCRATES Ara començo a entendre el que vols dir. Però prefereixo que en treguis les conclusions tu mateix.

SÒCRATES La conclusió és aquesta: tenim un coneixement molt més segur de les persones que només existeixen a la nostra imaginació, com per exemple els personatges d'una tragèdia, que de les persones vivents. Quan diem que Clitemnestra era culpable, això significa, simplement, que així és tal com Èsquil la va imaginar, i tal com la va presentar a la seva obra. La situació és exactament la mateixa a les matemàtiques; podem estar segurs que les dues diagonals del rectangle són iguals perquè això es segueix de la definició de rectangle que donen els matemàtics.

HIPÒCRATES Vols dir, Sòcrates, que el nostre resultat paradoxal és en realitat cert, i que podem tenir un coneixement molt més fiable de les coses que no existeixen—com per exemple els objectes de la matemàtica—que dels objectes reals, de la natura? Em penso que ara també veig el perquè d'això. Les nocions creades per nosaltres mateixos, per la seva pròpia naturalesa, ens són completament conegudes, i en podem saber tota la veritat perquè són exactament tal com les imaginem, ja que no tenen cap mena de realitat fora de la nostra imaginació. En canvi, els objectes existents al món real no són idèntics a la imatge que en tenim, que sempre és aproximada i incompleta, i en conseqüència el nostre coneixement d'aquestes coses reals mai no podrà ser cert ni complet.

SÒCRATES Aquesta és la veritat, jove amic, i tu l'has formulada millor que ho hauria pogut fer jo.

HIPÒCRATES El mèrit és teu, Sòcrates, perquè tu m'has portat a entendre tot això. Ara no solament veig que Teetet tenia raó quan deia que si jo volia assolir coneixements indefectibles havia d'estudiar matemàtiques, sinó que també veig el perquè d'això. Ara que m'has guiat amb paciència fins aquí, sisplau, no m'abandonis, que encara no tinc la resposta a una de les meves preguntes, de fet la més important.

SÒCRATES Quina és, aquesta pregunta?

HIPÒCRATES Recorda, Sòcrates, que jo he vingut a demanar-te el teu parer sobre si havia d'estudiar matemàtiques o no. M'has ajudat a adonar-me que la matemàtica, i només la matemàtica, em pot oferir aquests coneixements segurs que jo cerco. Ara bé, quina utilitat tenen, aquests coneixements? És clar que si obtenim alguns coneixements sobre el món existent, malgrat que no siguin totalment certs i que siguin incomplets, tindran amb tot un cert valor per a l'individu i per a la comunitat. Fins i tot els coneixements sobre coses tan llunyanes com els estels poden ser útils, per exemple per a la navegació nocturna. Però, quina utilitat poden tenir uns coneixements sobre coses inexistents, com són els que ofereix la matemàtica? Per més complet i fora de tot dubte que sigui, quina pot ser la utilitat del coneixement de coses que en la realitat no existeixen?

SÒCRATES Estimat amic, estic segur que la resposta ja la saps; amb això només vols examinar-me.

HIPÒCRATES La resposta no la sé, per Hèrcules. Ajuda'm, per favor.

SÒCRATES Bé, intentarem trobar-la. Hem establert que les nocions de la matemàtica són creades pel matemàtic mateix. Digue'm: vol dir això que el matemàtic tria les seves nocions amb una arbitrarietat total, al seu gust?

HIPÒCRATES Com t'he dit, encara no en sé gaire, de matemàtiques. Però em sembla que el matemàtic és tan lliure d'escollir els objectes mentals que estudia com ho és el poeta per a escollir els personatges de la seva obra; talment com el poeta configura els seus personatges amb els trets que li ve de gust, el matemàtic pot equipar les seves nocions amb les propietats que vulgui.

SÒCRATES Si això fos veritat, hi hauria tantes veritats matemàtiques com matemàtics. Com t'expliques, doncs, que tots els matemàtics estudiïn les mateixes nocions i els mateixos problemes? Com expliques que matemàtics que viuen en indrets allunyats i no mantenen cap mena de contacte descobreixin les mateixes veritats, de forma independent, cosa que passa sovint? Mai no he sentit a dir que dos poetes hagin escrit el mateix poema.

HIPÒCRATES Ni jo tampoc. Però recordo que Teetet em va explicar que havia descobert un teorema molt interessant sobre distàncies incommensurables, i que quan el va ensenyar al seu mestre Teodor, aquest li va mostrar una carta d'Arquites¹¹ que contenia el mateix teorema, gairebé literalment.

SÒCRATES En poesia això seria impossible. Ja veus que tenim un problema. Però tirem endavant: com t'expliques que matemàtics de nacions diferents acostumin a coincidir sobre la veritat dels teoremes, mentre que sobre coses referents a l'Estat, per exemple, no ja els perses sinó els mateixos espartans tinguin punts de vista completament oposats als de nosaltres, els d'Atenes, i que sovint ni els atenesos no estem d'acord entre nosaltres.

11 Arquites de Tàrent (428-350 aC, aprox.): matemàtic, filòsof i polític grec, líder de la comunitat pitagòrica del seu temps, va influir en Plató. Entre altres coses, hom li atribueix la idea de considerar les corbes com engendrades pel moviment d'un punt.

HIPÒCRATES Puc respondre a aquesta darrera pregunta. Sobre qüestions d'Estat tothom hi té un interès personal, i aquests interessos sovint són contradictoris; per això és difícil arribar a un acord. En canvi el matemàtic es mou purament pel seu desig de trobar la veritat.

SÒCRATES Vols dir que els matemàtics busquen una veritat que és completament independent de les seves pròpies persones?

HIPÒCRATES Sí, això vull dir.

SÒCRATES Bé, aleshores devíem anar errats quan pensàvem que els matemàtics escollien el seu objecte d'estudi a voluntat. Sembla que aquest objecte hagi de tenir alguna mena d'existència que sigui independent de les pròpies persones. Hem de resoldre aquest nou enigma.

HIPÒCRATES No veig per on començar.

SÒCRATES Si encara et resta paciència, podríem intentar-ho plegats. Digue'm, quina diferència hi ha entre el mariner que troba una illa deserta i el pintor que troba un color nou, un que mai cap altre pintor no havia usat abans?

HIPÒCRATES Crec que del mariner en diria un descobridor, i en canvi del pintor un inventor. El mariner descobreix una illa que ja existia abans però era desconeguda, mentre que el pintor inventa un color nou que anteriorment no existia en absolut.

SÒCRATES Ningú no hauria donat una resposta millor. Però digues, el matemàtic que troba una veritat nova, la descobreix o la inventa? És un descobridor, com el mariner, o un inventor, com el pintor?

HIPÒCRATES A mi em sembla que el matemàtic és més aviat un descobridor: és un valent mariner que solca el mar desconegut del pensament i explora les seves costes, illes i remolins.

SÒCRATES Molt ben dit, estic completament d'acord amb tu. Només afegiria que, en menor grau, el matemàtic és també un inventor, especialment quan inventa conceptes nous. Però tots els descobridors han de ser també, en cert grau, inventors. Per exemple, si un mariner vol arribar a llocs que els mariners anteriors a ell no han pogut assolir, ha de construir un vaixell millor que els que hagin fet servir els altres mariners. Els nous conceptes inventats pels matemàtics són com nous vaixells que duen el descobridor més enllà en el gran mar del pensament.

HIPÒCRATES Estimat Sòcrates, m'has ajudat a trobar la resposta d'una pregunta que em semblava molt difícil. El propòsit principal del matemàtic és explorar els enigmes i secrets del mar del pensament humà. Aquest existeix independentment del matemàtic individual, però no de la humanitat en el seu conjunt. El matemàtic té una relativa independència per a inventar nous conceptes, com a eines, i sembla que ho pugui fer a la seva discreció; però no és del tot lliure per a fer-ho, perquè els nous conceptes han de ser útils per al seu treball. El mariner pot construir-se un vaixell de la manera que vulgui, però evidentment no serà tan boig que es faci un vaixell que pugui ser destrossat per la primera tempesta. Em penso que ara tot ha quedat aclarit.

SÒCRATES Si ja ho veus tot clar, aleshores torna a intentar de respondre a la pregunta: quin és l'objecte de les matemàtiques?

HIPÒCRATES Havíem arribat a la conclusió que a part del món en què vivim hi ha un altre món, el món del pensament humà, i que el matemàtic és com un mariner coratjós que explora aquest món sense retrocedir davant els problemes, perills i aventures que l'hi esperen.

SÒCRATES Amic meu, la teva juvenil energia ha estat a punt d'arrossegar-me; però em temo que la vehemència del teu entusiasme et fa passar per alt algunes coses.

HIPÒCRATES Quines coses?

SÒCRATES No et voldria desil·lusionar, però em sembla que encara no hem respost la teva pregunta principal. No hem donat una resposta a la pregunta: quina utilitat té l'exploració del meravellós mar del pensament humà?

HIPÒCRATES Com sempre, tens raó, estimat Sòcrates. Però, aquest cop, no podries deixar estar el teu mètode i dir-me la resposta directament?

SÒCRATES No pas, amic meu, i encara que pogués, no ho faria, i això en benefici teu. Els coneixements que s'adquireixen sense haver-hi de treballar són pràcticament inútils; només coneixem a fons i de debò allò que hem trobat nosaltres mateixos, encara que sigui amb un cert ajut extern, com les plantes, que només poden aprofitar l'aigua que absorbeixen de terra amb les seves pròpies arrels.

HIPÒCRATES Està bé, continuem la recerca amb el mateix mètode, però almenys ajuda'm fent-me una pregunta.

SÒCRATES Tirem enrere, i situem-nos quan havíem establert que els matemàtics no s'ocupaven del nombre d'ovelles o d'abelles o d'altres coses existents, sinó dels nombres en si mateixos. De tota manera, no creus que tot el que els matemàtics descobreixin sobre els nombres purs serà vàlid també per als nombres de les coses existents? Per exemple, els matemàtics troben que 17 és un nombre primer. Oi que d'això en resulta que no podem repartir 17 ovelles reals entre diverses persones reals donant a cadascú el mateix nombre d'ovelles, si no és que hi ha 17 persones i els donem una ovella a cadascú?

HIPÒCRATES Això és cert, evidentment.

SÒCRATES Bé, i de la geometria, què? No es pot aplicar a la construcció de cases, la fabricació de ceràmica o el càlcul de la quantitat de gra que es pot carregar en un vaixell?

HIPÒCRATES Es pot, i de fet s'aplica, encara que em sembla que per a les necessitats pràctiques dels artesans no cal gaire matemàtica. Les regles més senzilles, ja conegudes pels escriptors dels faraons d'Egipte, són suficients per a molts d'aquests objectius, i els nous descobriments dels que Teetet em parlava entusiasmat no es fan servir a la pràctica, ni fan cap falta a ningú.

SÒCRATES Potser per ara no, però ho poden ser temps a venir.

HIPÒCRATES A mi m'interessa el present.

SÒCRATES Si vols esdevenir un matemàtic, t'has de convèncer que estaràs treballant principalment per al futur. Però tornem a la qüestió principal. Hem vist que els coneixements sobre un món diferent, el món del pensament humà, sobre coses que no existeixen en el sentit habitual de la paraula, poden ser útils en la vida de cada dia, per a respondre preguntes sobre el món real. No és sorprenent?

HIPÒCRATES Jo encara diria més, és gairebé incomprendible, un miracle.

SÒCRATES Potser no sigui tan misteriós com això, al capdavall; i si obrim la petxina d'aquesta qüestió hi trobarem una autèntica perla.

HIPÒCRATES Per favor, estimat Sòcrates, no parlis amb enigmes, com la Pitonissa.

SÒCRATES Doncs digue'm: si algú que ha viatjat molt lluny, havent vist i experimentat moltes coses, torna a la seva ciutat i amb la seva experiència dóna savis consells als seus conciutadans, ho trobaràs sorprenent, això?

HIPÒCRATES De cap manera.

SÒCRATES Encara que els països que hagi visitat siguin molt llunyans i hi visqui gent molt diferent, que parlin una altra llengua i adorin altres déus?

HIPÒCRATES Encara, perquè gent diferent tenen moltes coses en comú.

SÒCRATES Ara digues: si resultés que el món de la matemàtica és, malgrat les seves peculiaritats, similar en cert sentit al nostre món real, seguiries trobant miraculós que la matemàtica es pogués aplicar a l'estudi del món real?

HIPÒCRATES En aquest cas, no. Però no veig cap semblança entre el món real i el món imaginari de la matemàtica.

SÒCRATES Veus aquella roca a l'altra banda del riu, allí on s'eixampla i forma un gorg?

HIPÒCRATES La veig.

SÒCRATES I veus la imatge de la roca reflectida a l'aigua?

HIPÒCRATES Evidentment que la veig.

SÒCRATES Doncs digue'm: quina diferència hi ha entre la roca i la seva imatge?

HIPÒCRATES La roca és un tros compacte d'un material dur. El sol l'escalfa. Si la toquem, notarem que és aspra. La imatge reflectida no es pot tocar; si li volem posar la mà a sobre, només tocarem l'aigua. De fet la imatge reflectida no existeix realment, és una il·lusió, res més.

SÒCRATES I hi ha alguna cosa en comú, entre la roca i la seva imatge?

HIPÒCRATES Bé, en cert sentit, la imatge reflectida és una reproducció fidel de la roca. A la imatge hi podem veure clarament el seu contorn, fins les més petites protuberàncies. Però, tot això, a què treu cap? Vols dir que el món de la matemàtica és una imatge del món real, reflectida pel mirall del nostre pensament?

SÒCRATES Tu ho has dit, i força bé, per cert.

HIPÒCRATES Però, com és possible, això?

SÒCRATES Recordem com dèiem que s'han desenvolupat els conceptes abstractes de la matemàtica. Havíem dit que els matemàtics s'ocupen dels nombres purs, i no dels nombres dels objectes reals. Ara bé, penses tu que algú que no hagués comptat mai objectes reals podria entendre la noció abstracta de nombre? Quan un nen aprèn a comptar, primer compta palets i pedretes; només quan sàpiga que dues pedretes i tres pedretes fan cinc pedretes, i que passa el mateix amb palets o amb monedes, podrà entendre que dos i tres fan cinc. Amb la geometria, la situació és essencialment la mateixa. El nen arriba a la noció d'esfera a través d'experiències amb objectes rodons, com les pilotes. La humanitat ha desenvolupat totes les nocions de la matemàtica d'una forma similar. Aquestes nocions han cristallitzat a partir del coneixement del món real, així que és ben natural, i no ens ha de sorprendre gens, que duguin trets dels seus orígens, talment infants que s'assemblen a llurs progenitors. I de la mateixa manera que quan els infants es fan grans esdevenen un suport per als seus pares, qualsevol branca de la matemàtica, si arriba a desenvolupar-se prou, esdevindrà una eina útil per a l'exploració del món real.

HIPÒCRATES Ara sí que veig clarament de quina manera podem utilitzar en la vida diària els coneixements de coses inexistents del món de la matemàtica. M'has fet un gran favor ajudant-me a entendre això.

SÒCRATES Doncs jo t'envejo, estimat Hipòcrates, perquè a mi encara em meravella una cosa, i m'agradaria desencaparrar el meu cervell, però potser tu em podràs ajudar.

HIPÒCRATES Ho faria de bon grat, però em fa por que t'estiguis burlant de mi un cop més. No m'avergonyeixis demanant-me ajut, digue'm clarament quin és el problema que m'ha passat per alt.

SÒCRATES Tu mateix te n'adonaràs si intentes resumir els resultats de la nostra discussió.

HIPÒCRATES Bé, havíem aclarit per què la matemàtica pot produir coneixements segurs sobre un món diferent d'aquell en què vivim, sobre el món dels pensaments humans, i aleshores restava la pregunta: quina utilitat té, aquest coneixement? Hem trobat que el món de la matemàtica no és més que una imatge del món real, reflectida al nostre enteniment, i això ens aclareix que els descobriments sobre el món de la matemàtica ens donen informació sobre el món real. Aquesta resposta m'ha deixat satisfet del tot.

SÒCRATES Si et dic que la resposta no acaba de ser completa, no t'ho dic pas per confondre't, sinó perquè estic segur que tard o d'hora tu mateix hauries suscitat la qüestió, i aleshores m'hauries retret que no t'hi hagués fet caure. M'hauries preguntat: «Digue'm, Sòcrates, quin sentit té estudiar una imatge si podem estudiar l'objecte mateix?».

HIPÒCRATES Bé, tens tota la raó, és una pregunta natural. Ets un mag, Sòcrates. Pots confondre totalment algú amb poques paraules, i amb una innocent pregunta pots ensorrar tot l'edifici que hem bastit amb tanta cura. Naturalment jo hauria de respondre que si podem veure l'original no té cap sentit contemplar la imatge reflectida. Però estic segur que això simplement vol dir que la nostra analogia falla en aquest punt. Segur que hi ha una resposta, però no sé pas com trobar-la.

SÒCRATES La teva suposició és correcta: la paradoxa ha aparegut en voler seguir massa estrictament l'analogia de la imatge reflectida. Una analogia és com un arc; si l'estires massa et fallarà. Deixem-la estar i prenem-ne una altra. Tu ja deus saber que els mariners i la gent que viatja fan un bon ús dels mapes.

HIPÒCRATES Jo mateix n'he fet servir. Vols dir que la matemàtica ens forneix un mapa del món real?

SÒCRATES Tu ho has dit. Ara, podries respondre a la pregunta següent: quins avantatges té el fet de mirar un mapa en comptes de mirar el paisatge?

HIPÒCRATES És ben clar: mirant el mapa abastem distàncies llargues, que triaríem setmanes o mesos a recórrer. El mapa no ens mostra tots els detalls, sinó només els més importants, i justament per això ens pot servir per a preparar un llarg viatge.

SÒCRATES Molt bé. Però se m'acut una altra cosa.

HIPÒCRATES Quina?

SÒCRATES Hi ha una altra raó que fa útil l'estudi de la imatge matemàtica del món. Quan el matemàtic descobreix una propietat del cercle, això ens dona immediatament una informació sobre qualsevol objecte de forma circular. D'aquesta manera el mètode de la matemàtica ens permet ocupar-nos alhora de coses diferents.

HIPÒCRATES I què et semblen aquestes analogies? El que contempla una ciutat des del cim d'una muntanya propera se'n fa una idea de conjunt millor que caminant pels seus carrers; el general que observa des d'un turó els moviments de l'exèrcit enemic té una visió més clara de la situació que el soldat que, des de la seva trinxera, només veu el que té al davant.

SÒCRATES Perfecte, en això d'inventar símls em superes; però jo no em vull quedar enrere, així que deixa'm afegir una anècdota: fa poc jo estava mirant una pintura d'Aristòfon, el fill d'Aglaòfon, i el pintor em va advertir: «Sòcrates, si t'acostes tant al quadre només veuràs taques de color, no la pintura sencera.»

HIPÒCRATES Òbviament, tens raó; i tu també en tenies en no deixar-me tancar la discussió sense arribar al fons de la qüestió. De tota manera, em sembla que ja és hora de tornar a la ciutat, que ja es va fent fosc i tinc set i gana. Si tinguessis una mica més de paciència, et voldria preguntar una cosa mentre anem caminant cap a la ciutat.

SÒCRATES Molt bé, marxem, i tu fes la teva pregunta.

HIPÒCRATES La nostra conversa m'ha convençut totalment que m'he de posar a estudiar matemàtiques, i per aquest motiu t'estic molt agraït. Doncs bé, digue'm: per què no fas matemàtiques, tu? Tenint en compte la profunda comprensió que tens de la seva veritable naturalesa i de la seva importància, m'hi jugo que si tu t'hi dediquessis podries superar tots els altres matemàtics de Grècia. Estaria molt content de ser deixeble teu, si m'acceptessis.

SÒCRATES No, estimat Hipòcrates, aquesta no és la meva feina. Teodor sap molta més matemàtica que jo, no trobaràs un mestre millor. Sobre la pregunta de per què no sóc matemàtic, te'n diré els motius. Mai no he dissimulat l'alta opinió que la matemàtica em mereix. Penso que nosaltres, els grecs, no hem fet progressos tan importants en cap altre art com en matemàtiques, i això només és el començament; si no ens exterminem a nosaltres mateixos en guerres estúpides, obtindrem resultats meravellosos com a descobridors i com a inventors. M'has preguntat per què no m'afegeixo als rengles dels que desenvolupen aquesta ciència meravellosa. De fet, jo sóc també com un matemàtic, però d'una altra mena. Fa molts anys una veu interior, diguem-ne un oracle, que sempre escolto atentament, em va preguntar: «Quina és la clau dels grans avenços que els matemàtics han fet en la seva noble ciència?». I jo vaig respondre: «Penso que la clau dels èxits de la matemàtica rau en el seu mètode: l'elevada perfecció de la seva lògica, la seva lluita sense concessions envers la completa veritat, el seu hàbit de començar sempre a partir d'uns principis i de definir amb precisió totes les nocions que fan servir, evitant les contradiccions.» La meua veu interior em respongué: «Molt bé, però tu penses, Sòcrates, que aquest mètode de pensar i raonar només es pot fer servir per a estudiar els nombres i les formes geomètriques? Per què no intentes convèncer els teus conciutadans que apliquin el mateix rigor en tots els afers, per exemple en filosofia i en política, en la discussió dels problemes de cada dia, ja siguin públics o bé privats?». Això és el que he estat intentant des d'aleshores. *He fet veure* —recorda la nostra conversa amb Protàgores, per exemple— *que molts que hom considera savis en general acostumen a ser uns pobres ignorants, i que cap dels seus arguments no té un fonament sòlid, ja que fan servir* —al contrari que els matemàtics— *una colla de nocions no definides i que només entenen a mitges.* Amb aquesta actitud he aconseguit convertir-me en enemic de gairebé tothom. Això no té res d'estrany, perquè jo sóc com un retret vivent per a tots els que tenen mandra de pensar i s'accontenten simplement usant idees obscures. A la gent no li agrada que li recordin constantment els defectes que no poden o no volen corregir. Arribarà un dia que tota aquesta gent se'm tiraran a sobre i m'esborraran del mapa. Però mentre això no passi jo continuaré seguint la meua crida. De tota manera, tu, ves-te'n amb Teodor!

Nota biogràfica

Alfréd Rényi (Budapest, 1921-1970) va ser un dels grans matemàtics hongaresos del segle XX. Després d'una formació escolar igualment inclinada a les matemàtiques i a les lletres clàssiques (per influència de la seva mare) va estudiar matemàtiques amb Féjer a Budapest i es va doctorar a Szeged el 1945 amb Riesz. Va estudiar teoria de nombres i teoria de la probabilitat a Leningrad, amb Linnik i Vinogradov. De retorn a Hongria, el 1950 va ser nomenat primer director del nou Institut de Matemàtica Aplicada de l'Acadèmia Hongaresa de Ciències, i aconseguí en pocs anys fer-ne un centre de recerca de prestigi internacional (posteriorment aquest Institut s'anomenaria Institut de Recerca Matemàtica, i recentment ha estat rebatejat com a Institut de Matemàtica Alfréd Rényi). El 1952 guanyà la Càtedra de Teoria de la Probabilitat i Estadística de la Universitat Eötvös Loránd de Budapest, càtedra que va transformar en un departament sencer. Va dirigir les dues institucions fins a la seva mort prematura. Element molt actiu de la comunitat matemàtica hongaresa i internacional, membre de l'Acadèmia Hongaresa de Ciències i del consell editorial de moltes revistes, va publicar uns tres-cents articles i llibres, alguns traduïts a diverses llengües (*Cálculo de Probabilidades*, Barcelona, Editorial Reverté, 1976), va visitar universitats alemanyes, angleses i americanes, va guanyar premis, etc.

Ell mateix va classificar els seus interessos matemàtics en els camps següents, per aquest ordre: teoria de la probabilitat, estadística, teoria de la informació, combinatòria, teoria de grafs, teoria de nombres, i anàlisi. Desenvolupà profunds mètodes probabilístics per a la teoria de nombres, en la qual provà la següent aproximació a la conjectura de Goldbach: tot nombre parell és la suma d'un nombre primer i un nombre gairebé primer (un que té només dos factors primers). També aplicà tècniques probabilístiques a problemes de mecànica quàntica, química industrial, biologia, regulació de trànsit i control de preus. Junt amb un fort interès per les aplicacions de la matemàtica, s'interessà també per la matemàtica recreativa, la filosofia de la matemàtica, la matemàtica antiga, i per l'ensenyament de la matemàtica a l'escola. Fou un matemàtic creatiu, de gran altura i amples interessos, d'inesgotable energia organitzativa, i amb un fort encant personal.

La seva visió de la relació entre la matemàtica i les seves aplicacions originaren un debat important al seu país, que va durar anys i el dugué a escriure, entre altres articles, tres assaigs adreçats al gran públic on exposava les seves idees en forma de diàlegs ficticis, protagonitzats per Sòcrates, Arquímedes i Galileu respectivament. Aquestes tres petites peces mestres de la literatura matemàtica van ser recollides en el llibre *Diàlegs sobre les matemàtiques*, publicat en hongarès el 1965 i traduït a sis idiomes.

En aquest número us oferim la traducció¹² del primer d'aquests diàlegs, «Un diàleg socràtic sobre les matemàtiques», publicat per primer cop, en hongarès, el 1962. Rényi hi exposa les seves idees sobre la naturalesa de les matemàtiques en general, i com qui no vol la cosa hi deixa anar idees sobre l'ensenyament i l'aplicació de les matemàtiques, i fins i tot alguns missatges polítics. Rényi fa palès el seu coneixement del món grec, el seu domini del mètode socràtic i la seva habilitat literària. És una mostra particularment brillant de l'eficàcia del diàleg com a mètode expositiu, que cal situar junt amb d'altres exemples famosos, com els clàssics de Plató i Galileu o els més moderns de Lewis Carroll, Lakatos, Heyting, Hofstadter i Knuth (aquest autor explica que va triar el gènere dialogat per influència dels diàlegs de Rényi). Us desitgem que en gaudiu.

Referències

- [1] CARROLL, L. «Lo que la tortuga le dijo a Aquiles». A: *El juego de la lógica*. Madrid: Alianza Editorial, 2002, 151-158.
- [2] CARROLL, L. *Matemática demente*. Barcelona: Tusquets, 1999.
- [3] LAKATOS, I. *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial, 1978.
- [4] HEYTING, A. «Una disputación». A: *Introducción al Intuicionismo*. Madrid: Tecnos, 1976, 13-22.
- [5] HOFSTADTER, D. *Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle*. Barcelona: Tusquets, 1987.
- [6] KNUTH, D. *Números Surreales*. Barcelona: Reverté, 1979.
- [7] RÉNYI, A. «A socratic dialogue on mathematics». *Canadian Mathematical Bulletin*, 7 (1964), 441-462.
- [8] RÉNYI, A. *Dialógusok a matematikáról*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1965.
- [9] RÉNYI, A. *Dialogues on mathematics*. San Francisco: Holden-Day, 1967.

DEPARTAMENT DE LÒGICA, HISTÒRIA I FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA

¹² A partir de la primera versió anglesa, de 1964, confrontada amb la de 1967. Agraïm als editors del *Canadian Mathematical Bulletin* el permís que ens han donat per a publicar la present traducció.