Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 15, núm. 1, 2000. Pàg. 81–87

Que n'és, de difícil, la probabilitat!

Reflexions al voltant de la docència i la descoberta d'un llibre insospitat

Frederic Udina

Al voltant de la dificultat de la comprensió intuïtiva dels problemes on intervé la probabilitat, es comenta el llibre *Los túneles de la mente* sobre el que s'anomena els *biaixos mentals* en la moderna teoria de la psicologia de la cognició, i s'analitzen uns quants exemples de com la intuïció ens enganya quan intentem resoldre problemes senzills.

La reacció d'un matemàtic davant aquest títol seria clarament escèptica: la teoria de la probabilitat no és pas més o menys difícil *per se* que qualsevol altra branca de les matemàtiques, possiblement la resolució d'equacions en derivades parcials és més difícil. Pel matemàtic, un cop establert el conjunt d'axiomes que defineixen els espais de probabilitat i els conceptes associats, la teoria de la probabilitat és un desenvolupament teòric basat en idees intuïtives que no s'allunyen molt de les del càlcul infinitesimal (dit sigui des del reconeixement de la meva profunda ignorància d'algunes profunditats del tema). Però deixeu-me fer una observació sobre aquesta qüestió: l'objecte matemàtic, central en la teoria en qüestió, que anomenem *variable aleatòria*, resulta que no és pas una variable (és una funció) i no és pas aleatòria (s'entén que està perfectament determinada). Això, que podria ser simplement un acudit,[1] crec que és un indicador clar de la gran distància que hi ha entre la teoria formal de la probabilitat i la comprensió intuïtiva dels seus conceptes bàsics. El mateix Persi Diaconis, un dels millors probabilistes del moment, diu que «[...] sé que la meva primera reacció ha estat errònia una i altra vegada en problemes similars. Els nostres cervells simplement no estan ben cablejats per respondre bé a problemes de probabilitat». Aquesta cita va aparèixer al New York Times en un article en portada,[2] en portada!, sobre el *Monty Hall problem* o problema de les tres portes, que comentarem més endavant.

1 Que dec al professor Lluís Bibiloni.
2 21 de juliol de 1991.

És precisament en el context de la probabilitat on apareixen amb força el que la moderna teoria de la cognició anomena *biaixos mentals*. Es tracta de mecanismes pels quals en certes situacions la ment humana es comporta tan malament com davant les típiques il·lusions òptiques. Davant de la coneguda il·lusió òptica en què veiem dues línies paral·leles, dibuixades sobre un fons de segments que les creuen obliquament en diferents direccions, per més que sapiguem que són paral·leles, seguim veient les línies com si fossin convergents. Els biaixos mentals són el tema central del llibre *L'illusione di sapere. Che cosa si nasconde dietro i nostri errori* publicat en castellà sota el títol de *Los túneles de la mente.*[3] En la introducció, l'autor ens presenta una il·lusió òptica poc coneguda que podeu observar a la figura 1. La figura reprodueix aproximadament una porta, situada per sobre d'un centre comercial de la ciutat de Saint Louis, a l'estat de Missouri (EUA). La gran porta, realitzada en metall brillant, és exactament igual d'amplada que d'alçada. Podeu comprovar-ho sobre la representació de la figura. Però per més que ho comproveu, per més que sapigueu que és cert, seguireu veient la porta molt més alta que no pas ampla. D'això en diem una il·lusió òptica (i aquesta és la més monumental que conec). Un biaix mental és la versió cognitiva d'aquest efecte.

FIGURA 1: La figura, és més alta que ampla?

Els biaixos mentals

Un primer i simple exemple de biaix mental és aquell pel qual la majoria de la gent, quan es troba davant de dos números de loteria, acabats respectivament en 0 i en 5, tria ràpidament el que acaba en 5, si li diuen que en els darrers quinze anys la grossa ha acabat en 0 moltes més vegades que en 5. Tot i que es tracti d'una persona culta, que pot entendre perfectament que les boletes dels bombos de la loteria de Nadal no tenen memòria ni guarden registre dels resultats anteriors, li costarà resistir la temptació de pensar: *clar que tindran la mateixa probabilitat, però posats a triar, i com que el cost és el mateix, triem el que acaba en cinc, que a la llarga s'han*

3 MASSIMO PIATELLI PALMARINI, Crítica, Barcelona, 1995.

d'equilibrar. La loteria de Nadal del nostre país ens ofereix multitud d'exemples interessants de biaixos mentals. No estic parlant de gent supersticiosa, que això és un altre tema. Però tots coneixem gent que sembla estar convençuda que és bo tenir bitllets de loteria comprats a Bilbao, València, Sevilla i Salamanca. Si els ho raones, convindran amb tu que tan se val tenir-ne quatre, o tenir quatre números consecutius, comprats tots a una administració anònima d'un barri de Sabadell, però si han de triar entre quatre dècims d'orígens diversos i quatre consecutius, pel mateix preu, segur que es queden els primers, que si toca la grossa a Bilbao...

Totes aquestes reflexions m'han vingut al cap amb força arran d'un curs introductori a la Probabilitat per a estudiants de la llicenciatura de Ciències Polítiques (molts dels quals, tingueu-ho present, han seguit un batxillerat *de lletres*, i senten esgarrifances en sentir parlar de, posem per cas, proporcions geomètriques en un gràfic d'una funció). En aquesta situació, hom se sent obligat a buscar raons per convèncer-los que és important analitzar racionalment els problemes i les decisions que cal prendre en situacions d'incertesa. Però sobtadament, en buscar bibliografia seriosa sobre aquest tema, hom es troba que els estudis més interessants dels darrers anys mostren que la majoria dels mortals no es comporta de manera racional en aquestes situacions!

El llibre que comentem està escrit en un to amè i divulgatiu, potser en algun moment amb un cert excés d'entusiasme, però té el gran avantatge que està molt ben documentat: fa un bon recull històric dels resultats produïts en la recerca científica de la psicologia cognitiva, i recull, al final, una bibliografia que sembla molt completa i que està, en qualsevol cas, ben comentada.

Els psicòlegs Amos Tversky (1937–1996)[4] i Daniel Kahneman (University of Berkeley) van donar cos científic a l'estudi de l'inconscient cognitiu, que conté aquests biaixos mentals.[5] Darrera seu, un estol de treballs han aprofundit el camp i han estès les aplicacions a camps tan diversos com la medicina, l'estadística, l'economia i negocis o el dret, o en qualsevol camp on es prenen decisions avaluant costos i beneficis en presència d'incertesa. Hi ha cursos complets de teoria de la decisió basats en mostrar com és important conèixer els biaixos mentals que tothom, des de les persones incultes fins als experts, aplica indegudament en aquests contextos. Aquests efectes interessen a la pràctica de la medicina, on els experts solen valorar de manera molt diferent un «93 % de supervivència» o un «7 % de mortalitat», quan consideren un nou tractament quirúrgic. També interessen als professionals del dret, per exemple, quan en processos legals apareixen decisions en situacions d'incertesa, basades en percepcions errònies de les probabilitats, o quan s'avalua una decisió de pactar o anar als tribunals. Interessen als enginyers, que han d'avaluar la conveniència d'aplicar mesures de seguretat enfront de riscos subjectius dels usuaris. I interessen sobretot a la ciència econòmica, que basa la majoria de les seves anàlisis en la racionalitat dels agents implicats. Tversky i Kahneman van fer trontollar aquestes assumpcions. Van demostrar que riscos molt petits tenen de vegades una importància desproporcionadament gran, que pèrdues o guanys previstos no es tracten de manera simètrica, que la presència o absència d'alternatives que mai

4 Al *Web* de l'Stanford University, hi ha un document memorial a la mort d'Amos Tversky, escrit per Kenneth Arrow, Gordon Bower, Brad Efron, Eleanor Maccoby i Lee Ross, que és bo de llegir. N'extrec algunes idees per als comentaris següents.

5 El text de referència, un recull d'articles, és Kahneman, D.; Slovic, P.; Tversky, A. (Ed.), *Judgement under uncertainity: Heuristic and Biases.* Cambridge U. Press, Cambridge, 1982.

es trien poden invertir l'ordre de les preferències i que la manera com les opcions s'emmarquen, semànticament o matemàtica, pot exercir una influència insospitada en les decisions.

En *Los túneles...* trobem, després d'una bona introducció a la matèria, uns quants capítols dedicats a exemples de problemes o situacions on apareixen biaixos mentals documentats amb estudis seriosos. Cada cas apareix curosament discutit, en alguns casos es contrasta amb altres explicacions que s'han pogut adduir per explicar el fenomen. No es pot dir que les discussions matemàtiques dels problemes siguin molt interessants: el llibre està adreçat a una àmplia audiència i no crec equivocar-me si afirmo que no apareix una sola fórmula matemàtica en totes les pàgines. Però en qualsevol cas, tots els problemes estan basats en càlculs senzills, que normalment deixem que els efectuï els nostre subconscient cognitiu, i els que no són purament matemàtics tenen un fort component lògic. En el setè capítol, l'autor explica una classificació sistemàtica dels biaixos que han aparegut en els capítols anteriors, i d'alguns altres exemples, que introdueix per clarificar la classificació. Naturalment, no és aquesta la mena de classificacions que agrada a un matemàtic, però nogensmenys ens dóna una idea de la visió que de la qüestió en tenen els psicòlegs.

Un parell de casos

No pretenc comentar aquí tots els exemples que el professor Piatelli Palmarini exposa en el seu llibre, ni entrar a fons en la discussió sobre l'origen i l'essència dels biaixos mentals; però sí que m'interessa destacar que molts d'ells s'exemplifiquen molt bé en el terreny de la probabilitat i, específicament, quan es tracta de comprendre probabilitats condicionades. A la pàgina 83, per exemple, l'autor ens convida a estimar dues probabilitats: B_1, la probabilitat que una filla tingui els ulls blaus sabent que la seva mare els té; B_2, la probabilitat que la mare tingui els ulls blaus sabent que la filla els té. Quina diríeu que és més gran?

L'exemple que tanca el llibre és el conegut com el problema de *Monty Hall*, arran d'un programa de televisió als Estats Units, similar al que aquí coneixem com a *Un, dos, tres responda otra vez*, on els concursants han d'encertar darrera quina de les tres portes s'amaga el cotxe. Arran d'aquest problema, es va produir tot un fenomen mediàtic als Estats Units, que va desembocar en l'esmentada portada del New York Times. El problema és similar al *Dilema dels presoners* que Martin Gardner va publicar al 1959. Es tracta de tres presoners, incomunicats a l'espera de l'execució. Saben que al dia següent un d'ells serà indultat i els altres dos, executats. Un d'ells, diguem-ne Daniel, li diu al seu guardià, que sap qui serà indultat però té prohibit xerrar: *Sé segur que com a mínim un dels meus dos companys, en Jakob o en Johann, serà executat. No em dirà pas res prohibit si em revela el nom d'un d'ells dos que demà morirà.* El guardià li respon que en Jakob morirà. En Daniel, que no fa pas honor al seu nom de pila, dedueix: abans de saber això, tenia 1/3 de probabilitat de ser indultat, ara en tinc 1/2 ja que només quedem en Johann i jo per a l'indult! I se'n va a dormir una mica més tranquil. És cert, això? Pot alterar la probabilitat d'en Daniel el fet de saber que en Jakob morirà? La resposta és que no, però sí que queda alterada la probabilitat de ser indultat d'en Johann, que passa de 1/3 a 2/3, en acumular la que estava repartida amb en Jakob. És realment un típic biaix mental, aquest. Ens mostra com és difícil de captar intuïtivament la probabilitat condicional, és a dir, com la informació modifica les probabilitats *a priori*.

Però aquests són problemes coneguts i que podeu trobar en els llibres. El que volia comentar amb una mica més de detall és una mena de situacions, que no he trobat entre els biaixos descrits en el llibre del professor Piatelli Palmarini, però, amb les quals m'he topat sovint en plantejar i resoldre problemes als meus alumnes. Deixeu-me que us n'expliqui *una de l'Oest*.

Tot jugant al pòker

Imagina't que estàs jugant al pòquer contra un tafur que t'està plomant. És la darrera jugada, us descarteu i, després de rebre les noves cartes, tens a la mà un pòquer de reis amb una Q. Només un pòquer d'asos et pot superar. Apostes i ell t'apuja l'aposta: tindrà un pòker d'asos?[6] La probabilitat és molt petita, diguem-ne P_0. Mentre dubtes, la cambrera del *Saloon*, que es diu Sally, i que tu molt hàbilment te l'has fet amiga, aprofitant un descuit del teu contrincant, et diu: «Ep! vigila que m'han dit que com a mínim té tres asos!» Tu la creus, clar. La probabilitat que tingui un pòquer d'asos ara que saps que té tres asos ha canviat, diguem-ne P_1, és molt més gran que P_0! Dubtes una estona, però encara goses pujar l'envit, la probabilitat segueix essent petita. Ell et segueix i encara apuja l'aposta. La Sally, que ara s'estava retocant el maquillatge amb un mirall de mà i aprofitava per espiar les cartes del teu contrincant, se't torna a apropar i en passar et xiuxiueja: «He vist tres de les seves cartes i eren asos!» I tu penses: però si ja m'ho havia dit! O no? És o no és el mateix «sé que té tres asos» que «he vist tres asos a les seves cartes?» Has de pensar ràpid, nerviós; però, per sort, ets matemàtic i en saps, de probabilitats. El teu raonament és, en qualsevol dels casos, el què compta és quines siguin les altres dues cartes, que tenen $49 \times 48/2$ possibilitats, de les quals 48 corresponen a un pòker d'asos. Això és $2/49$ que és aproximadament un 4 %. El final de la història no el recordo, que la imaginació del lector hi posi la resta. Jo, em vaig quedar preocupat pel problema: havia raonat bé, el jugador?

Fora dels nervis de la situació, i si coneixem les regles de la probabilitat condicional, raonarem: si sabem que té tres asos, la probabilitat que en tingui quatre s'haurà de calcular com el quocient entre el nombre de mans amb quatre asos sobre el nombre de mans amb almenys tres asos.[7] El càlcul és senzill, però el resultat sorprenent:

$$\begin{aligned} P_1 &= P[\text{«tenir pòquer d'asos sabent que té tres asos»}] = \\ &= \frac{\#(\text{«mans amb pòquer d'asos»})}{\#(\text{«mans amb tres o quatre asos»})} = \frac{48}{\binom{48}{2}\binom{4}{3} + 48} = \frac{1}{147} \approx 0,7\,\% \end{aligned}$$

O sigui que P_1 és molt més petit que l'estimació del jugador en calent! On es va equivocar? Realment va confondre la informació «sé que té tres asos» amb «he vist tres asos a les seves cartes», que no contenen la mateixa quantitat d'informació! Si hem vist la posició dels tres asos a la mà del jugador, per exemple si hem vist, tal

6 La baralla del pòquer té 13 cartes de cada un dels quatres pals, un total de 52 cartes de les quals quatre són asos. Tenir un pòquer d'asos vol dir que de les cinc cartes que formen la *mà*, quatre són asos.

7 Ignorem que l'altre jugador té cartes a la mà i que hi ha cartes descartades sobre la taula per simplificar el càlcul. En aquest cas, la probabilitat de tenir un pòker d'asos inicialment és $P_0 \approx 1/5000 \approx 0,02\,\%$.

com obren les cartes els tafurs, que «les tres primeres cartes són asos», aleshores el càlcul del jugador és correcte. Si hem vist els tres asos que té el jugador, per exemple els de ♠, ♥ i ♣, també podem fer el mateix raonament. Però si només sabem que té tres asos, el total de possibilitats és més gran.

Em vaig trobar amb aquesta situació tot escrivint un text introductori a la probabilitat. Us confesso que vaig decidir suprimir l'exemple i esquivar el cas: quan estàs introduint algú en una teoria que formalitza situacions reals complexes, no és bo explicar-li els paranys més complicats, vaig pensar. Em vaig tornar a trobar amb aquesta situació en un examen final. L'enunciat deia, resumidament:

> El 60% dels estudiants del bar de la facultat fumen. Jo, que no fumo, em vull asseure en una taula on ja hi ha set estudiants. Quina és la probabilitat que n'hi hagi més de. . . ?
> La darrera pregunta: si quan vaig a seure veig que n'hi ha tres fumant, quina és la probabilitat que fumin tots set?

La meva intenció era que els estudiants apliquessin la probabilitat condicional, clar. Però, si *veig* que tres fumen, puc descartar-los i el càlcul correcte serà veure la probabilitat que quatre de quatre fumin. Ben diferent seria que el problema digués «si quan vaig a seure *em diuen* que n'hi ha tres fumant». El *biaix* és molt potent: què li fa que siguin aquests o altres els que fumin, n'hi ha tres i tots tenen la mateixa probabilitat. . .

Permeteu-me un exemple més que facilita l'explicació: per poder fer entendre aquest biaix als meus alumnes, els ho plantejo en una situació més senzilla. Es llença tres cops una moneda sense que en veiem el resultat. Ens diuen: A = «ha sortit alguna creu», o bé ens diuen B = «la primera tirada ha estat creu». I ens interessa saber la probabilitat que hagin sortit tres creus.

$+++$		
$++-$	$+-+$	$+--$
$-++$	$-+-$	$--+$
$---$		

FIGURA 2: Els vuit resultats de llençar tres monedes.

En la figura s'han representat els vuit resultats possibles, agrupats per facilitar el recompte. En la primera fila, el resultat d'interès. En les dues primeres els resultats que corresponen a l'afirmació B, i en les tres primeres estan tots els que corresponen a l'afirmació A. Queda clar que si sabem A la probabilitat de les tres creus és de $1/7$ i si sabem B és $1/4$, gairebé el doble!

Evidentment, no he insistit en el problema per la seva dificultat, diguem-ne, matemàtica: queda clar i qualsevol dels meus lectors el pot resoldre i comprendre. Però estic segur que també sabran veure el biaix mental que apareix ara i adés: encara que sapiguem que les probabilitats són tan diferents, no acabem de veure quina és la diferència entre «sé que té almenys un as» o «he vist l'as de cors en les seves cartes». La intuïció segueix pensant: i què li fa quin sigui l'as o que estigui estigui aquí o allà, bé ha de ser algun dels quatre, bé ha d'estar en algun lloc!

Espero que aquestes reflexions ens ajudin a tots plegats a comprendre millor la cara d'astorats que fan molts dels nostres alumnes quan els expliquem segons quines coses de la teoria de les probabilitats.[8]

Departament d'Economia i Empresa
Universitat Pompeu Fabra
Ramon Trias Fargas, 25-27
08005 Barcelona
udina@upf.es

8 Ah! Me n'oblidava. De fet, estava segur que cap dels lectors d'aquest butlletí es deixaria dur pel biaix mental de confondre probabilitat amb causalitat: els ulls blaus de la mare poden ser la causa dels de la filla, però les probabilitats B_1 i B_2 haurien de ser sensiblement iguals. Si les calculem totes dues com «raó de la intersecció a la condició», queda clar que tant els numeradors entre ells com els denominadors entre ells han de ser similars.