Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 22, núm. 1, 2007. Pàg. 23–43 DOI: 10.2436/20.2002.01.2

Models deterministes de xarxes complexes

Conjectures and prove!
P. Erdös

Resum En estudis recents s'ha observat que moltes xarxes associades a sistemes complexos pertanyen a una nova categoria que s'ha volgut anomenar *petit-món amb invariància d'escala*. Molts dels models que s'han desenvolupat per a la descripció matemàtica d'aquestes xarxes es basen en construccions probabilístiques. Tanmateix, la consideració de models deterministes és útil per completar i millorar les tècniques probabilístiques i d'altres basades en simulacions. En aquest article introduïm els conceptes i models bàsics que s'han considerat en l'estudi de xarxes complexes i es presenten diversos models deterministes que es generen a partir de grafs complets.

Paraules clau: grafs, xarxes complexes, xarxes invariants d'escala, xarxes petit-món.

Classificació MSC2000: 90B10, 68R10.

1 Introducció

Moltes xarxes associades a sistemes complexos, com la *World Wide Web*, Internet, la xarxa telefònica, xarxes de transport (incloses les xarxes de distribució d'energia), xarxes biològiques i socials, etc., pertanyen a una nova categoria de xarxes que s'ha anomenat *petit-món amb invariància d'escala* (*small-world scale-free*), com mostren diversos estudis recents [4, 42, 50, 49, 68, 63]. Aquestes xarxes presenten alhora una distància mitjana petita entre nodes, així com un diàmetre petit (màxima de les distàncies entre dos nodes qualssevol) i un agrupament de nodes (*clustering*) sovint elevat. Una altra característica comuna és que la distribució del nombre d'enllaços dels nodes segueix sovint una llei potencial (es parla de *invariància d'escala*), en contrast amb una distribució segons una llei de Poisson característica dels models aleatoris clàssics (vegeu la secció 2 per a definicions més precises). A més, i gràcies a la introducció recent d'una mesura de fractalitat per a grafs, s'ha determinat que moltes xarxes reals són també autosimilars, vegeu [83, 84].

En paral·lel en aquestes observacions, s'han desenvolupat diferents models i tècniques —manllevats sovint de la física estadística, la informàtica i la teoria de grafs— que haurien d'ajudar a entendre i predir el comportament i les característiques dels sistemes. L'origen d'aquests estudis cal trobar-lo en els articles de Watts i Strogatz introduint les xarxes petit-món [89] i Barabási i Albert sobre les xarxes amb invariància d'escala [9], que han fet que l'estudi de xarxes complexes hagi rebut en aquests darrers anys un impuls considerable des d'una òptica pluridisciplinària, per les seves implicacions pràctiques. En aquest context cal destacar, per exemple, el prestigiós Premi Nevanlinna atorgat a Jon Kleinberg durant el Congrés Internacional de Matemàtics, ICM 2006, per les seves contribucions a l'estudi d'encaminaments en xarxes petit-món [54]. De fet, des d'un punt de vista algorísmic, podria considerar-se petit-món a una xarxa on és possible trobar de manera eficient camins curts entre nodes sense necessitat d'un coneixement global de la seva estructura [40, 58]. El lector pot trobar a la llista de referències alguns articles de revisió general i llibres sobre xarxes complexes. Recomanem, per a qui vulgui aprofundir més en aquesta temàtica, els següents: [88, 85, 3, 36, 11, 69, 87, 8, 23, 37, 79].

Per a descriure aquestes xarxes complexes s'han proposat diversos models, que han estat analitzats mitjançant simulacions i considerant mètodes probabilístics. El primer, que encetà l'interès en els estudis de les diferents propietats de les xarxes petit-món, fou un algorisme senzill de generació de xarxes petit-món, proposat per Watts i Strogatz en el seu ara tan citat article [89], aparegut a la prestigiosa revista *Nature*, on es justifica el fet que la distància entre nodes en xarxes reals, i en particular xarxes socials, assoleix valors sorprenentment petits (d'aquí prové la denominació *petit-món*). Poc després, Barabási i Albert [9, 12] introduïren un model de xarxa que considera dos mecanismes que donen lloc a la distribució potencial de graus que s'ha observat també com a característica d'aquestes xarxes: creixement i adjunció preferent (*preferential attachment*.) Dorogovtsev, Mendes i Samukhin a [38] consideraren una equació mestre (*master equation*) per a estudiar les característiques d'una classe de xarxes obtingudes incrementant successivament el nombre de nodes. Krapivsky, Redner i Leyvraz [57] estudiaren l'efecte de la selecció preferent no lineal en la topologia i la dinàmica de xarxes. Amaral *et al.* [6] han considerat models que incorporen l'antiguitat, el cost i la capacitat com a restriccions, per poder explicar les desviacions de la llei potencial que presenten certes xarxes reals. Dorogovtsev i Mendes [33] també han estudiat xarxes dinàmiques basades en els nodes. Bianconi i Barabási [18] introdueixen un model que tracta l'aspecte competitiu de moltes xarxes reals com la WWW. Addicionalment, en molts sistemes reals, esdeveniments locals, com per exemple afegir o reconnectar enllaços o elimininar nodes o enllaços, afecten l'evolució de les xarxes. Albert i Barabási [2] i també Dorogovtsev i Mendes [34] tracten models que incorporen nous enllaços entre nodes ja existents i la reconnexió (i/o eliminació) de certs enllaços presents. Actualment, és ben establert que el mecanisme d'adjunció preferent pot explicar la llei potencial característica de moltes xarxes, però també s'han donat altres mecanismes alternatius que afecten l'evolució de xarxes en creixement i poden conduir a topologies amb invariància d'escala. Kleinberg *et al.* [55] i Kumar *et al.* [59, 60] suggeriren certs mecanismes basats en la còpia de subestructures en un intent d'explicar aquesta distribució potencial en la *World Wide Web*. Chung *et al.* [31] també introduïren per a xarxes biològiques un model basat en la duplicació de subgrafs. Krapivsky i Redner [56] fan servir una mecanisme de redireccionat d'enllaços el qual equival, de fet, al model de Kumar *et al.* [59, 60]. Barthélémy i Amaral [17] estudien els orígens del comportament petit-món. Barrat i Weigt [13] tracten analíticament, així com també numèricament, l'estructura i les propietats del model de Watts-Strogatz. Amaral *et al.* [6] investiguen les característiques estadístiques de moltes xarxes reals. Latora i Marchiori [61] introdueixen el concepte d'eficiència d'una xarxa i troben que les xarxes petit-món són alhora eficients des d'un punt de vista global i local. Les referències [77, 67, 78, 72] estudien les propietats de percolació de les xarxes i en particular la difusió d'informació i de malalties per camins curts dels grafs o dels arbres generadors. Més recentment, els investigadors han centrat també la seva atenció en altres aspectes de les xarxes petit-món i invariants d'escala [73, 64, 47, 46, 22, 45, 19, 52].

Mentre la majoria dels models als quals s'ha fet referència abans es construeixen aleatòriament i s'analitzen habitualment mitjançant tècniques estocàstiques, les xarxes petit-món poden ser generades també mitjançant mètodes deterministes. Els models deterministes tenen l'avantatge que és possible calcular analíticament moltes de les propietats del graf i així es poden contrastar els resultats amb dades experimentals provinents de xarxes reals i simulades. Podem descriure diferents tècniques de creació de xarxes deterministes: modificació de certs grafs regulars [28], addició i producte de grafs [30, 14, 16] o altres mètodes matemàtics, com els que es descriuen a [98]. Un altre conjunt de tècniques important per a la construcció de famílies de grafs petit-món i invariants d'escala es basa en mètodes recursius. Vegeu, per exemple, [12, 30, 51, 32, 81, 74]. També han estat considerats mètodes recursius basats en l'existència, en una xarxa donada, de subgrafs complets o cliques (conjunts de vèrtexs mútuament connectats dos a dos), com per exemple a [26, 98, 7, 39, 94, 95, 93].

En aquest article, després d'una introducció breu amb definicions bàsiques i models probabilistes, presentem models deterministes recents, que són principalment construccions de grafs que comparteixen la propietat de contenir molts subgrafs complets. Encara que amb noms diferents (jeràrquics, pseudofractals, apol·lonis, geomètrics, arbres de cliques recursius) tots és basen en el mateix principi: la successiva addició de vèrtexs, cadascun connectat a tots els vèrtexs d'un subgraf isomorf, a cert graf complet. La regla concreta triada per a afegir els vèrtexs determina una xarxa final diferent però totes comparteixen les mateixes propietats bàsiques: són petit-món i presenten, en la majoria dels casos, invariància d'escala i un agrupament de nodes elevat.

2 Propietas bàsiques de xarxes complexes

Per a l'estudi i anàlisi de xarxes complexes s'han considerat nombroses mesures i paràmetres, si bé per copsar de manera general l'estructura i les possibles propietats d'una certa xarxa, molt sovint és suficient un petit nombre d'aquests paràmetres. Hi ha quatre mesures que es poden considerar bàsiques en la caracterització d'una xarxa complexa, i que definirem més endavant: la distància mitjana (i/o el diàmetre), el coeficient d'agrupament, la distribució de graus i la modularitat.

Comencem amb aquestes definicions clàssiques. Per a altres definicions en teoria de grafs vegeu, per exemple, [90].

Una xarxa es representa mitjançant un graf $G = (V, E)$ amb conjunt de vèrtexs (nodes) $V = V(G)$ i conjunt de branques o arestes (enllaços) $E = E(G)$.

L'*ordre* del graf, $n = |V|$, és el seu nombre de vèrtexs. La *mida* és el nombre total de branques. El *grau* d'un vèrtex i, i que aquí denotem k_i, és el nombre de branques incidents amb i —també es diu que el vèrtex i és adjacent a k_i altres vèrtexs. El grau d'un graf G és $\Delta = \max_{i \in V} k_i$. Un graf és Δ-*regular* si el grau de tots els seus vèrtexs és Δ.

Un *graf complet* K_d (també anomenat *d-clique*) és un graf d'ordre d, sense llaços ni branques múltiples i tal que tota parella de vèrtexs és adjacent. Direm que dos grafs són *isomorfs* si existeix una bijecció (isomorfisme) entre els dos conjunts de vèrtexs que conserva les adjacències.

La família de grafs base que van considerar Watts i Strogatz en el seu treball (i que també han considerat altres estudis), forma part dels anomenats *grafs circulants*. En concret varen considerar el cas $C_{n,\Delta}$, Δ parell, que té n vèrtexs etiquetats amb els enters mòdul n, i grau Δ, de manera que el vèrtex i és adjacent als vèrtexs $i \pm 1, i \pm 2, \ldots, i \pm \Delta/2 \pmod n$, $0 \leq i \leq n-1$, vegeu la figura 2 *a*).

2.1 Diàmetre i distància mitjana

La *distància* entre dos vèrtexs i i j d'un graf, $d(i, j)$, es defineix com el nombre d'arestes que conté el camí més curt entre i i j. La màxima distància entre qualsevol parella de vèrtexs, $D = \max_{i,j \in V} d(i, j)$, és el *diàmetre* del graf. La distància mitjana del graf es defineix com $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j \in V} d(i, j)$.

En alguns models probabilístics, es parla de *camí mitjà* o *average path length*, APL, de la xarxa i es defineix com el valor mitjà de $d(i, j)$, amb i i j triats aleatòriament amb una distribució uniforme. En una xarxa social, per exemple, la APL s'associa amb el nombre mitjà de coneguts que hi ha a la cadena més curta que connecta dues persones de la xarxa. Notem que totes aquestes definicions sols tenen sentit si el graf és connex.

Tal com Watts i Strogatz varen veure a [89], la distància mitjana en la majoria de les xarxes reals complexes és sorprenentment petita, fins i tot quan les xarxes són poc denses —tenen moltes menys branques que un graf complet amb el mateix ordre. Alguns autors anomenen aquesta propietat *efecte pe-*

tit-món i d'aquí ve el nom de *xarxes petit-món*. Tanmateix, les xarxes aleatòries «clàssiques» en les quals cada branca s'afegeix al graf amb la mateixa probabilitat presenten també un diàmetre petit (i, per tant, una distància mitjana petita) [21] però la seva topologia difereix clarament de la de les xarxes reals en el sentit que en molts casos aquestes presenten un agrupament de vèrtexs molt més gran que el de les xarxes aleatòries d'ordre i de mida equivalent.

2.2 Coeficient d'agrupament o clusterització

El coeficient d'agrupament o *clusterització* mesura el grau de connectivitat local d'un graf i és un altre dels paràmetres que es fan servir per caracteritzar les xarxes petit-món. Per exemple, en una xarxa d'amics, és força probable que dos amics d'una persona concreta també ho siguin entre si, la qual cosa reflecteix l'elevat valor del coeficient d'agrupament d'aquesta xarxa social.

El *coeficient d'agrupament* s'introduí per a quantificar aquest concepte. Primer, per a cada vèrtex i del graf G, C_i es defineix com la fracció de les $k_i(k_i - 1)/2$ branques possibles entre els veïns de i que realment són presents a G. Més exactament, si ϵ_i és el nombre de branques que connecten els k_i vèrtexs adjacents al vèrtex i, el coeficient d'agrupament del vèrtex és $C_i = \frac{2\epsilon_i}{k_i(k_i-1)}$. Aleshores el *coeficient d'agrupament* o *clusterització* de G, denotat C_G, és la mitjana de C_i sobre tots els vèrtexs $i \in V(G)$. Òbviament, el coeficient d'agrupament varia entre 0 i 1. Un valor proper a 0 indica que molts dels vèrtexs que són adjacents a un vèrtex donat i no ho són entre si.

2.3 Distribució de graus

Una propietat simple, però important, d'un vèrtex donat és el seu grau. El grau k_i dóna el nombre total de vèrtexs incidents al vèrtex i. La mitjana de k_i sobre tots els vèrtexs i s'anomena *grau mitjà de la xarxa* o *graf* i es denota $\bar{k}$. La distribució dels graus en un graf pot caracteritzar-se per una funció de distribució $P(k)$, que dóna la probabilitat que un vèrtex triat a l'atzar tingui grau k.

Un graf estructurat, com per exemple un graf circulant $C_{n,\Delta}$, que és regular, presentarà una distribució de graus amb un sol pic. En una xarxa aleatòria, en el model Erdös-Rényi [41], en el qual per a cada parella de vèrtexs hi ha una branca que els uneix amb probabilitat fixada i independent de les altres parelles, la seqüència de graus segueix la ben coneguda distribució de Poisson amb un pic a $\bar{k}$; vegeu la figura 1. (La probabilitat de trobar vèrtexs amb k branques és negligible per a $k \gg \bar{k}$ i $k \ll \bar{k}$.) En aquests darrers anys, molts estudis mostren que per a la majoria de les grans xarxes reals la distribució de graus és essencialment diferent d'una distribució de Poisson i que en molts casos aquesta distribució de graus és descrita millor per una llei potencial, $P(k) \propto k^{-\gamma}$. Ja que la llei potencial és vàlida per a un rang gran de valors del grau, les xarxes corresponents es diu que presenten invariància d'escala (són *scale-free*). Cal esmentar que darrerament han sortit algunes veus crítiques a la importància que molts autors han donat a aquest tipus de xarxes, entre els quals destaca Evelyne Fox Keller [43], que defensa que la topologia d'una xarxa, no aporta massa informació sobre el seu comportament concret en el context en què és funcional. John Doyle també relativitza la «universalitat» de les xarxes invariants d'escala en el sentit que aquesta topologia podria aparèixer habitualment quan hi ha un procés d'optimització de la xarxa amb restriccions que afectarien la seva evolució; vegeu, per exemple, [62].

Xarxa	ordre	APL	$\bar{k}$	*Clustering*	γ
WWW	153.127	3,10	35,21	0,11	1,94 [1]
Internet (*encaminador*) [42]	3.015	3,52	4,75	0,18	2,10
Xarxa elèctrica	4.014	18,70	2,67	0,08	4,00
Silwood Pk (xarxa tròfica) [66]	154	3,40	4,75	0,15	4,75
C. elegans (xarxa neuronal)	282	2,65	14,00	0,28	—
Actors	225.226	3,65	61,00	0,79	2,30

TAULA 1: Valors de paràmetres per a algunes xarxes reals petit-món amb invariància d'escala; vegeu [89].

A la taula 1 es mostren els valors dels paràmetres definits abans per a algunes xarxes reals. Es tracta de la WWW (part), on els nodes són pàgines web i els enllaços corresponen a crides entre pàgines; Internet pel que fa a encaminadors; la xarxa elèctrica (alta tensió) de la part occidental dels Estats Units i de Canadà; una xarxa tròfica que relaciona diferents espècies en un camp experimental situat al parc Silwood de Berkshire al sud d'Anglaterra; la xarxa neuronal del cuc *Caenorhabditis elegans* i la xarxa d'actors (*Internet Movie Database*) on els nodes són actors i dos actors tenen un enllaç si han actuat a la mateixa pel·lícula. Vegeu les referències citades a la mateixa taula per a més detalls.

3 Models clàssics de xarxes complexes

3.1 Grafs petit-món Watts-Strogatz

Watts i Strogatz suggeriren un mètode simple per a la construcció de grafs amb propietats petit-món [89].

El mètode és com segueix: es comença amb un graf circulant $C_{n,\Delta}$, a continuació es tria el vèrtex 0 i la branca adjacent al vèrtex 1. Amb probabilitat p, es reconnecta aquesta branca a un vèrtex escollit uniformement a l'atzar entre tots els vèrtexs evitant la duplicació de branques, altrament no es canvia la branca. El procés es repeteix de manera successiva per a tots els vèrtexs

$(1,\ldots,n)$ completant una volta. A continuació es realitza el mateix procediment per a les branques que connecten i amb $i+2$, $i=0,1,\ldots,n$, i com abans, es reconnecta aleatòriament cadascuna d'aquestes branques, també amb probabilitat p, i es continua el procés, circulant al llarg de l'anell i seleccionant a cada volta una branca més llunyana, $i+2, i+3,\ldots,i+\Delta/2$, fins que cada branca del graf original $C_{n,\Delta}$ ha estat considerada una vegada. Així el procés de reconnexió s'atura després de $\Delta/2$ voltes. Aplicant aquest procediment, i per a $p=0$, el graf original no queda modificat mentre que per a $p=1$ totes les branques es reconnecten de manera aleatòria, i en aquest cas s'obté un graf aleatori que té una distribució de graus de Poisson. Per a valors intermedis de p s'obtenen diferents tipus de grafs. Amb p aproximadament $0,01$ s'obtenen grafs petit-món amb un coeficient d'agrupament gran, pròxim al del graf inicial, i amb diàmetre i distància mitjana similar a la d'un graf aleatori [21]. (Vegeu la figura 2 *d*).)

Watts i Strogatz varen veure que el seu model captura alguns aspectes de moltes xarxes reals, en concret, que presenten una distància mitjana i un diàmetre petits en comparació amb una xarxa aleatòria amb els mateixos ordre i mida, mentre que tenen un coeficient d'agrupament elevat (la clusterització d'una xarxa aleatòria és gairebé zero); vegeu la taula 1.

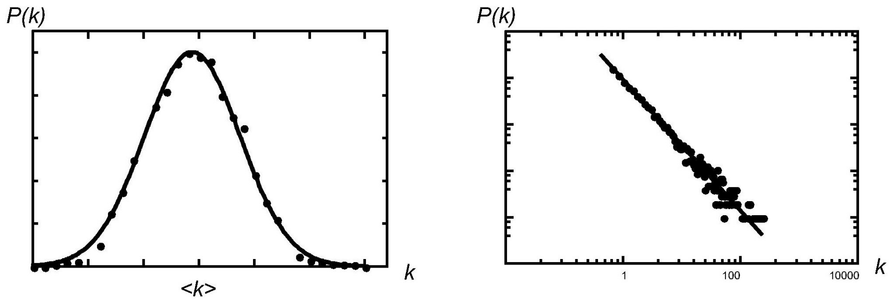

FIGURA 1: Una distribució de graus tipus Poisson per a una xarxa generada segons Erdös-Rényi [41] i una distribució potencial obtinguda amb el mètode d'adjunció preferent [9].

3.2 Grafs invariants d'escala Barabási-Albert

Per explicar l'origen de la distribució potencial de graus en xarxes reals, Barabási i Albert proposaren i analitzaren un model simple de grafs (BA) que es basa en dos conceptes principals, creixement i adjunció preferent (*preferential attachment*). En aquest model es construeix un graf de manera dinàmica a partir de la incorporació successiva de vèrtexs. Cada vèrtex s'afegeix al graf connectant-lo a vèrtexs existents seleccionats proporcionalment al seu grau.

L'algorisme de generació d'un graf invariant d'escala tipus BA és com segueix.

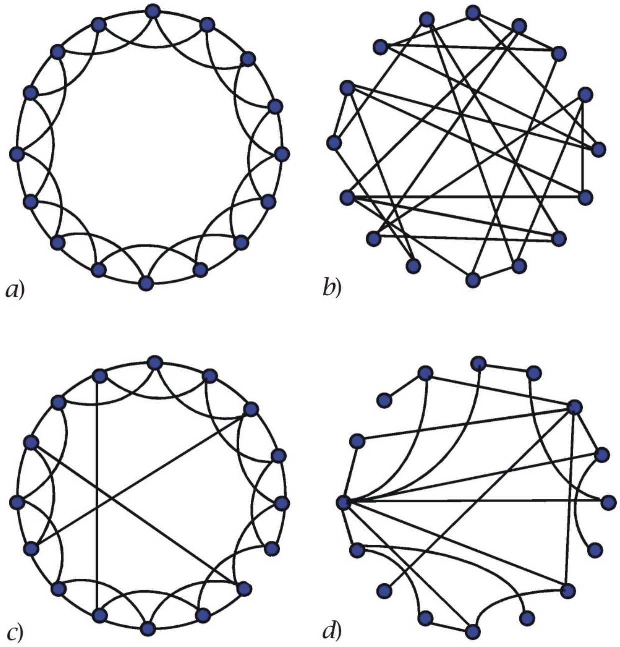

FIGURA 2: *a*) $C(16,4)$, un graf circulant. *b*) Un graf aleatori. *c*) Un graf petit-món. *d*) Un graf amb invariància d'escala.

Creixement: es comença amb un nombre petit de vèrtexs, m_0. A cada pas s'introdueix un nou vèrtex i es connecta a $m < m_0$ vèrtexs ja existents.

Adjunció preferent: la probabilitat que el nou vèrtex es connecti a un vèrtex existent i depèn del seu grau k_i segons $P(k_i) = k_i / \sum_{j \in V} k_j$.

A partir d'aquestes regles, Barabási i Albert demostraren analíticament que el graf tendeix cap a un estat amb invariància d'escala: La distribució de graus no canvia amb més iteracions i queda descrita per una llei potencial $P(k) \propto k^{-\gamma}$, amb $\gamma = 3$. Això vol dir que els grafs invariants d'escala tenen alguns vèrtexs amb grau molt alt (que s'anomenen *hubs*). Aquests resultats analítics poden ser contrastats fàcilment amb simulacions numèriques i comparats amb els d'una xarxa aleatòria del mateix ordre i de la mateixa mida generada segons el mètode d'Erdös-Rényi descrit a la secció anterior; vegeu la figura 1.

El model BA no permet, tanmateix, el càlcul analític de la distància mitjana ni del coeficient d'agrupament. És, per tant, un model mínim que captura uns mecanismes responsables de la generació d'una distribució de graus segons una llei potencial, però amb limitacions evidents quan ho comparem amb xarxes reals. No explica, per exemple, el coeficient d'agrupament elevat o el caràcter fractal de moltes xarxes reals [84]. El model sí que ha permès un estudi detallat d'algunes de les propietats de les xarxes reals. Una d'aquestes és la robustesa a la fallada aleatòria de nodes [4], segons la qual les xarxes mantenen la seva connectivitat i una distància mitjana reduïda quan un node falla aleatòriament (a causa que la probabilitat que falli un *hub* és petita). Tanmateix, són particularment vulnerables a atacs dirigits a eliminar *hubs*.

S'han proposat diversos models per a superar les limitacions del model BA i produir també xarxes que presentin invariància d'escala, una distància mitjana petita i una clusterització relativament alta; vegeu les referències citades a la introducció.

4 Grafs deterministes petit-món i amb invariància d'escala

En contrast amb els models aleatoris de Watts-Strogatz i Barabási-Albert, i les seves diverses modificacions i variacions, és possible produir xarxes petit-món invariants d'escala de forma determinista. Els models deterministes molt sovint permeten un estudi complet analític dels paràmetres rellevants del graf i poden ser directament contrastats amb els models aleatoris. Atès, a més, que moltes xarxes reals presenten una clusterització elevada, aquesta característica es pot reproduir en un model determinístic mitjançant la consideració de cliques (grafs complets).

En aquesta secció introduïm diversos models deterministes i els comparem, en certs casos amb les seves versions aleatòries.

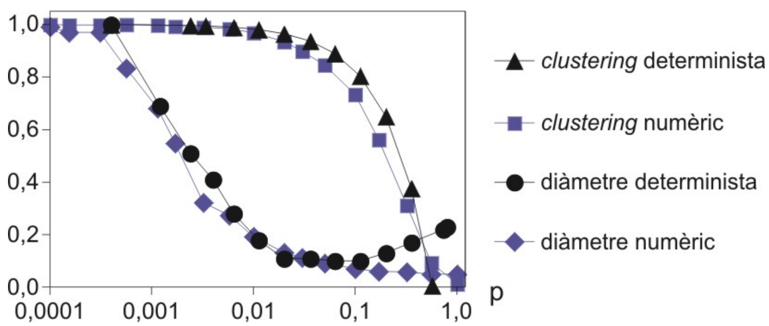

FIGURA 3: Comparació dels valors del diàmetre i del coeficient d'agrupament obtinguts a partir del model de simulació de Watts i Strogatz [89] amb els del model determinista introduït a [28].

4.1 Grafs petit-món Watts-Stogatz deterministes

A [28] es construeixen xarxes petit-món triant h vèrtexs de $C_{n,\Delta}$ com a *hubs* i després fent servir un graf de diàmetre petit (graf estrella, graf complet, doble llaç òptim, etc.) d'ordre h per interconnectar els *hubs*. D'aquesta manera, el paràmetre d'agrupament del graf final aconseguit és elevat amb un valor proper al del graf original, mentre que el diàmetre es redueix considerablement.

Aquesta construcció determinista permet un càlcul analític de les principals característiques del graf que es poden comparar amb les simulacions numèriques; vegeu la figura 3.

4.2 Grafs petit-món amb invariància d'escala a partir de sumes i productes de grafs

A la referència [30] es presenten dues construccions deterministes senzilles de grafs petit-món. El primer mètode considera la substitució adequada de vèrtexs d'un graf per grafs amb un coeficient d'agrupament gran (producte de grafs). Si el graf original té un diàmetre petit i fem servir cliques per a la substitució, obtenim un graf amb diàmetre petit i coeficient d'agrupament elevat.

En la segona construcció, s'obté un graf petit-món connectant vèrtexs d'un graf de diàmetre d a grafs complets de diferent ordre, que pot ser diferent vèrtex a vèrtex. En aquest cas el graf que resulta té diàmetre $d + 2$, un coeficient d'agrupament elevat i els seus vèrtexs poden tenir graus diferents. Com que la tècnica és flexible permet distribucions de grau finals molt diferents, incloent les corresponents a grafs amb invariància d'escala.

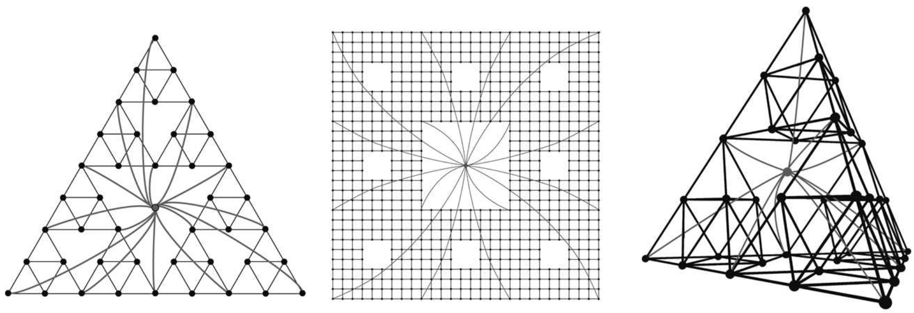

FIGURA 4: Grafs de Sierpinski —*gasket*, *carpet* i tetra— modificats per a ésser petit-món.

4.3 Grafs petit-món fractals

Tot i que algunes xarxes reals presenten característiques d'autosimilitud, encara no existeix una definició estàndard de fractalitat en grafs. Els treballs recents de Song, Havlin i Makse [83, 84]; suposen un avanç notable cap a aquesta definició, ja que estenen el mètode *box-counting* a grafs i mostren que moltes de les xarxes reals poden, de fet, considerar-se fractals, i en canvi models importants com el de Barabási-Albert no presenten aquesta propietat.

Fent servir la metodologia introduïda a [83], és immediat comprovar que la família de grafs de Sierpinski (*gasket*, *carpet* i tetra) són fractals. A [15] es veu com una modificació d'aquests grafs (afegint branques) permet convertir-los

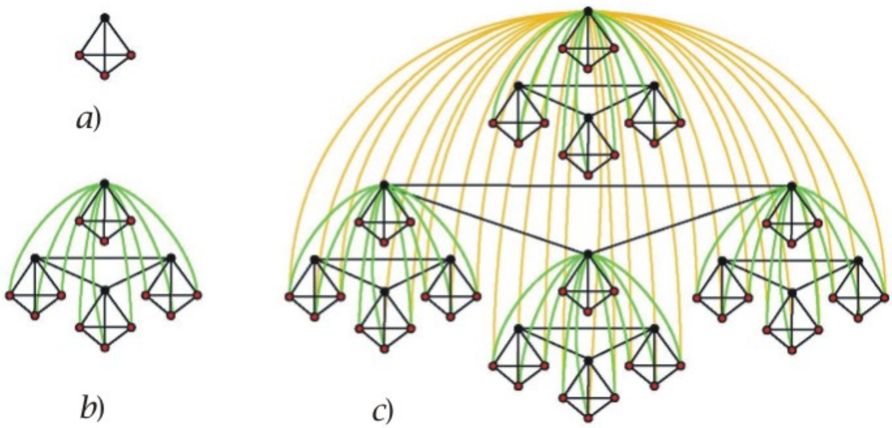

FIGURA 5: Construcció recursiva d'una xarxa jeràrqica basada en el graf complet K_4, de [14].

també en grafs petit-món deterministes; vegeu la figura 4. Aquesta conversió de grafs amb diàmetre relativament gran a grafs petit-món ha estat justificada a [27] i [76], on es demostra, considerant resultats coneguts sobre conjunts dominadors, que sempre és possible obtenir grafs petit-món a partir de grafs de diàmetre gran.

4.4 Grafs jeràrquics

Diversos autors han anomenat *grafs jeràrquics* els grafs que presenten una certa estructura modular que resulta en una jerarquia en els graus. Es considera que una signatura per a un graf jeràrquic és que, a més d'ésser grafs petit-món amb invariància d'escala, el coeficient d'agrupament del graf té un comportament del tipus $C_i \propto 1/k_i$.

A [12], Barabási *et al.* introdueixen una família de xarxes jeràrquiques simple i demostren que presenta propietats petit-món amb invariància d'escala. A [48] els autors determinen unes altres propietats d'aquesta família de grafs (com l'espectre). El model és generalitzat a [81] i també estudiat a [74]. Certs grafs jeràrquics han estat considerats per modelar xarxes metabòliques a [82].

Un mètode de construir de manera determinista un graf jeràrquic comença considerant un graf complet K_n i connectant a un vèrtex concret, que s'anomena *arrel*, $n-1$ rèpliques de K_n. Després, $n-1$ rèpliques de l'estructura sencera s'afegeixen a l'arrel. En aquest pas el graf tindrà n^3 vèrtexs. El procés continua fins a aconseguir l'ordre desitjat.

Hi ha diverses variacions d'aquestes xarxes jeràrquiques que depenen, per exemple, del tipus de graf inicial, de la introducció de branques extra entre les diferents còpies dels subgrafs, etc. Tanmateix, un cop fixat el graf inicial, no hi ha paràmetres a ajustar i les principals propietats del graf final resultant queden fixades. A [15] es considera un model general i s'introdueix un sistema d'etiquetatge dels vèrtexs que permet l'estudi de l'encaminament i les propietats de comunicació d'aquests grafs jeràrquics.

Les xarxes jeràquiques presentades abans suggereixen una generalització que podem concretar com un producte que hem anomenat *producte jeràrquic de grafs* [16], vegeu la figura 6. Els grafs que resulten en aquesta operació presenten una jerarquia de vèrtexs, quant al seu grau. De fet, amb aquest producte s'obtenen subgrafs del producte cartesià dels factors. Algunes de les propietats del producte cartesià es conserven aleshores en el producte jeràrquic, com ara un diàmetre i una distància mitjana petits i l'existència d'algorismes d'encaminament simples i de protocols de comunicació òptims. La distribució de graus, en aquest cas, és exponencial.

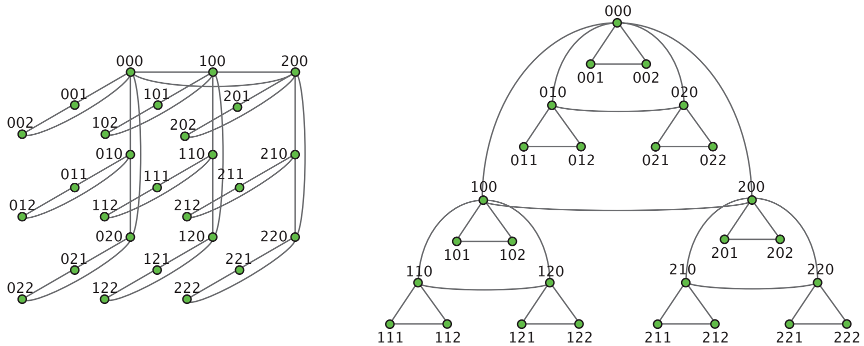

FIGURA 6: Dues maneres de dibuixar el producte jeràrquic $K^3 \sqcap K^3 \sqcap K^3$; vegeu [15].

4.5 Arbres de cliques recursius deterministes

Mentre que en els models jeràrquics l'eliminació de certs vèrtexs o certes branques porta a la separació del graf en diversos grafs complets, podem fer unes altres construccions, també sobre la base de grafs complets, que combinen en una estructura més complexa.

Un arbre de cliques recursiu de dimensió d genèric és una construcció iterativa que quan $t = 0$ consisteix simplement en un graf complet $K(d, 0) = K_d$. A cada pas $t \geq 1$, l'arbre de cliques $K(d, t)$ es construeix a partir de $K(d, t-1)$ triant un o més dels d-cliques que conté $K(d, t-1)$ i afegint per a cadascun un nou vèrtex que es connecta a tots els vèrtexs del clique. Vegeu la figura 7. Cal observar que un arbre de cliques recursiu és un graf que conté nombrosos cicles i, per tant, no és un arbre en el sentit més habitual. Aquesta mena de construcció, en un altre context, fou considera ja fa més de vint anys i se n'estudiaren algunes de les seves propietats [20, 80].

Algunes modificacions d'aquesta construcció general es presenten aquí. Depenent de la tria del valor de d resulten diferents tipus de grafs. En concret podem distingir els casos $d = 2$, $d = 3$ i el cas general d ($d \in N, d \geq 2$). També

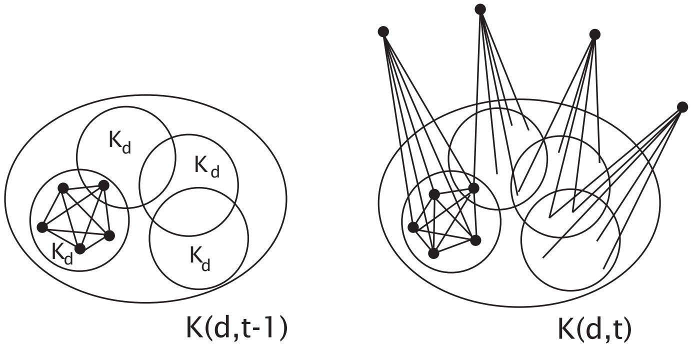

FIGURA 7: Construcció iterativa d'un graf determinista tipus arbre de cliques.

és important la manera de seleccionar els diferents d-cliques que existeixen al graf i als quals s'afegeix un nou vèrtex. Si seleccionem *tots* els cliques (inclosos aquells que ja s'han considerat en passos anteriors) el graf que es construeix és un *arbre de cliques recursiu complet* [26] que inclou com a cas particular, quan $d = 2$, les xarxes *pseudofractals* [32]. Si sols seleccionem cliques que *no s'han fet servir abans* obtenim, per a $d \geq 3$, *grafs apoŀlonis multidimensionals* [39, 95], que inclouen per a $d = 3$ les anomenades *xarxes apoŀlònies* [7, 39]. La taula 2 presenta un resum d'aquestes construccions deterministes.

	Afegir alhora un vèrtex a cada d-clique, **amb** repetició.	Afegir alhora un vèrtex a cada d-clique, **sense** repetició.
Cas $d = 2$	*Pseudofractal invariant d'escala*, Dorogovtsev, Goltsev i Mendes, *Phys. Rev. E*, 65 (2002), 066122.	*Graf petit-món determinista*, Zhang, Rong i Guo, *Physica A*, 363 (2005), 567.
Cas $d = 3$		*Graf apoŀloni* Andrade, Herrmann, Andrade i da Silva, *Phys. Rev. Lett.*, 94 (2005), 018702. Doye, Massen. Phys. Rev. E, 71 (2005), 016128.
Cas general $d = 2 \ldots \infty$ (inclou els casos $d = 2, 3$)	*Arbre de cliques recursiu*, Comellas, Fertin i Raspaud. *Phys. Rev. E*, 69 (2004), 037104.	*Graf apoŀloni multidimensional*, Zhang, Comellas, Fertin i Rong. *J. Phys. A.*, 39 (2006), 1811 (introduït per Doye i Massen, *Phys. Rev. E*, 71 (2005), 016128.)

TAULA 2: Construccions basades en arbres de cliques recursius.

4.6 Arbres de cliques recursius aleatoris

Els mateixos principis basats en cliques que es consideren en les construccions deterministes d'abans, poden fer-se servir en construccions de grafs aleatòries. És interessant veure que els grafs finals difereixen en els valors d'alguns paràmetres, com per exemple l'exponent de la llei potencial per a la distribució de graus. En alguns casos la discrepància es pot explicar per la tria esbiaixada de les subestructures que es van seleccionant al llarg del procés de construcció del graf aleatori; vegeu [29].

Si se selecciona de manera aleatòria un clique (permetent la tria d'aquells que s'han ja considerat anteriorment), s'obté, per a un valor de d general, un *arbre de cliques recursiu aleatori* estudiat a [25]. Si, en canvi, seleccionem els cliques evitant les repeticions el que s'obté per a un d general és un *graf apol·loni multidimensional aleatori* [94], que inclou com a cas particular ($d = 3$) les *xarxes aleatòries apol·lònies* [96].

	Afegir un sol vèrtex a un clique triat aleatòriament, **amb** repetició.	Afegir un sol vèrtex a un clique triat aleatòriament, **sense** repetició.
Cas $d = 2$		*Graf petit-món aleatori*, Ozik, Hunt i Ott, *Phys. Rev. E*, 69 (2004), 02618.
Cas $d = 3$		*Graf apol·loni aleatori*, Zhou, Yan i Wang, *Phys. Rev. E*, 71 (2005), 046141.
Cas general $d = 2\ldots\infty$ (inclou els casos $d = 2, 3$)	*Arbre de cliques recursiu aleatori*, Comellas [25].	*Graf apol·loni multidimensional aleatori*, Zhang, Rong i Comellas, *Physica A.*, 364 (2006), 610.

TAULA 3: Construccions d'arbres de cliques aleatoris.

Observem que, per a construccions aleatòries, és possible introduir un paràmetre per controlar part de les propietats estructurals de la xarxa. Si ajustem adequadament aquest paràmetre, és possible la introducció a cada pas d'un únic vèrtex adjacent als d'un clique o de diversos vèrtexs que s'uneixen a diferents cliques, fins i tot a tots els cliques com en el cas determinista. Per a $d = 2$, i evitant la repetició de cliques, aquests grafs s'han estudiat a [94]. Aquest estudi pot generalitzar-se immediatament al cas general.

Finalment, la taula 4 compara els valors de la distribució de graus (asimptòtica) que presenta invariància d'escala en la majoria de casos i quan això és així es dóna l'exponent γ. Es presenten els grafs apol·lonis [7], grafs apol·lonis aleatoris [96], les corresponents versions multidimensionals [95, 94] (que inclouen com a casos particulars les primeres famílies). També es consideren les versions aleatòries dels grafs pseudofractals amb invariància d'escala, introduïts per Dorogovtsev, Goltsev i Mendes [32], i la seva generalització, els arbres de cliques recursius complets [26] i els anomenats grafs petit-món deterministes i aleatoris [91, 92]. Els grafs d'aquests dos darrers casos no presenten invariància d'escala.

Graf	$P(k)$ o exponent γ	*Clustering*
Petit-món determinista [92]	$2^{-\frac{k}{2}}$	$0,69 = \ln 2$
Petit-món aleatori [91]	$\frac{3}{4}(\frac{2}{3})^{-k}$	$0{,}65(= \frac{3}{2}\ln 3 - 1)$
Apol·loni [7, 39]	$2,58(= 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2})$	0,83
Apol·loni aleatori [96]	$\frac{3N-5}{N} \approx 3$	$0{,}74(= \frac{46}{3} - 36\ln\frac{3}{2})$
Apol·loni multidim. [95]	$1 + \frac{\ln(d+1)}{\ln d}$ (2 a 2,58)	0,83 a 1
Apol·loni multidim. aleat. [94]	$\frac{2d-1}{d-1}$ 2 a 3	0,74 a 1
Pseudofractal inv. d'escala [32]	$1 + \frac{\ln 3}{\ln 2} = 2,58$	$0,80(= \frac{4}{5})$
Pseudofractal inv. d'escala aleatori	$\frac{5}{2} = 2,5$	
Arbre de cliques recur. determ. [26]	$1 + \frac{\ln(d+1)}{\ln d}$ (2 a 2,58)	0,80 a 1
Arbre de cliques recur. aleatori [25]	$\frac{2d-1}{d-1}$ (2 a 3)	0,74 a 1

TAULA 4: Comparació entre grafs apol·lonis i arbres de cliques recursius, deterministes i aleatoris.

5 Agraïments

Aquest treball ha rebut l'ajut del Ministeri d'Educació i Ciència, i del Fons Europeu per al Desenvolupament Regional (FEDER) gràcies al projecte TEC2005-03575/TCM.

Referències

[1] ADAMIC, L. A.; HUBERMAN, B. A. «Power-law distribution of the World Wide Web». *Science*, 287 (2000), 2115.

[2] ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. «Topology of evolving networks: Local events and universality». *Phys. Rev. Lett.*, 85 (2000), 5234–5237.

[3] ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. «Statistical mechanics of complex networks». *Rev. Mod. Phys.*, 74 (2002), 47–97.

[4] ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A.-L. «Diameter of the world wide web». *Nature*, 401 (1999), 130–131.

[5] ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A.-L. «Error and attack tolerance of complex networks». *Nature*, 406 (2000), 378–382.

[6] Amaral, L. A. N.; Scala, A.; Barthélémy, M.; Stanley, H. E. «Classes of small-world networks», *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 97 (2000), 11149.

[7] Andrade, J. S. Jr.; Herrmann, H. J.; Andrade, R. F. S.; Silva, L. R. da «Apollonian Networks: Simultaneously scale-free, small world, Euclidean, space filling, and with matching graphs». *Phys. Rev. Lett.*, 94 (2005), 018702.

[8] Barabási, A.-L. *Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means.* Cambridge, MA: Perseus, 2002.

[9] Barabási, A.-L.; Albert, R. «Emergence of scaling in random networks». *Science*, 286 (1999), 509–512.

[10] Barabási, A.-L.; Albert, R.; Jeong, H. «Mean-field theory for scale-free random networks». *Physica A*, 272 (1999), 173–187.

[11] Barabási, A.-L.; Bonabeau, E. «Scale-free networks». *Scientific American*, 288, 5 (2003), 50–59.

[12] Barabási, A.-L.; Ravasz, E.; Vicsek, T. «Deterministic scale-free networks». *Physica A*, 299 (2001), 559–564.

[13] Barrat, A.; Weigt, M. «On the properties of small-world network models» *Eur. Phys. J. B*, 13 (2000), 547.

[14] Barriere, L.; Comellas, F.; Dalfó, C. «Fractality and the small-world effect in Sierpinski graphs». *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39 (2006), 11739–11753.

[15] Barriere, L.; Comellas, F.; Dalfó, C. «Deterministic hierarchical networks». Sotmès, *preprint* a `http://hdl.handle.net/2117/674`.

[16] Barriere, L.; Comellas, F.; Dalfó, C.; Fiol, M. A. «The hierarchical product of graphs». Sotmès, *preprint* a `http://hdl.handle.net/2117/672`.

[17] Barthélémy, M.; Amaral, L. A. N. «Small-World Networks: Evidence for a Crossover Picture». *Phys. Rev. Lett.*, 82 (1999), 3180.

[18] Bianconi, G.; Barabási, A.-L. «Competition and multiscaling in evolving networks». *Europhys. Lett.*, 54 (2001), 436–442.

[19] Blanchard, P.; Krueger, T.; Ruschhaup, A. «Small world graphs by iterated local edge formation». *Phys. Rev. E*, 71 (2005), 046139.

[20] Bodlaender, H. L. *Classes of graphs with bounded tree-width.* Utrecht: Tech. Rep. RUU-CS, Univ. Utrecht, 86–22, 1986.

[21] Bollobas, B.; Vega, F. de la «The diameter of random regular graphs». *Combinatorica*, 2 (1982), 125–134

[22] Braunstein, L. A.; Buldyrev, S. V.; Cohen, R.; Havlin, S.; Stanley, H. E. «Optimal Paths in Disordered Complex Networks». *Phys. Rev. Lett.*, 91 (2003), 168701.

[23] Buchanan, M. *Nexus: Small Worlds and the Groundbreaking Theory of Networks.* Nova York: W. W. Norton and Company Inc., 2002.

[24] Cohen, D. «All the world's a net». *New Scientist*, 174 (2002), 24–27.

[25] COMELLAS, F. *Complex Networks: Deterministic Models*. Physics and Theoretical Computer Science: From Numbers and Languages to (Quantum) Cryptography, v. 7 NATO Security through Science Series: Information and Communication Security. GAZEAU, J.-P.; NEŠETŘIL, J.; ROVAN, B. [ed.]. Amsterdam: IOS Press, 2007.

[26] COMELLAS, F.; FERTIN, G.; RASPAUD, A. «Recursive graphs with small-world scale-free properties». *Phys. Rev. E*, 69 (2004), 037104.

[27] COMELLAS, F.; OZÓN, J. «On the universality of small-world networks». *Electron. Notes Discrete Math.*, 10 (2001).

[28] COMELLAS, F.; OZÓN, J.; PETERS, J. G. «Deterministic small-world communication networks». *Inf. Process. Lett.*, 76 (2000), 83–90.

[29] COMELLAS, F.; ROZENFELD, H. D.; BEN-AVRAHAM, D. «Synchronous and asynchronous recursive random scale-free nets». *Phys. Rev. E*, 72 (2005), 046142.

[30] COMELLAS, F.; SAMPELS, M. «Deterministic small-world networks». *Physica A*, 309 (2002), 231–235.

[31] CHUNG, F.; LU, LINYUAN; DEWEY, T. G.; GALAS, D. J. «Duplication models for biological networks». *J. of Comput. Biology*, 10 (2003), 677–688.

[32] DOROGOVTSEV, S. N.; GOLTSEV, A. V.; MENDES, J. F. F. «Pseudofractal scale-free web». *Phys. Rev. E*, 65 (2002), 066122.

[33] DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. F. «Evolution of networks with aging of sites». *Phys. Rev. E*, 62 (2000), 1842.

[34] DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. F. «Scaling behaviour of developing and decaying networks». *Europhys. Lett.*, 52 (2000), 33–39.

[35] DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. F. «Comment on "Breakdown of the internet under intentional attack"». *Phys. Rev. Lett.*, 87 (2001), 219801.

[36] DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. F. «Evolution of networks». *Adv. Phys.*, 51 (2002), 1079–1187.

[37] DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. F. *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2003.

[38] DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. F.; SAMUKHIN, A. N. «Structure of growing networks with preferential linking». *Phys. Rev. Lett.*, 85 (2000), 4633–4636.

[39] DOYE, J. P. K.; MASSEN, C. P. «Self-similar disk packings as model spatial scale-free networks». *Phys. Rev. E*, 71 (2005), 016128.

[40] DUCHON, P.; HANUSSE, N.; LEBHAR, E.; SCHABANEL, N. «Could any graph be turned into a small-world?». *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 3724 (2005), 511–513.

[41] ERDÖS, P.; RÉNYI, A. «On random graphs I». *Publ. Math. Debrecen*, 6 (1959), 290–297.

[42] FALOUTSOS, M.; FALOUTSOS, P.; FALOUTSOS, C. «On power-law relationships of the internet topology». *Comput. Commun. Rev.*, 29 (1999), 251–260.

[43] Fox-Keller, E. «Revisiting "scale-free" networks». *Bioessays*, 27 (2006), 1060–1068.

[44] Goh, K.-I.; Oh, E.; Jeong, H.; Kahng, B.; Kim, D. «Classification of scale-free networks». *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 99 (2002), 12583–12588.

[45] Guclu, H.; Korniss, G. «Extreme fluctuations in small-world networks with relaxational dynamics». *Phys. Rev. E*, 69 (2004), 065104.

[46] Herrero, C. P.; Saboyá, M. «Self-avoiding walks and connective constants in small-world networks». *Phys. Rev. E*, 68 (2003), 026106.

[47] Huang, S. Y.; Zou, X. W.; Tan, Z. J.; Shao, Z. G.; Jin, Z. Z. «Critical behavior of efficiency dynamics in small-world networks». *Phys. Rev. E*, 68 (2003), 016107.

[48] Iguchi, K.; Yamada, H. «Exactly solvable scale-free network model». *Phys. Rev. E*, 71 (2005), 036144.

[49] Jeong, H.; Mason, S.; Barabási, A.-L.; Oltvai, Z. N. «Lethality and centrality in protein networks». *Nature*, 411 (2001), 41–42.

[50] Jeong, H.; Tombor, B.; Albert, R.; Oltvai, Z. N.; Barabási, A.-L. «The large-scale organization of metabolic networks». *Nature*, 407 (2000), 651–654.

[51] Jung, S.; Kim, S.; Kahng, B. «Geometric fractal growth model for scale-free networks». *Phys. Rev. E*, 65 (2002), 056101.

[52] Kaise, M.; Hilgetag, C. «Spatial growth of real-world networks». *Phys. Rev. E*, 69 (2004), 036103.

[53] Kasturirangan, R. *Multiple scales in small-world graphs*. ArXiv: cond-mat/9904055.

[54] Kleinberg, J. «Complex networks and decentralized search algorithms». A: Sanz-Solé, M.; Soria, J.; Varona, J. L.; Verdera, J. [ed.]. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians - Madrid, August 22-30, 2006*. 2007.

[55] Kleinberg, J.; Kumar, R.; Raghavan, P.; Rajagopalan, S.; Tomkins, A. «The Web as a graph: Measurements, models and methods». *Proceedings of the 5th Annual International Conference, COCOON'99, Tokyo, July 1999*. Berlín: Springer-Verlag, 1999.

[56] Krapivsky, P. L.; Redner, S. «Organization of growing random networks». *Phys. Rev. E*, 63 (2001), 066123.

[57] Krapivsky, P. L.; Redner, S.; Leyvraz, F. «Connectivity of growing random networks». *Phys. Rev. Lett.*, 85 (2000), 4629–4632.

[58] Kleinberg, J. «The small-world phenomenon: an algorithmic perspective». *32nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2000)*, Nova York: ACM Press, 2000.

[59] Kumar, R.; Raghavan, P.; Rajagopalan, S.; Sivakumar, D.; Tomkins, A. S.; Upfal, E. «The Web as a graph». *Proceedings of the 19th Symposiumon Principles of Database Systems*, 2000.

[60] KUMAR, R.; RAGHAVAN, P.; RAJAGOPALAN, S.; SIVAKUMAR, D.; TOMKINS, A. S.; UPFAL, E. «Stochastic models for the Web graph». *Proceedings of the 41st IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (IEEE Computing Society, Los Alamitos, Calif.)*, 2000, 57–65.

[61] LATORA, V.; MARCHIORI, M. «Efficient Behavior of Small-World Networks». *Phys. Rev. Lett.*, 87 (2001), 198701.

[62] LI, L.; ALDERSON, D.; DOYLE, J. C.; WILLINGER, W. «Towards a theory of scale-free graphs: definition, properties, and implications». *Internet Math.*, 2 (2006), 431–523.

[63] LILJEROS, F.; EDLING, C. R.; AMARAL, L. A. N.; STANLEY, H. E.; ÅBERG, Y. «The web of human sexual contacts». *Nature*, 411 (2001), 907–908.

[64] MEDVEDYEVA, K.; HOLME, P.; MINNHAGEN, P.; KIM, B. J. «Dynamic critical behavior of the XY model in small-world networks». *Phys. Rev. E*, 67 (2003), 036118.

[65] MONASSON, R. «Diffusion, localization and dispersion relations on small-world lattices». *Eur. Phys. J. B*, 12 (1999), 555.

[66] MONTOYA, J. M.; SOLÉ, R. V. «Small world patterns in food webs». *J. Theor. Biol.*, 214 (2002), 405–412.

[67] MOUKARZEL, C. F. «Spreading and shortest paths in systems with sparse long-range connections». *Phys. Rev. E*, 60 (1999), 6263.

[68] NEWMAN, M. E. J. «The structure of scientific collaboration networks». *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 98 (2001), 404–409.

[69] NEWMAN, M. E. J. «The structure and function of complex networks». *SIAM Review*, 45 (2003), 167–256.

[70] NEWMAN, M. E. J.; MOORE, C.; WATTS, D. J. «Mean-Field solution of the small-world network model». *Phys. Rev. Lett.*, 84 (2000), 3201.

[71] NEWMAN, M. E. J.; WATTS, D. J. *Phys. Lett. A*, 263 (1999), 341.

[72] NEWMAN, M. E. J.; WATTS, D. J. «Scaling and percolation in the small-world network model». *Phys. Rev. E*, 60 (1999), 7332.

[73] NISHIKAWA, T.; MOTTER, A. E.; LAI, Y. C.; HOPPENSTEADT, F. C. «Smallest small-world network». *Phys. Rev. E*, 66 (2002), 046139.

[74] NOH, J. D. «Exact scaling properties of a hierarchical network model». *Phys. Rev. E*, 67 (2003), 045103.

[75] OZIK, J.; HUNT, B. R.; OTT, E. «Growing networks with geographical attachment preference: Emergence of small worlds». *Phys. Rev. E*, 69 (2004), 026108.

[76] OZÓN, J. «Universalitat de les xarxes petit-món». *Butl. Soc. Catalana Mat.*, 17 (2002), 29–49.

[77] PANDIT, S. A.; AMRITKAR, R. E. «Characterization and control of small-world networks». *Phys. Rev. E*, 60 (1999), R1119.

[78] PANDIT, S. A.; AMRITKAR, R. E. «Random spread on the family of small-world networks». *Phys. Rev. E*, 63 (2001), 041104.

[79] Pastor-Satorras, R.; Vespignani, A. *Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.

[80] Proskurowski, A. «Recursive graphs, recursive labelings, and shortest paths». *SIAM Journal of Computing*, 10 (1981), 391–397.

[81] Ravasz, E.; Barabási, A.-L. «Hierarchical organization in complex networks». *Phys. Rev. E*, 67 (2003), 026112.

[82] Ravasz, E.; Somera, A. L.; Mongru, D. A.; Oltvai, Z. N.; Barabási, A.-L. «Hierarchical organization of modularity in metabolic networks». *Science*, 297 (2002), 1551–1555.

[83] Song, C. M.; Havlin, S.; Makse, H. A. «Self-similarity of complex networks». *Nature*, 433 (2005), 392–395.

[84] Song, C. M.; Havlin, S.; Makse, H. A. «Origins of fractality in the growth of complex networks». *Nature Physics*, 2 (2006), 275–281.

[85] Strogatz, S. H. «Exploring complex networks». *Nature*, 410 (2001), 268–276.

[86] Vázquez, A. «Disordered networks generated by recursive searches». *Europhys. Lett.*, 54 (2001), 430–435.

[87] Wang, X. F.; Chen, G. «Complex Networks: Small-world, scale-free and beyond». *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 1 (2003), 6–20.

[88] Watts, D. J. *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1999.

[89] Watts, D. J.; Strogatz, S. H. «Collective dynamics of 'small-world' networks». *Nature*, 393 (1998), 440–442.

[90] West, D. B. *Introduction to Graph Theory.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2001.

[91] Zhang, Z. Z.; Rong, L. L. *Growing Small-World Networks Generated by Attaching to Edges.* ArXiv: cond-mat/0503637

[92] Zhang, Z. Z.; Rong, L. L.; Guo, C. «A deterministic small-world network created by edge iterations». *Physica A*, 363 (2005), 567–572.

[93] Zhang, Z.; Rong, L. L.; Comellas, F. «Evolving small-world networks with geographical attachment preference». *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39 (2006), 3253–3261.

[94] Zhang, Z.; Rong, L. L.; Comellas, F. «High dimensional random Apollonian networks». *Physica A*, 364 (2006), 610–618.

[95] Zhang, Z.; Comellas, F.; Fertin, G.; Rong, L. L. «High dimensional Apollonian networks». *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39 (2006), 1811–1818.

[96] Zhou, T.; Yan, G.; Zhou, P. L.; Fu, Z. Q.; Wang, B. H. *Random Apollonian networks.* ArXiv: cond-mat/0409414.

[97] Zhou, T.; Yan, G.; Wang, B. H. «Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution». *Phys. Rev. E*, 71 (2005), 046141.

[98] Zhou, T.; Wang, B. H.; Hui, P. M.; Chan, K. P. *Integer networks.* ArXiv: cond-mat/0405258.

Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
Avinguda del Canal Olímpic, s/n
08860 Castelldefels, Barcelona
francesc.comellas@upc.edu