Un problema indecidible

JOSÉ FERNÁNDEZ-PRIDA
(Universidad Complutense)

Denotando por ω el conjunto de los números naturales, un *mosaico infinito* será, por definición, una partición del primer cuadrante del plano en cuadrados negros y blancos, que puede identificarse con una aplicación de ω^2 en $\{0,1\}$ o con un subconjunto de ω^2. El mosaico será recursivo si existe un algoritmo que permite determinar el color de cualquier cuadrado. Una aplicación de $\{0,1,...,n-1\} \times (0,1,...,n-1\}$ en $\{0,1\}$ será denominado un *mosaico finito de longitud* n, donde n es un número natural cualquiera. La inclusión de un mosaico finito en otro infinito se definirá de la forma obvia: m está incluído en M si existen números naturales i, j tales que para todo par de números naturales p,q menores que la longitud de m se verifica: $m(p,q) = M(p + i, q + j)$. Con ello, el *problema de decisión* de un mosaico infinito M consiste en encontrar un procedimiento efectivo, que permita decidir en un número finito de pasos para cualquier mosaico finito m, si m está o no contenido en M.

A continuación demostraremos que existen infinitos mosaicos recursivos (o incluso recursivos primitivos), cuyo problema de decisión es insoluble, ya que el algoritmo buscado no existe. La demostración se realizará mediante un argumento indirecto, para lo que previamente se probará la indecidibilidad de una variante unidimensional de nuestro problema, demostrándose a continuación que el problema unidimensional es reducible (1-reducible, en términos técnicos) al bidimensional.

Para ello, llamaremos *mosaico unidimensional* a un conjunto de números naturales, obviamente identificable con una sucesión de ceros y unos. Por ejemplo, el conjunto de los números primos se identificará con la sucesión 0011010100010100010100001... Una aplicación del conjunto $\{0,1,...,n-1\}$ en $\{0,1\}$, identificable con una secuencia de ceros y unos de longitud n, será denominada un *segmento*. Finalmente, el problema de decisión de un mosaico unidimensional S consiste en encontrar un algoritmo que permita decidir para todo segmento s, si s está o no contenido en S.

Revista de Filosofía. 3.ª época, vol. V (1992), núm. 8, págs. 233-234. Editorial Complutense. Madrid

Para probar la existencia de mosaicos unidimensionales recursivos primitivos cuyo problema de decisión es insoluble, partiremos de un conjunto A de números naturales que sea recursivamente enumerable, pero no recursivo. Sea h una función recursiva primitiva h tal que $A = h(\omega)$. A partir de h definiremos un mosaico unidimensional S por yuxtaposición de los segmentos $s_0, s_1, s_2, \ldots$, donde s_j es el segmento formado por h(j) unos, precedidos y seguidos de un cero. Por ejemplo, si $h(0) = 3$, $h(1) = 2$, $h(2) = 0$, $h(3) = 1$, ..., entonces $s_0 = 01110$, $s_1 = 0110$, $s_2 = 00$, $s_3 = 010$, ... con lo que S = 01110011000010 ... Claramente S es recursivo primitivo, al serlo h.

Además, de la equivalencia de las tres proposiciones

(a) $n \varepsilon A$,

(b) existe $j \varepsilon \omega$ tal que $h(j) = n$,

(c) el segmento 0111...10 (n unos) está contenido en S,

se sigue inmediatamente la indecidibilidad del problema de decisión de S.

Para reducir el problema unidimensional al bidimensional, a cada subconjunto S de ω haremos corresponder el subconjunto S^* de ω^2 definido por la igualdad $S^* = \{(a,b): a \varepsilon S \text{ y } b = 0\}$, con lo que S^* será recursivo primitivo si lo es S. De forma análoga, a todo segmento s de longitud n haremos corresponder el mosaico finito $s^*: \{0,1,\ldots,n-1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ tal que $s^*(a,b) = 1$ si y solo si $s(a) = 1$ y $b = 0$, con lo que obviamente se verifica: s está contenido en S si y solo si s^* está contenido en S^*. En consecuencia, de existir un algoritmo de decisión para S^*, existiría otro para decidir S.