Observaciones sobre "El significado del teorema de Bernoulli para la teoría de la inferencia estadística"

Andrés RIVADULLA
(Universidad Complutense)

I. En *STBTIE*[1] interpreté la razón $\frac{r}{t}$ del número de casos favorables al acaecimiento de un suceso respecto del número total de casos, como su probabilidad p de ocurrencia. Introduje además la variable aleatoria 'proporción de casos observables en n observaciones', a la que denoté por f_o, que expresa la proporción del número a de veces 'éxito', p.e. 'cara', 'uno', etc., en n ensayos independientes.

En su *Ars Conjectandi* Bernoulli demuestra que es tantas veces como se quiera (p.e. c veces) más probable que f_o se sitúe dentro de un intervalo $p\pm\varepsilon$ centrado en p, que fuera de él, o sea:

$$P[(p-\varepsilon)\leq f_o \leq (p+\varepsilon)] = cP[(p-\varepsilon) > f_0 \text{ ó } f_o > (p+\varepsilon)]$$

e.d., la *Ley de los grandes números*

(1) $$\lim_{n\to\infty} P(f_o \in [p-\varepsilon,\ p+\varepsilon]) = 1,$$

[1] A. Rivadulla: "El significado del teorema de Bernoulli para la teoría de la inferencia estadística", *Revista de Filosofía*, 3ª época, vol. X (1997), núm. 17, pgs. 69-82.

Revista de Filosofía, 3.ª época, vol. XI (1998), núm. 19, pgs. 267-269. Servicio de Publicaciones, Universidad Complutense. Madrid

según la cual, si n crece indefinidamente, converge a 1 la probabilidad P de que la distancia de la frecuencia relativa observable f_o a la probabilidad conocida p se reduzca tanto como queramos.

II. Decíamos en *STBTIE* § **3.** que, si en $p-\varepsilon \leq f_o \leq p+\varepsilon$ restábamos primero p, luego f_o, y finalmente multiplicábamos por -1, obteníamos $f_o - \varepsilon \leq p \leq f_o + \varepsilon$. Ello parecía justificar la expresión

(2) $$\lim_{n\to\infty} P(p \in [f_o - \varepsilon, f_o + \varepsilon]) = 1$$

que afirma la convergencia a 1 de la probabilidad P de que la probabilidad *desconocida* p se encuentre dentro de un intervalo $f_o \pm \varepsilon$ arbitrariamente pequeño centrado en f_o. Y plantea la pregunta acerca de la *inversión* del *Teorema de Bernoulli*, e.d. la posibilidad de la inferencia de la probabilidad desconocida —la ley general— a partir de frecuencias relativas observadas —lo particular—, consagrando así la inducción como forma de descubrimiento científico.

El análisis de esta supuesta inversión del Teorema de Bernoulli lo vamos a llevar a cabo aquí planteando tres situaciones diferentes:

i) Supongamos que p fuese una variable aleatoria. Entonces

(3) $$P(p \in [f_o - \varepsilon, f_o + \varepsilon]) = \int_{f_o-\varepsilon}^{f_o+\varepsilon} f(p)dp$$

y, si $f(p)$ es la *función de densidad de probabilidad*

$$f(p) = \frac{(n+1)!}{a!(n-a)!} p^a (1-p)^{n-a},$$

donde a es el número de veces 'éxito' en n ensayos binomiales independientes, entonces **(3)** es la *solución de Bayes* al problema de la estimación de p, condicionada al conocimiento disponible del número a de veces 'éxito'en n experimentos aleatorios previamente realizados. **(2)** y **(3)** son pues incompatibles.

ii) Tomemos ahora p constante, como hemos hecho en **I.** Para n fijo, e.d. para valores dados de f_o, $P(p \in [f_o - \varepsilon, f_o + \varepsilon])$ sólo puede ser 1 ó 0, dependiendo de que p esté o no esté dentro del intervalo $[f_o - \varepsilon, f_o + \varepsilon]$. Luego en este caso **(2)** es falsa.

iii) Supongamos finalmente p constante, f_o variable aleatoria, y $P(p \in [f_o - \varepsilon, f_o + \varepsilon])$ la probabilidad de intervalos $f_o \pm \varepsilon$ que contienen a p. Ahora bien, el cálculo de la probabilidad de a veces 'éxito' en n ensayos binomiales independientes depende esencialmente de p. Luego reformulando **(2)** como

$$\lim_{n \to \infty} P(p \in [f_o - \varepsilon, f_o + \varepsilon] \wedge p) = 1$$

resulta trivialmente verdadera.

En ninguno de los tres casos la *inversión* del Teorema de Bernoulli es posible, ya que en *i*) el problema de Bernoulli se transforma en el de Bayes. Este resultado es compatible con la solución lógico-filosófica negativa del *problema de la inducción*.