La medida del círculo de Arquímedes: Figura y texto de la proposición 1

Pedro CARRIÓN LÓPEZ

Doctor en Filología Clásica - Univerdad Complutense de Madrid
Catedrático emérito de Enseñanza Media en Lengua castellana y Literatura
pcarrlopez@gmail.com

Recibido: 10 de noviembre de 2008
Aceptado: 28 de noviembre de 2008

RESUMEN
Partiendo del hecho generalmente reconocido de que *La medida del círculo* de Arquímedes no es exactamente el original del autor y adolece de muchos defectos de transmisión, se plantea que la figura de la proposición 1 es defectuosa y puede y debe ser reconstruida. Tras justificar la reconstrucción que se propone, se aventuran conjeturas en las que se muestra su utilidad y pertinencia. El interés añadido es que, según Heiberg, el palimpsesto (su manuscrito C) comienza tras el inicio de la segunda mitad de la demostración de la proposición 1, por lo que, si esto se confirma, el moderno trabajo de lectura del palimpsesto que se está llevando a cabo no aportaría luz sobre este punto.

Palabras clave: Arquímedes, conjetura, demostración, edición crítica, figura geométrica, palimpsesto, proposición, reconstrucción, transmisión textual.

ABSTRACT
Starting from the generally recognised fact that Archimedes' *The Measurement of the Circle* is not exactly the author's own original and suffers from many transmission defects, it is proposed that the diagram from Proposition 1 is defective and can, indeed must, be reconstructed. After justifying the proposed reconstruction, conjectures are advanced showing its usefulness and pertinence. An added interest is that, according to Heiberg, the Palimpsest (his manuscript C) begins after the start of the second half of the demonstration of Proposition 1, so that, were this confirmed, the modern work of reading of the Palimpsest currently under way would not shed light on this point.

Key words: Archimedes, conjecture, demonstration, critical edition, geometrical diagram, Palimpsest, Proposition, reconstruction, textual transmission.

1. En[1] *La medida del círculo*, Arquímedes aporta uno de sus numerosos títulos de gloria, al determinar la razón de la circunferencia a su diámetro con una extraordinaria aproximación[2]. Sin embargo, el texto llegado hasta nosotros adolece de

[1] Nota previa: Todas las figuras que aparecen en este trabajo han sido dibujadas por el autor.

[2] Entre unos límites de 22/7 por exceso y 223/71 por defecto francamente notables. La diferencia entre ellos es 0,0020... Si pensamos que tuvo que pasar mucho tiempo (y teniendo el precedente de Arquímedes) para conocer, por ejemplo, que la razón con los cinco primeros decimales exactos era 3,14159 (exceso de Arquímedes: 0,00126; defecto de Arquímedes: 0,00075), podemos calibrar la verdadera importancia de la obra.

muchísimos defectos de transmisión, según todas las opiniones autorizadas[3]. Al parecer, lo que hemos recibido como *La medida del círculo* no es la obra original de Arquímedes, sino un resumen (Dijksterhuis, 1987 reimpr.: 222) instrumental[4] con numerosas deficiencias de todo tipo (de expresión, de estilo expositivo, y de estructura), que parece difícil considerarlas de Arquímedes[5]:

1º. La proposición 2 usa anticipadamente el resultado de la proposición 3. Esto se considera impropio del proceder de Arquímedes[6] y, por ello, se atetizan, como inciso espurio, las líneas de advertencia de que esa información utilizada –que es nada menos que el valor de π[7]– se demostrará después[8]. Ello representa un problema tal, que Heath traduce el enunciado de la proposición 2 y se niega –en un tono que se adivina de enfado y desprecio– a traducir el resto de la proposición (Heath, 1897: 93). Eutocio, en su comentario[9], trata de los «teoremas» 1 y 3 sin mencionar siquiera que haya un 2. Algún autor antiguo hasta edita la obra posponiendo la proposición 2 tras la 3, sin dar mayores explicaciones[10]. El propio Dijksterhuis comenta las proposiciones 1 y 3, dejando para el final la proposición 2, como algo que es inevitable tratar por aparecer en el texto recibido[11].

---

3 Se han utilizado, para texto, Heiberg (reimpr. de 1972) y Mugler (1970). Como traducciones, además de las dos ediciones citadas, Frajese (1974), Ver Eecke (1960²) y Heath (reimpr. [n.d.]). Para comentario, además de todas las obras mencionadas, Dijksterhuis (reimpr. 1987).

4 Eutocio, en el prefacio de su comentario a esta obra (Heiberg, reimpr, 1972: Vol. III, 228, lín. 20) dice que Heraclides (en su *Vida de Arquímedes*, perdida) afirmaba que este librito era 'necesario para las exigencias de la vida'.

5 Basten estas palabras de Heiberg (1972: Vol. I, pág. 233, nota 3): *(...) Omnino in toto hoc opusculo genus dicendi et exponendi breuitate tam neglegenti laborat, ut manum excerptoris potius quam Archimedis agnoscas.* ('Verdaderamente en toda esta obrita el estilo de exposición y de razonamiento se produce con una brevedad tan deficiente, que se reconoce más bien la mano del extractor que la de Arquímedes').

6 Que sepamos, sólo Ver Eecke (1960²: Vol. I, 129, nota 2) admite que pueda aceptarse este orden, argumentando que en Arquímedes hay otros casos en que anuncia su demostración ulterior, y él podría tener una noción de la medida aproximada del círculo según métodos menos rigurosos que el de la proposición 3.

7 Llamada razón de la circunferencia al diámetro o «constante de Arquímedes» hasta que William Jones (1706), por primera vez, introdujo la notación π (inicial de la palabra περιφέρεια, exacto calco en latín *circum-ferentia*, 'circunferencia', e incluso de περίμετρος, 'perímetro': en ambos casos, sobreentendiéndose γραμμή, 'línea', hasta sustantivarse: 'la [línea] circunferente' > 'la circunferencia', 'la [línea] perímetro' > 'el perímetro'). Se estableció definitivamente como notación cuando la adoptó Euler (1734): su llamada fórmula de «identidad de Euler» ($e^{i\pi} + 1 = 0$) es, para Richard Feynman, «la fórmula más notable de las matemáticas».

8 Se parte construyendo las bases, sobre una misma recta, de diferentes triángulos rectángulos de acuerdo con la proporción 22/7 que será el valor de π por exceso hallado en la proposición 3. Se razona que el triángulo de base mayor tiene el cateto menor igual al radio y su base (cateto mayor) igual a la circunferencia («como se demostrará» en la proposición 3), por lo que, según la proposición 1, el área de dicho triángulo rectángulo es equivalente al área del círculo (según Euclides VI.1: paralelogramos y triángulos de la misma altura son proporcionales a sus bases). Y todo ello para establecer algo así como la «cuadratura del círculo» (círculo respecto del cuadrado de su diámetro = 11/14). Hay mucho de «petición de principio» en la demostración de esta proposición 2.

9 *Vid*. Heiberg (reimpr, 1972: Vol. III, 230, 232); Mugler (1972: Vol. IV, 143, 144): Εἰς τὸ α' θεω-´ρεμα, Εἰς τὸ γ' θεώρεμα. Se discute sobre denominaciones: teorema, proposición, definición, etcétera, lo cual no viene al caso desarrollar aquí.

10 Ver Barrow (1675: 41). A él se refiere también Ver Eecke (1960²: Vol. I, 129, nota 2).

11 Dijksterhuis (reimpr. 1987: 222-240): «Finally we mention Proposition 2».

2º. Hay falta de información (sobre todo en la proposición 3) que para muchos parece ser, más que saltos de razonamiento frecuentes en el estilo expositivo de los matemáticos, lagunas impropias del proceso discursivo de Arquímedes[12].

y 3º. Es frecuente ver muchos elementos calificados de «dudoso», «oscuro» o «no esperable en Arquímedes».

Resulta difícil sanar el texto, aun cuando parezca evidente, por ejemplo, la existencia de una laguna. Como muestra de ello, basta recurrir al paradigmático proceder de Heiberg sobre cierto punto de la proposición 1, que nos va a ocupar de manera especial más adelante (Heiberg, reimpr, 1972: Vol. I, 233)[13]. Establece la existencia de una segura laguna, que no resuelve porque, para ello, habría necesitado restaurar la figura. Traduce *«<et ducantur rectae BZ, ZA, AM, MΔ* ***cet.***[14]*>»* y afirma lo que se indica en nuestra nota 5.

2. Los defectos de transmisión relativos al texto han sido ampliamente mencionados por editores, traductores y comentaristas desde siempre, pero, en la figura que acompaña al texto de la proposición 1, hay un defecto de transmisión que no ha merecido atención, quizá porque en la historia de la crítica textual de la obra se han considerado las figuras como algo secundario[15]. Y, sin embargo, figura y texto son elementos solidarios en obras de este estilo y en la matemática griega antigua[16]. Y lo son hasta tal punto, que algunas claras lagunas señaladas por Heiberg no las resolvió precisamente porque, para proponer conjeturas verosímiles, era necesario estudiar la figura y plantearse sanarla, pues faltan letras de referencia en puntos significativos sin cuya determinación es muy difícil o imposible conjeturar, con pulcritud metodológica, sobre el texto.

Heiberg conoció el actualmente famoso *Palimpsesto de Arquímedes*, al que llamó C y del que se sirvió para su segunda edición de las obras completas de Arquímedes. En el aparato crítico de *Dimensio Circuli* indica Heiberg que C (el palimpsesto) comienza ya iniciada la segunda parte de la proposición 1, y la figura debería estar en la primera parte, que C no tiene al parecer, por lo cual, si el tratamiento al que está siendo sometido el reencontrado palimpsesto no nos proporciona nueva información, la figura y la primera parte de la demostración de la proposición 1 y el comienzo de la segunda parte seguirán como hasta ahora las conocemos, y sus problemas y deficiencias no nos las resolverán las nuevas técnicas que al códice se le están aplicando.

---

12 Baste como ejemplo este comentario de Heiberg (reimpr, 1972: Vol. I, 237, nota 5): *Quae Archimedes breuissime omissis computationibus proponit, copiose et perspicue explicat Eutocius (...)*.

13 En línea 9 de su traducción y nota 3.

14 Subrayado y negrita nuestros.

15 Ver la nota 1 de la página 12 de Reviel Netz (1999) –y su referencia a Mogenet (1950)– en que se trata de la utilidad de las figuras y su ausencia de consideración en ediciones críticas: «(...) Generally, however, critical apparatuses do not offer substantial clues as to the state of diagrams in manuscripts.»

16 Reviel Netz, en las obras que se citan en la Bibliografía final, ha establecido recientemente la importancia, la naturaleza y la función de las figuras que acompañan a los textos científicos griegos antiguos, y sigue trabajando en ello.

Por esta razón, dadas la notoriedad que el llamado *Archimedes Palimpsest Project*[17] está teniendo y las grandes expectativas que se han generado de su moderna lectura, sobre todo en cuanto a las figuras se refiere[18], consideramos de cierto interés hacer públicas estas lucubraciones, precisamente porque lo que aquí se expone trata de la reconstrucción de una figura geométrica que quizá no aparezca, desgraciadamente, en el códice, del que se espera mucho precisamente en lo relativo a las figuras. Ya Reviel Netz[19] atiende a este aspecto, poco o nada considerado antes, en el primer volumen de su traducción de Arquímedes.

3. Apresurémonos a decir que el defecto de la figura, que postulamos, es estructural y afecta a la solidaridad entre texto y figura geométrica. La norma general ha sido centrarse en la edición del texto, sin plantearse la de las figuras. En la obra de referencia de Heiberg apenas se menciona en el aparato crítico casi nada relativo a los dibujos, y ese proceder ha sido el habitual en editores y traductores. Sólo Reviel Netz, muy recientemente –a lo que ayudará la reaparición del famoso *Palimpsesto de Arquímedes* y la creación del *Proyecto Palimpsesto*, a cuyo equipo de trabajo pertenece como filólogo clásico–, se ha ocupado de la edición de las figuras de los manuscritos, en lo publicado hasta ahora. Su traducción completa de Arquímedes será, evidentemente, referencia obligada cuando esté terminada.

Estoy de acuerdo con Reviel Netz en que las figuras que acompañan al texto de las obras de Arquímedes podrían caracterizarse como 'cualitativas' más que 'cuantitativas', en un sentido centrado fundamentalmente en la no necesaria adecuación entre el 'tamaño' de la representación geométrica y el de los objetos dibujados geométricamente. Es más, hay casos en que la inadecuación sería lo metodológicamente correcto y hasta esperable de Arquímedes. Por ejemplo, en la proposición 1 de *La medida del círculo* (en la que se centrará este trabajo), lo adecuado sería que el triángulo rectángulo (véase figura 3) no tuviera una base (cateto mayor) exactamente equivalente a los 22/7 del diámetro del círculo. En la proposición 1 se establece y se demuestra una hipótesis que relaciona, con una intuición brillantísima, el área de un círculo con la de un triángulo rectángulo y, en ella, lo único oportuno –por posible de construir y por constituir el elemento conocido– sería que fueran iguales el radio y el cateto menor; pero –por imposible en ese momento y por ser el elemento desconocido que se ha de hallar– el cateto mayor no sería esperable que fuera 22/7 del diámetro, que es uno de los valores encontrados en la proposición 3 para medir la longitud de la circunferencia. Por ello, un triángulo con cateto menor igual al radio, pero con cateto mayor aleatorio, sería lo adecuado en la figura. Pues bien, editores, traductores y comentaristas dibujan el cateto mayor del triángulo rectángulo con un tamaño muy equivalente a los 22/7 del diámetro: esto se ve muy ostensiblemente en la *editio princeps* de Basilea (Jacobus Cremonensis, 1544), y también puede observarse en Heiberg, en Mugler, en Ver Eecke y Frajese, y hasta en el peculiar Heath. Pero una cosa es esa distinción de Netz de no necesaria adecuación entre objetos y

17 www.archimedespalimpsest.org

18 Ver, por ejemplo, la reseña de Alexander Jones (2005).

19 En Netz (2004: Vol. I, p. 8, 2.2 parágrafo 7) y Netz-Noel (2007: 87-115), «Visual Science».

figuras, en cuanto a su 'dimensión', y otra cosa muy distinta es la existencia de grandes errores en la designación de los puntos significativos de las figuras mediante letras, siguiendo el orden alfabético, como es el caso de la ausencia de cinco letras seguidas cuya existencia, además, el texto parece exigir. Observando las figuras de Arquímedes, Euclides y otros, vemos que es frecuente no emplear la *I*, quizá por ser un simple trazo, fácilmente confundible o inobservable, aunque no deja de usarse en ocasiones[20]. No es, pues, inadmisible contar con ella, si hay verosímil consistencia metodológica en una conjetura.

Ese carácter cualitativo de las figuras y su función explicativa y no meramente ilustrativa (Netz las equipara en función a las ecuaciones modernas[21], con la diferencia de que las figuras son visualmente comprensibles frente a la conceptualización necesaria para las ecuaciones) podemos encontrarlos en la propia obra de que tratamos, sin que se considere necesario reconstruir figuras, porque no tienen el carácter estructural del defecto de la figura de la proposición 1. Por ejemplo, en la proposición 3 de *La medida del círculo*, hay dos figuras imperfectas, que no se han pretendido corregir ni hay motivo fundamentado[22]. En efecto, según suelen presentarse, en la proposición 3 aparecen dos figuras para determinar los límites por exceso y por defecto del valor de π: primero, circunscribiendo al círculo y, después, inscribiendo en él sendos polígonos de 96 lados, a partir de respectivos hexágonos iniciales. La primera figura es la siguiente:

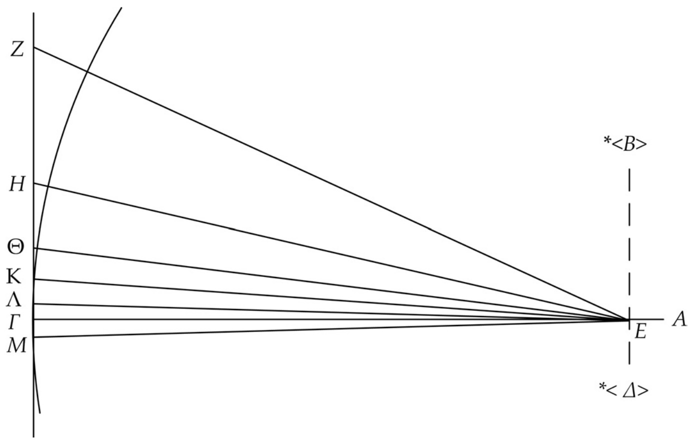

FIG. 1.

---

[20] Limitémonos a citar los gráficos que aparecen con *I* en la traducción citada de Netz (2004): *Sph.Cyl.* I.25, I.26, I.34 (no comentados por Eutocio) y en comentario de Eutocio a II.1 ('como Herón' [Netz, p 276]; 'solución de Arquitas' [Netz, p. 293]; 'como Eratóstenes' [Netz, p. 296]).

[21] Netz-Noel (2007: 87-89).

[22] Dijksterhuis presenta el círculo completo en ambas figuras y, en la primera, el diámetro está dividido por el centro en dos radios iguales; pero no completa las letras que faltan en las figuras, aun siendo fáciles de suplir. Su obra es fundamentalmente un comentario y no una edición crítica.

En el texto se explicitan las referencias a un círculo (sin letras de designación), de diámetro *ΑΓ* y centro *E*. Inmediatamente después, se menciona la tangente *ΓΛΖ*. Y, a partir de aquí, las letras siguientes por orden alfabético (prescindiendo de la *I*): *H, Θ, K, Λ, M.* ¿Dónde están *B y *Δ? Es claro que serían las designaciones del diámetro perpendicular al *ΑΓ*, pero su restitución no tendría más función que perfeccionar la figura. Del mismo modo, el radio *EA* no es igual al radio *EΓ*. Y tampoco aparece el círculo completo (precisamente las letras que faltarían se hallarían en partes del círculo que no aparecen). Esto no sería necesario reconstruirlo: la figura cumple perfectamente la función solidaria con el texto en lo que a comprensión se refiere. Y cumple la función que Netz señala, en relación con las figuras: no necesaria adecuación entre figura y objeto representado (círculo y radio derecho) y ser el equivalente a las ecuaciones modernas (la figura es suficientemente explicativa por sí misma).

En la figura 2 de la misma proposición 3 encontramos detalles semejantes: se menciona un círculo (sin referencias), de diámetro *ΑΓ*, pero no se cita el centro y en la figura aparece como *E*. Sólo se menciona el ángulo *∠ΒΑΓ* y, a partir de aquí, los distintos puntos que se van obteniendo al ir bisecando sucesivamente el ángulo en *A*: *Z*, *H, Θ, K, Λ* (sin emplear la *I*). Faltaría en la figura la *Δ; aparece la *E*, que no se menciona en la 'preparación'; y se echan en falta, al ir estudiando las diferentes proporciones, letras equivalentes a la *Z* en las bisecciones siguientes a la primera. Por otra parte, sólo aparece dibujado el semicírculo superior. ¿Dónde debería aparecer la *Δ? Es claro que en el extremo inferior del radio *EΔ, pero todo el semicírculo inferior falta. Veamos la figura según Heiberg:

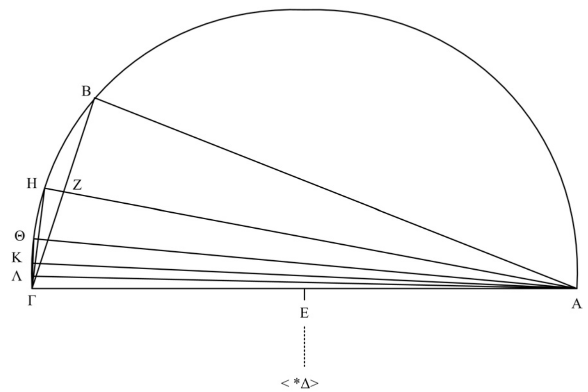

FIG. 2.

También en este caso podríamos ver ejemplificado lo que Netz comenta sobre las figuras.

Pero la laguna que nosotros mencionamos como necesaria de restauración en la proposición 1 no tiene las características de estas de la proposición 3: en ella, hay una serie sistemática de letras en perfecto orden alfabético usadas al principio (A, B, Γ, Δ, E, Z); una serie sistemática de letras en perfecto orden alfabético usadas al final (M, N, Ξ, O, Π, P) y una serie sistemática de letras en perfecto orden alfabético en medio (H, Θ, I, K, Λ), que faltan en figura y texto, y cuya existencia parece necesaria para resolver problemas importantes de contenido (de razonamiento y de expresión). Por ello consideramos necesaria la reconstrucción de la figura, primero, y luego mostrar cuál sería el rendimiento que de ello podría obtenerse.

4. Y, así, llegamos a situar el punto clave de nuestra exposición, que se centrará en la reconstrucción de la figura de la proposición 1, no en lo que a dimensiones entre objetos y su representación geométrica se refiere, ni por prurito de perfección geométrica, sino porque hay una rara laguna en la serie alfabética de las letras que designan puntos significativos y parece necesario que existieran, al menos en el centro de la serie alfabética, si no en su continuación final, por coherencia interna textual. Es precisamente por no haber reparado en tan extraña laguna, por lo que propuestas como la de Heiberg mencionada al principio a modo de ejemplo, y otras, no han podido ser objeto de conjetura verosímil, según la ortodoxa práctica de la crítica textual. Se necesitan ciertos puntos significativos en la figura para hacer un intento de verosímil crítica textual encaminada a sanar en alguna medida un texto reconocido como corrupto. La figura de la proposición 1 es la siguiente[23]:

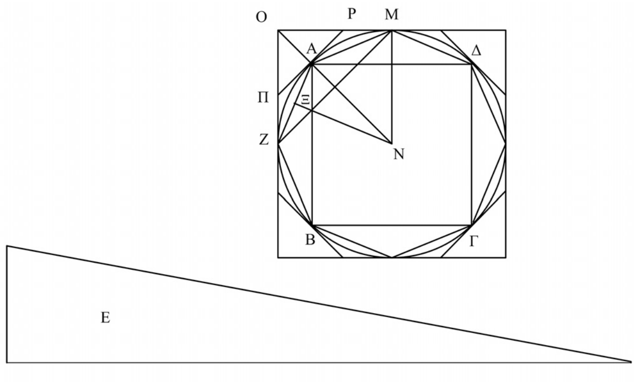

FIG. 3.

y, en ella, es claramente observable que se utilizan las seis primeras letras (*A, B, Γ, Δ, E, Z)* del alfabeto griego, en orden riguroso y con coherencia interna del texto, como veremos; pero se continúa, desde la *Z*, por *M, N, Ξ, O, Π, P* también en orden riguroso y con coherencia interna textual. ¡Pero desde la Z a la *M* tendríamos sin usar nada menos que las siguientes cinco letras seguidas *H, *Θ, *I, *K, *Λ! Parece una laguna demasiado grande, demasiado sistemática en su orden, y con ausencia de designaciones de puntos significativos, cuya pertinencia ha sido notada desde Heiberg y cuya inexistencia impide sanar lo que se consideran claras deficiencias.

---

23 El triángulo se edita a veces por separado, aprovechando espacio disponible. Incluso en páginas distintas. Y hasta aprovechando la doble página texto griego-traducción.

Esta es la cuestión que aquí vamos a elucidar: ¿Dónde situar dichas letras ausentes, sin alterar las existentes, y que permiten «sanar», con conjeturas verosímiles, lugares que se han notado por los estudiosos como necesitados de arreglo? Además, ¿qué explicación dar a la presencia de la recta *MZ*, sin mención ninguna en el texto, y cuándo se dibujó *MN*, que no será mencionada tampoco, salvo que se consideren fundidos el triángulo y el círculo, compartiendo como radio y cateto menor precisamente MN? Evidentemente, *MN* es el radio, que se ve claramente mayor que la apotema del octógono inscrito, *NΞ*, pero no se menciona explícitamente la construcción de tal radio.

5. El 'enunciado' de la proposición 1 es una sencilla intuición genial: para medir una superficie curva (difícil para los griegos), como es el círculo, se lo relaciona con una superficie rectilínea perfectamente mensurable (un triángulo rectángulo) y, rectificando intuitivamente el perímetro curvo, se afirma la equivalencia entre área de un círculo y área de un triángulo rectángulo siempre que sean iguales el radio al cateto menor y la circunferencia al cateto mayor. Tal intuición, admirada desde antiguo por su evidencia *a posteriori* y sencillez, es la rectificación de la circunferencia:

$$T = \frac{a*b}{2}, \quad C = \frac{r*c}{2} \quad : \quad \text{si } \mathbf{a = r} \text{ y } \mathbf{b = c}\text{, entonces } \mathbf{C = T}$$

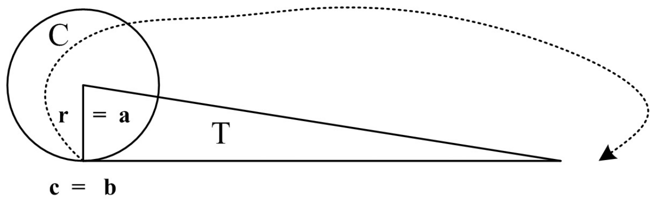

FIG. 4.

pero esto es necesario, primero, demostrarlo; y, luego, poder medir la circunferencia (lo cual se hará en la proposición 3).

Tras el 'enunciado' –πρότασις– en esta proposición 1, que está perfectamente organizada según la estructura clásica[24], se «determinan los límites» –διορισμός–, donde ya están dibujados, al menos, el círculo y el triángulo rectángulo, los cuales se designan por las cinco primeras letras del alfabeto; el círculo por dos de sus diámetros perpendiculares (*ΑΒΓΔ*) y el triángulo por la siguiente letra (*E*), Ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται ('Sea el círculo ΑΒΓΔ respecto del trián-

[24] Según Proclo (Friedlein, reimpr. 1967): *Prop. I, probl. I*, pág. 203, lín.1-5, Πᾶν δὲ πρόβλημα καὶ πᾶν θεώρημα τὸ ἐκ τελείων τῶν ἑαυτοῦ μερῶν συμπεπληρωμένον βούλεται πάντα ταῦτα ἔχειν ἐν ἑαυτῷ· πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμόν, κατασκευήν, ἀπόδειξιν, συμπέρασμα.

gulo E como se ha supuesto'), por lo que tendríamos, al menos, lo siguiente, pudiendo incluso estar fundidas ambas figuras y ser menor la base del triángulo (fig. 5.)[25]:

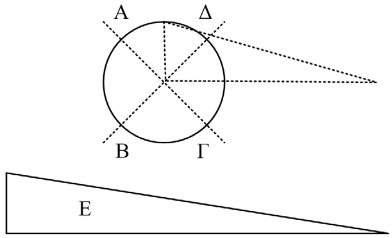

FIG. 5.

Sigue la 'explicitación' –ἔκθεσις– (λέγω ὅτι ἴσος ἐστίν, 'digo que [el círculo] es equivalente [al triángulo]') y comienza la demostración en sentido general. Al ser una demostración por reducción *ad absurdum*, habrá dos partes antes de la 'conclusión' final –συμπέρασμα– (Ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ, 'En consecuencia, el círculo [es] equivalente al triángulo E'): dos 'preparaciones' parciales –κατασκευή– y dos 'demostraciones' parciales –ἀπόδειξις.

La 'preparación' de la primera parte (tras la hipótesis «sea el círculo mayor que el triángulo») consiste en lo siguiente:

1º. Se inscribe un cuadrado, para cuya denominación, con determinación de artículo (ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, 'inscríbase el cuadrado ΑΓ'), se usan dos de las letras ya empleadas y que se corresponden con uno de los dos diámetros del círculo. Para inscribirlo habría bastado unir sencillamente los puntos ya determinados para dibujar el círculo[26]. Por ello, estaríamos en el punto que indica la figura 6:

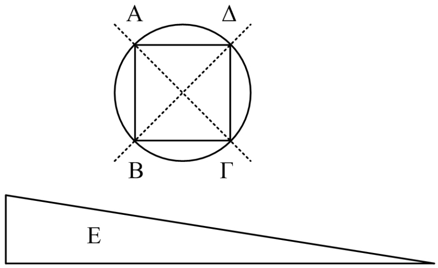

FIG. 6.

[25] Para dibujar un círculo de radio cualquiera, se trazan dos rectas perpendiculares, se toma una magnitud cualquiera como radio, y, con centro en el punto de corte, se traza la circunferencia, quedando determinados dos diámetros perpendiculares (*ΑΓ, ΒΔ*). Sobre otra recta, se determina la magnitud que se ha tomado como radio y, por construcción, radio y cateto menor son iguales. Luego se completa el triángulo rectángulo (el cateto mayor no tiene por qué ser 22/7 del diámetro).

[26] Según Euclides IV.6, un cuadrado se inscribe en un círculo trazando dos diámetros perpendiculares y uniendo los puntos de corte con la circunferencia como sus lados: aquí ya están los dos diámetros determinados al dibujar el círculo y basta unir los puntos de corte. Un cuadrado suele designarse mediante una de sus diagonales: aquí *ΑΓ*, que es uno de los diámetros. El que la designación del círculo y la del cuadrado inscrito sea mediante las mismas letras probaría el procedimiento.

y 2º. Se bisecan los arcos de circunferencia cuyas cuerdas son los lados del cuadrado inscrito (fig. 7)[27],

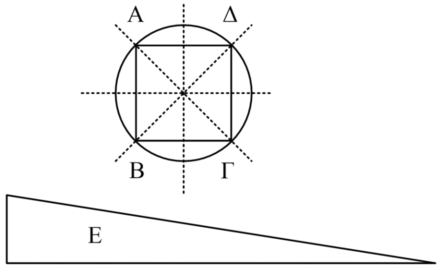

FIG. 7.

y se unen los ocho puntos determinados por los puntos de corte y los vértices del cuadrado, para obtener una figura rectilínea inscrita (cuya condición de octógono no es pertinente y por ello se denominará sencillamente como figura rectilínea), que es mensurable y relacionable con el círculo, cuyos ocho lados son cuerdas de sendos segmentos de círculo (fig. 8):

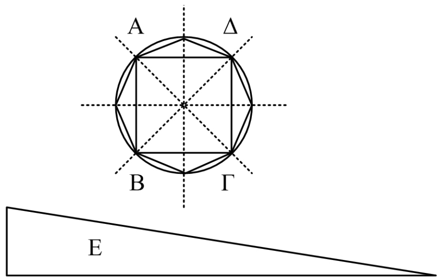

FIG. 8.

pero en el texto se dice τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα (‘biséquense las circunferencias y sean los segmentos (...)’. Y aquí tenemos el primer gran problema textual en relación con lo defectuoso de la figura:

a) No se mencionan los vértices de la figura rectilínea.
b) No se explicita cuál es la figura rectilínea, que más adelante se mencionará como ya conocida.
c) No se explicita cuáles son los segmentos de círculo mencionados.
d) Sólo se designan en la figura el primero y el último punto de bisección mediante letras que no son consecutivas en el orden alfabético. El primero de ellos, entre el arco *AB*, se designa mediante la letra *Z,* siguiente a la última uti-

[27] Según Euclides III.30, para bisecar un arco de circunferencia, se divide en dos parte iguales su cuerda mediante una perpendicular, que pasará por el centro (Euclides I.10 y 1, 4, 9). Aquí las cuerdas son los lados del cuadrado inscrito. Se trazan, pues, dos diámetros perpendiculares que nos darán los cuatro puntos de bisección.

lizada (que fue la *E*); y el último, entre el arco *ΔA*, mediante la *M*. Pero de *Z* a *M* hay una serie de cinco letras seguidas que no se emplean (*Η, *Θ, *Ι, *Κ, *Λ), y, sin embargo, quedan dos puntos de corte sin designar (entre el arco *BΓ* y el *ΓΔ*). Según la figura generalmente conocida, tendríamos lo siguiente en este punto de la construcción con las letras que aparecen hasta este momento (fig. 9):

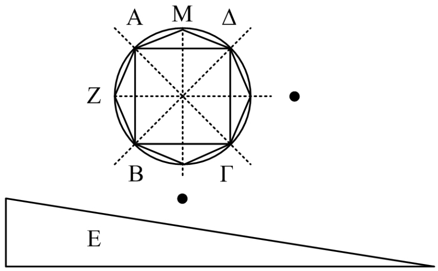

Fig. 9.

En la figura precedente se ve claramente lo que acabamos de exponer. Faltan los puntos indicados por (•); hasta la *Z* hay uso sistemático de las letras del alfabeto por su orden (*A, B, Γ, Δ, E, Z*); se continúa por la *M*, a partir de la cual se seguirán usando sistemáticamente por su orden (ver Fig. 3) las letras (*M, N, Ξ, O, Π, P*), y queda una laguna sistemática desde la *Z* a la *M* (*H, Θ, I, K, Λ*), siendo necesarias las designaciones de los dos puntos indicados (•); precisamente la seguridad de Heiberg de que en un pasaje hay una laguna que se sugiere suplir con *«<y llévense las rectas BZ, ZA, AM, MA etcétera>»*, se debe a que faltan letras necesarias y la figura no se ha restaurado. Es necesario restaurar la figura para poder conjeturar incluso en lugares claros y en el camino correcto.

Si siguiéramos, para designar dichos dos puntos, la serie de letras por orden alfabético desde la *Z*, tendríamos **H* y **Θ* para (•), y deberíamos situar, donde está la *M*, o bien la **I*, o bien la **K* (si prescindimos del uso de la **I*). Pero la coherencia textual no lo permite: la siguiente letra nueva que se usará será la *N* (ver fig. 3), que es la siguiente a la existente *M*, y después las que siguen a la *N*. Por tanto, la cuestión es dónde situar las letras que faltan desde la siguiente a la *Z* de manera que podamos designar los puntos indicados (•) y la *M* permanezca en su lugar.

6. La única posibilidad de resolver la cuestión es, a nuestro juicio, partir de una asunción perfectamente coherente con lo que sabemos del proceder de Arquímedes:

1º. Arquímedes tiene dibujada, antes de redactar su obra, la figura con los elementos fundamentales, al menos:
   a) Círculo.
   b)Triángulo rectángulo.
   c) Cuadrado inscrito (para la primera parte de la demostración).
   d) Cuadrado circunscrito (para la segunda parte de la demostración).
   e) Probablemente, también las dos figuras rectilíneas.

2º. Al ir exponiendo, va asignando letras a los puntos.

3º. Al asignar puntos de bisección inscrita, designa tres vértices del cuadrado circunscrito, que ya está dibujado, siguiendo un riguroso orden alfabético:

a) Antes de designar el punto de corte del arco *ΒΓ*, designa el vértice izquierdo inferior del cuadrado circunscrito (con *Η*) y, luego, el punto de corte con *Θ*.

b) Antes de designar el punto de corte del arco *ΓΔ*, designa el vértice derecho inferior del cuadrado circunscrito (con *Ι*) y, luego, el punto de corte con *Κ*.

c) Antes de designar el punto de corte del arco *ΔΑ*, designa el vértice superior derecho del cuadrado circunscrito (con *Λ*) y, luego, el punto de corte con *Μ*, que es lo que aparece, y estaríamos en el siguiente punto del proceso (10):

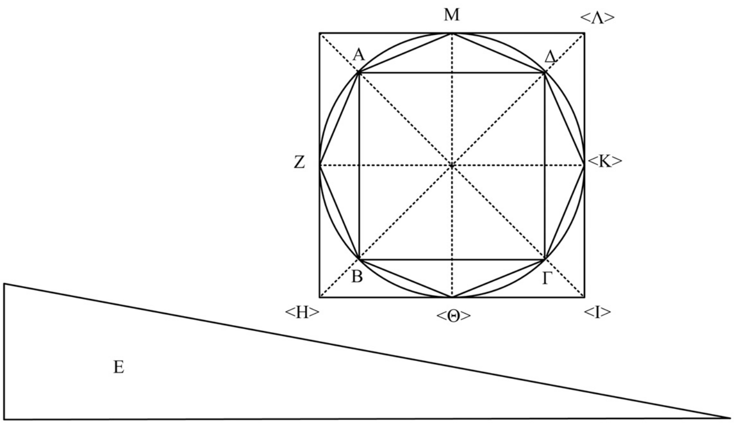

FIG. 10.

Y 4º. Deja de designar el vértice superior izquierdo del cuadrado circunscrito, porque Arquímedes está dentro de la primera parte de la demostración, cuya preparación, tras la figura rectilínea inscrita terminada de designar con la Μ, continúa con la construcción de su apotema, y lo pertinente es partir del centro y construirla; luego, se argumenta y se concluye la primera parte de la demostración, que es lo que hace. El vértice superior izquierdo del cuadrado circunscrito es pertinente en la segunda parte, para la que tiene ya construido el cuadrado circunscrito y sólo pendiente de designar su vértice superior izquierdo, sobre el cual trabajará: y así encontramos que es entonces cuando, siguiendo, a partir de la última letra usada en la primera parte (que es la *Ξ*), se designan los puntos necesarios con la Ο, Π, Ρ (ver fig. 3). Además, cuando dice 'tómese el centro Ν' (o 'por centro el [punto] Ν') el centro está ya construido: hay dos series de diámetros perpendiculares entre sí (ΑΓ, ΒΔ para construir el círculo e inscribir el cuadrado; y Ζ<Κ>, Μ<Θ> para bisecar los arcos de circunferencia subtendidos por los lados de dicho cuadrado). Tomar por centro Ν supondría dibujar o considerar *ΜΝ* como el radio de manera expresa, como elemento significativo de la preparación para la demostración, sobre la línea de traza del diámetro perpendicular (la palabra usada es εἰλήφθω[28], que significa 'tómese, considérese' y no 'constrúyase, trácese'). El centro se ha de tomar para, desde él, trazar la perpendicular al lado *AZ* de la figura rectilínea, que es su apotema, y poder ver que es menor que el cateto menor del triángulo rectángulo (que es igual al radio *MN*, según la determinación de límites). Por tanto, la primera parte de la demostración se cierra con las siguientes designaciones de la figura (fig. 11):

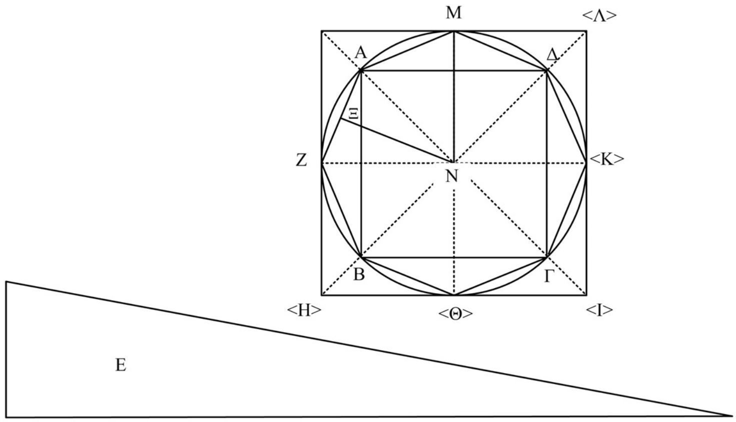

FIG. 11.

Al terminar la primera parte de la demostración (sea círculo>triángulo), se comienza la segunda (sea círculo<triángulo). Y se añade como específico 'circunscríbase **el** cuadrado', así, determinado pero sin designar (¿qué cuadrado?). En la primera parte se había designado por la diagonal *AΓ*. Aquí tendríamos el punto en que, reconstruida la figura, podría e incluso debería añadirse 'el cuadrado <OI>'[29], que ya está dibujado[30].

Después, simétricamente a la exposición de la primera parte, se continúa *«biséquense las circunferencias [los arcos determinados por las puntos de tangencia del cuadrado] y trácense tangentes por los puntos [de corte]: entonces, es recto el ángulo OAP»* y más adelante se menciona *«el triángulo ΡΟΠ»*, con lo que se terminan las designaciones, pero en un texto necesitado de reparación, cosa que también ha sido comentada por los especialistas.

Para bisecar, tenemos ya la prolongación de los dos diámetros iniciales. Pero, para trazar los lados de la figura rectilínea circunscrita con pulcritud metodológica

28 Precisamente el verbo λαμβάνω ('tomar, considerar') es el empleado para designar «los postulados». Ver, por ejemplo, *Sph.Cyl.* I: «ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ, Λαμβάνω δὲ ταῦτα» ('POSTULADOS, Postulo [asumo] esto:').

29 *OI* se confunde con el nominativo plural masculino del artículo. ¿Elemento añadido, junto a la inexistencia de letras en la figura, para explicar la facilidad de su desaparición en alguna fase de copia?

30 Digamos aquí que, en general, se usa el perfecto para las construcciones geométricas: ello marca el aspecto perfectivo en el sentido de 'quede inscrito, trazado...'. El perfecto sería una prueba lingüística de que ya se han dibujado las figuras cuando se redactan los textos.

para la demostración geométrica, se traza la recta *MZ* (que mencionamos antes como presente pero no explicada) y sus equivalentes en los demás vértices, para llevar como paralelos a ellas los cuatro lados correspondientes del octógono circunscrito: nótese que, de esta manera, es geométricamente demostrable que el ángulo OAP es recto (MZ es la cuerda del arco MAZ, que subtiende al ángulo recto comprendido entre dos radios perpendiculares: MN y NZ). Por ello, además, ON biseca dicho ángulo recto y es aplicable Euclides III.18 (si un radio corta a una tangente por el punto de tangencia, radio y tangente son perpendiculares entre sí y, por tanto, forman ángulos rectos).

De manera que la figura que debería existir y que permite resolver los problemas que hemos mencionado sería la siguiente (fig. 12):

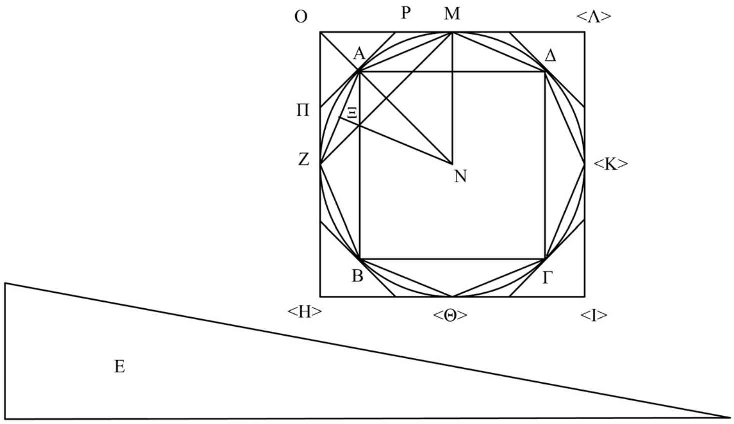

FIG. 12.

Tenemos todos los puntos significativos designados, menos seis vértices de la figura rectilínea circunscrita: pero ellos no son estructuralmente necesarios, al referirse como οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι (‘los sectores[31] semejantes al ΠΖΑ’) a los que no están en la zona del vértice O, sobre el que trabaja en la segunda parte de la demostración.

7. Veamos ahora cómo podríamos conjeturar verosímilmente, con pulcritud metodológica, el punto mencionado como paradigmático en el proceder de Heiberg, quien añade un «etcétera» por no haber reconstruido la figura (apartados 1 y 5).

La primera parte de la demostración (donde se situaría la figura y que según Heiberg falta en el Palimpsesto) es la siguiente:

[31] Para Heiberg, τομεῖ no sería aceptable en Arquímedes. Pero su crítica y su propuesta son dudosas, a mi juicio. Si hay que sustituir, más que ἀποτμήματι, nos parecería preferible algo como τόμῳ (‘trozos, partes’, en sentido general de la lengua, dado que su uso como tecnicismo es más especializado).

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος. καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον.	En efecto, si posible, sea mayor el círculo. Inscríbase el cuadrado ΑΓ; biséquense las circunferencias [los arcos], y sean ya los segmentos [en conjunto] menores que el exceso por el que el círculo supera al triángulo: entonces, incluso la [figura] rectilínea es mayor que el triángulo.

1º. Son conocidos el círculo y el triángulo, por lo que no se menciona sus designaciones, e incluso, en la hipótesis inicial, ni se cita a qué debe ser mayor el círculo.

2º. El elemento nuevo de la preparación es el cuadrado inscrito, que se menciona con su denominación, por ser la primera vez que aparece y estar determinado: *el cuadrado ΑΓ*.

3º. Dentro del estilo elíptico de Arquímedes, son perfectamente entendibles cuáles son *'las circunferencias'* (=las partes de circunferencia, los arcos cuyas cuerdas son los lados del cuadrado inscrito). Obsérvese que es la primera vez que se utiliza la palabra *'circunferencia'* (αἱ περιφέρειαι), referida precisamente a los arcos (como ocurre también en la segunda parte), siendo '*perímetro'* (ἡ περίμετρος) la denominación tanto de los perímetros de las figuras rectilíneas (a los que no se les llama octógonos), como de la circunferencia, en tanto que perímetro de la figura curva llamada 'círculo'.

4º. Pero, ¿cuáles son los segmentos [de círculo]? Es normal que, en griego, el plural (*'los segmentos'*) designe la suma de ellos, sin explicitar, por ejemplo, algo como συναμφότερα. Podrían incluso «suponerse», como antes «las circunferencias». Pero hay una diferencia entre uno y otro caso: inmediatamente antes de citar los arcos de circunferencia se han mencionado sus cuerdas, al decir que se inscriba un cuadrado (*«inscríbase el cuadrado ΑΓ y biséquense los arcos de circunferencia* [*sc.* «determinados por sus lados»]), pero, al referirse a los segmentos, no se ha dicho previamente que se unan los puntos que forman los lados de la figura rectilínea que se pide que sea aceptada como válida para la demostración y final del proceso del «método de exhausción», por lo que los segmentos no están suficientemente definidos, incluso dentro de un estilo elíptico de razonamiento.

Y 5º. Lo más extraño es que se termina el fragmento citado mencionando que «*la [figura] rectilínea*» (así, con artículo determinado, como algo ya conocido) *es también mayor que el triángulo* [no sólo lo es el círculo de la hipótesis de partida]». Es evidente lo que opina Heiberg aquí, puesto que propone un texto que termina con «etcétera»: tras decir que se biseque, sin duda se echa en falta la mención de que se tracen los lados, como hemos citado al final de los apartados 1 y 5. Traduce en latín, añadiendo entre <...> su sugerencia, *«(...) inscríbase el cuadrado ΑΓ, y divídanse los arcos en dos partes iguales, <y llévense las rectas BZ, ZA, AM, MA etcétera>*[3)]*, y sean ya los segmentos (...)»,* y exponiendo en la nota 3:

> *«Algo así habría añadido sin duda Arquímedes en la línea 9*[32] *. Verdaderamente en toda esta obrita el estilo de expresión y de razonamiento se desarrolla con una brevedad tan descuidada, que se reconoce más bien la mano de un extractor que la de Arquímedes».*

Pero Heiberg no propone texto griego, no completa la expresión que considera esperable de Arquímedes (pues, para ello, es preciso reconstruir la figura), y no resuelve lo que nos parece la prueba más clara de la existencia de una laguna: es preciso insertar, antes de donde aparece por primera vez en el texto, una referencia a la existencia de una figura rectilínea. Hay, además, otros puntos que en su traducción son completados como lagunas sin mencionar texto griego y que también estarían relacionados con el hecho de que faltan letras de designación de puntos significativos.

Nuestra propuesta de sanar el texto, utilizando la reconstrucción de la figura, en este pasaje tan claramente deficiente, es la siguiente:

TEXTO EXISTENTE	TEXTO PROPUESTO
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον.	Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, <*καὶ ἔστω τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν εὐθυγράμμου σχήματος πλευραὶ αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΒΘ, ΘΓ, ΓΚ, ΚΔ, ΔΜ, ΜΑ,*> καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον.
En efecto, si posible, sea mayor el círculo. Inscríbase el cuadrado ΑΓ, biséquense los arcos de circunferencia, y sean los segmentos [en conjunto] ya menores que el exceso por el que el círculo supera al triángulo: entonces, incluso la [figura] rectilínea es mayor que el triángulo.	En efecto, si posible, sea mayor el círculo. Inscríbase el cuadrado ΑΓ, biséquense los arcos de circunferencia, <*y sean Ζ, Θ, Κ, Μ los puntos [de corte]; trácense, como lados de una figura rectilínea, las [rectas] ΑΖ, ΖΒ, ΒΘ, ΘΓ, ΓΚ, ΚΔ, ΔΜ, ΜΑ,*> y sean los segmentos [en conjunto] ya menores que el exceso por el que el círculo supera al triángulo: entonces, incluso la [figura] rectilínea es mayor que el triángulo.

• <*καὶ ἔστω τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ σημεῖα*

En vez de pasar, tras *«biséquense los arcos de circunferencia»*, a suplir, como hace Heiberg, *«trácense las rectas...»*, consideramos más coherente con el estilo de

[32] Es decir, en griego, «(...) ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, <...> καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη (...)».

Arquímedes y con el hilo de razonamiento que se fijen los puntos de bisección. Esto es algo que ya podemos hacer, al tener reconstruida la figura: la expresión *καὶ ἔστω τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ σημεῖα* es perfectamente correcta en griego, tanto en expresión como en estilo. Tenemos, dentro del «estilo καί» general en la proposición y en la obra, *καὶ...καὶ* al comienzo de cada cláusula de contenido que se propone. Y tenemos, en la segunda parte de la demostración, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων ('y biséquense los arcos de circunferencia, y trácense tangentes por los puntos...'). La simetría expositiva entre ambas partes de esta proposición, y general en Arquímedes[33], apoyaría la existencia de τὰ σημεῖα ('los puntos') también en esta primera parte. Serían posibles las siguientes expresiones:

1) τὰ σημεῖα τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ
2) τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ σημεῖα
3) τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ τὰ σημεῖα
4) σημεῖα τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ
5) τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ
6) τὰ σημεῖα Ζ, Θ, Κ, Μ

La opción 5) τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ la rechazamos porque, aunque posible, no presenta la palabra σημεῖα, que habría que suponer (aunque es frecuente y tiene abundante apoyo contextual este tipo de elisiones), y destruye la mencionada simetría con la segunda parte.

La 4) σημεῖα τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ estaría apoyada contextualmente por τριγώνῳ τῷ Ε (texto dudoso: Heiberg preferiría τρίγωνον τὸ Ε), κέντρον τὸ Ν, κάθετος ἡ ΝΞ.

La 2) τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ σημεῖα se apoyaría, dentro de la proposición, en ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, τὸ ΑΓ τετράγωνον, τοῦ Ε τριγώνου (dos veces), τὸ ΡΟΠ τρίγωνον, τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος, τῷ ΠΖΑ τομεῖ, τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, τῷ Ε τριγώνῳ.

Las 1) τὰ σημεῖα τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ y 3) τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ τὰ σημεῖ son variantes de un mismo esquema: <u>artículo+elemento x +artículo+elemento y.</u> Es decir, repiten el artículo y sólo cambia el orden de los elementos **x** e **y**. Serían opciones poco apoyadas contextualmente en esta obra, aunque no en griego, ni en Arquímedes.

La 6) τὰ σημεῖα Ζ, Θ, Κ, Μ sería perfectamente posible, pero no apoyada contextualmente en esta proposición 1.

Debería elegirse entre el esquema 4) <u>sustantivo+artículo+designación </u>(σημεῖα τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ), el esquema 2) <u>artículo+designación+sustantivo </u>(τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ σημεῖα), que son variantes de una estructura cuya diferencia está en que el sustantivo σημεῖα no tiene el artículo inmediatamente delante y va en posición inicial o final del sintagma, o bien entre <u>uno de los esquemas 1) y 3)</u>, con duplicación del artículo, pero sin apoyo contextual en la propia proposición. En esencia, la opción, a nuestro juicio, está entre <u>el esquema 2) τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ σημεῖα,</u> o <u>el 4) σημεῖα τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ,</u> por hallarse suficientemente apoyados por el contexto de la proposición.

Hay varias razones para preferir el esquema 2) τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ σημεῖα al 4) σημεῖα τὰ Ζ, Θ, Κ, Μ, además de su mayor apoyo cuantitativo contextual: el orden

[33] Basta fijarse en la casi formularia expresión de enunciados en series enteras de proposiciones, por ejemplo.

modificador+modificado (‘los puntos [de corte] Z, Θ, K, M’) y, sobre todo, comienza por artículo, de manera que tendríamos una posible explicación de la laguna en el proceso de copia. Aceptado que el verbo que corresponde es *‘ser’* en imperativo singular –con sujeto neutro plural–, tendríamos al comienzo de la laguna *καὶ ἔστω τὰ* y el texto recibido empieza, después de καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, precisamente por *καὶ ἔστω τὰ τμήματα*. La historia de la crítica textual es abundante en casos en que un copista se salta líneas o sintagmas o palabras porque, después de escribir algo, al fijar de nuevo la vista en el texto que está copiando, continúa en un punto semejante a aquel en que debería haberse fijado. Heiberg señala mediante barra vertical (|) la longitud de las líneas de *El Método*, y su media estaría en torno a los 5 cm[34]. Según esto, podríamos suponer una columna aproximadamente así:

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων |
ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ |
τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν |
αἱ περιφέρειαι δίχα, *καὶ ἔστω τὰ* |
Ζ, Θ, Κ, Μ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν |
εὐθυγράμμου σχήματος πλευραὶ |
αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΒΘ, ΘΓ, ΓΚ, ΚΔ, ΔΜ, ΜΑ |
καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα |
τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος |
τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα |
ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον.

El copista pudo escribir δίχα, y, al levantar la vista, seguir por καὶ ἔστω τὰ que precede a τμήματα, en vez de καὶ ἔστω τὰ que sigue a δίχα, o, mejor aún, haber escrito καὶ ἔστω τὰ que sigue a δίχα y, luego, seguir tras καὶ ἔστω τὰ que precede a τμήματα.

- *καὶ ἐπεζεύχθωσαν εὐθυγράμμου σχήματος πλευραὶ αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΒΘ, ΘΓ, ΓΚ, ΚΔ, ΔΜ, ΜΑ, >*

El propio Heiberg, aquí y algo más adelante, presupone <*ducantur*> y <*ducatur*> para ‘trazar’. Literalmente ‘llévense, llévese’. El pasaje simétrico de la segunda parte, antes mencionado, tiene καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι, con el verbo ἄγω (‘llevar, trazar’). Pero en griego se emplea también como ‘trazar’, llevando una línea desde un punto hasta otro, el verbo ἐπιζεύγνυμι[35], compuesto de ζεύγνυμι (‘uncir al yugo, enganchar, unir’) y ἐπί (que significaría ‘de un punto hasta otro’). Por ello,

[34] Según Netz-Noel (2007: 85), el ancho de las dos columnas del palimpsesto, incluida su separación central, es de 5.5 pulgadas, o sea, 14.5 cm.

[35] Ver, por ejemplo, *Sph.Cyl.* I, axioma 1: γραμμαὶ (...) αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν (...) ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν [‘líneas (...) que están en las mismas [partes] que las rectas que unen sus extremos’, es decir, «que las rectas llevadas de un extremo hasta otro».

preferimos aquí ἐπεζεύχθωσαν («trácense uniendo los puntos» las rectas AZ...), y dejar ἄγω para más adelante («llévese como perpendicular la NΞ»).

Los puntos que hay que unir con rectas ya los tenemos al haber reconstruido la figura: A, Z, B, Θ, Γ, K, Δ, M, A, es decir, los ocho vértices del octógono. Por tanto, las rectas son –y en sentido contrario al que sugiere Heiberg, ya que el primer punto de corte es Z y el último es M– αἱ AZ, ZB, BΘ, ΘΓ, ΓK, KΔ, ΔM, MA, que conforman el perímetro del octógono regular inscrito.

Pero ya mencionamos que había un problema grave: ¿Dónde aparecería por primera vez la mención a la existencia de una figura rectilínea que más adelante se cita como algo conocido? Sería aquí, en este punto. Esas rectas constituyen el perímetro de la figura rectilínea. Por tanto, según el esquema 4) antes mencionado <u>sustantivo o sintagma sustantivo+artículo+designaciones</u>, proponemos *εὐθυγράμμου σχήματος πλευραὶ αἱ AZ, ZB, BΘ, ΘΓ, ΓK, KΔ, ΔM, MA.* Tanto en este caso como en algunos citados en apoyo contextual del esquema en la misma proposición (κέντρον τὸ N, κάθετος ἡ NΞ), los elementos que preceden al artículo podrían entenderse como predicativos o como término modificado:

a) κέντρον τὸ N: -tómese como centro el [punto] N
-tómese el centro N

b) κάθετος τὸ NΞ: -llévese como perpendicular la [recta] NΞ
-llévese la perpendicular NΞ

c) ἐπεζεύχθωσαν εὐθυγράμμου σχήματος πλευραὶ αἱ AZ, ZB, BΘ, ΘΓ, ΓK, KΔ, ΔM, MA:
-trácense, como lados de una figura rectilínea, las [rectas] AZ, ZB, BΘ, ΘΓ, ΓK, KΔ, ΔM, MA
-trácense los lados de una figura rectilínea AZ, ZB, BΘ, ΘΓ, ΓK, KΔ, ΔM, MA

De esta manera tenemos resueltos, de manera metodológicamente razonable, los puntos oscuros a los que nos referimos más arriba en el apartado 5:

-se mencionan los puntos de corte.
-se explicita que se tracen los lados del octógono inscrito.
-se menciona que ellos delimitan una figura rectilínea.
-y, al tener esos lados como cuerdas, ya se conocen cuáles son los segmentos circulares que, en conjunto, van a ser una superficie menor que el exceso por el que el círculo supera al triángulo. Tal como se mencionan los arcos que deben ser bisecados precisamente después de explicitar que se inscriba el cuadrado.

8. Hay otros puntos de la proposición que podrían beneficiarse de la restauración de la figura. Dejamos los lugares en que la figura no afecta. El texto anterior continúa así:

TEXTO EXISTENTE	TEXTO PROPUESTO
Εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν, καὶ............ κάθετος ἡ ΝΞ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΝΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. Ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ Ε τριγώνου· ὅπερ ἄτοπον.	Εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν, καὶ <*ἤχθω τῇ ΑΖ*> κάθετος ἡ ΝΞ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΝΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. Ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ Ε τριγώνου· ὅπερ ἄτοπον.
Tómese por centro el [punto] N, y.......... como perpendicular la [recta] NΞ: entonces, la NΞ [es] menor que el lado del triángulo. Pero también el perímetro de la [figura] rectilínea es menor que el lado restante, desde el momento en que también [es menor] que el perímetro del círculo: por consiguiente, la [figura] rectilínea [es] menor que el triángulo E, lo cual es precisamente absurdo.	Tómese por centro el [punto] N; <*trácese*> como perpendicular <*al [lado] AZ*> la [recta] NΞ: entonces, la NΞ [es] menor que el lado del triángulo. Pero también el perímetro de la [figura] rectilínea es menor que el lado restante, desde el momento en que también [es menor] que el perímetro del círculo: por consiguiente, la [figura] rectilínea [es] menor que el triángulo E, lo cual es precisamente absurdo.

• *καὶ <ἤχθω τῇ ΑΖ> κάθετος ἡ ΝΞ*

Heiberg traduce añadiendo <*ducatur*>: «llévese la perpendicular NΞ», entendiendo que, en εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν, καὶ κάθετος ἡ ΝΞ, sólo κέντρον τὸ Ν es sujeto de εἰλήφθω («tómese el centro N») y se necesita un verbo que signifique 'trazar', porque la apotema es un elemento que se dibuja nuevo, sin que haya líneas de traza aprovechables. Ya dijimos que aquí es adecuado el verbo ἄγω (imperativo singular ἤχθω), como aparece al comienzo de la segunda parte de la demostración: καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων («y llévense tangentes por los puntos»). Añadimos símplemente τῇ ΑΖ («[perpendicular] al [lado] AZ»), que ya tiene coherencia textual, según nuestra conjetura anterior (la perpendicular desde el centro al lado de un polígono es la apotema, que es NΞ).

Hay problema en lo relativo a la referencia al cateto menor (ἐλάσσων ἄρα ἡ ΝΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς), en correlación con el otro cateto (Ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων). Pero no está implicada la figura y lo dejamos de lado, como otros puntos.

9. En lo que sigue, la segunda parte de la demostración, hay una situación muy parecida a lo visto en la primera. El texto es:

TEXTO EXISTENTE	TEXTO PROPUESTO
Ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ. Ἡ ΟΡ ἄρα τῆς ΜΠ ἐστὶν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. Λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστὶν ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον· ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ.	Ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ <*OI*> τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων <*Α, Β, Γ, Δ εὐθυγράμμου σχήματος πλευραὶ αἱ τῇ ΠΡ ὅμοιαι*>· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ. Ἡ ΟΡ ἄρα τῆς ΜΠ ἐστὶν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. Λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστὶν ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον· ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ.
Sea, por el contrario, si posible, el círculo menor que el triángulo E. Circunscríbase el cuadrado, biséquense los arcos de circunferencia, y trácense tangentes por los puntos: entonces es recto el [ángulo] entre OAP. Pues bien, la [recta] OP es mayor que la MP –pues la PM es igual a la PA–: por tanto, también el triángulo POΠ es mayor que la mitad de la figura OZAM. Tómense los sectores semejantes al ΠZA [en conjunto] como mayores que el exceso por el que supera el [triángulo] E al círculo ABΓΔ: entonces, incluso la [figura] rectilínea circunscrita es menor que el E, lo cual es precisamente absurdo –en efecto, es mayor, porque, de una parte, la [recta] NA es igual al [lado] perpendicular del triángulo y, de otra, la [línea] perímetro es mayor que la base del triángulo. En consecuencia, el círculo [es] igual al triángulo E.	Sea, por el contrario, si posible, el círculo menor que el triángulo E. Circunscríbase el cuadrado <*OI*>*,* biséquense los arcos de circunferencia, y trácense, tangentes por los puntos <*A, B, Γ, Δ, como lados de una figura rectilínea, las [rectas] semejantes a la ΠP*>: entonces es recto el [ángulo] entre OAP. Pues bien, la [recta] OP es mayor que la MP –pues la PM es igual a la PA–: por tanto, también el triángulo POΠ es mayor que la mitad de la figura OZAM. Tómense los sectores semejantes al ΠZA [en conjunto] como mayores que el exceso por el que supera el [triángulo] E al círculo ABΓΔ: entonces, incluso la [figura] rectilínea circunscrita es menor que el E, lo cual es precisamente absurdo –en efecto, es mayor, porque, de una parte, la [recta] NA es igual al [lado] perpendicular del triángulo y, de otra, la [línea] perímetro es mayor que la base del triángulo. En consecuencia, el círculo [es] igual al triángulo E.

• *καὶ περιγεγράφθω*[36] *τὸ <ΟΙ> τετράγωνον*

Por simetría con la primera parte y por citarse por primera vez el cuadrado circunscrito con determinación de artículo, sería esperable la designación del cuadrado. Según nuestra reconstrucción, ya es posible: el cuadrado ΟΙ, así como el inscrito era ΑΓ. La inexistencia de letras en la figura y la posible confusión de ΟΙ con el nominativo plural masculino del artículo pudieron ayudar a su desaparición.

• *καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων <Α, Β, Γ, Δ εὐθυγράμμου σχήματος πλευραὶ αἱ τῇ ΠΡ ὅμοιαι>*

Aquí tenemos un caso semejante a la primera parte. Aunque ahora aparece la referencia a que se tracen las tangentes por los puntos, sin embargo:

1º. No se indican qué puntos.

2º. Como en la primera parte, se mencionará más adelante «la figura rectilínea» por primera vez, como algo ya conocido: debería haberse introducido antes en el proceso de 'preparación'.

a) Por lo que se refiere a los puntos (τῶν σημείων <*Α, Β, Γ, Δ*>), podríamos mantener el texto sin ser designados: al estar en el contexto de «trazar tangentes», podríamos sobreentender dentro del estilo elíptico normal en Arquímedes «por los puntos [de tangencia]», como en la primera parte comentábamos sobre «las circunferencias» que deben ser bisecadas (como en esta segunda parte sobre el mismo aspecto). Ahora bien, aquí se añade que «se tracen tangentes» (lo cual nos ha servido, para conjeturar, siguiendo a Heiberg, la necesidad de entender «únanse los puntos con rectas...»). Por simetría, añadimos aquí, con muchas dudas, <Α, Β, Γ, Δ>, aunque estos son los primeros cuatro puntos usados, para designar al círculo.

b) Pero la inclusión en este momento de la primera referencia a la figura rectilínea circunscrita nos parece tan necesaria como en la primera parte. Seguimos el mismo esquema propuesto antes, con la diferencia de que aquí, para designar los lados, nos basamos en la referencia que aparece más adelante a las partes que, sumadas, constituirán el área menor que el exceso por el que el triángulo supera al círculo (λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι, 'considérense los sectores [en conjunto] semejantes al ΠΖΑ'). Y, así, proponemos *αἱ τῇ ΠΡ ὅμοιαι* («las [rectas] semejantes a la ΠΡ»). Esto justifica que no sea necesario, como se indicó, seguir designando vértices del octógono circunscrito, hasta el final. Y la estructura sintagmática sería la misma que para la primera conjetura: sintagma sustantivo+artículo+designaciones, con la doble posibilidad de interpretar el sintagma sustantivo como predicativo o como elemento determinado:

36 Según Heiberg, en -γράφθω comenzaría C (el palimpsesto).

εὐθυγράμμου σχήματος πλευραὶ αἱ τῇ ΠΡ ὅμοιαι:
-(trácense, tangentes por los puntos Α, Β, Γ, Δ,) como lados de una figura rectilínea, las [rectas] semejantes a la *ΠΡ*.
-(trácense, tangentes por los puntos Α, Β, Γ, Δ,) los lados semejantes al *ΠΡ* de una figura rectilínea.

Hay otros aspectos susceptibles de crítica textual, pero no se ven afectados por la cuestión de la reconstrucción de la figura. Terminamos dedicando estas reflexiones como homenaje «al filólogo», como hacen Netz-Noel[37] en *The Archimedes Codex*: a Heiberg.

Bibliografía

Barrow, Isaac (1675), *Archimedis Opera methodo nova illustrata, & succincte demonstrata by Archimedes.* London: Guil. Godbid, Apud Robertum Scott.

Dijksterhuis, E. J. (1987): *Archimedes.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press [Translated by C. Dikshoorn. With a new bibliographic essay by Wilbur R. Knorr].

Euler, Leonhard (1748), *Introductio in Analysin Infinitorum.* Lausanne: Apud Marcum-Michaelem Bousquet and Socios.

Frajese, Attilio (1974), *Opere di Archimede.* Torino: Unione tipografico-editrice torinese.

Friedlein, Godofredi (1873), *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum comentarii.* Leipzig: Teubner [hay reimpr. de 1967].

Heiberg, J. L.-Menge, H (1883-1886), *Euclidis Opera Omnia.* Leipzig: Teubner.

Heiberg, Johan Ludvig (1972, reimpr.), *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii.*Corrigenda adiecit Evangelos S. Stamatis, Editio stereotypa editionis anni MCMX-MCMXV. Stuttgart: Teubner, 3 vols (1910-15², 3 vols. Leipzig: Teubner).

Heath, T. L. (Reimpr. n.d.), *The Works of Archimedes.* With a Supplement: *The Method of Archimedes*. New York: Dover Publications. [Recoge: *The Works of Archimedes,* 1897. Cambridge, y *The Method,* of 1912).

Jones, Alexander (2005), «The Works of Archimedes: Translation and Commentary. Volume 1: The Two Books *On the Sphere and the Cylinder*», en Notices of the AMS, Volume 52, Number 5, May 2005: pp. 520 ss.

Jones, William (1706), *A New Introduction to the Mathematics*. London.

Mugler, Ch. (1970-1972), *Archimède*. Paris: Société d' Édition *«Les Belles Lettres»* [avec «Commentaires d' Eutocius et Fragments»], 4 vols.

Netz, Reviel (1999), *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A Study in Cognitive History.* Cambridge: University Press.

Netz, Reviel (2004), *The Works of Archimedes.* Translated into English, together with Eutocius' commentaries, with commentary, and critical edition of the diagrams. Vol. I: The Two Books *On the Sphere and the Cylinder.* Cambridge: University Press.

Netz, Reviel-Noel, William (2007), *The Archimedes Codex. How a Medieval Prayer Book Is Revealing the True Genius of Antiquity's Greatest Scientist.* Philadelphia: Da Capo Press.

37 pp. 283-284: *«The Philologist.»*

Ver Eecke, Paul (1960²), *Les oeuvres complètes d'Archimède*, suivies des *Commentaires d'Eutocius d'Ascalon*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.
http://www.archimedespalimpsest.org/ [Información actualizada diversa de fuente original.]