REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 4, número 1: 1991.
http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.1991.v4.n1.17992

Courbes de semi-groupe donné

P. CASSOU-NOGUÈS

ABSTRACT. Soit f un élément de l'anneau $\mathbb{C}[[x,y]]$ des séries formelles à deux variables à coefficients complexes, irréductible et définissant une série convergente dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$. L'équation $f(x,y)=0$ définit une branche analytique complexe C. On dit que deux branches analytiques C et D ont le même type topologique si et seulement si C et D sont topologiquement équivalentes en tant que surfaces plongées dans $\mathbb{C}^2$. Soit $\mathcal{O}=\mathbb{C}[[x,y]]/(f)$, l'anneau local de la branche C et F son corps des fractions. D'après le théorème de Puiseux, la cloture intégrale de $\mathcal{O}$ dans F, est l'anneau $\mathbb{C}[[t]]$ des séries formelles à une indéterminée. C'est un anneau de valuation discrète. La valuation s'étend de façon naturelle à F, notée v. On note Γ le semi groupe $v(\mathcal{O})$. Zariski [Z] a montré que deux branches sont équisingulières si et seulement si elles ont même semi-groupe. On note $L(\Gamma)$ la classe d'équisingularité associée au semi groupe Γ.

Dans cer article, nous décrivons $L(\Gamma)$ pour un semi-groupe quelconque de courbes planes (Théorème 6). Nous donnons une condition necessaire et suffisante pour qu'un élément de $L(\Gamma)$ soit une courbe plane (Proposition 7), ainsi que les équations des courbes planes de semi-groupe Γ. Nous faisons aussi le calcul de la modalité en fonction des générateurs du semi-groupe.

Nous avons deux applications en vue, d'une part le calcul de la dimension de la composante générique de l'espace des modules, d'autre part, la démonstration de la conjecture de Yano qui décrit le polynôme de Bernstein d'une courbe générique semigroupe Γ. [CN1] [CN2].

PLAN DE L'ARTICLE

1980 Mathematics Subject Classification (1985 revision): 14B05, 14B07, 32G13.
Editorial de la Universidad Complutense. Madrid, 1991.

1) Méthode.
2) Déformation miniverselle de la courbe monomiale.
3) Dáformation équisingulière de la courbe monomiale.
4) Courbes planes de semi-groupe Γ.
5) Calcul de la modalité.
6) Equations des courbes planes.

4. Appendice.

1. SEMI-GROUPE D'UNE BRANCHE ANALYTIQUE

Nous rappelons ici, des résultats que l'on peut trouver dans [Z] et [E. N].

Soit $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ satisfaisant les hypothèses de l'introduction. Soit $f = f_n + f_{n+1} + \dots$ la décomposition de f en polynômes homogènes, $f_n \neq 0$. L'entier n est un invariant de la courbe appelé la multiplicité de C à l'origine. Le théorème de Puiseux dit que si $f_n(0, y) \neq 0$, alors C admet une représentation paramétrique de la forme

$$\begin{cases} x = t^n \\ y = \sum\limits_{i \geq m} a_i t^i \qquad m > n \end{cases}$$

A une telle représentation paramétrique, on associe une suite d'entiers $(n, \beta_1, .., \beta_g)$ appelée la *suite caractéristique*, de la façon suivante: On note β_1 le plus petit entier tel que $a_{\beta_1} \neq 0$ et $\beta_1 \not\equiv 0\,(n)$. Soit $e_1 = (n, \beta_1)$. Si $e_l = 1$, la suite caractéristique est (n, β_1). Si $e_1 > 1$, on note β_2 le plus petit entier tel que $a_{\beta_2} \neq 0$ et $\beta_2 \not\equiv 0\,(\beta_1)$. On note encore $e_2 = (\beta_1, \beta_2)$. Si $e_2 = 1$ la suite caractéristique est (n, β_1, β_2). Sinon on recommence.

Le processus s'arrête nécessairement. On obtient alors une suite d'entiers $(n, \beta_1, .., \beta_g)$ et une suite $e_1 > e_2 > .. > e_g = 1$ définie par récurrence par $e_0 = n$ et $e_i = (e_{i-1}, \beta_i)$. On définit $n_q = e_{q-1}/e_q$, $q = 1, ., g$.

Posons $\overline{\beta}_0 = \beta_0$, $\overline{\beta}_1 = \beta_1$

$$\overline{\beta}_q = n_{q-1}\overline{\beta}_{q-1} - \beta_{q-1} + \beta_q \qquad q = 2, ., g$$

Alors le semi-groupe Γ est le semi-groupe de $\mathbf{Z}_+$ engendré par $\overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1, .., \overline{\beta}_g$. On le note $\Gamma = \langle \overline{\beta}_0, \overline{\beta}_l, .., \overline{\beta}_g \rangle$. Il vérifie les propriétés suivantes:

i) $Z_+ - \Gamma$ est fini. En d'autres termes, il existe $c > 0$, tel que, pour tout $i \in Z_+$, l'inégalité $i \geq c$ implique $i \in \Gamma$. L'élément c s'appelle le *conducteur* du semi-groupe. On a

$$c = n_g \overline{\beta}_g - \beta_g - (n - 1)$$

ii) $\overline{\beta}_q$ est le plus petit élément de Γ qui n'appartient pas au semi-groupe engendré par $\overline{\beta}_0,..,\overline{\beta}_{q-1}$, mais $n_q\overline{\beta}_q \in <\overline{\beta}_0,...,\overline{\beta}_{q-1}>$ et $\overline{\beta}_{q+1} > n_q\overline{\beta}_q$.

Considérons les boules fermées B_ϵ, centrées en 0 de rayon ϵ. Notons S_ϵ la sphère qui borde B_ϵ. On peut montrer [E. N] que $S_\epsilon \cap C$ est un noeud dans S_ϵ. D'après les résultats de Brauner [B], c'est un noeud torique itéré [voir définition E. N] associé à la suite des paires de Newton.

$$((p_1, q_1); (p_2, q_2); ...; (p_g, q_g))$$

définies à partir de Γ par $p_i = n_i$ et $q_i = \overline{\beta}_i / n_{i+1} \dots n_g$.

La donnée de $\Gamma = <\overline{\beta}_0,..,\overline{\beta}_g>$ est équivalente à la donnée du noeud torique itéré $((p_1, q_1); (p_2, q_2); ...; (p_g, q_g)$ et les conditions ii) sur Γ donnent les inégalités

$$q_i > 0,\ p_i > 0,\ (p_i, q_i) = 1,\ q_i > q_{i-1}\, p_{i-1}\, p_{i-1}\, p_i.$$

On note Γ_m le semi-groupe associé au nooeud torique itéré

$$((p_1, q_1); (p_2, q_2); ...; (p_m, q_m))$$

pour $m = 1, ..., g$. ($\Gamma_g = \Gamma$). On a

$$\Gamma_m = <p_1 p_2 \dots p_m,\ q_1 p_2 \dots p_m, \dots,\ q_{m-1} p_m,\ q_m>$$

On va voir que l'on peut toujours calculer les invariants de Γ_{m+1} à partir de ceux de Γ_m et des invariants associés au semi-groupe $<p_{m+1}, q_{m+1}>$.

2. CAS DU SEMI-GROUPE $<p, q>$

Dans ce paragraphe, nous rappelons encore des résultats connus, mais qui sont fondamentaux pour la suite.

Soit $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+k}, 0)$ un germe d'espace analytique complexe à singularité isolée, de dimension n. On sait $[Tj]$ qu'il existe une *déformation miniverselle de* $(X_0, 0)$, c'est à dire un carré cartésien de germes d'espaces analytiques

$$\begin{tikzcd} (X_0, 0) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (X, 0) \arrow[d, "G"] \\ \{0\} \arrow[r, hook] & (S, 0) \end{tikzcd}$$

où G est un morphisme plat, carré qui de plus est versel pour les déformations, c'est-à-dire que toute autre déformation, i.e. carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} (X_0, 0) & \hookrightarrow & (Z, 0) \\ \downarrow & & \downarrow H \\ \{0\} & \hookrightarrow & (Y, 0) \end{array}$$

où H est plat, provienne du précédent par changement de base $h: (y, 0) \to (S, 0)$ à isomorphisme près, et la dimension de S est minima parmi les bases des déformations G qui ont cette propriété de versalité. (Nous avons donné la définition de la V-versalité, mais nous l'appliquons à des courbes monomiales, qui ont une $\mathbb{C}^*$ — action, et dans ce cas la V-versalité est équivalente à la R-versalité).

Soit C_0 la branche d'équation $f_0(x, y) = x^p + y^q = 0$. La déformation miniverselle de C_0 est alors donnée par une application

$$G : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^\mu \to \mathbb{C}^\mu.$$

La fibre de ce morphisme au point $v \in \mathbb{C}^\mu$ est une branche C_v d'équation

$$C_v = f_0(x, y) + \sum_{j=1}^{\mu} v_j s_j(x, y) = 0$$

où les $s_j(x, y)$ sont les μ monômes $x^\alpha y^\beta$, $(\alpha, \beta) \in E_{p,q}$ où

$$E_{p,q} = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq \alpha \leq p-2,\ 0 \leq \beta \leq q-2 \}$$

qui forment une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[[x, y]]/(y^{q-1}, x^{p-1})$. On apelle Defr (C_0) l'ensemble des courbes C_v, $v \in \mathbb{C}^\mu$.

Le semi-groupe de C_0 est $\Gamma = \langle p, q \rangle$. On a

Proposition 1. *Pour toute branche C_1 de $L(\Gamma)$, il existe dans Defr (C_0) une branche analytiquement isomorphe à C_1.*

Preuve. Supposons C_1 définie par

$$C_1 = \begin{cases} x = t^n \\ y = t^m + a_1 t^{m+1} + \ldots + a_p t^{m+p} + \ldots \end{cases}$$

Nous construisons une famille σ paramétrée par u, dont l'élément C_u est donné par

$$C_u = \begin{cases} x = t^n \\ y = t^m + a_1 \, u \, t^{m+1} + \ldots + a_p u^p \, t^{m+p} + \ldots \end{cases}$$

Si $u=0$ $C_u = C_0$ et si $u \neq 0$, C_u est analytiquement isomorphe à C_1. D'après la versalité de G, σ provient de G par changement de base. Il existe donc un élément de Defr (C_0) analytiquement isomorphe à C_1.

En considérant le polygone de Newton de C_v, $C_v \in$ Defr (C_0), on voit que C_v, définie par

$$f_v = y^q + x^p + \sum_{j=1}^{\mu} v_j s_j(x, y) = 0$$

est dans $L(\Gamma)$ si et seulement si $v_j = 0$ pour les monômes $s_j(x, y) = x^\alpha y^\beta$,

$$(\alpha, \beta) \notin E^+_{p,q} = \{ (\alpha, \beta) \in E_{q,p} \mid \alpha q + \beta p > pq \}$$

Donc toute branche de $L(\Gamma)$ est donc analytiquement isomorphe à une branche définie par

$$f_v = y^q + x^p + \sum_{(\alpha,\beta) \in E^+_{pq}} v_{\alpha,\beta} \, x^\alpha y^\beta$$

On note $\mu^+ = \text{Card } E^+_{p,q}$.

On a $\mu^+ = \dfrac{(p-3)(q-3)}{2} + \left[\dfrac{q}{p}\right] - 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p-2} \left(\left[\frac{kq}{p}\right] - 1 \right)$

3. ETUDE D'UN SEMI-GROUPE QUELCONQUE

1) Méthode

Nous utilisons ici la méthode préconisée par Teissier dans son appendice au cours de Zariski.

L'idée fondamentale est de considérer l'ensemble des courbes $C \subset (\mathbb{C}^{g+1}, 0)$ de semi-groupe $\Gamma = \langle \overline{\beta}_0, \ldots, \overline{\beta}_g \rangle$. On peut alors procéder de façon analogue à ce que l'on a fait précédemment puisque l'on dispose maintenant d'une courbe C_Γ qui va jouer le rôle de la courbe C_0. La courbe C_Γ est la courbe monomiale, définie par la représentation paramétrique

$$C_\Gamma : u_i = t^{\overline{\beta}_i} \qquad 0 \leq i \leq g$$

Teiser a démontré l'analogue de la proposition 1 [T, 1.3., Th 1].

Theoreme 1. *Toute branche $(C, 0)$ ayant pour semi-groupe Γ apparaît à isomorphisme près comme fibre générique d'une déformation analytique complexe à un paramètre de $(C_\Gamma, 0)$.*

2) Deformation miniverselle de C_Γ

Posons, pour tout $i \geq 2$

$$n_i \overline{\beta}_i = l_0^{(i)} \overline{\beta}_0 + l_1^{(i)} \overline{\beta}_1 + \ldots + l_{i-1}^{(i)} \overline{\beta}_{i-1}, \ l_j^{(i)} \in \mathbf{Z}_+$$

On choisit, pour $i \geq 2$ et $1 \leq j \leq i-1$ $l_j^{(i)} < n_j$. Avec un tel choix, le i-uple $(l_0^{(i)}, \ldots, l_{i-1}^{(i)})$ est unique. Alors C_Γ est encore définie par

$$\begin{cases} f_1 = u_1^p - u_0^q = 0 \\ f_2 = u_2^{n_2} - u_0^{l_0^{(2)}} u_1^{l_1^{(2)}} = 0 \\ f_3 = u_3^{n_3} - u_0^{l_0^{(3)}} u_1^{l_1^{(3)}} u_2^{l_2^{(3)}} = 0 \\ \ldots \\ f_g = u_g^{n_g} - u_0^{l_0^{(g)}} u_1^{l_1^{(g)}} \ldots u_{g-1}^{l_{g-1}^{(g)}} = 0. \end{cases}$$

La déformation miniverselle G de C_Γ peut être décrite comme restriction de la projection naturelle: $\mathbb{C}^{g+1} \times \mathbb{C}^\mu \to \mathbb{C}^\mu$ au sous espace $X \subset \mathbb{C}^{g+1} \times \mathbb{C}^\mu$, défini dans les coordonées $u_0, u_1, \ldots, u_g$ de $\mathbb{C}^{g+1}$, $w_1, \ldots, w_\mu$ sur $\mathbb{C}^\mu$ par l'idéal engendré dans $\mathbb{C}[u_0, \ldots, u_g, w_1, \ldots, w_\mu]$ par $F_1, \ldots, F_g$ où

$$F_i = f_i(u_0, u_1, \ldots, u_g) + \sum_{j=1}^{\mu} w_j s_{ij}(u_0, \ldots, u_g) \quad i = 1, \ldots, g$$

où les $\overline{s}_j = (s_{i,j})_{1 \leq i \leq g}$ sont définis de la façon suivante.

On considère l'homomorphisme surjectif

$$\mathbb{C}[u_0, \ldots, u_g]^g \to \mathbb{C}(C_\Gamma)^g$$

induit par la surjection canonique

$$\mathbb{C}[u_0, \ldots, u_g] \to \mathbb{C}[u_0, \ldots, u_g]/(f_1, \ldots, f_g) \simeq \mathbb{C}(C_\Gamma)$$

Soit N, le sous module de $\mathbb{C}(C_r)^g$, image par cet homomorphisme du sous module $\mathbb{C}[u_0, \ldots, u_g]^g$ engendré par les $g+1$ vecteurs

$$\overline{y}_0 = \left[\frac{\partial f_1}{\partial u_0}, \ldots, \frac{\partial f_g}{\partial u_0} \right], \ldots, \overline{y}_g = \left[\frac{\partial f_1}{\partial u_g}, \ldots, \frac{\partial f_g}{\partial u_g} \right]$$

Les vecteurs $\vec{s}_j \in \mathfrak{C}[u_0, \ldots, u_g]^g$ sont tels que leurs images dans $\mathfrak{C}(C_r)^g/N$ en forment une base comme $\mathfrak{C}$-espace vectoriel.

Pour décrire explicitement un système de vecteurs $\vec{s}_j$, on a besoin du théorème suivant qui explique comment on passe du m-ième noeud torique itéré au $(m+1)-$ième noeud torique itéré, on encore du semi-groupe Γ_m au semi-groupe Γ_{m+1}.

La courbe monomiale de semi-groupe Γ_m est définie par

$$C_m \begin{cases} f_1 = u_0^q - u_1^p = 0 \\ f_2 = u_2^{n_2} - u_0^{l_0^{(2)}} u_1^{l_1^{(2)}} = 0 \\ \ldots \\ f_m = u_n^{n_m} - u_0^{l_0^{(m)}} u_1^{l_1^{(m)}} \ldots u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}} = 0. \end{cases}$$

Notons, pour $0 \leq i \leq m$, $\vec{y}_i^{(m)} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial u_i}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial u_i}\right]$ ~~et N_m le sous-module~~ de $(\mathfrak{C}(C_m))^m$, image du sous-module de $\mathfrak{C}[u_0, \ldots, u_m]^m$ engendré par les $\vec{y}_i^{(m)}$ On note encore φ_m, l'homomorphisme

$$\mathfrak{C}(C_{m-1}) \to \mathfrak{C}(C_m)$$

induit par l'injection

$$\mathfrak{C}[u_0, \ldots, u_{m-1}] \to \mathfrak{C}[u_0, \ldots, u_m]$$

Alors:

Theoreme 2. *Il existe un homomorphisme injectif*

$$\Phi_m : \mathfrak{C}(C_{m-1})^{m-1}/N_{m-1} \to \mathfrak{C}(C_m)^m/N_m$$

induit par l'homomorphisme

$$\mathfrak{C}(C_{m-1})^{m-1} \to \mathfrak{C}(C_m)^m$$

$$(P_1, \ldots, P_{m-1}) \to (\varphi(P_1), \ldots, \varphi(P_{m-1}), 0)$$

La démonstration est faite en appendice.

On est maintenant en mesure de décrire une base de $\mathfrak{C}(C_\Gamma)^g/N$.

On définit par récurrence:

$$D'_{l_1,l_0}=\{(i,j)\in\mathfrak{N}^2 \mid 0\leq j\leq l_0-1,\ 0\leq i\leq p-1\}\cup$$
$$\{(i,j)\in\mathfrak{N}^2 \mid 0\leq j-l_0\leq q-1,\ 0\leq i\leq l_1-1\}\ \text{si } l_1\neq 0$$

$$D'_{l_1,l_0}=\{(i,j)\in\mathfrak{N}^2 \mid 0\leq i\leq p-1,\ 0\leq j\leq l_0-1\}\ \text{si } l_1=0$$

et $D_{l_1,l_0}=D'_{l_1,l_0}-(l_1+p-1,\ l_0-1)$

$$D'_{l_1,l_0,\dots,l_{m-1}}=$$

$$\{(i,j,\dots,k_{m-1})\in\mathfrak{N}^{m+1} \mid 0\leq k_{m-1}\leq n_{m-1}-1,\ (i,\ j,\dots,k_{m-2})\in D'_{l_1,l_0,\dots,l_{m-2}}=\}\cup$$

$$\{(i,j,\dots,k_{m-1})\in\mathfrak{N}^{m+1} \mid 0\leq k_{m-1}\leq l_{m-1}-1,\ (i-l_1,\ j-l_0,\dots,k_{m-2}-l_{m-2})$$
$$\in D'_{l_1^{(m-1)},\dots,l_{(m-2)}^{(m-1)}}\}\ \text{si } l_{m-1}\neq 0$$

$$D'_{l_1,\dots,l_{m-1}}=$$

$$\{(i,j,\dots,k_{m-1})\in\mathfrak{N}^{m+1} \mid 0\leq k_{m-1}\leq n_{m-1}-1,\ (i,j,\dots,k_{m-2})\in D'_{l_1,l_0,\dots,l_{m-2}}\}$$

si $l_{m=1}=0$

$$D_{l_1,l_0,\dots,l_{m-1}}=$$

$$\{(i,\ j,\dots,k_{m-1})\in D'_{l_1,\dots,l_{m-1}} \mid (i,\ j,\dots,k_{m-1})\neq$$
$$(p+l_1+\dots+l_1^{(m-1)}-1,\ l_0+\dots+l_0^{(m-1)}-1,\dots,l_{m-1}-1)\}$$

Theoreme 3. *On peut prendre comme base de $\mathfrak{C}(C_\Gamma)^g/N$, l'ensemble des images dans $\mathfrak{C}(C_\Gamma)^g/N$ des vecteurs*

$$\begin{bmatrix} u_0^j u_1^i u_2^{k_2}\dots u_g^{k_g} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (i,\ j)\in E_{p,q}, \\ pour\ 2\leq m\leq g,\ 0\leq k_m\leq n_m-1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u_0^j u_1^i u_2^{k_2} \dots u_g^{k_g} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (i, j) \in D_{l_1^{(2)}, l_0^{(2)}}, \quad 0 \leq k_2 < n_2 - 1 \\ \textit{pour } 3 \leq m \leq g, \quad 0 \leq k_m \leq n_m - 1 \end{array}$$

$\cdots$;

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ u_0^j u_1^i u_2^{k_2} \dots u_g^{k_g} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (i, j, \dots, k_{m-1}) \in D_{l_1^{(m)}, \dots, l_{m-1}^{(m)}}, \quad 0 \leq k_m < n_m - 1 \\ \textit{pour } m+1 \leq m' \leq g, \ 0 \leq k_{m'} \leq n_{m'} - 1 \end{array}$$

$\cdots$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ u_0^j u_1^i u_2^{k_2} \dots u_g^{k_g} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (i, j, \dots, k_{g-1}) \in D_{l_1^{(g)}, \dots, l_{g-1}^{(g)}}, \quad 0 \leq k_g < n_g - 1 \end{array}$$

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 3.

Grâce au théorème 1, on procède par récurrence.

$$(\mathbb{C}[u_0, u_1]/(f_1))/\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_0}, \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right) \text{ admet pour base } \{u_0^j u_1^i, \ (i, j) \in E_{p,q}\} = B_1.$$

Pour tout m, $1 \leq m \leq g$, on note B_m l'ensemble des images dans $\mathfrak{C}(C_m)^m/N_m$ des vecteurs

$$\begin{bmatrix} u_0^j u_1^i u_2^{k_2} \dots u_m^{k_m} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 0 \leq i \leq p-1, \quad 0 \leq j \leq q-1 \\ \text{Pour } 2 \leq m' \leq m, \quad 0 \leq k_{m'} \leq n_{m'}-1 \end{array}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ \begin{bmatrix} u_0^j u_1^i u_2^{k_2} \dots u_m^{k_m} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{array}{l} (i, j) \in D_{l_1^{(2)}, l_0^{(2)}} \\ 0 \leq k_2 < n_2 - 1 \\ \text{Pour } 3 \leq m' \leq m \quad 0 \leq k_{m'} \leq n_{m'} - 1 \end{array}$$

...

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ u_0^j u_1^i u_2^{k_2} \dots u_m^{k_m} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (i, j, \dots, k_{m-1}) \in D_{l_1^{(m)}, \dots, l_{m-1}^{(m)}} \\ \\ \\ 0 \leq k_m < n_m - 1 \end{array}$$

En supposant que B_{m-1} est une base de $\mathfrak{C}(C_{m-1})^{m-1}/N_{m-1}$, on démontre que B_m est une base de $\mathfrak{C}(C_m)^m/N_m$.

On note s_m la surjection canonique

$$s_m : \mathfrak{C}[u_0, \dots, u_m] \to \mathfrak{C}[u_0, \dots, u_m]/(f_1, \dots, f_m).$$

Soit

$$(s_m(P_1),\dots,s_m(P_m))\in \mathfrak{C}(C_m)^m/N_m.$$

On écrit, pour $1\leq m'<m$

$$s_m(P_{m'})=s_m(P_{m',0}(u_0,\dots,u_{m-1})+u_m P_{m',1}(u_0,\dots,u_{m-1})+\dots$$
$$\dots+u_m^{n_m-1}\ P_{m',n_m-1}(u_0,\dots,u_{m-1}))$$

Donc

$$\begin{bmatrix} s_m(P_1) \\ . \\ . \\ . \\ s_m(P_{m-1}) \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{k_m=0}^{n_m-1} \sum_{\bar{s}_j\in B_{m-1}} a_j \phi_m(\bar{s}_j)\, u_m^{k_m}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ s_m(P_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ s_m(P_{m,0}) \end{bmatrix} + u_m \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \\ \\ 0 \\ s_m(P_{m,1}) \end{bmatrix} + \dots + u_m^{n_m-2} \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ s_m(P_{m,n_m-2}) \end{bmatrix} + Q\bar{\gamma}_m^{(m)}$$

Nous utilisons le lemme suivant, dont la preuve est reportée à la fin de la démonstration du théorème 3.

Lemme 4. *Pour tout m*

$\{u_1^j u_0^i\dots u_{m-1}^{k_{m-1}},\ (i,j,\dots,k_{m-1})\in D'_{l_1,\dots,l_{m-1}}\}$ *est un système générateurs de* $(\mathfrak{C}[u_0,\dots,u_{m-1}]/(f_1,\dots,f_{m-1}))/(u_1^{l_1}u_2^{l_2}\dots u_{m-1}^{l_{m-1}})$

On a alors

$$s_m(P_{m,k})=s_m\Big(\sum_{D'_{l_0^{(m)},\dots,l_{m-1}^{(m)}}} a^{(k)}_{i,j,\dots,k_{m-1}}\, u_1^i u_0^j\dots u_{m-1}^{k_{m-1}} + u_0^{l_0^{(m)}}\dots u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}} R_k\Big)$$

On peut écrire

$$\left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{l_i^{(m)}}{\overline{\beta}_i}\right]\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ u_0^{l_0^{(m)}} \cdots u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{u_i}{\overline{\beta}_i} \vec{\gamma}_i^{(m)}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ s_m(P_m) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n_m-2} u_m^k \sum_{D_{l_0^{(m)} \cdots l_{m-1}^{(m)}}} a_{i,j\ldots k_{m-1}}^{(k)} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ u_1^i u_0^j \ldots u_{m-1}^{k_{m-1}} \end{bmatrix} (N_m).$$

On a un système de générateurs.

Pour montrer que c'est une base, on vérifie que c'est un système maximal de générateurs. D'après A'Campo [A'C], on sait que si

$$\mu_m = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C_m)^m / N_m,$$

on a

$$\mu_m = n_m \mu_{m-1} + (n_m - 1)(q_m - 1)$$

$$\mu_m = n_m \mu_{m-1} + \mu_{<n_m, q_m>}$$

Notons $\mu'_m = \# B_m$. On a $\mu'_1 = \mu_1 = (p-1)(q-1)$. On vérifie que $\mu'_m = n_m \mu'_{m-1} + \mu_{<n_m, q_m>}$

Pour démontrer cette relation, il est donc nécessaire et suffisant de montrer que

$$\# D'_{l_1^{(m)}, \ldots, l_{m-1}^{(m)}} = q_m.$$

On démontre ceci par récurrence, puisque

$$\# D'_{l_1, l_0, \ldots, l_{m-1}} = n_{m-1} \left[\# D'_{l_1, l_0, \ldots, l_{m-2}} \right] + l_{m-1} \left[\# D_{l_1^{(m-1)}, \ldots, l_{m-2}^{(m-1)}} \right].$$

$$\# D'_{l_1, l_0} = l_1 q + l_0 p = (l_1 \overline{\beta}_1 + l_0 \overline{\beta}_0) / n_2 \ldots n_g .$$

Donc

$$\# D'_{l_1^{(2)}, l_0^{(2)}} = q_2$$

Supposons que

$$\# D'_{l_1, l_0, \ldots, l_{m-2}} = (l_0 \overline{\beta}_0 + l_1 \overline{\beta}_1 + \ldots . + l_{m-2} \overline{\beta}_{m-2}) / n_{m-1} \ldots n_g$$

Alors

$$\# D'_{l_1^{(m-1)}, \ldots, l_{m-2}^{(m-1)}} = q_{m-1}$$

et

$$\# D'_{l_1, l_0, \ldots, l_{m-1}} = (l_0 \overline{\beta}_0 + l_1 \overline{\beta}_1 + \ldots . + l_{m-2} \overline{\beta}_{m-2} + l_{m-1} \overline{\beta}_{m-1}) / n_m \ldots n_g$$

Donc

$$\# D'_{l_1^{(m)}, l_0^{(m)}, \ldots, l_{m-1}^{(m)}} = q_m$$

Le théorème 3 est démontré.

Il nous reste donc à démontrer le lemme 4.

Le lemme 4 se démontre aussi par récurrence. Montrons tout d'abord que D'_{l_1, l_0} est un système de générateurs de $(\mathbb{C}[u_0, u_1]/(f_1))/u_1^{l_1} u_0^{l_0})$.

Soit $P \in \mathbb{C}[u_0, u_1]$

$$s_1(P(u_0, u_1)) = s_1 \Big(\sum_{i=0}^{p-1} P_i(u_0) u_1^i \Big)$$

$$s_1(P(u_0, u_1)) = s_1 \Big(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{l_0 - 1} a_{ij} u_0^j u_1^i +$$

$$+ u_0^{l_0} \sum_{i=0}^{l_1 - 1} \sum_{j=0}^{q-1} a_{ij} u_0^j u_1^i + u_0^{l_0} u_1^{l_1} S(u_0, u_1) \Big)$$

On suppose maintenant que $D'_{l_1, l_0, \dots, l_{m-1}}$ est un système de générateurs de $\mathbb{C}[u_0, \dots, u_{m-1}]/(f_1, \dots, f_{m-1})/u_1^{l_1} u_0^{l_0} \dots u_{m-1}^{l_{m-1}}$.

Soit $P \in [u_0, \dots, u_m]$

$$s_m(P(u_0, \dots, u_m)) = s_m\Big[\sum_{k_m=0}^{n_m-1} P_{k_m}(u_0, \dots, u_{m-1})\, u_m^{k_m}\Big]$$

$$s_{m-1}(P_{k_m}(u_0, \dots, u_{m-1})) =$$

$$s_{m-1}\Big[\sum_{(i, j, \dots, k_{m-1}) \in D'_{l_0, \dots, l_{m-1}}} a_{i, j, \dots, k_{m-1}}\, u_1^i u_0^j \dots u_{m-1}^{k_{m-1}} +$$

$$u_0^{l_0} \dots u_{m-1}^{l_{m-1}}\, Q_{k_m}(u_0, \dots, u_{m-1})\Big]$$

Donc

$$s_m(P(u_0, \dots, u_m)) = s_m\Big[\sum_{k_m=0}^{n_m-1} \sum_{D'_{l_0, \dots, l_{m-1}}} a_{i, j \dots k_{m-1}}\, u_1^i u_0^j \dots u_{m-1}^{k_{m-1}} u_m^{k_m} +$$

$$u_0^{l_0} \dots u_{m-1}^{l_{m-1}} \sum_{k_m=0}^{l_m-1} Q_{k_m}(u_0, \dots, u_{m-1})\, u_m^{k_m} + u_0^{l_0} \dots u_m^{l_m} R(u_0, \dots, u_m)\Big]$$

$$s_{m-1}(Q_{k_m}(u_0, \dots, u_{m-1})) =$$

$$s_{m-1}\Big[\sum_{(i, j \dots k_{m-1}) \in D'^{(m)}_{l_0, \dots, l_{m-1}^{(m)}}} a_{i, j \dots k_{m-1}}\, u_0^j u_1^i \dots u_{m-1}^{k_{m-1}} +$$

$$u_0^{l_0^{(m)}} \dots u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}}\, R_{k_m}(u_0, \dots, u_{m-1})\Big]$$

Or

$$s_m(u_0^{l_0^{(m)}} \dots u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}} u_m^{k_m}) = s_m(u_m^{k_m + n_m})$$

Donc

$$s_m(P(u_0, \dots, u_m)) = s_m\Big[\sum_{k_m=0}^{n_m-1} \sum_{D'_{l_0, \dots, l_{m-1}}} a_{i, j \dots k_{m-1}}\, u_1^i u_0^j \dots u_{m-1}^{k_{m-1}} u_m^{k_m} +$$

$$\sum_{k_m=0}^{l_m-1} \sum_{D'_{l_0^{(m)}, \dots, l_{m-1}^{(m)}}} a_{i, j, \dots k_{m-1}}\, u_0^{j+l_0} u_1^{i+l_1} \dots u_{m-1}^{k_{m-1}+l_{m-1}} u_m^{k_m} +$$

$$u_0^{l_0} \dots u_m^{l_m} S(u_0, \dots, u_m)\Big].$$

Le lemme 4 est démontré.

3) Deformation equisingulière de C_Γ

L'algèbre affine $\mathbb{C}(C) \subset \mathbb{C}^{g+1}$ est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à l'algèbre $\mathbb{C}[u_0,.. u_g]/(f_1,...,f_g)$, munie de la graduation de $\mathbb{C}[u_0,.. u_g]$ qui donne à u_i le poids $\overline{\beta}_i$ pour tout i, $0 \leq i \leq g$. On définit le degré d'un vecteur quelconque.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ u_0^j u_1^i u_2^{k_2} \dots u_g^{k_g} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

par $j\overline{\beta}_0 + i\overline{\beta}_1 + \dots + k_g \overline{\beta}_g - n_m \overline{\beta}_m$, si la composante non nulle est la m-ième composante.

On munit alors l'algèbre $\mathbb{C}[u_0,.., u_g, w_1,..., w_\mu]$ de l'unique graduation pour laquelle u_i est de poids $\overline{\beta}_i$, F_i de poids $n_i \overline{\beta}_i$, en posant deg $w_j = -$deg $\overline{s}_j$

On peut décomposer

$$\{1,..., \mu\} = P_+ \coprod P_-$$

où $$P_+ = \{j \in \{1,..., \mu\} \mid \deg w_j < 0\}$$

$$P_- = \{j \in \{1,..., \mu\} \mid \deg w_j > 0\}$$

On note $\mu_+ = \# P_+$

Teissier a démontré.

Proposition 5. *La déformation de C_Γ, obtenue de la déformation miniverselle $G: (X, C_\Gamma) \to (\mathbb{C}^\mu, 0)$ de C_Γ par changement de base* $\mathbb{C}^{\mu+} \times \{0\} \to \mathbb{C}^\mu$

est une déformation miniverselle à semi-groupe constant de C_Γ, de base réduite, dont toutes les fibres présentent un point singulier de semi-groupe Γ.

$$\begin{tikzcd}
(X^+, C) \arrow[r] & (X, C) \arrow[d] \\
(\mathfrak{C}^{\mu+} \times \{0\}, 0) \arrow[r] \arrow[u, "\Sigma"'] & (C^\mu, 0) = (S, 0)
\end{tikzcd}$$

Notons

$$E'_{p,q} = \{ (i, j) \in E_{p,q} \mid iq + jp > pq \}$$

$$D'_{l_1^{(2)}, l_0^{(2)}, k_2} = \{ (i, j) \in D_{l_1^{(2)}, l_0^{(2)}} \mid i\overline{\beta}_1 + j\overline{\beta}_0 > (n_2 - k_2)\overline{\beta}_2 \}$$

$$D'_{l_1^{(m)}, \dots, l_{m-1}^{(m)}, k_m} = \{ (i, j, \dots, k_{m-1}) \in D_{l_1^{(m)}, \dots, l_{m-1}^{(m)}} \mid (i\overline{\beta}_1 + j\overline{\beta}_0 + \dots + k_{m-1}\overline{\beta}_{m-1}) > (n_m - k_m)\overline{\beta}_m \}$$

On a donc

Theoreme 6. *La déformation miniverselle à semi-groupe constant de C_Γ est*

$$\begin{tikzcd}
X^+ \arrow[r] \arrow[d, "G"'] & \mathfrak{C}^{g+1} \times \mathfrak{C}^{\mu+} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\
\mathfrak{C}^{\mu+} &
\end{tikzcd}$$

où $X^+ \subset \mathfrak{C}^{g+1} \times \mathfrak{C}^{\mu+}$ est défini par

$$u_1^p - u_0^q + \sum_{(i,j) \in E'_{p,q}} h_{i,j} u_0^j u_1^i + \sum_{\substack{0 \le k_2 \le n_2 - 1 \\ \dots \\ 0 \le k_g \le n_g - 1 \\ (k_2, \dots, k_g) \neq (0, \dots, 0) \\ (i,j) \in E_{p,q}}} w^1_{k_g, \dots, k_2, j, i} u_g^{k_g} u_{g-1}^{k_{g-1}} \dots u_2^{k_2} u_0^j u_0^i = 0$$

$$u_2^{n_2} u_0^{l_0^{(2)}} u_1^{l_1^{(2)}} + \sum_{\substack{0 \le k_2 \le n_2 - 2 \\ (i,j) \in D'_{l_1^{(2)}, l_0^{(2)}, k_2}}} w^2_{k_2, j, i} u_2^{k_2} u_0^j u_1^i +$$

$$\sum_{\substack{0\leq k_3\leq n_g-1 \\ \cdots \\ 0\leq k_g\leq n_g-1 \\ (k_3,\dots,k_g)\neq(0,\dots,0) \\ 0\leq k_2\leq n_2-2 \\ (i,j)\in D_{l_1^{(2)},l_0^{(2)}}}} w^2_{k_g,\dots,k_2,j,i}\, u_g^{k_g} u_{g-1}^{k_g-1}\dots u_0^j u_1^i = 0$$

...

$$u_g^{n_g} - u_0^{l_0^{(g)}}\dots u_{g-1}^{l_{g-1}^{(g)}} + \sum_{\substack{0\leq k_g\leq n_g-2 \\ (i,j,\dots,k_{g-1})\in D^{\dagger}_{l_1^{(g)},\dots,l_{g-1}^{(g)},k_g}}} w^g_{k_g,\dots,j,i}\, u_g^{k_g}\dots u_0^j u_1^i = 0$$

4) Courbes planes dans la deformation equisingulière de C_0

Pour chaque fibre $(C,0)$ de la déformation équisingulière de C_Γ, on considère la dimension de plongement de $(C,0)$, c'est-à-dire le plus petit entier $e\in\mathfrak{N}$ tel que un voisinage U de 0 soit biholomorphe à un sous-espace complexe fermé d'un domaine de $\mathbb{C}^e$. On note $\mathrm{emb}_0 C$ cette dimension de plongement.

D'après le critère de Jacobi [G. R., p. 114], on a

$$\mathrm{emb}_0 C + rg_0(\vec{\gamma}_1,\dots,\vec{\gamma}_g) = g+1.$$

Or on a

$$(\vec{\gamma}_0\dots\vec{\gamma}_g)_{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & w^1_{0,\dots,0,1,0,0} & w^1_{0,\dots,1,0,0,0} & \cdots & w^1_{1,0,\dots,0} \\ 0 & 0 & 0 & w^2_{0,\dots,1,0,0,0} & \cdots & w^2_{1,0,\dots,0} \\ & & . & 0 & & \\ & & . & . & & \\ & & . & . & & w^{g-1}_{1,0,\dots,0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit donc

Proposition 7. *Les fibres qui sont isomorphes à des branches planes sont exactement celles telles que*

$$w^1_{0,\dots,1,0,0}\neq 0,\ w^2_{0,\dots,1,0,0,0}\neq 0,\dots,\ w^{g-1}_{1,0,\dots,0,0}\neq 0$$

5) Calcul de la modalité

Nous allons démontrer le résultat suivant:

Theoreme 8. *La modalité relative à la courbe C_m est donnée par la relation de récurrence*

$$\mu_m^+ = \mu_{m-1}^+ + \frac{3}{2}(n_m - 1)\mu_{m-1} + \mu^+_{<n_m, q_m>} - 1$$

où

$$\mu^+_{<n_m, q_m>} = (n_m - 3)(q_m - 3)/2 + [q_m/n_m] - 1$$

est la modalité relative au semi-groupe $<n_m, q_m>$.

(Pour la définition de la modalité, voir [A. G. V., p. 154].)

Preuve. On a la formule de récurrence

$$\mu_m^+ = \mu_{m-1}^+ + (n_m - 1)\mu_{m-1} + \sum_{k_m=0}^{n_m-2} \# D_{l_0^{(m)}, \ldots, l_{m-1}^{(m)}, k_m}$$

On note

$$d_{m,k} = \# D_{l_0^{(m)}, \ldots, l_{m-1}^{(m)}, k}$$

On va démontrer que pour tout m et tout k

$$d_{m,k} = \frac{\mu_{m-1}}{2} + \left[\frac{kq_m}{n_m}\right] - 1$$

Pour $m = 2$, on a $\frac{(p-1)(q-1)}{2} - 1 = \frac{1}{2}\mu_1 - 1$, couples (i, j) tels que $jp + iq > q_2$.

Donc $d_{2,0} = \frac{1}{2}\mu_1 - 1$.

Si $k \neq 0$, on a $\left[\frac{kq_2}{n_2}\right]$ couples tels que

$$q_2 - \frac{kq_2}{n_2} < jp + iq < q_2$$

Supposons que $d_{m-1,k} = \frac{\mu_{m-2}}{2} + \left[\frac{kq_{m-1}}{n_{m-1}}\right] - 1$ et montrons que

$$d_{m,k}=\frac{\mu_{m-1}}{2}+\left[\frac{kq_m}{n_m}\right]-1.$$

Si $l^{(m)}_{m-1}=0$

$D'_{l^{(m)}_1,\ldots,l^{(m)}_{m-1}}=$

$\{(i,j,k_2,\ldots,k_{m-1})\in \mathfrak{N}^{m+1}\mid 0\leq k_{m-1}\leq n_{m-1}-1,\ (i,j\ldots,k_{m-2})\in D'_{l^{(m)}_1,\ldots,l^{(m)}_{m-2}}\}$

$D'_{l^{(m)}_1,\ldots,l^{(m)}_{m-1},k}=$

$\{(i,j,k_2\ldots,k_{m-1})\in D'_{l^{(m)}_1,\ldots,l^{(m)}_{m-1}}\mid i\overline{\beta}_1+j\overline{\beta}_0+\ldots+k_{m-1}\overline{\beta}_{m-1}>(n_m-k)\overline{\beta}_m\}$

On rappelle que

$$l^{(m)}_1\overline{\beta}_1+l^{(m)}_0\overline{\beta}_0+\ldots+l^{(m)}_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}=n_m\overline{\beta}_m$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $d_{m-1,0}=\frac{\mu_{m-2}}{2}$ éléments $(i,j,\ldots,k_{m-2})$ tels que

$$i\overline{\beta}_1+j\overline{\beta}_0+\ldots+k_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}>l^{(m)}_1\overline{\beta}_1+\ldots+l^{(m)}_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}$$

et appartenant à $D'_{l^{(m)}_1,\ldots,l^{(m)}_{m-2}}$.

On a d'autre part $\left[\frac{k_{m-1}q_{m-1}}{n_{m-1}}\right]$ éléments de $D'_{l^{(m)}_1,\ldots,l^{(m)}_{m-2}}$ tels que

$$l^{(m)}_1\overline{\beta}_1+\ldots+l^{(m)}_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}<i\overline{\beta}_1+j\overline{\beta}_0+\ldots+k_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}+k_{m-1}\overline{\beta}_{m-1}<$$
$$l^{(m)}_1\overline{\beta}_1+\ldots+l^{(m)}_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}+k_{m-1}\overline{\beta}_{m-1}$$

Donc

$$d_{m,0}=\frac{\mu_{m-2}}{2}+\left(\sum_{k_{m-1}=1}^{n_{m-1}-1}\frac{\mu_{m-2}}{2}+\left[\frac{k_{m-1}q_{m-1}}{n_{m-1}}\right]\right)-1$$

$$=n_{m-1}\frac{\mu_{m-2}}{2}+\left(\sum_{k_{m-1}=1}^{n_{m-1}-1}\left[\frac{k_{m-1}q_{m-1}}{n_{m-1}}\right]\right)-1$$

$$=n_{m-1}\frac{\mu_{m-2}}{2}+\frac{1}{2}\mu_{<n_{m-1},q_{m-1}>}-1=\frac{1}{2}\mu_{m-1}-1$$

et

$$d_{m,k} = \frac{1}{2}\mu_{m-1} - 1 + \left[\frac{kq_m}{n_m}\right].$$

L'hypothèse de récurrence est donc démontrée pour le cas où $l_{m-1}^{(m)} = 0$:

Supposons maintenant que $l_{m-1}^{(m)} \neq 0$.

$D'_{l_1^{(m)}, l_0^{(m)}, \ldots, l_{m-1}^{(m)}} =$

$\{(i, j, k_2, \ldots, k_{m-1}) \in \mathfrak{N}^{m+1} \mid 0 \leq k_{m-1} \leq n_{m-1} - 1, (i, j, \ldots, k_{m-2}) \in D'_{l_1^{(m)}, \ldots, l_{m-2}^{(m)}}\} \cup$

$\{(i, j, k_2, \ldots, k_{m-1}) \in \mathfrak{N}^{m+1} \mid 0 \leq k_{m-1} \leq l_{m-1}^{(m)} - 1, (i - l_1^{(m)}, \ldots$

$$\ldots, k_{m-2} - l_{m-2}^{(m)}) \in D'_{l_1^{(m-1)}, \ldots, l_{m-2}^{(m-1)}}\}$$

$D''_{l_1^{(m)}, \ldots, l_{m-1}^{(m)}, k} = \{(i, j, \ldots, k_{m-1}) \in D'_{l_1^{(m)}, \ldots, l_{m-1}^{(m)}}$

$$\mid i\overline{\beta}_1 + \ldots + k_{m-1}\overline{\beta}_{m-1} > (n_m - k)\overline{\beta}_m\}$$

On a maintenant

$$l_1^{(m)}\overline{\beta}_1 + l_0^{(m)}\overline{\beta}_0 + \ldots + l_{m-1}^{(m)}\overline{\beta}_{m-1} = n_m\overline{\beta}_m$$

Montrons que si $\underline{0 \leq k}_{m-1} \leq l_{m-1}^{(m)} - 1$ et $(i, j, \ldots, k_{m-2}) \in D'_{l_1^{(m)}, \ldots, l_{m-2}^{(m)}}$, alors $i\overline{\beta}_1 + j\overline{\beta}_0 + \ldots + k_{m-1}\overline{\beta}_{m-1} < n_m\overline{\beta}_m$

Pour tout $(i, j, \ldots, k_{m-2}) \in D'_{l_1^{(m)}, \ldots, l_{m-2}^{(m)}}$, on a

$$i\overline{\beta}_1 + j\overline{\beta}_0 + \ldots + k_{m-2}\overline{\beta}_{m-2} < (l_1^{(m)} + l_1^{(m-2)} + \ldots + p - 1)\overline{\beta}_1 +$$
$$(l_0^{(m)} + l_0^{(m-2)} + \ldots - 1)\overline{\beta}_0 + \ldots + (l_{m-2}^{(m)} - 1)\overline{\beta}_{m-2}$$

Donc

$$i\overline{\beta}_1 + j\overline{\beta}_0 + \ldots + k_{m-2}\overline{\beta}_{m-2} < n_m\overline{\beta}_m - l_{m-1}^{(m)}\overline{\beta}_{m-1} + n_{m-2}\overline{\beta}_{m-2} +$$
$$\ldots + n_2\overline{\beta}_2 + p\overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_0 \ldots - \overline{\beta}_{m-2}$$

Or, pour tout i, $\overline{\beta}_i > n_{i-1}\overline{\beta}_{i-1}$.

On en déduit

$$i\overline{\beta}_1+j\overline{\beta}_0+\ldots+k_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}<n_m\overline{\beta}_m-(l_{m-1}^{(m)}-1)\overline{\beta}_{m-1}$$

c'est à dire

$$i\overline{\beta}_1+j\overline{\beta}_0+\ldots+k_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}+k_{m-1}\overline{\beta}_{m-1}<n_m\overline{\beta}_m-(l_{m-1}^{(m)}-1-k_{m-1})\overline{\beta}_{m-1}$$

On a $\frac{\mu_{m-2}}{2}$ éléments de $D'_{l_1^{(m)},\ldots,l_{m-2}^{(m)}}$ tels que

$$i\overline{\beta}_1+j\overline{\beta}_0+\ldots+k_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}>l_1^{(m)}\overline{\beta}_1+\ldots+l_{m-2}^{(m)}\overline{\beta}_{m-2}=$$
$$=n_m\overline{\beta}_m-l_{m-1}^{(m)}\overline{\beta}_m$$

Donc on a $\frac{\mu_{m-2}}{2}+\left[(k_m-l_{m-1}^{(m)})\frac{q_{m-1}}{n_{m-1}}\right]$ éléments tels que

(*) $i\overline{\beta}_1+j\overline{\beta}_0+\ldots+k_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}+k_{m-1}\overline{\beta}_{m-1}>n_m\overline{\beta}_m$ *pour* k_{m-1} fixé, donc si

$l_{m-1}^{(m)}\leq k_{m-1}\leq n_{m-1}-1$, on a

$$(n_{m-1}-l_{m-1}^{(m)})\,\frac{\mu_{m-2}}{2}+\sum_{k=0}^{n_{m-1}-l_{m-1}-1}\left[\frac{kq_{m-1}}{n_{m-1}}\right]$$

éléments qui vérifient cette propriété (*).

On a $\frac{\mu_{m-2}}{2}$ éléments de $D'_{l_1^{(m)},\ldots,l_{m-2}^{(m)}}$ qui vérifient

$$(i-l_1^{(m)})\overline{\beta}_1+\ldots+(k_{m-2}-l_{m-2}^{(m)})\overline{\beta}_{m-2}>n_{m-1}\overline{\beta}_{m-1},$$

c'est-à-dire

$$i\overline{\beta}_1+\ldots+k_{m-2}\overline{\beta}_{m-2}>n_{m-1}\overline{\beta}_{m-1}+n_m\overline{\beta}_m-l_{m-1}\beta_{m-1}$$

Donc on a

$$l_{m-1}^{(m)}\,\frac{\mu_{m-2}}{2}+\sum_{k=n_{m-1}-l_{m-1}^{(m)}}^{n_{m-1}-1}\left[\frac{kq_{m-1}}{n_{m-1}}\right]$$

éléments qui vérifient la propriété (*).

On trouve donc

$$d_{m,0} = n_{m-1} \frac{\mu_{m-2}}{2} + \sum_{k=0}^{n_{m-1}-1} \left[\frac{kq_{m-1}}{n_{m-1}}\right] - 1$$

$$d_{m,0} = n_{m-1} \frac{\mu_{m-2}}{2} + \mu_{<n_{m-1}, q_{m-1}>} - 1 = \frac{1}{2} \mu_{m-1} - 1$$

et

$$d_{m,k} = \frac{1}{2} \mu_{m-1} + \left[\frac{kq_m}{n_m}\right] - 1$$

Remarque. Si l'on note $(\mu-\mu^+)_m = \mu_m - \mu^+_m$ la codimension relative à la courbe C_m, on a la relation de récurrence

$$(\mu-\mu^+)_m = (\mu-\mu^+)_{m-1} + (\mu-\mu^+)_{<n_m, q_m>} - \frac{1}{2}(n_m - 1)\mu_{m-1}$$

où $(\mu-\mu^+)_{<n_m, q_m>}$ désigne la codimension relative au semi-groupe $<n_m, q_m>$.

I. Luengo (non publié) et J.-F. Mattei [M] ont aussi donné une formule pour le calcul de la modalité.

6) Equations des courbes planes

On considère la courbe C_1 donnée par

$$\begin{cases} \mathscr{F}_1 = u_1^p - u_0^q + u_2 = 0 \\ \mathscr{F}_2 = u_2^{n_2} - u_0^{l_0^{(2)}} u_1^{l_1^{(2)}} + u_3 = 0 \\ \mathscr{F}_3 = u_3^{n_3} - u_0^{l_0^{(3)}} u_1^{l_1^{(3)}} u_2^{l_2^{(3)}} + u_4 = 0 \\ \dots \\ \mathscr{F}_{g-1} = u_{g-1}^{n_{g-1}} - u_0^{l_0^{(g-1)}} u_1^{l_1^{(g-1)}} \dots u_{g-2}^{l_{g-2}^{(g-1)}} + u_g = 0 \\ \mathscr{F}_g = u_g^{n_g} - u_0^{l_0^{(g)}} u_1^{l_1^{(g)}} \dots u_{g-1}^{l_{g-1}^{(g)}} = 0. \end{cases}$$

D'après le paragraphe précédent, la déformation équisingulière de C_1 est donnée par

$$u_1^p - u_0^q + \sum_{(i,j)\in E^+_{p,q}} h_{i,j}\, u_0^j u_1^i + u_2 + \sum_{\substack{0\le k_2\le n_2-1\\ \dots\\ 0\le k_g\le n_g-1\\ (k_2,\dots,k_g)\neq(0,\dots,0)\\ (i,j)\in E_{p,q}}} w^1_{k_g,\dots,k_2,j,i}\, u_g^{k_g} u_{g-1}^{k_{g-1}} \dots u_2^{k_2} u_0^j u_1^i = 0$$

$$u_2^{n_2} - u_0^{l_0^{(2)}} u_1^{l_1^{(2)}} + \sum_{\substack{0\le k_2\le n_2-2\\ (i,j)\in D^+_{l_1^{(2)},\, l_0^{(2)},\, k_2}}} w^2_{k_2 j i}\, u_2^{k_2} u_0^j u_1^i + u_3 + \sum_{\substack{0\le k_3\le n_3-1\\ \dots\\ 0\le k_g\le n_g-1\\ (k_3,\dots,k_g)\neq(0,\dots,0)\\ 0\le k_2\le n_2-2\\ (i,j)\in D_{l_1^{(2)},\, l_0^{(2)}}}} w^2_{k_g k_2 j i}\, u_g^{k_g} u_{g-1}^{k_{g-1}} \dots u_0^j u_1^i = 0$$

$\dots$

$$u_g^{n_g} - u_0^{l_0^{(g)}} \dots u_{g-1}^{l_{g-1}^{(g)}} + \sum_{\substack{0\le k_g\le n_g-2\\ (i,j,\dots,k_{g-1})\in D^+_{l_1^{(g)},\dots,\, l_{g-1}^{(g)},\, k_g}}} w^g_{k_g,\dots,j,i}\, u_g^{k_g} \dots u_0^j u_1^i = 0 .$$

avec $w^1_{0,\dots,0,1,0,0} \neq -1$, $w^2_{0,\dots,0,1,0,0,0} \neq -1, \dots, w^{g-1}_{1,0,\dots,0} \neq -1$.

On va transformer la base de la déformation de telle sorte que l'on puisse éliminer et écrire les équations des courbes planes. Par contre on n'obtient plus une base monomiale.

On a, en notant $\vec{\Gamma}_i = \left[\dfrac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial u_i}, \dfrac{\partial \mathscr{F}_2}{\partial u_i}, \dots, \dfrac{\partial \mathscr{F}_g}{\partial u_i}\right]$

$$\vec{\Gamma}_2 = (1, n_2 u_2^{n_2-1}, -l_2^{(3)} u_0^{l_0^{(3)}} u_1^{l_1^{(3)}} u_2^{l_2^{(3)}-1}, \dots, -l_2^{(g)} u_0^{l_0^{(g)}} u_1^{l_1^{(g)}} u_2^{l_2^{(g)}-1}, \dots, u_{g-1}^{l_{g-1}^{(g)}})$$

$$\vec{\Gamma}_3 = (0, 1, n_3 u_3^{n_3-1}, -l_3^{(4)} u_0^{l_0^{(4)}} u_1^{l_1^{(4)}} u_2^{l_2^{(4)}} u_3^{l_3^{(4)}-1}, \dots, -l_3^{(g)} u_0^{l_0^{(g)}} u_1^{l_1^{(g)}} u_2^{l_2^{(g)}} u_3^{l_3^{(g)}-1}, \dots, u_{g-1}^{l_{g-1}^{(g)}})$$

$\dots$

$$\vec{\Gamma}_g = (0, 0, \dots, 1, n_g u^{n_g-1})$$

Considérons le vecteur $\vec{\delta}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où 1 est à la ième place. Alors

$$\vec{\delta}_i - \vec{\Gamma}_{i+1} = (0, \dots, 0, -n_{i+1} u_{i+1}^{n_{i+1}-1}, -l_{i+1}^{(i+2)} u_0^{l_0^{(i+2)}} \dots u_{i+1}^{l_{i+1}^{(i+2)}-1}, \dots)$$

$$\vec{\delta}_i - \vec{\Gamma}_{i+1} + n_{i+1} u_{i+1}{}^{n_{i+1}-1}\, \vec{\Gamma}_{i+2} =$$

$$(0, \dots, 0, 0, n_{i+1} n_{i+2} u_{i+1}{}^{n_{i+1}-1} u_{i+2}{}^{n_{i+2}-1} - l_{i+1}^{(i+2)} u_0^{l_0^{(i+2)}} \dots u_{i+1}^{l_{i+1}^{(i+2)}-1}, \dots)$$

Il existe donc pour tout i, un polynôme P_i tel que:

$\overline{\delta}_i \equiv (0, \ldots, P_i)\,(\vec{\Gamma}_{i+1}, \vec{\Gamma}_{i+2}, \ldots, \vec{\Gamma}_g)$

On peut donc écrire la déformation équisingulière de C_1

$$\left\{\begin{array}{l} u_1^p - u_0^q + \Sigma_{(i,j)\in E^{+h_{i,j}}_{p,q}} u_0^j u_1^i + u_2 = 0 \\ u_2^{n_2} - u_0^{l_0^{(2)}} u_1^{l_1^{(2)}} + \Sigma_{0\le k_2\le n_2-2}\, w^2_{q_2,j,i}\, u_2^{k_2} u_0^j u_1^i + u_3 = 0 \\ \\ u_g^{n_g} - u_0^{l_0^{(g)}} \ldots u_{g-1}^{l_{g-1}^{(g)}} + \Sigma_{\substack{0\le k_g\le n_g-2 \\ (i,j,\ldots k_{g-1})\in D_{l_1^{(g)},\ldots,l_{g-1}^{(g)},k_g}}} w^g_{k_g,\ldots,j,i}\, u_g^{k_g} \ldots u_0^j u_1^i + \end{array}\right.$$

$$\Sigma_{\substack{0\le k_2\le n_2-1 \\ 0\le k_g\le n_g-1 \\ (k_2,\ldots k_g)\neq(0,\ldots,0) \\ (i,j)\in E_{p,q}}} w^1_{k_g,\ldots k_2,j,i}\, P_1\, u_g^{k_g} u_{g-1}^{k_{g-1}} \ldots u_0^j u_1^i + \ldots +$$

$$\Sigma_{\substack{1\le k_g\le n_g-1 \\ 0\le k_{g-1}\le n_{g-1}-1 \\ (i,j\ldots k_{g-2})\in D_{l_1^{(g-1)},\ldots,l_{g-2}^{(g-1)}}}} w^{g-1}_{k_g,\ldots,i,j}\, P_{g-1}\, u_g^{k_g} \ldots u_0^j u_1^i = 0$$

4. APPENDICE

Nous allons ici démontrer le Théorème 2, que nous rapellons.

Théorème 2. *Il existe un homomorphisme injectif:*

$$\Phi_m : \mathfrak{C}(C_{m-1})^{m-1}/N_{m-1} \to \mathfrak{C}(C_m)^m/N_m$$

induit par l'homomorphisme

$$\mathfrak{C}(C_{m-1})^{m-1} \to \mathfrak{C}(C_m)^m$$

$$(P_1, \ldots, P_{m-1}) \to (\varphi(P_1), \ldots, \varphi(P_{m-1}), 0)$$

On rappelle aussi que φ_m est l'homomorphisme

$$\mathfrak{C}[u_0, \ldots, u_{m-1}]/(f_1, \ldots, f_{m-1}) \to \mathfrak{C}[u_0, \ldots, u_m]/(f_1, \ldots, f_m)$$

induit par l'injection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[u_0,..,u_{m-1}] & \longrightarrow & \mathbb{C}[u_0,..,u_m] \\ s_{m-1}\downarrow & & \downarrow s_m \\ \mathbb{C}[u_0,..,u_{m-1}]/(f_1,...,f_{m-1}) & \xrightarrow[\varphi_m]{} & \mathbb{C}[u_0,..,u_m]/(f_1,...,f_m) \end{array}$$

Notons Δ_m le déterminant des vecteurs

$$(u_0\,\bar{\gamma}_0\,,u_1\,\bar{\gamma}_1\,,...,u_{m-1}\,\bar{\gamma}_{m-1})$$

Lemme 9. *Pour tout m, $1\leq m\leq g$*

$$s_m(\Delta_m)=(-1)^m(\beta_0/\beta_m)\prod_{j=1}^{m} n_j s_m(u_j^{n_j})$$

Preuve. On utilise le fait, que pour tout m', $1\leq m'\leq m$

$$s_m\left[\sum_{i=0}^{m'}\frac{u_i}{\beta_i}\;\frac{\partial f_{m'}}{\partial u_i}\right]=0.$$

Soit $P=(P_1,..,P_m)\in\mathbb{C}[u_0,..,u_m]^m$. On note, pour tout j, $0\leq j\leq m-1$, $\Delta_{m,j}(P)$ le déterminant obtenu en remplaçant la j-ième colonne de Δ_m par P.

Lemme 10. *Si, pour tout i, $1\leq i\leq m$, P_i est divisible par $u_i^{n_i}$*

$$s_m(\Delta_{m,j}(P))\in\left(\prod_{j=1}^{m} s_m(u_j^{n_j})\right)\mathbb{C}(C_m).$$

Lemme 11. *Pour tout m,*

$$s_m\left[u_0^{l_0^{(m)}}\dots u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}}\right]\in\left[s_m(u_0^{l_0^{(m-1)}}\dots u_{m-2}^{l_{m-2}^{(m-1)}}\right]\mathbb{C}(C_m).$$

Preuve. On a

$$q_m=n_{m-1}\dots n_2\,l_1^{(m)}q+n_{m-1}\dots n_2\,l_0^{(m)}p+\dots+n_{m-1}\,l_{m-2}^{(m)}\,q_{m-2}+l_{m-1}^{(m)}\,q_{m-1}$$

$$q_{m-1}=n_{m-2}\dots n_2\,l_1^{(m-1)}q+n_{m-2}\dots n_2\,l_0^{(m-1)}p+\dots+l_{m-2}^{(m-1)}\,q_{m-2}$$

$$q_m-(l_{m-1}^{(m)}+n_{m-1})\,q_{m-1}=$$

$$n_{m-1}\dots n_2(l_1^{(m)}-l_1^{(m-1)})\ q+n_{m-1}\dots n_2(l_{(0)}^{(m)}-l_{(0)}^{(m-1)})\ p+$$

$$+\dots+n_{m-1}(l_{m-2}^{(m)}-l_{m-2}^{(m-1)}\ q_{m-2}$$

Or

$$q_m-(l_{m-1}^{(m)}+n_{m-1})\,q_{m-1}>(n_{m-1}(n_m-1)-l_{m-1}^{(m)})\,q_{m-1}>0$$

Il existe donc un indice $j\in\{0,.,m-2\}$ tel que

$$l_j^{(m)}-l_j^{(m-1)}\geq 0.$$

Si pour tout $j\in\{0,.,m-2\}$, $l_j^{(m)}-l_j^{(m-1)}\geq 0$, le lemme est démontré. Sinon, on considère le plus grand indice i tel que

$$l_i^{(m)}-l_i^{(m-1)}<0. \text{ Alors, pour } j>i, \text{ on a } l_j^{(m)}-l_j^{(m-1)}\geq 0.$$

On écrit

$$n_{m-1}\dots n_2(l_1^{(m)}-l_1^{(m-1)})\ q+n_{m-1}\dots n_2(l_0^{(m)}-l_0^{(m-1)})\,p+$$

$$+\dots+n_{m-1}\dots n_{i+1}(l_i^{(m)}-l_i^{(m-1)})\,q_i$$

$$=q_m-(l_{m-1}^{(m)}+n_{m-1})\,q_{m-1}-n_{m-1}\dots n_{i+2}(l_{i+1}^{(m)}-l_{i+1}^{(m-1)})\,q_{i+1}\dots-$$

$$-n_{m-1}(l_{m-2}^{(m)}-l_{m-1}^{(m-2)})\,q_{m-2}$$

On a $l_j^{(m)}\leq n_{j-1}$ pour tout $j>0$.

Donc

$$n_{m-1}\dots n_2(l_1^{(m)}-l_1^{(m-1)})\ q+n_{m-1}\dots n_2(l_0^{(m)}-l_0^{(m-1)})\,p+\dots+n_{m-1}\dots$$

$$\dots n_{i+1}(l_i^{(m)}-l_i^{(m-1)})\,q_i\geq(n_m(n_{m-1}-1)-l_{m-1}^{(m)})\,q_{m-1}\dots-n_{m-1}\dots$$

$$\dots n_{i+2}(n_{i+1}-1)\,q_{i+1}\dots-n_{m-1}(n_{m-2}-1)\,q_{m-2}$$

Pour tout i, $q_i\geqslant n_i n_{i-1} q_{i-1}$

$$n_{m-1}\dots n_2(l_1^{(m)}-l_1^{(m-1)})\,q+n_{m-1}\dots n_2(l_0^{(m)}-l_0^{(m-1)})\,p+\dots+n_{m-1}\dots$$

$$\dots n_{i+1}(l_i^{(m)}-l_i^{(m-1)})\,q_i\geq(n_m(n_{m-1}-1)-(l_{m-1}^{(m)}+1))\,q_{m-1}+n_{m-1}\dots$$

$$\dots n_{i+2}\,q_{i+1}\geq n_{m-1}\dots n_{i+2}\,q_{i+1}$$

$$n_i \ldots n_2 (l_1^{(m)} - l_1^{(m-1)})\, q + \ldots + n_i (l_{i-1}^{(m)} - l_{i-1}^{(m-1)})\, q_{i-1} \geq \frac{q_{i+1}}{n_{i+1}} - (l_i^{(m)} - l_i^{(m-1)})\, q_i$$

$$n_i \ldots n_2 (l_1^{(m)} - l_1^{(m-1)})\, q + \ldots + n_i (l_{i-1}^{(m)} - l_{i-1}^{(m-1)})\, q_{i-1} \geq \frac{q_{i+1}}{n_{i+1}} + q_i$$

$$n_i \ldots n_2 (l_1^{(m)} - l_1^{(m-1)})\, q + \ldots + n_i (l_{i-1}^{(m)} - l_{i-1}^{(m-1)} - l_{i-1}^{(i)})\, q_{i+1} \geq q_i > 0$$

Il existe donc un indice $j \in \{0, \ldots, i-1\}$

$$l_j^{(m)} - l_j^{(m-1)} - l_j^{(i)} \geq 0$$

Si ces inégalités sont vérifiées pour tout j, on a

$$s_m\big(u_0^{l_0^{(m)} - l_0^{(m-1)}}\, u_1^{l_1^{(m)} - l_1^{(m-1)}} \ldots u_{m-2}^{l_{m-2}^{(m)} - l_{m-2}^{(m-1)}}\big) =$$

$$s_m\big(u_0^{l_0^{(m)} - l_0^{(m-1)} - l_0^{(i)}}\, u_1^{l_1^{(m)} - l_1^{(m-1)} - l_1^{(i)}} \ldots u_i^{l_i^{(m)} - l_i^{(m-1)} + n_i} \ldots$$

$$\ldots u_{m-2}^{l_{m-2}^{(m)} - l_{m-2}^{(m-1)}}\big).$$

Donc le lemme est démontré. Sinon, on note i' l'indice tel que $l_{i'}^{(m)} - l_{i'}^{(m-1)} - l_{i'}^{(i)} < 0$ et $l_j^{(m)} - l_j^{(m-1)} - l_j^{(i)} \geq 0$ *pour* $j > i'$; on recommence.

Preuve du théorème 1

Notons

$$\Gamma = \big\{ (s_{m-1}(P_1), \ldots, s_{m-1}(P_{m-1})) \in \mathfrak{C}(C_{m-1})^{m-1} \mid (s_m(P_1), \ldots, s_m(P_{m-1}), 0) \in N_m \big\}$$

Montrons tout d'abord que si $(s_{m-1}(P_1), \ldots, s_{m-1}(P_{m-1})) \in \mathfrak{C}(C_{m-1})^{m-1}$,

et $(s_m(P_1), \ldots, s_m(P_{m-1}), 0) = 0$, alors $(s_{m-1}(P_1), \ldots, s_{m-1}(P_{m-1})) \in N_{m-1}$.

Si $(s_m(P_1), \ldots, s_m(P_{m-1}), 0) = 0$, alors pour tout m', $1 \leq m' \leq m-1$

$$P_{m'}(u_0, \ldots, u_{m-1}) = A_1^{(m')}(u_0, \ldots, u_m)\, f_1 + \ldots + A_m^{(m')}(u_0, \ldots, u_m)\, f_m$$

Donc pour tout m', $1 \leq m' \leq m-1$

$$P_{m'}(u_0, \ldots, u_{m-1}) = A_0^{(m')}(u_0, \ldots, u_{m-1}, 0)\, f_1 + \ldots + A_{m-1}^{(m')}(u_0, \ldots, u_{m-1}, 0)\, f_{m-1}$$

$$- A_m^{(m')}(u_0, \ldots, u_{m-1}, 0)\, u_0^{l_0^{(m)}}\, u_1^{l_1^{(m)}} \ldots u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}}.$$

Donc

$$s_{m-1}(P_{m'}) = -s_{m-1}(A_m^{(m')}(u_0,..,u_{m-1},0)\, u_0^{l_0^{(m)}} u_1^{l_1^{(m)}} .. u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}})$$

Montrons, que pour tout $Q_i \in \mathfrak{C}[u_0,..,u_{m-1}]$,

$$(s_{m-1}(Q_1 u_0^{l_0^{(m)}} u_1^{l_1^{(m)}} .. u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}}),..,s_{m-1}(Q_{m-1} u_0^{l_0^{(m)}} u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}})) \in N_{m-1}$$

On considère le système

$$Q_1 u_0^{l_0^{(m)}} u_1^{l_1^{(m)}} .. u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}} = B_0(u_0,..,u_{m-1})\, u_0 \frac{\partial f_1}{\partial u_0} + B_1(u_0,..,u_{m-1})\, u_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_0}$$

...

$$Q_{m-1} u_0^{l_0^{(m)}} u_1^{l_1^{(m)}} ... u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}} = B_0(u_0,..,u_{m-1})\, u_0 \frac{\partial f_{m-1}}{\partial u_0} +$$

$$+ ... + B_{m-2}(u_0,.,u_{m-1})\, u_{m-2} \frac{\partial f_{m-1}}{\partial u_{m-2}}$$

Les formules de Cramer s'écrivent

$$s_{m-1}(\Delta_{m-1})\, s_{m-1}(B_i(u_0,..,u_{m-1})) = s_{m-1}(\Delta_{m-1,i}(P))$$

où $P = (Q_1 u_0^{l_0^{(m)}} u_1^{l_1^{(m)}} .. u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}},..., Q_{m-1} u_0^{l_0^{(m)}} u_1^{l_1^{(m)}} ... u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}})$

D'après le lemme 11, $s_{m-1}(u_0^{l_0^{(m)}} .. u_{m-1}^{l_{m-1}^{(m)}})$ est divisible par $s_{m-1}(u_j^{n_j})$ pour $1 \leq j \leq m-1$. D'après le lemme 10, $s_{m-1}(\Delta_{m-1,i}(P))$ est donc divisible par $\prod_{j=1}^{m-1} s_{m-1}(u_j^{n_j})$ et d'après le lemme 9,

$$s_{m-1}(B_i(u_0,..,u_{m-1})) \in \mathfrak{C}(C_{m-1}).$$

Monstrons maintenant que $\mathcal{N} \subset N_{m-1}$

Soit $(s_{m-1}(P_1),...,s_{m-1}(P_{m-1})) \in \mathfrak{C}(C_{m-1})^{m-1}$ tel que $(s_m(P_1),..., s_m(P_{m-1}),0) \in N_m$. Alors

$$s_m(P_1) = s_m(A_0(u_0,..,u_m) \frac{\partial f_1}{\partial u_0} + A_1(u_0,.,u_m) \frac{\partial f_1}{\partial u_1})$$

...

$$s_m(P_{m-1})=s_m(A_0(u_0,\dots,u_m)\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial u_0}+\dots+A_{m-1}(u_0,\dots,u_m)\frac{\partial f_{m-1}}{\partial u_{m-1}})$$

$$0=s_m(A_0(u_0,\dots,u_m)\ \frac{\partial f_m}{\partial u_0}+\dots+A_m(u_0,\dots,u_m)\frac{\partial f_m}{\partial u_m})$$

D'après la remarque précédente, on en déduit que

$$\begin{bmatrix} s_{m-1}(P_1)-s_{m-1}(A_0(u_0,\dots,u_{m-1},0)\dfrac{\partial f_1}{\partial u_0}+A_1(u_0,\dots,u_{m-1},0)\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}) \\ \dots \\ s_{m-1}(P_{m-1})-s_{m-1}(A_0(u_0,\dots,u_{m-1},0)\dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial u_0}+ \\ +\dots+A_{m-1}(u_0,\dots,u_{m-1},0)\ \dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial u_{m-1}}) \end{bmatrix}\in N_{m-1}$$

donc $(s_{m-1}(P_1),\dots,s_{m-1}(P_{m-1}))\in\mathcal{N}_{m-1}$

Il reste à montrer que $N_{m-1}\in\mathcal{N}$.

Soit $(s_{m-1}(P_1),\dots,s_{m-1}(P_{m-1}))\in N_{m-1}$. Alors

$$s_{m-1}(P_1)=s_{m-1}(A_0(u_0,\dots,u_{m-1})\frac{\partial f_1}{\partial u_0}+A_1(u_0,\dots,u_{m-1})\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1})$$

$$s_{m-1}(P_2)=s_{m-1}(A_0(u_0,\dots,u_{m-1})\ \frac{\partial f_1}{\partial u_0}+A_1(u_0,\dots,u_{m-1})\frac{\partial f_1}{\partial u_1}+A_2(u_0,\dots,u_{m-1}))\frac{\partial f_1}{\partial u_2})$$

$\dots$

$$s_{m-1}(P_{m-1})=s_{m-1}(A_0(u_0,\dots,u_{m-1})\ \frac{\partial f_1}{\partial u_0}\ +\dots+A_{m-1}(u_0,\dots,u_{m-1})\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial u_{m-1}})$$

On veut montrer qu'il existe $B_0,\dots,B_m$ tel que

$$s_m(P_1)=s_m(B_0(u_0,\dots,u_m)\ \frac{\partial f_1}{\partial u_0}\ +B_1(u_0,\dots,u_m)\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1})$$

$$s_m(P_2)=s_m(B_0(u_0,\dots,u_m)\ \frac{\partial f_2}{\partial u_0}\ +B_1(u_0,\dots,u_m)\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\ +B_2(u_0,\dots,u_m)\ \frac{\partial f_2}{\partial u_2})$$

$\dots$

$$s_m(P_{m-1}) = s_m(B_0(u_0,..,u_m)\frac{\partial f_{m-1}}{\partial u_0} + ... + B_{m-1}(u_0,..,u_m)\frac{\partial f_{m-1}}{\partial u_{m-1}})$$

$$0 = s_m(B_0(u,..,u_m)\ \frac{\partial f_m}{\partial u_0}\ + ... + B_m(u_0,..,u_m)\ \frac{\partial f_m}{\partial u_m})$$

Les formules de Cramer donnent, pour $1 \leq i \leq m$,

$$s_m(\Delta'_m)\, s_m(B_i(u_0,..,u_m)) = s_m(\Delta'_{m,i}(Q))$$

où $\Delta'_{m,i}(Q)$ est le déterminant obtenu en remplaçant la i-ième colonne de Δ'_m

$$\Delta'_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

par

$$(P_1 - B_0\ \frac{\partial f_1}{\partial u_0}\ ,..., P_{m-1} - B_0\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial u_0}\ , - B_0\frac{\partial f_m}{\partial u_0})$$

Notons $\Delta'_{m-i}(P)$ le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de Δ'_m par $(P_1,..., P_{m-1}, 0)$. Alors

$$\Delta'_{m,i}(P) = \Delta'_{m-1,i}(P)\ \frac{\partial f_m}{\partial u_m}$$

où $\Delta'_{m-1,i}(P)$ est la déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de Δ'_{m-1} par $(P_1,.., P_{m-1})$.

D'après l'hypothèse

$$s_m(\Delta'_{m-1,i}(P)) = s_{m-1}(A_i)\, s_{m-1}(\Delta'_{m-1})$$

On a $s_m(\Delta'_m) = s_m(\prod_{j=1}^{m} n_j u_j^{n_j-1})$

$$s_m(\Delta'_{m,i}(P)) = s_m(A_i)\, s_m(\prod_{j=1}^{m} n_j u_j^{n_j-1})$$

On a aussi

$$s_m\left(\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}-\dfrac{\partial f_1}{\partial u_0} & \cdot & \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial u_1}-\dfrac{\partial f_m}{\partial u_0} & & \dfrac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} n_i u_i^{n_i-1}\right)=s_m\left(\prod_{j=0}^{m} n_j u_j^{n_j-1}\right)$$

Donc, si l'on choisit $B_0(u_0,\ldots,u_m)=\prod_{j=1}^{m} u_j^{n_j-1}$, on trouve

$B_1,\ldots,B_m \in \mathbb{C}[u_0\ldots,u_m]$, solution du système. Donc le théorème est démontré.

Addendum (20-09-91)

P. Jaworski a obtenu certains de nos résultats, par des méthodes différentes dans: «Normal forms and basis of local ring of irreducible germs of functions of two variables» Trudy Seminara im I. G. Petrovskogo Sem. n.º 13 (1988), p. 19-45.

Bibliographie

[A. G. V.] V. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GOUSSEIN-ZADE. *Singularités des applications diférentiables.* I. II. Editions Mir.

[A' C] N. A'CAMPO. *Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes.* Inv. Math. 20 (1973), 147-169.

[B] K. BRAUNER. *Zur geometrie der Funktionen zweier Veränderlichen.* II-IV. Abh. Math. Sem. Hamburg, 6 (1928) 1-54.

[CN1] P. CASSOU-NOGUÉS. *Polynôme de Bernstein pour le semigroupe* $<kp,\ kq,\ kpq+d>$. Peprint Bordeaux.

[CN2] P. CASSOU-NOGUÈS. *Calcul de la dimension de la composante générique de l'espace des modules* (manuscrit).

[E. N] D. EISENBUD, W. NEUMANN. *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities.* Annals of Mathematics studies Nb 110.

[G. R.] H. GRAUERT-R. REMMERT. *Coherent analytic sheaves.* Springer.

[LE] D. T. LE. *Sur les noeuds algébriques.* Thèse.

[M] J. F. MATTEI. *Modules de feuilletages holomorphes Déploiements équisinguliers.* Inv. Math. (à paraitre).

[T] B. TEISSIER. *Appendice au cours de Zariski.* Voir [Z].

[TJ] G. N. TJURINA. *Locally semi-universal flat deformations*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. t.33 (1969).

[Z] O. ZARISKI. *Le problème des modules pour les branches planes*. Cours donné à l'école polytechnique. (Oct.-Nov. 1973).

Université de Bordeaux I
Mathematiques et Informatique
351, Cours de la Liberation
33405 Talence Cedex
FRANCIA

Recibido: 13 de septiembre de 1989
Revisado: 20 de junio de 1990