

Volumen 8, número 2: 1995

[http://dx.doi.org/10.5209/rev\\_REMA.1995.v8.n2.17675](http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.1995.v8.n2.17675)

## Controlabilidad Exacta de la Ecuación del Telégrafo Generalizada

J.A. SORIANO

**ABSTRACT.** In this paper we present a study of the exact controllability, in the boundary, of the generalized telegraph equation

$$(K_1(x, t)y')' + K_2(x, t)y' + K_3(x, t)y - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = 0 \text{ en } Q,$$

where  $Q$  is the finite cylinder  $\Omega \times ]0, T[$  and  $\Omega$  is a bounded domain in  $\mathbb{R}^n$ . The result is obtained by the HUM (Hilbert Uniqueness Method) method introduced by J.L. Lions [8] and [9].

### 1. INTRODUCCION

Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$  con frontera  $\Gamma$  de clase  $C^2$  y  $Q$  el cilindro finito  $\Omega \times ]0, T[$  con frontera lateral  $\Sigma = \Gamma \times ]0, T[$ . Consideremos el sistema (\*) que sigue con condiciones de contorno no homogéneas:

---

1991 Mathematics Subject Classification:

Servicio publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1995.

$$\left\{ \begin{array}{l} (K_1(x, t)y')' + K_2(x, t)y' + K_3(x, t)y \\ \quad - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = 0 \text{ en } Q \\ y = v \text{ sobre } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y' \text{ en } \Omega \end{array} \right. \quad (*)$$

El problema de la controlabilidad exacta para el sistema (\*) se formula de la siguiente forma: "Dado  $T > 0$  suficientemente grande, es posible, para cada par de datos iniciales en un espacio apropiado sobre  $\Omega$ , hallar un correspondiente control  $v$ , tal que la solución  $y = y(x, t)$  de (\*), verifique la condición de reposo

$$y(T) = 0, y'(T) = 0."$$

El sistema (\*) es una generalización de la ecuación del telégrafo unidimensional:

$$CLy'' + (CR + GL)y' + GRy - y_{xx} = 0,$$

en donde  $C$ ,  $G$ ,  $L$  y  $R$  son los coeficientes de capacidad, pérdida, autoinducción y resistencia, respectivamente, calculados para la unidad de longitud, cf. A.N. Tijonov-A.A. Samarsky [19].

En este trabajo probaremos que el sistema (\*) es exactamente controlable. Para tal usamos el método HUM (Hilbert Uniqueness Method) propuesto por J.L. Lions [8] y [9]. esto es posible, gracias a que en nuestro caso tenemos unicidad, reversibilidad y regularidad de soluciones.

Interesado en la controlabilidad exacta para el sistema (\*) notamos que el caso  $K_1(x, t) = 1$ ,  $K_2(x, t) = K_3(x, t) = 0$  y  $a_{ij}(x, t) = \delta_{ij}a(t)$  fue estudiado por J.L. Lions [10] y J.E. Muñoz Rivera [17], y el caso  $K_1(x, t) = 1$ ,  $K_2(x, t) = K_3(x, t) = 0$  y  $a_{ij}(x, t) = \delta_{ij}a(x)$ , por E. Zuazua [21]. Seguidamente R. Fuentes [6] analizó la situación  $K_1(x, t) = 1$ ,  $K_2(x, t) = K_3(x, t) = 0$ . Nuestro análisis es diferente al de los autores mencionados arriba y los incluye.

Diversos autores usaron el método HUM en el estudio de la controlabilidad exacta de sistemas distribuidos, entre ellos podemos mencionar:

L.A. Medeiros [14], L.A. Medeiros-R. Fuentes [13], C. Fabre-J.P. Puel [5], E. Zuazua [20], [21], C. Fabre [4], V. Komornik [7] y M. Milla Miranda [15], [16].

## 2. RESULTADO PRINCIPAL

Primero introduciremos algunas notaciones (cf. J.L. Lions [9]). Sean  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $m(x)$  la función  $x - x^0$  y  $\nu(x)$  el vector normal unitario en  $x \in \Gamma$ , dirigida hacia el exterior de  $\Omega$ . Consideremos:

$$R(x^0) = \max_{x \in \Omega} \|m(x)\| = \max_{x \in \Omega} \left| \sum_{l=1}^n (x_l - x_l^0)^2 \right|^{1/2}$$

Dividimos la frontera  $\Gamma$  de  $\Omega$  en dos partes:

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}$$

$$\Gamma_*(x^0) = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\} = \Gamma \setminus \Gamma(x^0);$$

así como la frontera lateral  $\Sigma$ :

$$\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times ]0, T[$$

$$\Sigma_*(x^0) = \Gamma_*(x^0) \times ]0, T[ = \Sigma \setminus \Sigma(x^0).$$

Representemos por  $\lambda_1$  el primer autovalor del problema espectral  $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$ ,  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ .

Sean  $K_1, K_2, K_3, a_{ij} : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  funciones continuas.

Consideremos las siguientes hipótesis.

$$\left\{ \begin{array}{l} K(x, t) \geq \alpha_0 > 0, \forall t \in [0, T] \text{ c.t.p. en } \Omega \\ K_1 \in C([0, T]; W^{1, \infty}(\Omega)) \cap W^{2, \infty}(0, T; L^\infty(\Omega)) \\ K_1' \in L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega)) \\ \frac{\partial K_1}{\partial x_\ell} \in L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega)), 1 \leq \ell \leq n \end{array} \right. \quad (H1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_2 \in L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega)) \cap W^{2, \infty}(0, T; L^\infty(\Omega)) \\ K_2 \in W^{1, 1}(0, +\infty, L^\infty(\Omega)) \end{array} \right. \quad (H2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_3 \in W^{1, \infty}(0, T; L^\infty(\Omega)) \\ K_3 \in L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega)) \end{array} \right. \quad (H3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La matriz } (a_{ij}) \ 1 \leq i, j \leq n \text{ es simétrica y uniformemente} \\ \text{coerciva sobre } \bar{Q}, \text{ cierre de } Q. \\ a_{ij} \in C^1(\bar{Q}) \\ a''_{ij} \in L^\infty(Q) \\ a'_{ij} \in L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega)) \\ \text{Existe } \delta > 0 \text{ tal que} \\ (1 - \delta)a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}(x, t)}{\partial x_i} m_t \xi_i \xi_j \geq 0 \\ \forall \{x, t\} \in Q \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (H4)$$

(Aquí y en lo que sigue adoptamos el convenio que dos índices repetidos indicarán sumación).

Deseamos actuar solamente sobre una parte de la frontera  $\Sigma$ , lo que formularemos como sigue.

Consideremos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} (K_1(x, t)y')' + K_2(x, t)y' + K_3(x, t)y + A(t)y = 0 \text{ en } Q \\ y = \begin{cases} v \text{ sobre } \Sigma(x^0) \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma(x^0) \end{cases} \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \text{ en } \Omega \end{array} \right. \quad (2.1)$$

donde

$$A(t)y = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right).$$

En (4.17) daremos un tiempo especial  $T_0$  dependiendo de  $n, R(x^0), \lambda_1, \alpha_0, a_0, \delta$ , las funciones  $K_1, K_2, K_3, a_{ij}$  y sobre la geometría de  $\Omega$ .

Ahora enunciaremos el resultado principal de este trabajo.

**Teorema 2.1.** *Supongamos que las hipótesis (H1)-(H4) sean satisfechas. Sea  $T > T_0$ . Entonces, para cada dato inicial  $\{y^0, y^1\}$  perteneciendo a  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , existe un control  $v \in L^2(\Sigma(x^0))$  tal que la solución ultradébil  $y = y(x, t)$  del problema satisface*

$$y(T) = 0, \quad y'(T) = 0.$$

La prueba del teorema 2.1 será dada en las tres secciones siguientes.

### 3. EL PROBLEMA HOMOGÉNEO

Introduciremos algunas notaciones que usaremos a lo largo del trabajo. Con  $(\cdot, \cdot), |\cdot|$  denotaremos el producto escalar y la norma de  $L^2(\Omega)$  y con  $\|\cdot\|$ , la norma de  $H_0^1(\Omega)$  dada por la forma de Dirichlet. La dualidad entre el espacio  $F$  y su dual  $F'$  será denotada por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

En esta sección obtendremos la existencia y la identidad de la energía para soluciones del siguiente sistema homogéneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} (K_1(x,t)\phi')' - (K_2(x,t)\phi)' + K_3(x,t)\phi + A(t)\phi = f \text{ en } Q \\ \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 \text{ en } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Con dato  $\{\phi', \phi^1, f\}$  en  $H_0^1(\Omega \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)))$ . LLamaremos solución débil del problema (3.1) a la función  $\phi : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $\phi$  pertenece a la clase

$$\phi \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \phi' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}(K_1\phi', w) - ((K_2\phi)', w) + (K_3\phi, w) + a(t, \phi, w) = (f, w) \quad (3.2)$$

en el sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ ,  $\forall w \in H_0^1(\Omega)$  y las condiciones iniciales

$$\phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1.$$

Aquí,

$$\langle A(t)\phi, w \rangle = a(t, \phi, w) = \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx.$$

**Teorema 3.1.** Sean

$$\phi^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad \phi^1 \in H_0^1(\Omega), \quad f \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Entonces existe una única función  $\phi : Q \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} \phi \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad \phi' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \phi'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$(K_1\phi')' - (K_2\phi)' + K_3\phi + A(t)\phi = f \text{ c.t.p. en } Q. \quad (3.4)$$

$$\phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1. \quad (3.5)$$

El Teorema 3.1 se prueba aplicando el método de Faedo Galerkin con dos estimaciones. La solución  $\phi$  obtenida en el teorema 3.1 se llama solución fuerte del problema homogéneo (3.1).

El Teorema 3.1 nos permite obtener el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.** Sean

$$\phi^0 \in H_0^1(\Omega), \quad \phi^1 \in L^2(\Omega), \quad f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Entonces

Existe una única solución débil  $\phi$  del problema (3.1) perteneciendo a la clase

$$\phi \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (3.6)$$

La aplicación lineal

$$H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \quad (3.7)$$

$$\{\phi^0, \phi^1, f\} \mapsto \phi$$

es continua,  $\phi$  obtenida en (3.6).

La solución  $\phi$  hallada en (3.6) satisface

$$\frac{1}{2}|k_1^{1/2}(t)\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t, \phi(t), \phi(t)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} |K_1^{1/2}(0)\phi^1|^2 + \frac{1}{2} a(0, \phi^0, \phi^0) + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t a'(s, \phi(s), \phi(s)) ds - \frac{1}{2} \int_0^t (K_1'(s)\phi'(s), \phi'(s)) ds + \\
&+ \int_0^t (K_2(s)\phi'(s), \phi'(s)) ds + \int_0^t (K_2'(s)\phi(s), \phi'(s)) ds - \\
&- \int_0^t (K_3(s)\phi(s), \phi'(s)) ds + \int_0^t (f(s), \phi'(s)) ds.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

El Teorema 3.2 se prueba utilizando el teorema (3.1) mediante aproximaciones.

Ahora consideremos un problema homogéneo que será utilizado en el estudio de la regularidad de la solución  $y = y(x, t)$  del problema (\*) de la introducción. Esto es,

$$\left\{ \begin{array}{l} (K_1(x, t)\phi')' - (K_2(x, t)\phi)' + K_3(x, t)\phi + A(t)\phi = f' \text{ en } Q \\ \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0 \text{ en } \Omega \end{array} \right. \tag{3.9}$$

**Teorema 3.3.** Sean

$$f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), f' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), f(0) = 0.$$

Entonces la solución débil  $\phi$  del problema (3.9) satisface

$$\begin{aligned}
& |K_1^{1/2}(t)\phi'(t) - K_1^{-1/2}(t)f(t)| + \|\phi(t)\| \leq \\
& \leq c \int_0^T \|f(t)\| dt, \quad \forall t \in [0, T]
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

donde  $c$  es una constante independiente de  $\phi$  y  $f$ .

**Demostración:** La igualdad (3.8) del teorema 3.2 aplicada al problema (3.9) nos permite obtener:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}|K_1^{1/2}(t)\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t, \phi(t), \phi(t)) = \\
& \frac{1}{2} \int_0^t a'(s, \phi(s), \phi(s)) ds - \frac{1}{2} \int_0^t (K_1'(s)\phi'(s), \phi'(s)) ds + \\
& + \int_0^t (K_2(s)\phi'(s), \phi'(s)) ds + \int_0^t (K_2'(s)\phi(s), \phi'(s)) ds - \\
& - \int_0^t (K_3(s)\phi(s), \phi'(s)) ds + \int_0^t (f'(s), \phi'(s)) ds.
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

Integrando por partes y notando que  $f(0) = 0$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (f'(s), \phi'(s)) ds = (f(t), \phi'(t)) + \\
& + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_1'(s)f(s), \phi'(s)) ds - \\
& - \int_0^t (K_1^{-1}(s)f(s), (K_1\phi')'(s)) ds
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

sabemos que

$$(K_1\phi')' = f' - A(t)\phi + K_2\phi' + K_2'\phi - K_3\phi \quad (3.13)$$

sustituyendo (3.13) en (3.12) resulta

$$\begin{aligned} \int_0^t (f'(s), \phi'(s)) ds &= (f(t), \phi'(t)) + \\ &+ \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_1'(s)f(s), \phi'(s)) ds - \int_0^t (K_1^{-1}(s)f(s), f'(s)) ds + \\ &\int_0^t (K_1^{-1}(s)f(s), A(s)\phi(s)) ds - \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2(s)f(s), \phi'(s)) ds - \\ &\int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2'(s)f(s), \phi(s)) ds + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_3(s)f(s), \phi(s)) ds \end{aligned}$$

después de integrar por partes el tercer término del lado derecho de la igualdad anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^t (f'(s), \phi'(s)) ds &= (f(t), \phi'(t)) - \frac{1}{2}(K_1^{-1}(t)f(t), f(t)) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^t (K_1^{-2}(s)K_1'(s)f(s), f(s)) ds + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_1'(s)f(s), \phi'(s)) ds + \\ &+ \int_0^t (K_1^{-1}(s)f(s), A(s)\phi(s)) ds - \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2(s)f(s), \phi'(s)) ds - \\ &- \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2'(s)f(s), \phi(s)) ds + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_3(s)f(s), \phi(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.14)$$

De las igualdades (3.11) y (3.14) se obtiene fácilmente:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} |K_1^{1/2}(t)\phi'(t) - K_1^{-1/2}(t)f(t)|^2 + \frac{1}{2} a(t, \phi(t), \phi(t)) = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^t a'(s, \phi(s), \phi(s)) ds - \frac{1}{2} \int_0^t (K_1'(s)\phi'(s), \phi'(s)) ds + \\
 & + \int_0^t (K_2(s)\phi'(s), \phi'(s)) ds + \int_0^t (K_2'(s)\phi(s), \phi'(s)) ds - \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^t (K_1^{-2}(s)K_1'(s)f(s), f(s)) ds + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_1'(s)f(s), \phi'(s)) ds + \\
 & + \int_0^t (K_1^{-1}(s)f(s), A(s)\phi(s)) ds - \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2(s)f(s), \phi'(s)) ds - \\
 & - \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2'(s)f(s), \phi(s)) ds + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_3(s)f(s), \phi(s)) ds.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Haciendo  $\theta = K_1^{1/2}\phi' - K_1^{-1/2}f$  en (3.15) y sustituyendo  $\phi'$  por  $K_1^{-1/2}\theta + K_1^{-1}f$  en esta igualdad, obtenemos después de cálculos directos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} |\theta(t)|^2 + \frac{1}{2} a(t, \phi(t), \phi(t)) = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^t a'(s, \phi(s), \phi(s)) ds - \frac{1}{2} \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_1'(s)\theta(s), \theta(s)) ds + \\
 & + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2(s)\theta(s), \theta(s)) ds + \int_0^t (K_1^{-3/2}(s)K_2(s)f(s), \theta(s)) ds + \\
 & \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t (K_1^{-1/2}(s)K_2'(s)\phi(s), \theta(s)) + \int_0^t a(s, K_1^{-1}(s)f(s), \phi(s))ds + \\
& + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_3(s)f(s), \phi(s))ds.
\end{aligned}$$

Mayorando la igualdad (3.16) deducimos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 & \leq c \int_0^t (|\theta(s)|^2 + \|\phi(s)\|^2)ds + \\
& + c \int_0^t \|f(s)\|(|\theta(s)| + \|\phi(s)\|)ds,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

donde  $c$  es una constante independiente de  $\phi$  y  $f$ . Utilizando la desigualdad de Gronwall en la estimación (3.17) resulta

$$|\theta(t)| + \|\phi(t)\| \leq c \int_0^T \|f(s)\|ds. \tag{3.18}$$

Sustituyendo  $\theta$  por su definición en (3.18), se deduce la estimación (3.10). ■

#### 4. DESIGUALDAD DIRECTA E INVERSA

El objetivo de esta sección es estimar la derivada normal  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ ,  $\phi$  la solución débil del problema (3.1).

De acuerdo con la hipótesis (H4) tenemos

$$a_0 \xi_i \xi_i \leq a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq a_i \xi_i \xi_i, \quad \forall \{x, t\} \in \bar{Q}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n (a_0 > 0) \tag{4.1}$$

La energía del sistema (3.1) es

$$E(t) = \frac{1}{2}|K_1^{1/2}(t)\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t, \phi(t), \phi(t)) \tag{4.2}$$

en particular

$$E_0 = E(0) = \frac{1}{2}|K_1^{1/2}(0)\phi^1|^2 + \frac{1}{2}a(0, \phi^0, \phi^0).$$

**Teorema 4.1.** *Sea  $\phi$  la solución débil del problema (3.1). Entonces si  $f = 0$ ,*

$$E_0 e^{-C_0} \leq E(t) \leq E_0 e^{C_0}, \quad \forall t \in [0, \infty[ \quad (4.3)$$

donde,

$$\begin{aligned} C_0 = & \alpha_0^{-1} \|\beta\|_{L^1(0, +\infty)} + \alpha_0^{-1} \|K_1'\|_{L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega))} + \\ & + 2\alpha_0^{-1} \|K_2\|_{L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega))} + \alpha_0^{-1/2} \alpha_0^{-1/2} \lambda_1^{-1/2} \|K_2'\|_{L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega))} + \\ & + \alpha_0^{-1/2} \alpha_0^{-1/2} \lambda_1^{-1/2} \|K_3\|_{L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega))} \end{aligned}$$

$$\beta(t) = \sup_{x \in \Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n |a'_{ij}(x, t)|^2 \right)^{1/2} \in L^1(0, +\infty).$$

si  $f \neq 0$ ,

$$E(t) \leq c \left[ E_0 + \left( \int_0^T |f(t)| \right)^2 \right], \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.4)$$

donde  $c$  es una constante independiente de la solución débil del problema (3.1).

**Demostración.** Probaremos la parte (4.3) del teorema 4.1. La parte (4.4) se obtiene de forma análoga a (4.3). Derivando con respecto a  $t$  la igualdad (3.8) del teorema 3.2, con  $f = 0$ , y teniendo en cuenta (4.2) resulta:

$$\begin{aligned}
E'(t) = & \frac{1}{2}a'(t, \phi(t), \phi(t)) - \frac{1}{2}(K_1'(t)\phi'(t), \phi'(t)) + \\
& + (K_2(t)\phi'(t), \phi'(t)) + (K_2'(t)\phi(t), \phi(t)) - \\
& - (K_3(t)\phi(t), \phi(t)).
\end{aligned}$$

Mayorando el lado derecho de la igualdad anterior obtenemos

$$|E'(t)| \leq G(t)E(t)$$

donde

$$\begin{aligned}
G(t) = & a_0^{-1}\beta(t) + \alpha_0^{-1}\|K_1'(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + 2\alpha_0^{-1}\|K_2(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \\
& a_0^{-1/2}\alpha_0^{-1/2}\lambda_1^{-1/2}\|K_2'(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \alpha_0^{-1/2}\alpha_0^{-1/2}\lambda_1^{-1/2}\|K_3(t)\|_{L^\infty(\Omega)}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

de la desigualdad anterior se sigue:

$$-G(t)E(t) \leq E'(t) \leq G(t)E(t). \tag{4.6}$$

Usando las hipótesis (H1)-(H4), sección 2, sobre las funciones  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  y  $a_{ij}$  podemos acotar cada término que define  $G$  y de (4.5) se obtiene

$$\int_0^\infty G(t)dt \leq C_0. \tag{4.7}$$

Combinando (4.6) y (4.7) concluimos la prueba del teorema. ■

Seguidamente, probaremos una igualdad que es fundamental en la obtención de la estimación para  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ .

**Teorema 4.2.** *Sea  $(q_\ell)_{1 \leq \ell \leq n}$  un campo de vectores tal que  $q_\ell \in C^1(\bar{\Omega})$  para  $1 \leq \ell \leq n$ . Entonces cada solución débil  $\phi$  del problema (3.1) verifica:*

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Sigma} a_{ij} \nu_i \nu_j q_{\ell} \nu_{\ell} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma = \left( K_1 \phi', q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} \right) \Big|_0^T + \\
& + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial(K_1 q_{\ell})}{\partial x_{\ell}} \phi'^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_Q a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial q_{\ell}}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt + \\
& + \int_Q a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial q_{\ell}}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt - \\
& - \int_Q (K_2 \phi)' q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt - \int_Q K_3 \phi q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt - \\
& - \int_Q f q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

**Demostración.** Primero, probamos la igualdad (4.8) para soluciones fuertes  $\phi$  del problema (3.1). Luego por densidad se sigue para soluciones débiles. Así  $\phi(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ,  $\phi'(t) \in H_0^1(\Omega)$ .

Multiplicando la ecuación (3.1)<sub>1</sub> por  $q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}}$  e integrando sobre  $Q$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_Q (K_1 \phi')' q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt - \int_Q (K_2 \phi)' q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt + \\
& + \int_Q K_3 \phi q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt + \int_Q A(t) \phi q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt = \\
& = \int_Q f q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Integrando por partes en  $t$  y aplicando luego la fórmula de Green en el primer término de la expresión (4.9) resulta:

$$\begin{aligned} \int_Q (K_1 \phi')' q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt &= \left( K_1 \phi', q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} \right) \Big|_0^T + \\ &+ \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial(K_1 q_\ell)}{\partial x_\ell} (K_1 q_\ell) \phi'^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para el cuarto término de (4.9), usando la fórmula de Green se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_Q A(t) \phi q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt &= \int_Q a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial q_\ell}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt + \\ &+ \int_Q a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_\ell} dx dt - \int_\Sigma a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} \nu_i d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aplicando el operador  $\frac{\partial}{\partial x_\ell}$  sobre  $a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$  y notando que  $a_{ij} = a_{ji}$ , deducimos usando la fórmula de Green en el segundo término del lado derecho de (4.11), que

$$\begin{aligned} 2 \int_Q a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_\ell} dx dt &= \\ &= - \int_Q \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt - \\ &- \int_Q a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt + \int_\Sigma a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \nu_\ell d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Se sabe que  $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$  sobre  $\Gamma$  (Ver J.L. Lions [9]), por lo tanto

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\sigma} a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \nu_{\ell} d\Sigma - \int_{\Sigma} a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} \nu_i d\Sigma = \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} a_{ij} \nu_i \nu_j q_{\ell} \nu_{\ell} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Combinando las expresiones (4.11), (4.12) y (4.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_Q A(t) \phi q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt = \int_Q a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial q_{\ell}}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt - \frac{1}{2} \int_Q a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial q_{\ell}}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} a_{ij} \nu_i \nu_j q_{\ell} \nu_{\ell} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sustituyendo (4.10) y (4.14) en (4.9) y transponiendo términos adecuadamente, resulta la identidad (4.8). ■

La siguiente desigualdad a demostrar se llama desigualdad directa para el problema (3.1).

**Teorema 4.3.** *Sea  $\phi$  la solución débil del problema (3.1). Entonces  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$  y*

$$\int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \leq c \left[ E_0 + \left( \int_0^T |f(t)| dt \right)^2 \right]$$

donde  $c$  es una constante independiente de  $\phi$ .

**Demostración:** Del teorema (4.1) parte (4.4) se tiene la siguiente estimación

$$|K_1^{1/2}(t)\phi'(t)|^2 + a(t, \phi(t), \phi(t)) \leq cE_0 + c\left(\int_0^T |f(t)|dt\right)^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.15)$$

Consideremos la identidad (4.8) con  $q_\ell = \nu_\ell$  sobre  $\Gamma$ . Observemos que, usando la estimación (4.15), las integrales sobre  $\Omega$  de (4.8) pueden ser acotadas por

$$c\left[E_0 + \left(\int_0^T |f(t)|dt\right)^2\right]$$

las integrales sobre  $Q$  por

$$c(T+1)\left[E_0 + \left(\int_0^T |f(t)|dt\right)^2\right]$$

y la integral  $\int_Q f q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt$  por

$$cE_0^{1/2} \int_0^T |f(t)|dt + c\left(\int_0^T |f(t)|dt\right)^2.$$

Por otro lado

$$\frac{1}{2} \int_\Sigma a_{ij} \nu_i \nu_j \nu_\ell \nu_\ell \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma \geq \frac{1}{2} a_0 \int_\Sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma.$$

Combinando las estimaciones anteriores y (4.8) con  $q_\ell = \nu_\ell$  sobre  $\Gamma$  resulta:

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma \leq c(T+1)\left[E_0 + \left(\int_0^T |f(t)|dt\right)^2\right] + cE_0^{1/2} \int_0^T |f(t)|dt.$$

Mayorando la desigualdad anterior se obtiene el resultado del teorema 4.3. ■

Para establecer la desigualdad inversa para el problema 3.1 con  $f = 0$  introducimos algunas notaciones. Del Teorema 4.1 parte (4.3), obtenemos

$$C_1 E_0 \leq E(t) \leq C_2 E_0, \quad \forall t \in [0, \infty[ \quad (4.16)$$

$$(C_1 = e^{-C_0}, \quad C_2 = e^{C_0})$$

El tiempo  $T_0$  es definido por:

$$T_0 = [2a_0^{-1/2} \|K_1\|_{L^\infty(Q)}^{1/2} R(x^0) + \alpha_0^{-1} \|\eta\|_{L^1(0,+\infty)} R(x^0) + \\ + M_1 + M_2 + M_3] C_2 C_1^{-1} \delta^{-1}. \quad (4.17)$$

donde

$$\eta(t) = \sup_{\Omega} \operatorname{ess} \left( \sum_{\ell=1}^n \left| \frac{\partial K_1}{\partial x_\ell}(x, t) \right|^2 \right)^{1/2} \in L^1(0, +\infty)$$

$$M_1 = \frac{(n-\delta)}{2} \alpha_0^{-1/2} a_0^{-1} \lambda_1^{-1} [a_0^{1/2} \lambda_1^{1/2} \|K_2\|_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))}$$

$$+ 2\alpha_0^{1/2} \|K_2'\|_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))}]$$

$$M_2 = \alpha_0^{-1/2} a_0^{-1} \lambda_1^{-1} R(x^0) [a_0^{1/2} \lambda_1^{1/2} \|K_2\|_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))}$$

$$+ 2\alpha_0^{1/2} \lambda_1^{1/2} \|K_2'\|_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))}]$$

$$M_3 = \lambda_1^{-1} a_0^{-1} \|K_3\|_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))} [(n-\delta) + 2\lambda_1^{1/2} R(x^0)]$$

**Teorema 4.4.** *Sea  $T > T_0$ . Entonces cada solución débil  $\phi$  del problema (3.1) con  $f = 0$ , verifica*

$$\frac{1}{2}R(x^0)a_1 \int_{\Sigma(x^0)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \geq \delta C_1(T - T_0)E_0.$$

**Obsección 4.1.** Notemos que si las funciones  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = K_3 = 0$  y  $a_{ij} = \delta_{ij}$  entonces  $C_1 = C_2 = \delta = a_0 = 1$ ,  $M_1 = M_2 = \eta = 0$  lo que implica  $T_0 = 2R(x^0)$ . Este es el tiempo  $T_0$  determinado en J.L. Lions [9] y en V. Komornik [7] para la ecuación  $u'' - \Delta u = 0$ .

**Demostración del teorema 4.4.:** Consideremos la identidad (4.8) del teorema 4.2 con el campo particular  $q_\ell = m_\ell = x_\ell - x_\ell^0$  y después de hacer cálculos directos obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Sigma} a_{ij} \nu_i \nu_j m_\ell \nu_\ell \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma = \\ & = \left( K_1 \phi', m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} + \frac{n-\delta}{2} \phi \right) \Big|_0^T + \delta \int_0^T E(t) dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial K_1}{\partial x_\ell} m_\ell \phi'^2 dx dt + \\ & + \int_Q \left[ (1-\delta) a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell} m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] dx dt - \\ & - \frac{n-\delta}{2} \int_Q (K_2 \phi)' \phi dx dt - \int_Q (K_2 \phi)' m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt + \\ & + \frac{n-\delta}{2} \int_Q K_3 \phi^2 dx dt + \int_Q K_3 \phi m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde  $\delta$  es un número real positivo arbitrario.

Utilizando la hipótesis  $(H4)_5$  en la identidad (4.18) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Sigma} a_{ij} \nu_i \nu_j m_{\ell} \nu_{\ell} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \geq \\
 & \geq \left( K_1 \phi', m_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} + \frac{n-\delta}{2} \phi \right) \Big|_0^T + \delta \int_0^T E(t) dt + \\
 & \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial K_1}{\partial x_{\ell}} m_{\ell} \phi'^2 dx dt - \frac{n-\delta}{2} \int_Q (K_2 \phi)' \phi dx dt - \\
 & - \int_Q (K_2 \phi)' m_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt + \frac{n-\delta}{2} \int_Q K_3 \phi^2 dx dt + \\
 & + \int_Q K_3 \phi m_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} dx dt.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Haciendo cálculos análogos a los realizados en J.L. Lions [8] y [9]

$$\begin{aligned}
 & \left| \left( K_1 \phi', m_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} + \frac{n-\delta}{2} \phi \right) \right| \leq \\
 & \leq \|K_1\|_{L^{\infty}(Q)}^{1/2} \left[ \frac{\mu}{2} |K_1^{1/2} \phi'|^2 + \frac{1}{2\mu} \left| m_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} + \frac{n-\delta}{2} \phi \right|^2 \right].
 \end{aligned}$$

Tomando  $\mu = a_0^{-1/2} R(x^0) > 0$  y utilizando la estimación (4.16) en la desigualdad anterior, resulta:

$$\left| \left( K_1 \phi', m_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} + \frac{n-\delta}{2} \phi \right) \right| \leq a_0^{-1/2} \|K_1\|_{L^{\infty}(Q)}^{1/2} R(x^0) C_2 E_0,$$

lo que implica

$$\left( K_1 \phi', m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} + \frac{n-\delta}{2} \phi \right) \Big|_0^T \geq 2a_0^{-1/2} \|K_1\|_{L^\infty(Q)}^{1/2} R(x^0) C_2 E_0. \quad (4.20)$$

Los otros términos del miembro de la derecha de (4.19) quedan acotadas utilizando la estimación (4.16) de la siguiente manera:

$$\delta \int_0^T E(t) dt \geq \delta T C_1 E_0. \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial K_1}{\partial x_\ell} m_\ell \phi'^2 dx dt \geq -\alpha_0^{-1} \|\eta\|_{L^1(0,+\infty)} R(x^0) C_2 E_0. \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{n-\delta}{2} \int_Q (K_2 \phi)' \phi dx dt \geq \\ & \geq - \frac{n-\delta}{2} \alpha_0^{-1/2} a_0^{-1/2} \lambda_1^{-1/2} \|K_2\|_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))} C_2 E_0 - \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$- (n-\delta) a_0^{-1} \lambda_1^{-1} \|K_2'\|_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))} C_2 E_0.$$

$$\begin{aligned} & - \int_Q (K_2 \phi)' m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt \geq \\ & \geq -\alpha_0^{-1/2} a_0^{-1/2} R(x^0) \|K_2\|_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))} C_2 E_0 - \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$- 2a_0^{-1} \lambda_1^{-1/2} R(x^0) \|K_2'\|_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))} C_2 E_0.$$

$$\frac{n - \delta}{2} \int_Q K_3 \phi^2 dx dt \geq -\frac{n - \delta}{2} a_0^{-1} \lambda_1^{-1} \|K_3\|_{L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega))} C_2 E_0. \tag{4.25}$$

$$\int_Q K_3 \phi m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt \geq -2a_0^{-1} \lambda_1^{-1/2} R(x^0) \|K_3\|_{L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega))} C_2 E_0. \tag{4.26}$$

Así, utilizando las estimaciones (4.20)-(4.26) en la desigualdad (4.19) obtenemos:

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} a_{ij} \nu_i \nu_j \nu_\ell m_\ell \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma \geq \delta C_1 (T - T_0) E_0. \tag{4.27}$$

El miembro de la izquierda de (4.27) se puede acotar como en J.L. Lions [9] por

$$\frac{1}{2} R(x^0) a_1 \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma. \tag{4.28}$$

Combinando (4.27) y (4.28) finalizamos la prueba del teorema. ■

### 5. CONTROLABILIDAD EXACTA

En esta sección concluiremos la prueba del teorema 2.1. Consideremos el problema

$$\begin{cases} (K_1(x, t)z')' + K_2(x, t)z' + K_3(x, t)z + A(t)z = 0 \text{ en } Q \\ z = v \text{ sobre } \Sigma \\ z(0) = z^0, z'(0) = z^1 \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

Primero definiremos el concepto de solución del problema 5.1. Multiplicando ambos miembros de (5.1)<sub>1</sub> por  $\theta = \theta(x, t)$  e integrando por partes sobre  $Q$  formalmente, resulta:

$$\begin{aligned}
& \int_Q [(K_1 z')' + K_2 z' + K_3 z + A(t)z] \theta dx dt = \\
& = - \int_{\Omega} K_1(0) z'(0) \theta(0) dx + \int_{\Omega} K_1(0) z(0) \theta'(0) dx - \\
& - \int_{\Omega} K_2(0) z(0) \theta(0) dx + \int_{\Sigma} a_{ij} \nu_i \nu_j \frac{\partial \theta}{\partial \nu} z d\Sigma + \\
& + \int_Q z f dx dt,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

donde  $\theta$  es la solución del problema

$$\begin{cases} (K_1 \theta')' - (K_2 \theta)' + K_3 \theta + A(t) \theta = f \text{ en } Q \\ \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Si  $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , por el teorema 3.2 y gracias a la reversibilidad del problema (5.3) con respecto a la variable tiempo sobre el intervalo  $[0, T]$ , tenemos que la solución  $\theta$  del problema (5.3) verifica

$$\begin{aligned}
& \theta \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \\
& |\theta'(0)| + \|\theta(0)\| \leq c \int_0^T |f(t)| dt
\end{aligned} \tag{5.4}$$

y por el teorema 4.3 y reversibilidad del tiempo se tiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma), \quad \left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq c \int_0^T |f(t)| dt \tag{5.5}$$

donde  $c$  es una constante independiente de  $\phi$  y  $f$ .

Motivados por (5.2)-(5.5) introducimos la siguiente definición: Sea

$$z^0 \in L^2(\Omega), z^1 \in H^{-1}(\Omega), v \in L^2(\Sigma). \quad (5.6)$$

Decimos que  $z \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  es una solución ultradébil definida por transposición del problema (5.1) con datos en la clase (5.6) si

$$\int_0^T (z, f) dt = \langle K_1(0)z^1, \theta(0) \rangle - \langle K_1(0)z^0, \theta'(0) \rangle + \langle K_2(0)z^0, \theta(0) \rangle - \int_0^T \left( v, a_{ij} \nu_i \nu_j \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma)} dt. \quad (5.7)$$

para cada  $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$  donde  $\theta$  está relacionado con  $f$  por el problema (5.3).

Claramente la solución  $z$  dada anteriormente es única. También tenemos, de (5.4) y (5.5), que

$$\|z\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq c(|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}), \quad (5.8)$$

donde  $c$  es una constante independiente de  $z$ .

Seguidamente probaremos un resultado que utilizaremos para demostrar la regularidad de la solución ultradébil del problema (5.1).

Sea  $f \in \mathcal{D}(Q)$ ,  $\mathcal{D}(Q)$  es el espacio de las funciones de prueba sobre  $Q$ , y  $\theta$  la solución débil del problema

$$\begin{cases} (K_1(x, t)\theta')' - (K_2(x, t)\theta)' + K_3(x, t)\theta + A(t)\theta = f' \text{ en } Q \\ \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \theta(0) = 0, \theta'(0) = 0 \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (5.9)$$

Del teorema 3.3 (Vea sección 3), tenemos:

$$|K_1^{1/2}(t)\theta'(t) - K_1^{-1/2}(t)f(t)| + \|\theta(t)\| \leq c \int_0^T \|f(t)\| dt, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.10)$$

donde  $c$  es una constante independiente de  $\theta$  y  $f$ . En virtud del teorema 4.3,  $\frac{\partial \theta}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$ .

**Lema 5.1.** *Cada solución débil  $\theta$  del problema (5.9) verifica:*

$$\left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq c \int_0^T \|f(t)\| dt$$

donde  $c$  es una constante independiente de  $\theta$  y  $f$ .

**Demostración:** Utilizando la identidad (4.8) del teorema 4.2 para el problema (5.9) y las siguientes igualdades

$$\theta' = K_1^{-1/2}(K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f) + K_1^{-1}f$$

$$\begin{aligned} \theta'^2 &= K_1^{-1}(K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f)^2 + 2K_1^{-3/2}f(K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f) + \\ &\quad + K_1^{-2}f^2, \end{aligned}$$

después de cálculos directos se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} a_{ij}\nu_i\nu_j q_{\ell}\nu_{\ell} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma &= \left( K_1\theta', q_{\ell} \frac{\partial \theta}{\partial x_{\ell}} \right) \Big|_0^T + \\ &+ \frac{1}{2} \int_Q K_1^{-1} \frac{\partial(K_1 q_{\ell})}{\partial x_{\ell}} (K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f)^2 dx dt + \\ &+ \int_Q K_1^{-3/2} \frac{\partial K_1}{\partial x_{\ell}} q_{\ell} f (K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f) dx dt - \\ &- \int_Q K_1^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial x_{\ell}} q_{\ell} (K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f) dx dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \int_Q a_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx dt + \\
& + \int_Q a_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial q_\ell}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_\ell} dx dt - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx dt - \\
& - \int_Q K_2' q_\ell \frac{\partial \theta}{\partial x_\ell} \theta dx dt - \\
& - \int_Q K_1^{-1/2} K_2 q_\ell \frac{\partial \theta}{\partial x_\ell} (K_1^{1/2} \theta' - K_1^{-1/2} f) dx dt - \\
& - \int_Q K_1^{-1} K_2 q_\ell \frac{\partial \theta}{\partial x_\ell} f dx dt + \int_Q K_3 q_\ell \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_\ell} dx dt.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Tomando  $q_\ell \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $1 \leq \ell \leq n$  tal que  $q_\ell \nu_\ell = 1$  sobre  $\Gamma$ , y acotando la expresión (5.11) por la estimación (5.10) obtenemos una constante  $c > 0$  tal que

$$\frac{1}{2} \int_\Sigma a_{ij} \nu_i \nu_j \left( \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \leq c \left( \int_0^T \|f(t)\| dt \right)^2$$

lo que implica, por la hipótesis de coercividad sobre las funciones  $a_{ij}$ ,

$$\left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq c \int_0^T \|f(t)\| dt,$$

donde  $c$  es una constante independiente de  $\theta$  y  $f$ . ■

**Teorema 5.1.** *Cada solución ultradébil  $z$  del problema (5.1) tiene la regularidad*

$$z \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega)) \tag{5.12}$$

y la aplicación lineal

$$L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma) \rightarrow C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega))$$

$$\{z^0, z^1, v\} \mapsto z$$

es *continua*.

**Demostración:** Primero probemos que  $z \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ . Siendo  $z^0, z^1, v$  pertenecientes a la clase (5.6) existen sucesiones de vectores  $(z_\mu^0), (z_\mu^1), (v_\mu)$  de  $H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), H_0^2(0, T; H^{3/2}(\Gamma))$ , respectivamente, tal que

$$z_\mu^0 \rightarrow z^0 \text{ en } L^2(\Omega), \quad z_\mu^1 \rightarrow z^1 \text{ en } H^{-1}(\Omega), \quad (5.13)$$

$$v_\mu \rightarrow v \text{ en } L^2(\Sigma).$$

Sea  $\widehat{v}_\mu$  una función en  $H_0^2(0, T; H^2(\Omega))$  tal que  $\gamma \widehat{v}_\mu = \{v_\mu, 0\}$ ,  $\gamma$  función trazo sobre  $\Gamma$ , y  $u_\mu$  la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} (K_1 u'_\mu)' + K_2 u'_\mu + K_3 u_\mu + A(t)u_\mu = \\ \quad = -[(K_1 \widehat{v}'_\mu)' + K_2 \widehat{v}'_\mu + K_3 \widehat{v}_\mu + A(t)\widehat{v}_\mu] \text{ en } Q \\ u_\mu = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ u_\mu(0) = z_\mu^0, u'_\mu(0) = z_\mu^1 \text{ en } \Omega \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Entonces se demuestra de manera análoga al teorema 3.2 que la solución débil  $u_\mu$  del problema (5.14) tiene la regularidad

$$u_\mu \in C([0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Luego tenemos que  $z_\mu = u_\mu + \widehat{v}_\mu$  es la solución del problema (5.1) con datos  $z_\mu^0, z_\mu^1, v_\mu$  y  $z_\mu \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ . Por lo tanto, de (5.8)

$$\|z_\mu - z\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq c[\|z_\mu^0 - z^0\| + \|z_\mu^1 - z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v_\mu - v\|_{L^2(\Sigma)}].$$

Tomando límite en esta expresión y usando la convergencia (5.13) y la regularidad de  $z_\mu$ , obtenemos  $z \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ .

Ahora consideremos  $f \in \mathcal{D}(Q)$  y  $\theta$  la solución débil del problema

$$\begin{cases} (K_1\theta')' - (K_2\theta)' + K_3\theta + A(t)\theta = f' \text{ en } Q \\ \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \theta(T) = 0, \theta'(T) = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Entonces por la reversibilidad del problema anterior y el teorema 3.3 obtenemos que

$$|K_1^{1/2}(t)\theta'(t) - K_1^{-1/2}(t)f(t)| + \|\theta(t)\| \leq c \int_0^T \|f(t)\| dt, \forall t \in [0, T] \quad (5.16)$$

y por el lema 5.1

$$\left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq c \int_0^T \|f(t)\| dt. \quad (5.17)$$

Tenemos que  $z' \in H^{-1}(0, T; L^2(\Omega))$ , ya que  $z \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Entonces

$$\langle z', f \rangle = -(z, f')_{L^2(Q)} = - \int_0^T (z, f') dt.$$

Como  $z$  es una solución ultradébil definida por transposición del problema (5.1) tenemos de (5.15)

$$\begin{aligned} \int_0^T (z, f') dt &= \langle K_1(0)z^1, \theta(0) \rangle - \langle K_1(0)z^0, \theta'(0) \rangle + \\ &+ \langle K_2(0)z^0, \theta(0) \rangle - \int_0^T \left( v, a_{ij}\nu_i\nu_j \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma)} dt. \end{aligned}$$

De las estimaciones (5.16) y (5.17) obtenemos

$$|\langle z', f \rangle| \leq c[|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}] \int_0^T \|f(t)\| dt, \quad \forall f \in \mathcal{D}(Q)$$

lo que implica por densidad de  $\mathcal{D}(Q)$  en  $L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$  que  $z' \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$  y

$$\|z'\|_{L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq c[|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}]. \quad (5.18)$$

Por argumentos similares como en la primera parte de la prueba del teorema y observando que  $z'_\mu \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$  concluimos que  $z' \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ .

La continuidad de la aplicación lineal  $\{z^0, z^1, v\} \mapsto z$  se obtiene por (5.8) y (5.18). ■

Ahora finalizaremos la prueba del teorema 2.1. Sea  $\phi$  la solución débil del problema

$$\begin{cases} (K_1\phi')' - (K_2\phi)' + K_3\phi + A(t)\phi = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (5.19)$$

Con  $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Entonces debido a los teoremas 3.2, 4.3 y (4.4) tenemos

$$\phi \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$$

$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$  y

$$\frac{2\delta C_1}{R(x^0)_{a_1}}(T - T_0)E_0 \leq \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \leq cE_0. \quad (5.20)$$

Con  $\phi$  construimos la solución ultradébil  $\psi$  del problema

$$\begin{cases} (K_1 \psi)' + K_2 \psi' + K_3 \psi + A(t)\psi = 0 \text{ en } Q \\ \psi = \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \text{ sobre } \Sigma(x^0) \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma(x^0) \end{cases} \\ \psi(T) = 0, \psi'(T) = 0 \text{ en } \Omega \end{cases} \quad (5.21)$$

Entonces por el teorema 5.1 y gracias a la reversibilidad con respecto al tiempo en  $[0, T]$  del problema (5.21), tenemos que  $\psi$  pertenece a la clase

$$\psi \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega)).$$

También tenemos

$$\begin{aligned} & \langle K_1(0)\psi'(0) + K_2(0)\psi(0), \phi^0 \rangle - \langle K_1(0)\psi(0), \phi^1 \rangle = \\ & \int_{\Sigma(x^0)} a_{ij} \nu_i \nu_j \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (5.22)$$

La expresión (5.22) induce a definir el siguiente operador

$$A : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{K_1(0)\psi'(0) + K_2(0)\psi(0), -K_1(0)\psi(0)\}$$

De (5.22), obtenemos

$$a_0 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 \leq \langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle \leq a_1 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}$$

De la estimación anterior y (5.21) implica que  $\Lambda$  es inyectiva. Con  $\{\widehat{\phi}^0, \widehat{\phi}^1\}$  determinamos la solución débil del problema (5.19) y con  $\frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \nu}$ , la solución ultradébil definida por transposición  $\widehat{\psi}$  del problema (5.21).

Analogamente a la expresión (5.22) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\widehat{\phi}^0, \widehat{\phi}^1\} \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} a_{ij} \nu_i \nu_j \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\Sigma$$

$$\langle \Lambda\{\widehat{\phi}^0, \widehat{\phi}^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} a_{ij} \nu_i \nu_j \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \nu} d\Sigma$$

De estas dos últimas igualdades obtenemos que  $\Lambda$  es auto-adjunto. Así

$$\Lambda \text{ es un isomorfismo de } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ en } H^{-1} \times L^2(\Omega). \quad (5.23)$$

Sea  $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ . Entonces por (5.23), existe  $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  tal que

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{K_1(0)y^1 + K_2(0)y^0, -K_1(0)y^0\}.$$

De esta igualdad y de la definición del operador  $\Lambda$  concluimos

$$\psi(0) = y^0, \quad \psi'(0) = y^1 \quad (5.24)$$

donde  $\psi$  es la única solución ultradébil de (5.21) y  $\phi$  es la única solución débil de (5.19).

Si consideramos

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \text{ en } \Sigma(x^0)$$

en el problema (2.1) con datos iniciales  $\{y^0, y^1\}$  perteneciendo a  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  resulta que tal problema tiene una única solución ultradébil  $y$ . Observemos que de (5.21) y (5.24) obtenemos que  $\psi$  es también solución ultradébil del problema (2.1). Luego por la unicidad de solución vemos que  $y = \psi$  y consecuentemente de (5.21)<sub>3</sub> concluimos que

$$y(T) = 0, \quad y'(T) = 0. \quad \blacksquare$$

**Agradecimientos.** El autor expresa su más sincera gratitud a la valiosa colaboración y orientación de los profesores L.A. Medeiros y M. Milla Miranda en relación con este trabajo.

### Bibliografía

- [1] Adams, R., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Brezis, H., *Operateurs Maximaux Monotones et semigroups de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.
- [3] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [4] Fabre, C., *Comportement au voisinage du bord de quelques équations d'évolution linéaire*. Thèse de Doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, Paris 1990.
- [5] Fabre, C. and Puel, J.P., *Behavior near the boundary for solutions of the wave equation*, Journal of Differential Equations 106, pp. 186-213 (1993).
- [6] Fuentes, R., *Exact Controllability for Temporally Wave Equation*, Portugaliae Mathematica, Vol. 51 Fas. 4, pp. 475-488 (1994).
- [7] Komornik, V., *Exact controllability in short time for the wave equation*, *Analyse Non Linéaire*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 6 (1989), pp. 153-164.
- [8] Lions, J.L., *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Review, 30 (1988), pp. 1-68.
- [9] Lions, J.L., *Contrôlabilité Exacte, Stabilisation de Systèmes Distribués*, Tome 1, Masson RMA8, 1988.
- [10] Lions J.L., *Contrôlabilité Exacte, Stabilisation de Systèmes Distribués*, Tome 2, Masson RMA9, 1988.
- [11] Lions, J.L. and Magenes, E., *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol 1, Dunod, 1968.

- [12] Maciel, A.B., *On Hyperbolic-Parabolic Equation with a Continuous Nonlinearity*, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 20, no. 6, pp. 745-754, 1993.
- [13] Medeiros, L.A. and Fuentes, R., *Exact controllability for a model of the one dimensional elasticity*, 36 Seminário Brasileiro de Análise, 1992.
- [14] Medeiros, L.A., *Exact controllability for a Timoshenko model of vibrations of beams*. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, n°1, Vol. 2, 1993 (Japan).
- [15] Milla Miranda, M., *Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des domaines non cylindriques*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 317, Série 1, p. 495-499, 1993.
- [16] Milla Miranda, M., *HUM and the wave equation with variable coefficients* (To appear).
- [17] Muñoz Rivera, J.E., *Exact controllability: coefficient depending on the time*, *SIAM J. Control and Optimization*, 28 (1990), pp. 498-501.
- [18] Puel, J.P., *Contrôlabilité Exacte et Comportement au Voisinage du Bord des Solutions de l'Équations de Ondes*, *Lectures at IM-UFRJ*, Rio de Janeiro, RJ. Brasil, 1991.
- [19] Tijonov, A.N. and Samarsky, A.A., *Ecuaciones de la Física Matemática*, Editorial Mir (Moscu), 1972.
- [20] Zuazua, E., *Controlabilidad exacta y estabilización de la ecuación de ondas*, *Textos de Métodos Matemáticos*, 23 IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1990.

[21] Zuazua, E., *An introduction to the exact controllability for distributed systems*, CMAF, Universidade de Lisboa, Portugal, 1990.

Departamento de Matemática  
Universidade Estadual de Maringá  
CP 331 - CEP 87020 - MARINGÁ PR  
Brazil

Recibido: 20 de Abril de 1994