

6. Markov A. Sur une propriété générale des ensembles minimaux de Birkhoff // C. R. Acad. Sci. 1931. Vol. 193. P. 823–825.
7. Bhatia N. P., Szegö G. Dynamical Systems: Stability Theory and Applications: Lecture Notes in Mathematics. Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. Vol. 35.
8. Kalitine B. S. Qualitative stability theory of movement of dynamical systems. Saarbrücken, 2012 (Russian).
9. Arredondo J. H. R., Seibert P. On a Characterization of Asymptotic Stability // Aportaciones Matemáticas. Ser. Comunicaciones. 2001. № 29. P. 11–16.
10. Saperstone S. H. Semidynamical Systems in Infinite Dimensional Space. Berlin, 1981.
11. Sibirsky K. S., Shube A. S. Semidynamical Systems (Topological Theory). Kishinev, 1987 (Russian).
12. Kalitine B. S. Pseudo-stabilité et classification des ensembles fermés invariants // Prepublication USTHB, B. P. 9. Dar El-Beida, 1983. № 9.
13. Sibirsky K. S. Introduction in topological dynamics. Leyden, 1975.
14. Kalitine B. Stability of differential equations (Method of semidefinite Lyapunov's functions). Saarbrücken, 2012 (Russian).

Received 04.09.2014.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета БГУ.

УДК 539.3+(616.314-089.23)

С. М. БОСЯКОВ, А. Ф. МСЕЛАТИ (ЛИВИЯ), К. С. ЮРКЕВИЧ

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ СВЯЗКИ ПРИ НАЧАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ КОРНЯ ЗУБА

Определены гидростатические напряжения, возникающие в тканях периодонта, при поступательных перемещениях корня зуба. Внешняя поверхность корня зуба и внутренняя поверхность периодонтальной связки описываются уравнением двуполостного гиперboloида. Толщина периодонта по нормали к поверхности является постоянной величиной. Корень зуба предполагается абсолютно твердым телом.

На основании значений, благоприятных для перестройки костной ткани напряжений, установлены диапазоны нагрузки для поступательного ортодонтического перемещения зубов. Показано, что полученные значения нагрузки приводят к деформациям тканей периодонта, которые соответствуют линейно-упругой модели периодонтальной связки. Проведен сравнительный анализ результатов расчета нормальных напряжений на основании аналитической и конечно-элементной моделей.

Ключевые слова: периодонтальная связка; корень зуба; двуполостный гиперboloид; начальное перемещение; гидростатические напряжения; нормальные деформации; метод конечных элементов.

Hydrostatic stresses in the periodontal ligament under translational displacement of the tooth root were defined. The external surface of the tooth root and the internal surface of the periodontal ligament were described by the equation of a two-sheet hyperboloid. The thickness of the periodontal ligament along normal to the tooth root surface is constant. The tooth root was assumed to be rigid. The system of equations for the translational displacements and rotation angles of the tooth root in periodontal ligament was formulated.

Load ranges for translational orthodontic tooth movement were defined based on the magnitudes of stresses favorable to bone remodelling. The obtained values of the load lead to the appearance of the periodontal tissue strains, corresponding to a linear elastic model of the periodontal ligament. Comparative analysis of the results of the calculation of normal stresses on the basis of analytical and finite element models was carried out.

Key words: periodontal ligament; root of the tooth; two-sheet hyperboloid; initial displacement; hydrostatic stresses; normal strain; finite element method.

Ортодонтическое лечение неправильного прикуса и аномального расположения зубов является сложной стоматологической процедурой, которая, как правило, подразумевает последовательное выполнение большого количества терапевтических этапов. В зависимости от величины и продолжительности силового воздействия могут возникать начальные и ортодонтические перемещения зубов. Начальные смещения зубов вызываются кратковременной нагрузкой, после снятия которой зуб возвращается на прежнее место. При этом дегенеративные и необратимые изменения периодонтальной ткани отсутствуют, деформация альвеолярного отростка обратима и имеет низкую амплитуду [1, 2]. Если отклонение зуба сохраняется в течение долгого промежутка времени, напряжения и деформации в периодонтальной связке вызывают процесс перестройки костной ткани, который приводит к ортодонтическому движению корня зуба и изменению его положения [2–5]. Основываясь на более высокой упругости периодонта по сравнению с костными структурами и зубами, как правило, предполагают, что периодонт определяет величину начального перемещения зуба [3, 6].

Установлению начальной подвижности однокоренных и многокоренных зубов посвящены многочисленные исследования, основанные на использовании метода конечных элементов [1, 6–10] или аналитических моделей [11–14]. Полученные результаты используются в ходе клинической терапии для виртуального планирования ортодонтического движения зубов без потерь времени и дискомфорта для пациента. Подходы к компьютерному моделированию долгосрочного и краткосрочного перемещений зубов представлены в работах [15–18]. Настоящее исследование развивает это актуальное направление.

Его цель – разработка аналитической модели начальных перемещений корня зуба в форме двуполостного гиперboloида в линейно-упругой периодонтальной оболочке.

Материалы и методы исследования

Внешняя поверхность корня зуба и прилегающая к нему внутренняя поверхность периодонтальной связки описываются уравнением двуполостного гиперboloида (считаем, что корень зуба является абсолютно твердым телом)

$$F(x, y, z) = y - \frac{h}{\sqrt{1+p^2-p}} \left(\sqrt{(1-e^2)\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 + p^2 - p} \right) = 0, \tag{1}$$

где h – высота корня зуба; $e = \sqrt{1-(b/a)^2}$ – эксцентриситет эллипса в поперечном сечении зуба на уровне альвеолярного гребня; a, b – полуоси эллипса в сечения корня зуба на уровне альвеолярного гребня; p – параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба.

Внешняя поверхность периодонтальной связки, прилегающая к костной ткани зубной альвеолы, смещена по нормали по отношению к поверхности корня зуба на величину δ (толщина периодонтальной связки постоянна). При действии на зуб сосредоточенной силы $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ точки периодонта, прилегающие к поверхности корня (1) зуба, получают перемещения, равные перемещению корня. Внешняя поверхность периодонтальной связки жестко закреплена.

В соответствии с работой [13] будем считать периодонт материалом с коэффициентом Пуассона, равным 0,49. Это означает, что при смещении корня зуба к стенке зубной альвеолы периодонт начинает «растекаться» вокруг поверхности корня зуба. Поэтому компоненты тензора деформаций в системе координат, связанной с нормалью, образующей и направляющей к внешней поверхности корня зуба, можно представить в следующем виде [13, 14]:

$$\varepsilon_{mn} = -u_n/\delta, \quad \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0, \quad \gamma_{n\theta} = -u_\theta/\delta, \quad \gamma_{t\theta} = 0, \tag{2}$$

где u_n, u_t, u_θ – перемещения точек периодонта вдоль нормали, образующей и направляющей к поверхности корня зуба; δ – ширина периодонтальной связки по нормали к поверхности (1).

Условия равновесия корня зуба (равенство нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на зуб) представим в виде

$$\iint_F (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{P} = 0, \quad \iint_F \vec{r} \times (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{m} = 0, \tag{3}$$

где $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$ – главный момент внешних сил; $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ – главный вектор внешних сил; \vec{r} – радиус-вектор; \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности (1); σ – тензор напряжений для линейно-упругой изотропной среды.

Любое перемещение корня зуба может быть описано посредством комбинации поступательных перемещений u_{0x}, u_{0y} и u_{0z} вдоль соответствующих координатных осей и углов поворота вершины корня θ_x, θ_y и θ_z относительно этих же осей. Поскольку толщина периодонта очень мала, углы поворота тоже очень малы. Это позволяет использовать линеаризованные формулы:

$$u_x = u_{0x} + z\theta_y - y\theta_z, \quad u_y = u_{0y} - z\theta_x + x\theta_z, \quad u_z = u_{0z} + y\theta_x - x\theta_y. \tag{4}$$

После преобразований уравнений равновесия (3) с учетом соотношений (2) и (4) получим систему однородных алгебраических уравнений относительно поступательных перемещений и углов поворота корня зуба следующего вида:

$$\begin{aligned} c_x u_{0x} + c_{\theta_{xy}} \theta_z &= f_x, \quad c_y u_{0y} = f_y, \quad c_z u_{0z} + c_{\theta_{yz}} \theta_x = f_z, \\ c_{\theta_{yz}} u_{0z} + \mu_x \theta_x &= y_f f_z - z_f f_y, \quad \mu_y \theta_y = z_f f_x - x_f f_z, \quad c_{\theta_{xy}} u_{0x} + \mu_z \theta_z = x_f f_y - y_f f_x, \\ c_x &= E \iint_F \left(A b b (2\nu - 1) \cos(\alpha) + h \left(2 H x (1 - e^2) (\nu - 1) + G z (2\nu - 1) \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C}, \\ c_y &= E \iint_F \left(2 A b b (\nu - 1) \cos(\alpha) + h (2\nu - 1) \left(H x (1 - e^2) + G z \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$c_z = E \iint_F \left(ABb(1-2\nu)\cos(\alpha) - h \left(Hx(1-e^2)(1-2\nu) + 2Gz(1-\nu) \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C},$$

$$c_{\theta_{xy}} = -E \iint_F \left((1-2\nu) \left((1-e^2)hx^2 + ABby \right) \cos(\alpha) + \right. \\ \left. + \left(hy \left(2Hx(1-e^2)(1-\nu) + Gz(1-2\nu) \right) + 2ABHbv_x \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C},$$

$$c_{\theta_{yz}} = E \iint_F \left((1-2\nu) \left(hz^2 + AbyB \right) \cos(\alpha) + \left(hy \left(Hx(1-e^2)(1-2\nu) + 2Gz(1-\nu) \right) + 2ABGbv_z \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C},$$

$$\mu_x = E \iint_F \left(\left(hyz^2 + ABb \left((1-2\nu)y^2 + 2(1+\nu)z^2 \right) \right) \cos(\alpha) + \right. \\ \left. + \left(ABGbyz + h \left(Hx(y^2 + z^2) \left((1-e^2)(1-2\nu) + Gz(2y^2(1-\nu) + z^2(1-2\nu)) \right) \right) \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C},$$

$$\mu_y = E \iint_F \left(ABb(x^2 + z^2)(1-2\nu)\cos(\alpha) - h \left(Gz(x^2(1+e^2-2\nu) + z^2(1-2\nu)) + \right. \right. \\ \left. \left. + BHx(x^2(1-e^2)(1-2\nu) + z^2(1-2e^2(1-\nu)-2\nu)) \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C},$$

$$\mu_z = E \iint_F \left(hx^2y(1-e^2) + ABb(2x^2(1-\nu) + y^2(1-2\nu)) \cos(\alpha) + \right. \\ \left. + \left(Hx(ABby + h(1-e^2)(x^2(1-2\nu) + 2y^2(1-\nu))) + Gh(x^2 + y^2)z(1-2\nu) \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C},$$

$$A = \sqrt{p^2 + 1} - p, \quad B = \sqrt{b^2 p^2 + (1-e^2)x^2 + z^2}, \quad C = 2b(1+\nu)(2\nu-1)AB\delta,$$

$$H = \frac{x(1-e^2)}{\sqrt{x^2(1-e^2)^2 + z^2}}, \quad G = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{h\sqrt{(1-e^2)^2 x^2 + z^2}}{b(\sqrt{1+p^2} - p)\sqrt{(bp)^2 + (1-e^2)x^2 + z^2}},$$

где (x_f, y_f, z_f) – координаты точки приложения нагрузки; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона тканей периодонтальной связки; α – угол между образующей к поверхности корня зуба \vec{l} и плоскостью, параллельной плоскости xOz и проходящей через точку P .

Величина ортодонтической нагрузки

Области наибольших гидростатических напряжений являются первичными для перестройки костной ткани во время ортодонтического движения зубов [5, 10, 19]. Гидростатическое напряжение определяется следующим образом:

$$\sigma_h = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \tag{6}$$

В случае поступательного движения вдоль оси x нагрузка действует только вдоль оси абсцисс и только $u_{0x} \neq 0$. С учетом этого из системы (5) и выражения (6) получим

$$\sigma_{hx} = -\frac{EH(G^2 + H^2)f_x \sin(\alpha)}{3\delta(1-2\nu)c_x}. \tag{7}$$

Аналогично в случае поступательного движения вдоль оси y ($u_{0y} \neq 0$) и вдоль оси z ($u_{0z} \neq 0$) будем иметь следующие выражения для гидростатических напряжений:

$$\sigma_{hy} = \frac{E f_y \cos(\alpha)}{3\delta(1-2\nu)c_y}, \quad \sigma_{hz} = -\frac{EG(G^2 + H^2)f_z \sin(\alpha)}{3\delta(1-2\nu)c_z}. \quad (8)$$

На основании выражений (7), (8) можно определить наиболее благоприятные для ортодонтического перемещения зубов значения нагрузки по напряжениям, возникающим при этом в периодонтальной связке (наибольшее из таких напряжений составляет 39 кПа, наименьшее – 4 кПа) [20]. В качестве примера выполним расчет нагрузки для первого премоляра. Высота корня зуба $h = 13$ мм, большая полуось $b = 3,9$ мм [13, 14], параметр закругления $p = 0,4$; упругие свойства периодонтальной связки описываются константами $E = 680$ кПа, $\nu = 0,49$ [13, 14]. С учетом этого находим, что для поступательного движения зуба вдоль оси x диапазон ортодонтической нагрузки составляет от 0,38 до 3,70 Н. При интрузии (перемещении зуба в положительном направлении оси $0y$) этот диапазон составляет от 0,09 до 0,83 Н. Таким образом, интрузии (или экструзии) можно добиться воздействием значительно меньших сил, чем горизонтального смещения зуба. Оптимальная ортодонтическая нагрузка для поступательного перемещения в плоскости zy находится в диапазоне от 0,52 до 5,07 Н.

Деформации

В различных подходах к моделированию перестройки костной ткани при ортодонтическом движении зубов предполагается, что наряду с нормальными и касательными напряжениями в периодонтальной связке резорбцию и образование кости стимулируют деформации периодонта [15]. Обзор работ по этой теме отражен в исследованиях [9, 16]. Авторами принимается подход, согласно которому процесс перестройки костной ткани прежде всего контролируется деформациями периодонтальной связки. Как правило, в таком случае ткани периодонта моделируются материалом, поведение которого описывается нелинейной зависимостью между напряжениями и деформациями (билинейно-упругая, вязкоупругая, гиперупругая или многофазная среда) [21]. Для таких моделей характерно наличие начального линейного участка, соответствующего малым деформациям периодонтальной связки, которые возникают при начальных перемещениях корня зуба. Поэтому линейное моделирование периодонтальной связки может считаться точным (с малой погрешностью), если нагрузка сохраняется достаточно низкой, чтобы обеспечивать деформации периодонтальной связки, соответствующие первому участку кривой [4, 22]. В качестве предельной деформации, ограничивающей начальный линейный участок зависимости «напряжения – деформации», применяют полные [9, 15], главные (или эффективные [23]), нормальные деформации [16].

Значения нормальных деформаций, при достижении которых начинаются перестройка костной ткани и ортодонтическое движение зубов, находятся в диапазоне от 0,03 до 0,3 % [16]. Расчет нормальных деформаций при нагрузке, соответствующей найденным величинам благоприятных сил для поступательного ортодонтического движения зубов, проведенный для первого премоляра при тех же условиях нагружения и упругих свойствах периодонтальной связки, показал, что максимальные значения нормальных деформаций имеют тот же порядок.

Наибольшие эквивалентные и полные деформации при поступательном перемещении корня зуба в направлении оси $0x$ наблюдаются в апексе и составляют 0,31 и 0,39 % соответственно. В случае поступательного перемещения в направлении оси $0y$ наибольшие значения этих деформаций также наблюдаются у апекса и равны 0,230 и 0,344 % соответственно. Предельные значения полной деформации, разделяющие участки диаграммы напряжения – деформации и экспериментально определенные в работе [9] для первого моляра крысы, могут составлять 6,3, 8,5 и 18,8 % (в зависимости от испытуемого образца). По данным работы [15], предельное значение полной деформации может составлять 7,5 %. Таким образом, полные деформации, возникающие при рассматриваемых нагрузках, существенно меньше их предельных значений. Это указывает на возможность использования предложенной модели линейно-упругого периодонта при оценке начальной подвижности зубов под действием нагрузок, величины которых соответствуют значениям сил, используемых для ортодонтического движения зубов [24]. Поскольку резорбция и образование костной ткани соответствуют области отрицательных и положительных деформаций, для описания ее перестройки необходимо учитывать знак деформации. При таком подходе более информативным оказывается распределение главных или нормальных деформаций.

Конечно-элементный анализ

Конечно-элементная модель корня зуба в периодонтальной связке разработана с использованием пакета ANSYS Mechanical APDL 14.0 (ANSYS Inc., USA). При конечно-элементном разбиении применялись регулярная гексагональная сетка и конечный элемент типа SOLID185. На рис. 1 представлены модель корня однокоренного премоляра и окружающая его периодонтальная связка, состоящая из трех слоев элементов по толщине. Размер конечных элементов для корня зуба не имеет значения, поскольку он полагался абсолютно твердым телом.

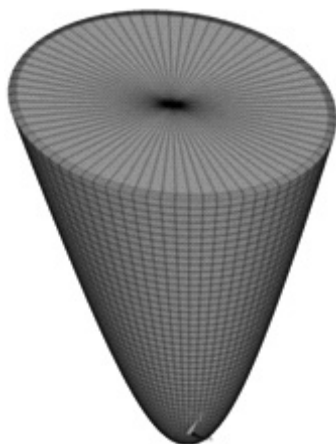


Рис. 1. Конечно-элементная модель системы «корень зуба – периодонтальная связка»

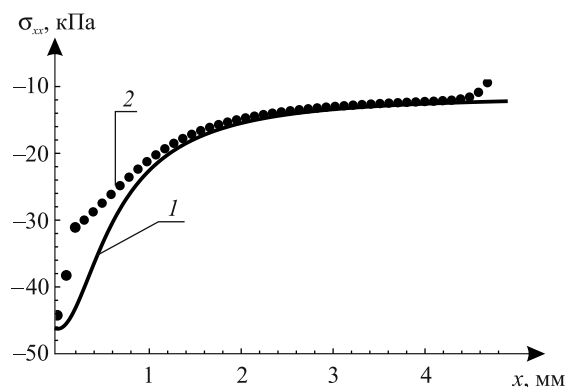


Рис. 2. Зависимость напряжения $\sigma_{xx}(x)$: 1 – зависимость, полученная на основании аналитической модели; 2 – результаты конечно-элементного расчета

Дискретная модель состоит из 14 454 узлов (43 362 степеней свободы) и 14 400 элементов. Узлы на внешней поверхности периодонта жестко заделаны. Геометрические размеры корня зуба и периодонтальной оболочки соответствуют размерам корня, используемым ранее. Модуль упругости и коэффициент Пуассона для тканей периодонта принимались прежние. Узлы на поверхности корня зуба совпадают с узлами внутренней поверхности периодонтальной связки. Это соответствует условию равенства перемещений внешней поверхности корня зуба и внутренней поверхности периодонта.

Зависимость нормальных напряжений σ_{xx} в периодонтальной связке от пространственной координаты x , полученная на основании аналитической модели, представлена на рис. 2. Также на рисунке приведены результаты конечно-элементного расчета этих напряжений. На корень зуба действует вертикальная нагрузка, приложенная в точке с координатами $(0, 0, h)$ и направленная вниз, геометрические параметры корня зуба и упругие свойства периодонтальной связки прежние. Величина нагрузки составляет 1 Н.

Совпадение результатов, как видно из рис. 2, достаточно высокое. Наибольшее расхождение значений напряжений имеет место в окрестности вершины корня зуба и у альвеолярного гребня. Аналогичные зависимости от координаты x при действии той же нагрузки наблюдаются для нормальных напряжений σ_{yy} и σ_{zz} .

Результаты исследования

Предложенная аналитическая модель корня зуба в линейно-упругой периодонтальной связке позволяет определять начальные перемещения однокоренных зубов в форме двуполостного гиперболоида, а также возникающее при этом напряженно-деформированное состояние тканей периодонта. Сравнительный анализ расчета компонент тензора напряжений на основании математической и конечно-элементной моделей показал достаточно высокое совпадение результатов, за исключением областей периодонта у апекса и альвеолярного гребня.

Определены гидростатические напряжения, возникающие при поступательном перемещении корня зуба в горизонтальном и вертикальном направлениях. С учетом благоприятных для ортодонтического движения зубов значений напряжений в периодонтальной связке определены соответствующие диапазоны ортодонтических нагрузок на примере первого премоляра. Для найденных значений нагрузок выполнен расчет нормальных, главных и полных деформаций периодонтальной связки. Показано, что значения деформаций не превышают предельных величин, соответствующих линейно-упругой модели периодонтальной связки. Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования и визуализации начального перемещения зубов при действии ортодонтических сил, определения возникающего при этом напряженно-деформированного состояния и нахождения благоприятной для ортодонтического движения зубов нагрузки. Предложенную модель можно использовать для разработки подходов к моделированию перестройки костной ткани на основании распределения напряжений и деформаций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Quasi-automatic 3D finite element model generation for individual single-rooted teeth and periodontal ligament / R. Clement [et al.] // *Comp. Meth. Prog. Biomed.* 2004. Vol. 73. P. 135–144.
2. Numerical simulation of the biomechanical behaviour of multi-rooted teeth / A. Ziegler [et al.] // *Eur. J. Orthod.* 2005. Vol. 27. P. 333–339.
3. Simulation of orthodontic tooth movements / C. Bourauel [et al.] // *J. Orol. Orthop.* 1999. Vol. 60. P. 136–151.

4. Influence of different modeling strategies for the periodontal ligament on finite element simulation results / A. Hohmann [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 2011. Vol. 139. P. 775–783.
5. Middleton J., Jones M., Wilson A. The role of the periodontal ligament in bone modeling: the initial development of a time-dependent finite element model // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 1996. Vol. 109. P. 155–162.
6. Dorow C., Sander F. G. Development of a model for the simulation of orthodontic load on lower first premolars using the finite element method // J. Orofacial Orthop. 2005. Vol. 66. P. 208–218.
7. Cattaneo P. M., Dalstra M., Melsen B. The finite element method: a tool to study orthodontic tooth movement // J. Dent. Res. 2005. Vol. 84. P. 428–433.
8. A validated finite element method study of orthodontic tooth movement in the human subject / M. L. Jones [et al.] // J. Orthod. 2001. Vol. 28. P. 29–38.
9. Kawarizadeh A., Bourauel C., Jäger A. Experimental and numerical determination of initial tooth mobility and material properties of the periodontal ligament in rat molar specimens // Eur. J. Orthod. 2003. Vol. 25. P. 569–578.
10. Determination of the center of resistance in an upper human canine and idealized tooth model / D. Vollmer [et al.] // Eur. J. Orthod. 1999. Vol. 21. P. 633–648.
11. Bosiakov S. M., Yurkevich K. S. Determination of stiffnesses of the bone tissue at translational displacements and rotations of the tooth root // Russ. J. Biomech. 2010. Vol. 14, № 2. P. 36–45.
12. Nikolai R. J., Schweiker J. W. Investigation of root-periodontium interface stresses and displacements for orthodontic application // Exp. Mech. 1972. Vol. 12, № 9. P. 406–413.
13. Provatidis C. G. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation // Int. J. Eng. Sci. 2001. Vol. 39. P. 1361–1381.
14. Van Schepdael A., Geris L., Van der Sloten J. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement // Med. Eng. Phys. 2013. Vol. 35. P. 403–410.
15. Bourauel C., Vollmer D., Jäger A. Application of bone remodeling theories in the simulation of orthodontic tooth movements // J. Orofacial Orthop. 2000. Vol. 61. P. 266–279.
16. Numerical simulation of tooth movement in a therapy period / Y. Qian [et al.] // Clinic. Biomech. 2008. Vol. 23. S48–S52.
17. Schneider J., Geiger M., Sander F.-G. Numerical experiments on long-time orthodontic tooth movement // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 2002. Vol. 121. P. 257–265.
18. Van Schepdael A., Geris L., Van der Sloten J. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement // Med. Eng. Phys. 2013. Vol. 35. P. 403–410.
19. De Pauw G., Dermaut L., De Bruyn H. The value of the centre of rotation in initial and longitudinal tooth and bone displacement // Eur. J. Orthod. 2003. Vol. 25. P. 285–291.
20. Nonlinear stress-strain behavior of periodontal ligament under orthodontic loading / S. R. Toms [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 2002. Vol. 122. P. 174–179.
21. Analytically determined mechanical properties of, and models for the periodontal ligament: Critical review of literature / T. S. Fill [et al.] // J. Biomech. 2012. Vol. 45. P. 9–16.
22. Three-dimensional mechanical environment of orthodontic tooth movement and root resorption / R. F. Vecilli [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 2008. Vol. 133. P. 791.e711–791.e726.
23. Provatidis C. G. A comparative FEM-study of tooth mobility using isotropic and anisotropic models of the periodontal ligament // Med. Eng. Phys. 2000. Vol. 22. P. 359–370.
24. Ren Y., Maltha J. C., Kuijpers-Jagtman A. M. Optimum force magnitude for orthodontic tooth movement: a systematic literature review // Angle Orthod. 2003. Vol. 73. P. 86–92.

Поступила в редакцию 16.09.2014.

Сергей Михайлович Босьяков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета БГУ.

Абдуфтах Фрхат Мселати – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета БГУ. Научный руководитель – С. М. Босьяков.

Кирилл Сергеевич Юркевич – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета БГУ.

УДК 519.24

Т. В. ЦЕХОВАЯ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНКИ СЕМИВАРИОГРАММЫ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрены задачи статистического анализа временных рядов, связанные с оцениванием семивариограммы. Семивариограмма – одна из основных характеристик стационарных случайных процессов во временной области. Эта функция является моментом второго порядка и характеризует степень линейной зависимости между составляющими рассматриваемого процесса. Исследована непараметрическая оценка семивариограммы гауссовского стационарного случайного процесса с дискретным временем. Доказана ее несмещенность, состоятельность в среднеквадратическом смысле. Изучено асимптотическое поведение семивариантов высших порядков. С помощью полученных предельных выражений для дисперсии, ковариации и семивариантов высших порядков непараметрической оценки семивариограммы найдено ее асимптотическое распределение. Учитывая нормальную аппроксимацию распределения изучаемой статистики, построен центральный доверительный интервал для семивариограммы.

Ключевые слова: случайный процесс; оценка семивариограммы; семивариант; асимптотическое распределение.