О СЛОЖНОСТИ РАСПОЗНАВАНИЯ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР 3-УНИФОРМНЫХ ГИПЕРГРАФОВ КРАТНОСТИ НЕ ВЫШЕ 2

Ю.М. Метельский, Р.П. Шацов

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
metelsky@bsu.by, roshats@gmail.com

В работе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. *Граф пересечений ребер* $L(H)$ гиперграфа H определяется условиями:

1) вершины графа $L(H)$ биективно соответствуют ребрам гиперграфа H;

2) две вершины смежны в $L(H)$ тогда и только тогда, когда соответствующие ребра гиперграфа H пересекаются.

Гиперграф называется k-*униформным*, если каждое его ребро содержит в точности k вершин. *Кратность* гиперграфа – максимальное число его ребер, содержащих пару вершин. Класс графов пересечений ребер k-униформных гиперграфов кратности не выше m обозначим через L_k^m.

Семейство $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_p)$ клик графа G называется *покрытием* этого графа, если каждая вершина и каждое ребро содержится в некоторой клике из Q; при этом клики Q_i называются *кластерами* покрытия. Покрытие Q графа G называется (k, m)-*покрытием*, если выполняются следующие условия:

1) каждая вершина графа G входит не более чем в k кластеров покрытия Q;

2) любые два кластера из Q имеют не более чем m общих вершин.

Теорема 1 [1]. *Граф G принадлежит классу L_k^m тогда и только тогда, когда существует (k, m)-покрытие этого графа.*

Рассмотрим следующую задачу. Пусть S – множество участников некоторого мероприятия (конференции, симпозиума, съезда и т.д.), в рамках которого преполагается организовать ряд заседаний групп его участников. При этом заданы такие и только такие пары людей из S, каждая из которых обязана участвовать хотя бы в одном заседании. А всякое $(m+1)$-элементное подмножество из S может участвовать не более чем в одном заседании. Возможно ли так организовать заседания, чтобы каждый участник заседал не более чем k раз? Обозначим через G граф, вершинами которого являются элементы из S, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие люди должны участвовать в совместном заседании. Очевидно, что всякое (k, m)-покрытие графа G задает способ требуемой организации мероприятия.

Известно, что задача распознавания "$G \in L_2^m$" полиномиально разрешима для каждого фиксированного $1 \le m \le \infty$ ([2 – 4]). P.Hliněný и J.Kratochvíl ([5]) доказали, что при фиксированном $k \ge 3$ задача распознавания "$G \in L_k^1$" является NP-полной. В [1] доказано, что для фиксированного $m \ge 1$ задача распознавания "$G \in L_k^m$" (k – часть входа) является NP-полной.

Нами получен следующий результат:

Теорема 2. *Задача распознавания "$G \in L_3^2$" является NP-полной.*

Идея доказательства теоремы 2 позаимствована из [5]. В частности, использована следующая версия распознавательной задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ:

Задача А. *Вход*: Множество булевых переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и такой набор $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ элементарных дизъюнкций над X, что каждая дизъюнкция d_j содержит не более трех литералов и каждая переменная x_i входит не больше, чем в три дизъюнкции из D.

Вопрос: Существует ли такая функция $t : X \to \{0, 1\}$, что в точке $(t(x_1), t(x_2), \dots, t(x_n))$ каждая элементарная дизъюнкция d_j истинна?

Известно, что задача А является NP-полной [6]. Легко видеть, что задача распознавания "$G \in L_3^2$" принадлежит классу NP. В доказательстве теоремы 2 построено полиномиальное сведение задачи А к задаче распознавания "$G \in L_3^2$". А именно, по произвольному входу задачи А построен граф F, для которого существует $(3, 2)$-покрытие тогда и только тогда, когда существует требуемая функция t для соответствующего входа задачи А. Добавив к каждой вершине графа F по $k - 3$ концевых ребра из теоремы 1 непосредственно получаем

Следствие. *Задача распознавания "$G \in L_k^2$" является NP-полной для фиксированного* $k \geq 3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект №Ф15МЛД-022).

Литература

1. Glebova O., Metelsky Y., Skums P. *Krausz dimension and its generalizations in special graph classes* // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 2013. V. 15. P. 107–120.

2. Beineke L. W. *Derived graphs and digraphs* // Beitrage zur Graphentheorie. Leipzig, 1968. P. 17–33.

3. Bermond J. C., Meyer J. C. *Graphs representatif des arêtes d'un multigraphe* // J. Math. Pures et Appl. 1973. V. 52. P. 299–308.

4. Ташкинов В. А. *Характеризация реберных графов p-графов* // Тезисы докладов 5-й Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1980. С. 135–137.

5. Hliněný P., Kratochvíl J. *Computational complexity of the Krausz dimension of graphs* // Lecture Notes in Computer Science. 1997. V. 1335. P. 214–228.

6. Fellows M., Kratochvíl J., Middendorf M., Pfeiffer F. *The complexity of induced minors and related problems* // Algorithmica. 1995. V. 13. P. 266–282.