



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



Υπολογιστική προσομοίωση του αρτηριακού κυκλοφορικού συστήματος

Μεταπτυχιακή εργασία

ΚΡΗΤΙΚΟΥ ΗΛΕΚΤΡΑ
Διπλωματούχος Μηχανολόγος Μηχανικός

Επιβλέπων: ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ ΠΡΟΒΑΤΙΔΗΣ, Καθηγητής

Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



Υπολογιστική προσομοίωση του αρτηριακού κυκλοφορικού συστήματος

Μεταπτυχιακή εργασία

ΚΡΗΤΙΚΟΥ ΗΛΕΚΤΡΑ
Διπλωματούχος Μηχανολόγος Μηχανικός

Επιβλέπων: ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ ΠΡΟΒΑΤΙΔΗΣ, Καθηγητής

Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2014



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
OF ATHENS



Computer simulation of arterial circulatory system

Master thesis

KRITIKOU ELECTRA

Αθήνα 2014

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η επιστημονική ενασχόληση με το αντικείμενο της βιοϊατρικής τεχνολογίας αποτέλεσε σημαντικό κίνητρο δεδομένης της σπουδαιότητάς της. Η διάγνωση, η πρόληψη και η αντιμετώπιση σημαντικών ασθενειών με αποτέλεσμα ένα υψηλότερο επίπεδο ζωής για τον άνθρωπο, αποτελούν βασικό σκοπό της βιοϊατρικής τεχνολογίας. Τα τελευταία χρόνια η συνεργασία γιατρών και μηχανικών έχει δώσει μεγάλη ώθηση στην ιατρική επιστήμη, καθώς τώρα πια αποκτά περισσότερο τεκμηριωμένη υπόσταση. Η ιατρική από αρχαιοτάτων χρόνων αποτελούσε εμπειρική κυρίως επιστήμη, τουλάχιστον όσον αφορά την διάγνωση ασθενειών. Ωστόσο τώρα πια δίνεται η δυνατότητα στον μηχανικό να εφαρμόσει τον συστηματικό και επαναστατικό τρόπο σκέψης του, κάνοντας χρήση των τεχνολογικών μέσων. Η ηλεκτρονική πληροφόρηση, μέσω έγκυρων διεθνώς ηλεκτρονικών περιοδικών, ο πειραματικός εξοπλισμός και οι πολλαπλές δυνατότητες που προσφέρει ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, αποτελούν σημαντικά εργαλεία για τον μηχανικό.

Στα πλαίσια λοιπόν αυτά, εκπονήθηκε η συγκεκριμένη εργασία, που ολοκληρώνει τον κύκλο σπουδών του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Υπολογιστική Μηχανική με έδρα τη Σχολή των Χημικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Οι απαραίτητοι υπολογισμοί για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων καθώς και η εκπόνηση της παρούσας εργασίας έγιναν στο Εργαστήριο Βιορευστομηχανικής και Βιοϊατρικής Τεχνολογίας του Τομέα Ρευστών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους διδάσκοντες Καθηγητές του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Υπολογιστική Μηχανική για τις γνώσεις υψηλού επιπέδου που αποκόμισα και το κίνητρο που μου προσέφεραν για να ολοκληρώσω τον κύκλο σπουδών του συγκεκριμένου προγράμματος. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή Σωκράτη Τσαγγάρη και Διευθυντή του Εργαστηρίου Βιορευστομηχανικής & Βιοϊατρικής Τεχνολογίας για την εποπτεία της διπλωματικής μου εργασίας, καθώς και για την ενθάρρυνση και αμέριστη συμπαράσταση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της εκπόνησής της. Επιπλέον, πολύ σημαντική είναι και η γενικότερη συμβολή του στη μελλοντική μου επαγγελματική σταδιοδρομία και τον ευχαριστώ ιδιαίτερα γι' αυτό. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον Δρ. Χρήστο Μανόπουλο Ε.ΔΙ.Π. του Εργαστηρίου Βιορευστομηχανικής & Βιοϊατρικής Τεχνολογίας για τη βοήθεια, τις πολύτιμες συμβουλές, την υποστήριξη και την καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Ευχαριστώ τέλος και όλους τους άλλους, φίλους και συγγενείς, για την στήριξή τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην παρούσα εργασία, μελετάται η διάδοση κυμάτων στο κυκλοφορικό σύστημα, μέσω ανάπτυξης μοντέλου του ανθρώπινου αρτηριακού δέντρου βασιζόμενο στην Υπολογιστική Βιορρευστομηχανική. Αναπτύχθηκε κώδικας υπολογισμού με στόχο τη μελέτη των ρευστομηχανικών μεγεθών του κυκλοφορικού συστήματος στις περιπτώσεις υγιούς ενήλικα, ασθενούς με ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής, του ασθενούς μετά από αποκατάσταση του ανευρύσματος μέσω τοποθέτησης ενδοαγγειακού μοσχεύματος και τέλος ασθενούς με φραγή προ του αορτικού διχασμού.

Στο 1^ο κεφάλαιο γίνεται αρχικώς αναφορά στη θεωρία διάδοσης κυμάτων στις αρτηρίες. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται το ρευστομηχανικό μαθηματικό μοντέλο που βασίζεται στις εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής. Περιγράφονται αναλυτικά οι παραδοχές του μοντέλου, βάση των οποίων προκύπτουν, οι εξισώσεις Navier-Stokes και η καταστατική εξίσωση ελαστικότητας πίεσης-διατομής, που τελικά χρησιμοποιούνται, για να υπολογιστούν η πίεση και η ταχύτητα του αίματος και η διατομή του κάθε αγγείου. Ακολουθεί μία σύντομη επεξήγηση του φαινομένου των ανακλάσεων που κυριαρχεί στη ροή του αίματος στις αρτηρίες. Γίνεται λόγος για τις επιπτώσεις της στένωσης των αγγείων και των ανευρυσμάτων και καθίσταται σαφής η αναγκαιότητα της χρήσης ενδοαγγειακών μοσχευμάτων για την αποκατάσταση των ανευρυσμάτων κοιλιακής αορτής. Τέλος, παρουσιάζονται χαρακτηριστικά παραδείγματα υπολογιστικών μοντέλων του κυκλοφορικού συστήματος του ανθρώπου που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία καθώς και η τοπολογία του αρτηριακού δέντρου του ανθρώπου με τις κύριες αρτηρίες που μελετάται στην παρούσα εργασία.

Στο 2^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται όλα τα επιμέρους βήματα που προηγήθηκαν της ανάπτυξης του υπολογιστικού κώδικα. Γίνεται αρχικώς διακριτοποίηση του χώρου και των εξισώσεων και ορίζονται οι αρχικές συνθήκες. Δεδομένης της υπερβολικότητας του φυσικού προβλήματος, υπολογίζονται οι οριακές συνθήκες με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών στα άκρα κάθε αγγείου του δέντρου. Συγκεκριμένα, στην είσοδο του δέντρου επιβάλλεται παλμός παροχής (παλμός εξόδου καρδιάς) μέσω των χαρακτηριστικών εξισώσεων. Στις εξόδους χρησιμοποιούνται μοντέλα προσομοίωσης της περιφέρειας του κυκλοφορικού συστήματος από τη βιβλιογραφία, τα οποία όμως προσαρμόζονται κατάλληλα στη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών, εξασφαλίζοντας την ορθή διέλευση των αναπτυσσόμενων κυμάτων προς την περιφέρεια. Ενδιάμεσα, είτε στις διακλαδώσεις είτε στο ενδοαγγειακό μόσχευμα, τόσο η παροχή όσο και η ολική πίεση διατηρούνται, ώστε να εξασφαλίζεται επίσης η ορθή διέλευση των αναπτυσσόμενων κυμάτων μέσω των εξισώσεων της μεθόδου των χαρακτηριστικών καμπυλών. Σε κάθε χρονική στιγμή, για τον υπολογισμό των οριακών συνθηκών προκύπτουν μη γραμμικά συστήματα, για την επίλυση των οποίων χρησιμοποιείται η επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson. Η διατομή κάθε αγγείου και η ταχύτητα του αίματος σε κάθε σημείο του χώρου για κάθε χρονική στιγμή προκύπτουν μέσω της επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων διατήρησης μάζας και ορμής αντίστοιχα, ενώ για τον υπολογισμό της πίεσης του αίματος χρησιμοποιείται επιπρόσθετα μια αλγεβρική καταστατική εξίσωση ελαστικότητας πίεσης-διατομής. Η επίλυση του συστήματος των διακριτοποιημένων μερικών διαφορικών εξισώσεων βασίζεται στη ρητή διβηματική αριθμητική μέθοδο Mac-Cormack. Τέλος, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά της βιβλιογραφίας ώστε να εξακριβωθεί η αξιοπιστία της μεθόδου.

Στο 3^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται αρχικώς τα γεωμετρικά και ελαστικά δεδομένα των αγγείων που χρησιμοποιήθηκαν για κάθε περίπτωση. Ακολουθούν τα υπολογιστικά χαρακτηριστικά των

προσομοιώσεων, οι προϋποθέσεις δηλαδή προκειμένου να επιτευχθεί σύγκλιση, καθώς και οι απαιτούμενες επαναλήψεις. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα διαγράμματα των ρευστομηχανικών μεγεθών για τις βασικές περιπτώσεις που μελετήθηκαν, του υγιούς ενήλικα, του ασθενούς με ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής με μέγιστη διατομή το όριο χειρουργικής αποκατάστασης, του ασθενούς μετά από αποκατάσταση του ανευρύσματος μέσω τοποθέτησης ενδομοσχεύματος με γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία και του ασθενούς με φραγή προ του αορτικού διχασμού. Στα ανευρύσματα η διατομή του αγγείου και το μέτρο ελαστικότητας του τοιχώματος αυξάνονται, ενώ το πάχος αντίστοιχα μειώνεται. Συνεπώς, παρουσιάζονται αποτελέσματα πέντε διαφορετικών χαρακτηριστικών περιπτώσεων ανευρυσμάτων κοιλιακής αορτής, όπου για κάθε περίπτωση ασθενή οι συνέπειες αναμένεται να είναι διαφορετικές. Αντίστοιχα, μελετήθηκαν και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα πέντε διαφορετικών περιπτώσεων ενδομοσχευμάτων για την αποκατάσταση των ανευρυσμάτων κοιλιακής αορτής, όπου τα βέλτιστα χαρακτηριστικά διαφέρουν για την κάθε περίπτωση ασθενούς.

Στο 4^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα των ανωτέρω υπολογιστικών περιπτώσεων. Ενδεικτικά, σε ότι αφορά τον υγιή ενήλικα (control case), οι κυματομορφές των ρευστομηχανικών μεγεθών, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές τους προσομοιάζουν σε ικανοποιητικό βαθμό την πραγματικότητα. Σε ότι αφορά τους ασθενείς με ανευρύσματα κοιλιακής αορτής, παρατηρήθηκε στα αποτελέσματα ότι η ύπαρξη του ανευρύσματος στην κοιλιακή αορτή, συντελεί σε απώλεια πίεσης στην ανιούσα, που αποτελεί καλύτερο δείκτη πρόβλεψης εξέλιξης της νόσου σε σχέση με την περιφερειακή πίεση, οπότε επιβαρύνεται η λειτουργία της καρδιάς προκειμένου να διατηρήσει σταθερή παροχή. Παράλληλα, επιβεβαιώνεται ο κίνδυνος ρήξης του τοιχώματος του ανευρυσματικού τμήματος εξαιτίας της αυξημένης πίεσης. Σε ότι αφορά την τοποθέτηση ενδομοσχεύματος, τα ρευστομηχανικά μεγέθη αποκαθίστανται σε σύγκριση με τον υγιή ενήλικα, αλλά παρατηρείται μία μικρή αύξηση πίεσης στο αρτηριακό δέντρο.

ABSTRACT

Abdominal aortic aneurysm (AAA) is a dilatation of the abdominal aorta exceeding the normal diameter by more than 50%, and is the most common form of aortic aneurysms. Approximately 90 percent of abdominal aortic aneurysms appear infrarenally and most commonly in humans between 65 and 75 years old and are more common among men and smokers. The major complication of abdominal aortic aneurysms is rupture, which is life-threatening, as large amounts of blood spill into the abdominal cavity, and can lead to death within minutes. Treatment is usually recommended when an AAA grows to >5.5 cm in diameter. While in the past the only option for the treatment of AAA was open surgery, today most are treated with Endovascular Aneurysm Repair (EVAR), which has a lower risk of death associated with surgery (0.5% for EVAR vs 3% for open surgery). In this thesis various hemodynamic parameters are studied in the human arterial system where an infrarenal abdominal aneurysm has developed before the aorta bifurcation. The purpose is to study the pressure wave that is created in the heart and traveling along the aorta and obviously reflected in geometric or mechanical discontinuities as the pathological segment of the aneurysm or the graft has been placed after the repair. Both the aneurysm and graft have different geometric characteristics, wall thickness and mechanical properties than normal aortic wall, thus creating a compliance mismatch. In this way is formed along the aorta a pressure gradient which resists to the directed blood flow and thus impairs the heart and the blood supply to the coronary arteries.

The main purpose of this project is to present the size formation of this pressure gradient along the systemic arterial tree, revealing to what percentage, an aneurysm or a graft, may impair the efficient functioning of the heart. For the purpose of this study a nonlinear model has been formulated, predicting blood flow and pressure at any position along the systemic arterial tree, for the cases of an AAA, an endovascular graft repair and their corresponded normal case (control) for comparison. The model of the systemic arterial tree consists of 55 arterial segments. The mathematical model is based on mass and momentum conservation one-dimensional equations, assuming axisymmetric incompressible flow. Boundary conditions at the distal end of each terminal branch are based on the modified windkessel model, consisting of a resistance in series with a parallel combination of a resistance and a capacitor. This terminal impedance simulating both the resistance and the compliance of the terminal beds accounts for the cumulative effect of all distal vessels and microvasculature. The inlet wave form is the cardiac output flow.

The pressure waveforms at the entrance of ascending aorta and at the point of bifurcation are selected to compare the three modeled cases of the normal, aneurysmatic & repaired abdominal aorta. For the case of AAA pressure attenuation is noticed, while this pressure is restored for the case of the endovascular graft. Restoration is noticed for the flow-rate waveform too for the case of the endovascular graft.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1^ο Κεφάλαιο

Διάδοση κυμάτων στις αρτηρίες	1
1.1 Μορφές σφυγμικών κυμάτων στο κυκλοφορικό σύστημα	1
1.2 Σχέση πίεσης παροχής στο κυκλοφορικό σύστημα	2
1.3 Εξισώσεις ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες	2
1.4 Ανακλάσεις για το γραμμικοποιημένο σύστημα	11
1.4.1 Στένωση-διεύρυνση	11
1.4.2 Διακλάδωση	12
1.5 Αύξηση πλάτους πίεσης σε στενωμένες αρτηρίες	13
1.6 Ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής	13
1.7 Ενδοαγγειακό μόσχευμα	14
1.8 Μοντέλα Κυκλοφορικού Συστήματος	14
1.8.1 1 ^ο Υπολογιστικό μοντέλο κυκλοφορικού συστήματος	15
1.8.2 2 ^ο Υπολογιστικό μοντέλο κυκλοφορικού συστήματος	17
1.9 Αρτηριακό δέντρο	19

2^ο Κεφάλαιο

Διαμόρφωση του προβλήματος	22
2.1 Εισαγωγή	22
2.2 Μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος	22
2.3 Αδιαστατοποίηση	24
2.4 Διακριτοποίηση του χώρου	26
2.5 Διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων	26
2.6 Αρχικές και Οριακές συνθήκες	27
2.6.1 Εγγύς άκρο αγγείου	30
2.6.1.1 Παλμός παροχής	32

2.6.1.2 Παλμός με όρους χαρακτηριστικών εξισώσεων	33
2.6.2 Άπω άκρο αγγείου	34
2.6.2.1 Μοντέλο Σύνθετης Αντίστασης	36
2.6.2.2 Συνθήκη μη-ανάκλασης	38
2.6.2.3 Τερματική αντίσταση	39
2.7 Αγγείο με stent ή ενδομόσχευμα	40
2.8 Διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης	41
2.9 Μέθοδος επίλυσης Mac-Cormack	43
2.9.1 Βήμα πρόβλεψης (predictor step)	44
2.9.2 Βήμα διόρθωσης (corrector step)	44
2.10 Μέθοδος απαλοιφής Gauss	45
2.10.1 Φάση Τριγωνοποίησης	45
2.10.2 Φάση πίσω-αντικατάσταση	46
2.11 Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphon	46
2.12 Έλεγχος κώδικα	48

3^ο Κεφάλαιο

Υπολογιστικές περιπτώσεις και αποτελέσματα	55
3.1 Εισαγωγή	55
3.2 Εξισώσεις	55
3.3 Αρχικές και οριακές συνθήκες	55
3.4 Γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά	56
3.5 Υπολογιστικά δεδομένα	61
3.6 Αποτελέσματα	63

4^ο Κεφάλαιο

Συμπεράσματα	87
4.1 Υπολογιστικό μοντέλο	87
4.2 Αρτηριακό δέντρο υγιούς ενήλικα σε ηρεμία και ύπτια θέση	88
4.3 Ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής	89
4.4 Αποκατάσταση κοιλιακής αορτής με ενδομόσχευμα	90
4.5 Φραγή προ του αορτικού διχασμού	90
4.6 Ταχύτητα διάδοσης κύματος	91
Παράρτημα	92
Βιβλιογραφία-Αρθρογραφία	94

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

1.1 Μορφές σφυγμικών κυμάτων στο κυκλοφορικό σύστημα

Το αίμα εκρέει από την αριστερή κοιλία στο κυκλοφορικό σύστημα με ρυθμικές συσπάσεις της καρδιάς. Το προστιθέμενο αίμα στην αορτή προκαλεί αύξηση της πίεσης και επομένως προκαλεί ροή του αίματος κατά μήκος της αορτής και του κυκλοφορικού συστήματος. Δημιουργείται έτσι η ανάπτυξη σφυγμικών κυμάτων (κύματα πίεσης) και η ροή είναι παλλόμενη (pulsating flow), δηλαδή σε κάθε σημείο του κυκλοφορικού συστήματος η ταχύτητα και η πίεση είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Ο όγκος που εκβάλλεται από την καρδιά δεν είναι σταθερός αλλά μπορεί να μεταβάλλεται από περίοδο σε περίοδο.

Σε όλη την έκταση του αρτηριακού συστήματος η πίεση φθάνει σε μια μέγιστη τιμή που ονομάζεται συστολική πίεση. Η φυσιολογική συστολική πίεση στην αορτή είναι της τάξεως των 120 mmHg στον νεαρό ενήλικα. Η ελάχιστη πίεση ονομάζεται διαστολική πίεση και στην βραχιώνιο αρτηρία είναι της τάξεως των 70-80 mmHg.

Το κύμα πίεσης αλλάζει μορφή και μέγεθος κατά τη μεταφορά του μέσα στο αρτηριακό σύστημα. Οι αιτίες της μεταβολής του είναι πολλές και δεν μπορούν να διαχωριστούν εύκολα διότι είναι αλληλοεξαρτώμενες. Υπάρχουν καταρχήν δύο μορφές λέπτυνσης (tapering): η γεωμετρική λέπτυνση που είναι μείωση της διατομής και η ελαστική λέπτυνση που είναι αύξηση της δυσκαμψίας του τοιχώματος (wall stiffness). Σε μέσου μεγέθους αρτηρίες η ελαστική λέπτυνση είναι μικρή και η πίεση πέφτει προοδευτικά. Όμως σε μικρού μεγέθους αρτηρίες η λέπτυνση είναι σημαντική και η πίεση πέφτει γρήγορα σε μέση τιμή 30-38 mmHg στα αρτηρίδια και πίεση σφυγμού στα 5 mmHg. Αυτές οι τιμές αναφέρονται σε κανονικές συνθήκες και αλλάζουν δραστικά στην περίπτωση συστολής ή διαστολής. Φθάνοντας στα τριχοειδή το κύμα πίεσης αποσβεννύεται τελείως. Η απόσβεση αυτή οφείλεται στο ιξώδες του αίματος και στην ιξώδη συνιστώσα του ιξωδοελαστικού τοιχώματος των αγγείων. Πρόσθετα, σημαντικά δρουν στον παλμό πίεσης οι αρτηριακές διακλαδώσεις και η ασυνέχεια στις ελαστικές ιδιότητες. Όταν το κύμα πίεσης φθάσει σε διακλάδωση ή ασυνέχεια τότε ένα τμήμα του κύματος διαδίδεται και ένα τμήμα ανακλάται. Το ανακλώμενο κύμα προστίθεται στο αρχικό και δημιουργεί αύξηση της συστολικής πίεσης (peaking), που εξαρτάται από τη στενότητα των αρτηριδίων και την δραστηριότητα των προτριχοειδικών σφιγκτήρων. Το ανακλώμενο κύμα, επανακλάται μέχρι ότου αποσβεσθεί. Η επαλληλία των διαδιδόμενων και ανακλωμένων κυμάτων προκαλεί εκτός από την ενίσχυση και διασπορά (dispersion) του κύματος. Το αορτικό κύμα πίεσης, που είναι περίπου τριγωνικής μορφής εξομαλύνεται και εκτείνεται φθάνοντας στα αρτηρίδια. Η μικρή αύξηση πίεσης που ακολουθεί την εντομή (η εντομή παρατηρείται αμέσως μετά την σύγκλιση της αορτικής βαλβίδας και οφείλεται στο εξής: όταν η κοιλία χαλαρώνει η ενδοκοιλιακή πίεση αρχίζει να ελαττώνεται γρήγορα και η προς τα πίσω ροή αίματος από την αορτή προς την κοιλία έχει ως αποτέλεσμα να αρχίζει να πέφτει και η αορτική πίεση. Η προς τα πίσω ροή κλείνει απότομα την αορτική βαλβίδα.) του παλμού πίεσης, που

οφείλεται στην ανάκλαση του κύματος, στρογγυλεύεται και βαθμιαία αντικαθίσταται από αργό αλλά διακεκριμένο βαθούλωμα. Ο μηχανισμός της απόσβεσης και της ενίσχυσης των κυμάτων πίεσης είναι διαφορετικός για τις διάφορες συνιστώσες του κύματος. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε συνιστώσα οδεύει με διαφορετική ταχύτητα.

Η ταχύτητα διάδοσης του παλμού είναι περί τα 3 m/sec στη θωρακική αορτή και πάνω από 5 m/sec στις μικρότερες αρτηρίες όπου υπερέχει το κολλαγόνο. Δομικές αλλαγές του τοιχώματος επηρεάζουν την ταχύτητα διάδοσης. Επίσης, παθολογικές αλλαγές όπως σκλήρυνση ή υπέρταση ή μυϊκή συστολή του αρτηριακού τοιχώματος προκαλούν μείωση της εκτασιμότητας του τοιχώματος και επομένως αύξηση της ταχύτητας διάδοσης (για το απολύτως στερεό τοίχωμα τείνει στο άπειρο).

Υπάρχουν τέλος και πρόσθετες αλλοιώσεις του παλμού πίεσης οφειλόμενες σε κεντρομόλους μεταβολές πίεσης σε θέση καμπυλότητας αγγείων, σε ταλαντώσεις ορισμένων τμημάτων του αρτηριακού συστήματος, κυρίως σε περιοχές στενώσεων. Επίσης, υπάρχει δευτερεύουσα πάλμωση οφειλόμενη στην αναπνοή καθώς και σε μεταβολές της ενδοθωρακικής ή ενδοϊστικής πίεσης ή της πίεσης του περιβάλλοντος. [Τσαγγάρης, 2004]

1.2 Σχέση πίεσης παροχής στο κυκλοφορικό σύστημα

Η μέτρηση της κυματομορφής της παροχής χωρίς να διαταράξουμε αυτή ήταν ανέφικτη. Με την εισαγωγή της τεχνικής μέτρησης με παλλόμενους υπερήχους Doppler έγινε δυνατή η μέτρηση της κυματομορφής παροχής κατά μήκος του αρτηριακού συστήματος και του προφίλ ταχύτητας. Σημαντική πληροφορία δίδει επίσης η μέτρηση της παροχής με τον ηλεκτρομαγνητικό μετρητή παροχής.

Αναλυτικός συσχετισμός πίεσης – ταχύτητας είναι αρκετά σύνθετος και απαιτεί την κατασκευή πολύπλοκων μοντέλων που πρέπει να λαμβάνουν τις ιδιομορφές των διαφόρων τμημάτων και περιοχών του κυκλοφορικού συστήματος. Αυτό που περιπλέκει την κατάσταση είναι οι ανακλάσεις.

Στην αορτή τα μέγιστα της ταχύτητας μπορούν να φθάσουν σε 1 m/sec ή και 1,5 m/sec σε φυσιολογικές συνθήκες, ενώ η μέση τιμή της είναι περί τα 0,4 m/sec.

Αν και η ταχύτητα είναι μη παλλόμενη στα τριχοειδή, εντούτοις υπάρχουν παλμώσεις στο φλεβικό σύστημα. Αυτό οφείλεται κυρίως στην αντλητική επενέργεια του δεξιού κόλπου της καρδιάς. [Τσαγγάρης, 2004]

1.3 Εξισώσεις ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες

Οι θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής βασίζονται σε δύο αξιωματικούς νόμους διατήρησης (για το ασυμπίεστο ρευστό). Το νόμο διατήρησης της μάζας και το νόμο διατήρησης της ορμής. Από την εφαρμογή του νόμου διατήρησης της μάζας προκύπτει η εξίσωση συνέχειας. Ο νόμος διατήρησης της ορμής εκφράζει το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Το ρευστομηχανικό μαθηματικό μοντέλο που αναπτύσσεται και επιλύεται, βασίζεται στις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής με σταθερές την πυκνότητα, τη θερμοκρασία και το ιξώδες του ρευστού. Επίσης, θεωρείται ότι όλα τα σημεία της διάταξης του μοντέλου βρίσκονται στο ίδιο υψόμετρο με αποτέλεσμα οι βαρυτικές δυνάμεις να εξαλείφονται, ενώ υποτίθεται αξονοσυμμετρική ροή. Μέσω ενός συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων (r, φ, x) η εξίσωση Navier Stokes κατά την φ κατεύθυνση απλοποιείται όταν η ροή του ρευστού είναι αξονικά συμμετρική χωρίς περιδίνηση (swirl), οπότε για την ταχύτητα κατά την περιφερειακή κατεύθυνση ισχύει $w=0$. Δηλαδή, κανένα μέγεθος δεν εξαρτάται από τη φ και όλες οι μεταβολές των μεγεθών ως προς φ είναι μηδενικές. Κατά τις δύο άλλες κατευθύνσεις, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω παραδοχές, οι εξισώσεις Navier Stokes έχουν τη μορφή:

Ακτινική κατεύθυνση r :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (1-1)$$

Αξονική κατεύθυνση x :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (1-2)$$

,όπου: v, u είναι οι ταχύτητες του ρευστού αντίστοιχα κατά την ακτινική r και αξονική x κατεύθυνση με $v=v(r, x, t)$ και $u=u(r, x, t)$.

p είναι η πίεση του ρευστού με $p=p(r, x, t)$.

ρ και μ είναι η πυκνότητα και το δυναμικό ιξώδες του ρευστού, αντίστοιχα.

Για λεπτά σώματα με σχέση πάχους προς μήκος μικρή ή αντίστοιχα για στενόμακρους κυλινδρικούς αγωγούς με σχέση ακτίνας προς μήκος μικρή, αν αδιαστατοποιηθούν οι παραπάνω εξισώσεις Navier-Stokes, τότε αναδεικνύεται ότι οι όροι ιξώδους δευτέρας τάξης κατά x είναι αμελητέοι σε σχέση με τους υπολοίπους όρους ιξώδους της εξίσωσης, οπότε οι εξισώσεις Navier-Stokes λαμβάνουν τη μορφή:

Ακτινική κατεύθυνση r :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (1-3)$$

Αξονική κατεύθυνση x :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1-4)$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφα τον κανόνα παραγώγισης γινομένου στο τελευταίο άθροισμα της παραπάνω σχέσης προκύπτει:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1-5)$$

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας, θεωρώντας ασυμπίεστο ρευστό και αξονική συμμετρία, παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1-6)$$

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες και για στενόμακρες κυλινδρικές δομές μικρής καμπυλότητας με αξονική συμμετρία, όπως φαίνεται αναλυτικά στο [Μανόπουλος, 2009], καταλήγουμε:

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (A\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (1-7)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A=\pi R^2$)

R είναι η ακτίνα του κυλινδρικού αγωγού

\bar{u} είναι η μέση ταχύτητα στην διατομή

και Q είναι η παροχή όγκου στην διατομή A.

Εξίσωση ορμής κατά την x κατεύθυνση:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{\rho R} \tau_R = 0 \quad (1-8)$$

, όπου τ_R είναι η διατμητική τάση.

Στην εξίσωση ορμής (1-8), η διατμητική τάση του ρευστού στο τοίχωμα τ_R είναι ένα άγνωστο μέγεθος, όπως η διατομή του κυλινδρικού αγωγού, η πίεση και η ταχύτητα του ρευστού. Όμως, μέσω κατάλληλων θεωριών η διατμητική αυτή τάση σε κυλινδρικούς αγωγούς μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μεγεθών της ταχύτητας του ρευστού και της διατομής του αγωγού.

Αν θεωρηθεί μη μόνιμη, αξονικά συμμετρική ροή σε κυλινδρικό αγωγό, τότε η ροή αυτή είναι διαμορφωμένη με την ακτινική ταχύτητα του ρευστού να είναι αμελητέα, οπότε η εξίσωση διατήρησης της μάζας έχει τη μορφή $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$. Αν λοιπόν επιλύσουμε την προκύπτουσα εξίσωση ορμής ως προς τη διατμητική τάση, ισχύει:

$$\tau_R = \frac{\rho R}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \quad (1-9)$$

Για την ομοιόμορφη παλλόμενη ροή, τόσο η κλίση πίεσης, όσο και η μέση ταχύτητα εξαρτώνται μόνο από το χρόνο. Η κλίση πίεσης μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός της μέσης ταχύτητας στη διατομή και της χρονικής παραγώγου αυτής, αρκεί να πολλαπλασιαστεί με τους κατάλληλους συντελεστές, οι οποίοι προσδιορίζονται ώστε να είναι ανεξάρτητοι του χρόνου, μέσω της ακριβούς λύσης μιας απλής περιοδικής πάλμωσης. Σύμφωνα με τη θεωρία Young και Tsai, [Young & Tsai, 1973], που βασίζεται στη θεωρία Womersley, [Womersley, 1955 & 1957], η κλίση πίεσης είναι:

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{8\pi\mu}{A} C_v \bar{u} + \rho C_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (1-10)$$

, όπου $C_v = \frac{\cos\delta_u}{\sigma_u}$ και $C_u = \frac{8}{W^2} \frac{\sin\delta_u}{\sigma_u}$ οι αδιάστατοι συντελεστές που προσδιορίζονται μέσω της ακριβούς λύσης της απλής περιοδικής πάλμωσης και

$\sigma_u = \frac{8}{W^2} \sqrt{\left(1 - 2\frac{C}{W}\right)^2 + \left(2\frac{D}{W}\right)^2}$ ο συντελεστής πλάτους πάλμωσης της ταχύτητας για μηδενική μέση τιμή,

$\delta_u = \tan^{-1} \left(\frac{1 - 2\frac{C}{W}}{2\frac{D}{W}} \right)$ η διαφορά φάσης μεταξύ του κύματος της κλίσης πίεσης με το

κύμα της μέσης ταχύτητας, ενώ

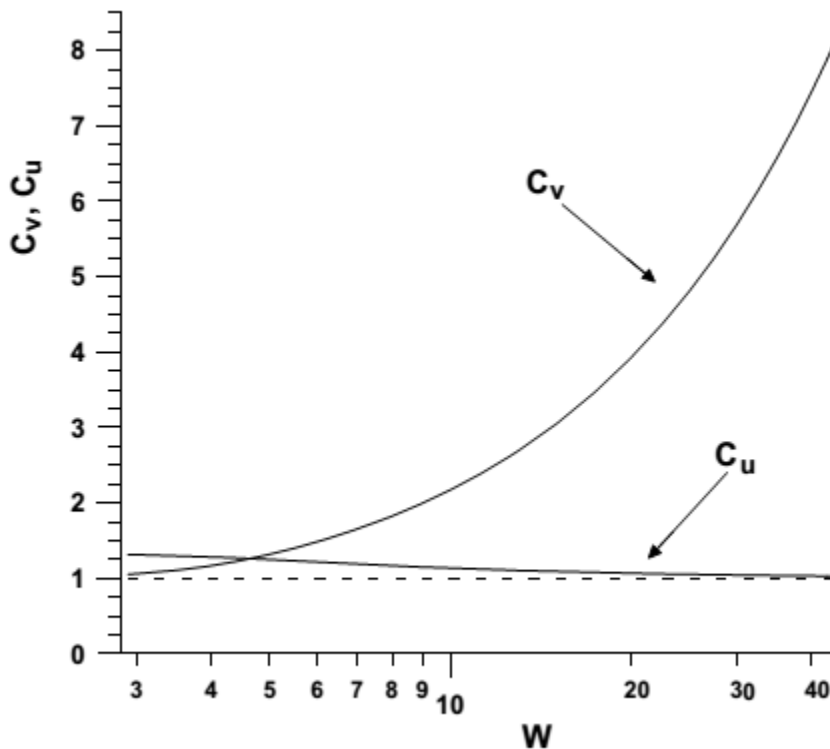
$W = R_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ ο αδιάστατος αριθμός Womersley με ω την κυκλική συχνότητα της πάλμωσης και R_0 την αρχική ακτίνα του αγωγού.

Οι παράμετροι στο συντελεστή πλάτους σ_u και στη διαφορά φάσης δ_u , καθορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$C = \frac{\text{ber}(W)\text{bei}'(w) - \text{bei}(w)\text{ber}'(w)}{\text{ber}^2(W) + \text{bei}^2(W)} \quad \text{και} \quad D = \frac{\text{ber}(W)\text{ber}'(w) - \text{bei}(w)\text{bei}'(w)}{\text{ber}^2(W) + \text{bei}^2(W)},$$

όπου $\text{ber}(W)$ και $\text{bei}(W)$ είναι οι συναρτήσεις Kelvin και αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης Bessel $J_0\left(W e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)$ πρώτου είδους και μηδενικής τάξης, ενώ $\text{ber}'(W)$ και $\text{bei}'(W)$ είναι οι αντίστοιχες παράγωγοί τους.

Ο αδιάστατος συντελεστής C_v ονομάζεται συντελεστής ιξώδους και περιγράφει το βαθμό της πτώσης πίεσης που προκαλείται στη ροή λόγω της επίδρασης του ιξώδους του ρευστού. Ο αδιάστατος συντελεστής C_u ονομάζεται συντελεστής αδράνειας και καθορίζει σε πιο βαθμό τα αδρανειακά φαινόμενα λόγω της πάλμωσης του ρευστού επηρεάζουν την πτώση πίεσης στη ροή. Οι συντελεστές εξαρτώνται από τον αδιάστατο αριθμό Womersley, ο οποίος εκφράζει το λόγο των αδρανειακών προς τις ιξώδεις δυνάμεις πίεσης που αναπτύσσονται κατά την ταλάντωση ενός ρευστού εντός ευθύγραμμου αγωγού. Η εξάρτηση απεικονίζεται στο ακόλουθο γράφημα.



Σχήμα 1.1 Συντελεστής ιξώδους C_v και αδράνειας C_u συναρτήσει του αδιάστατου αριθμού Womersley, [Μανόπουλος, 2006].

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1-9), προκύπτει:

$$\tau_R = -\frac{\rho R}{2} \left(\frac{8\pi\nu}{A} C_v \bar{u} + (C_u - 1) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \quad (1-11)$$

Θεωρώντας σχετικά μικρές παραμορφώσεις του εύκαμπτου τοιχώματος των αγωγών, μπορεί η διατμητική τάση στην εξίσωση (1-8) να αντικατασταθεί από την (1-11), οπότε:

$$C_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{u}{A} = 0 \quad (1-12)$$

Η προσέγγιση του ιξώδους όρου για χαμηλούς αριθμούς Womersley ($W < 3$) είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που γίνεται και στη μόνιμη ροή. Καθώς όμως ο αριθμός

Womersley αυξάνει, ο συντελεστής ιξώδους C_v , αυξάνει σχετικά απότομα με αποτέλεσμα να συμβάλλει στην όλο και μεγαλύτερη επίδραση των δυνάμεων πίεσης λόγω ιξώδους.

Η θεώρηση της διατμητικής τάσης για εύκαμπτο αγωγό είναι κοντά στην πραγματικότητα, μόνο όταν οι εγκάρσιες παραμορφώσεις του αγωγού είναι σχετικά μικρές, δηλαδή μέχρι 10%. Όταν όμως οι παραμορφώσεις γίνουν έντονες, όπως στην περίπτωση ανευρύσματος, πρέπει να εισαχθεί ένας επιπλέον όρος που να ερμηνεύει τα φαινόμενα τύρβης και αποκόλλησης της ροής.

Στην περίπτωση απότομης διεύρυνσης, πρέπει στην εξίσωση (1-10) να προστεθεί ένας ακόμη όρος, ο οποίος λαμβάνει υπόψη την πτώση πίεσης που προκαλείται λόγω της χρονικά μεταβαλλόμενης διεύρυνσης σε τμήμα ενός ευθύγραμμου εύκαμπτου αγωγού.

Για αυτήν την περίπτωση, η κλίση πίεσης έχει τη μορφή:

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{8\pi\mu}{A} C_v \bar{u} + \rho C_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial p_s}{\partial x} \quad (1-13)$$

Για τον προσδιορισμό του επιπέδων όρου, θεωρείται μη μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού. Υποθέτοντας ότι η κατεύθυνση της ροής είναι προς τα δεξιά για μία δοσμένη χρονική στιγμή, οι εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας εφαρμόζονται για τον όγκο ελέγχου του σχήματος 1.2.

Οπότε,

Διατήρηση Μάζας:

$$\bar{u}_1 A_1 = \bar{u}_2 A_2 \Rightarrow \bar{u}_2 = \bar{u}_1 A_1 / A_2, \quad (1-14)$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 αντιστοιχούν στην είσοδο και την έξοδο του όγκου ελέγχου, ενώ ο δείκτης x σε τυχαία διατομή μεταξύ των x_1 και x_2 .

Διατήρηση Ορμής: [Τσαγγάρης, 2005]:

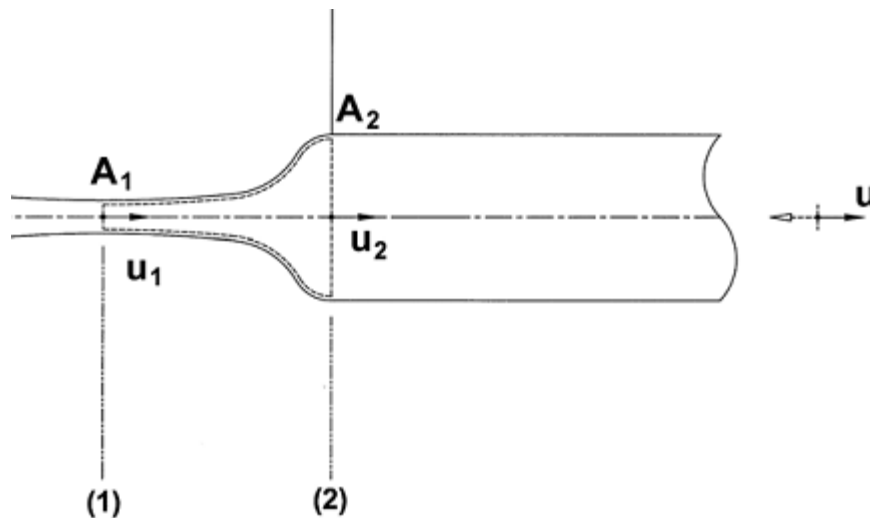
$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^R u(x) 2\pi r dr dx + \rho (\beta_2 \bar{u}_2^2 A_2 - \beta_1 \bar{u}_1^2 A_1) = \bar{p}_1 A_1 - \bar{p}_2 A_2 + K, \quad (1-15)$$

όπου K αντιπροσωπεύει τη δύναμη που ασκεί το τοίχωμα στο ρευστό και β_1 και β_2 οι διορθωτικοί συντελεστές ορμής.

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας: [Rath, 1976] και [Rath & Teipel, 1978]:

$$\delta p_s = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 + \frac{\rho}{2} (\alpha_1 \bar{u}_1^2 - \alpha_2 \bar{u}_2^2) - \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x)}{\partial t} dx, \quad (1-16)$$

όπου δp_s είναι η πτώση πίεσης στο αποκλίνον τμήμα και α_1 και α_2 οι διορθωτικοί συντελεστές της κινητικής ενέργειας λόγω ανομοιομορφίας της κατανομής της ταχύτητας στη διατομή. Ο συντελεστής κινητικής ενέργειας είναι 2 για στρωτή, διαμορφωμένη ροή, ενώ όταν η κατανομή της ταχύτητας είναι ομοιόμορφη, όπως στην περίπτωση της τύρβης, είναι 1.



Σχήμα 1.2 Όγκος ελέγχου σε παλλόμενη ροή σε απότομη διεύρυνση ευθύγραμμου αγωγού

Η δύναμη K αποτελείται από δύο τμήματα. Τη δύναμη λόγω συνεκτικών διατμητικών τάσεων και τη δύναμη λόγω πιέσεων, με την οποία ενεργεί το τοίχωμα στην επιφάνεια $A_1 - A_2$. Με δεδομένο το γεγονός ότι η ροή αποκολλάται, οι δυνάμεις λόγω διατμητικών τάσεων ελαχιστοποιούνται. Από κάποια τιμή του λόγου A_2 / A_1 και πάνω, η μόνη απομένουσα δύναμη είναι αυτή λόγω πίεσης :

$$K \cong \bar{p}_1 (A_2 - A_1) \quad (1-17)$$

Επειδή η επιτάχυνση του ρευστού στο χώρο από τη θέση (1) στη θέση (2) δεν είναι γνωστή, προσεγγίζεται από τη μέση τιμή των επιταχύνσεων στα άκρα του όγκου ελέγχου.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διατήρησης ορμής (1-15) την (1-17) και λαμβάνοντας υπόψη τη μέση τιμή των επιταχύνσεων, προκύπτει:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} A(x) \overline{u(x)} dx + \rho (\beta_2 \bar{u}_2^2 A_2 - \beta_1 \bar{u}_1^2 A_1) = \bar{p}_1 A_1 - \bar{p}_2 A_2 + \bar{p}_1 (A_2 - A_1) \quad (1-18)$$

Το γινόμενο $A(x) \overline{u(x)}$ εκφράζει την παροχή που διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο και η μέση χρονικά τιμή είναι ανεξάρτητη του x . Επιλέγοντας λοιπόν την είσοδο και επιλύοντας ως προς τη διαφορά πίεσης, η (1-18) δίνει:

$$\overline{p_1} - \overline{p_2} = \frac{\rho}{2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial t} L_a + \rho \left(\beta_2 \frac{A_1^2}{A_2^2} - \beta_1 \frac{A_1}{A_2} \right) u_1^{-2}, \quad (1-19)$$

όπου L_a είναι το μήκος του ανευρύσματος.

Η (1-16) χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή των επιταχύνσεων και αντικαθιστώντας τη διαφορά πίεσης, γίνεται:

$$\delta p_s = \frac{\rho}{2} \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right) \frac{L_a}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \left(2\beta_2 \frac{A_1^2}{A_2^2} - 2\beta_1 \frac{A_1}{A_2} + \alpha_1 - \alpha_2 \frac{A_1^2}{A_2^2} \right) u_1^{-2} \quad (1-20)$$

Εκτός της απότομης διεύρυνσης, ο αγωγός θεωρείται πως έχει άκαμπτα τοιχώματα. Συνεπώς, η διατομή στην είσοδο είναι σχεδόν ίση με την A , ενώ η διατομή της θέσης (2) είναι η μέγιστη. Επίσης, λόγω της κοινής διατομής στην είσοδο, μέσω της εξίσωσης συνέχειας προκύπτει:

$$\overline{u_1} A_1 = \overline{u} A \Rightarrow \overline{u_1} = \overline{u}.$$

Έχει υποτεθεί ότι η ροή του ρευστού είναι προς τα δεξιά. Λόγω της πάλμωσης, ενδέχεται η ροή να αναστρέφει τη φορά της. Όταν εφαρμόζεται η εξίσωση της μηχανικής ενέργειας, το πρόσημο του όρου που περιέχει το τετράγωνο της ταχύτητας πρέπει να αλλάζει όταν αντιστρέφεται η ροή, ώστε να εμφανίζεται πάντα πτώση πίεσης, [Rath & Teipel, 1976], [Young & Tsai, 1973] και [Stergiopoulos et al, 1992]. Το τετράγωνο της μέσης ταχύτητας \overline{u}^2 πρέπει να αντικατασταθεί από το γινόμενο $\overline{u} |\overline{u}|$.

Η εξίσωση, τελικώς, διατήρησης μηχανικής ενέργειας είναι η ακόλουθη:

$$\delta p_s = \frac{\rho}{2} \left(\frac{A}{A_{max}} - 1 \right) \frac{L_a}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\rho}{2} K_t \left(\frac{A}{A_{max}} - 1 \right)^2 \overline{u} |\overline{u}| \quad (1-21)$$

Ο συντελεστής K_t εξαρτάται από το λόγο $A_b = \frac{A_{max} - A}{A_{max}}$.

Χρησιμοποιώντας τις πειραματικές τιμές του συντελεστή K_t από τη βιβλιογραφία, [Young et al, 1975], προκύπτει η εξάρτηση $K_t = K_t(A_b)$ μέσω πολυωνυμικής προσαρμογής της μορφής: $K_t = \kappa A_b^2 + \lambda A_b + \eta$, όπου $\kappa = -3.182$, $\lambda = 2.306$ και $\eta = 2.072$. Η προσαρμογή γίνεται αποδεκτή μέχρι του σημείου που το πολυώνυμο παρουσιάζει μέγιστο, ώστε να μην αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης $K_t = K_t(A_b)$. Συνεπώς ισχύει για πλάτος $A_b = \frac{-\lambda}{2\kappa} = 0.36$ και πάνω. Για το διάστημα $0 \leq A_b \leq 0.36$ που το πλάτος είναι μικρό, η εκλογή του συντελεστή K_t δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Έτσι, γι' αυτό το διάστημα η συνάρτηση θεωρείται σταθερή και ίση με τη μέγιστη της συνάρτησης προσαρμογής. Για ολόκληρο το διάστημα μεταβολής του πλάτους ο συντελεστής τύρβης και αποκόλλησης της ροής παίρνει τελικά τις τιμές:

$$K_t = \begin{cases} \frac{-\lambda^2}{4\kappa} + \eta & (0 \leq A_b \leq \frac{-\lambda}{2\kappa}) \\ \kappa A_b^2 + \lambda A_b + \eta & (\frac{-\lambda}{2\kappa} \leq A_b \leq 1) \end{cases} \quad (1-22)$$

Η απότομη διεύρυνση επηρεάζει το ροικό πεδίο καθ'όλο το μήκος του αγωγού L, προκαλώντας μία πτώση πίεσης, της οποίας η μέση τιμή είναι $\frac{\delta p_s}{L}$. Θεωρείται για το

$$\text{στοιχειώδες τμήμα ότι } \frac{\partial p_s}{\partial x} \cong \frac{\delta p_s}{L} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{A}{A_{max}} - 1 \right) \frac{L_a}{2L} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\rho}{2L} K_t \left(\frac{A}{A_{max}} - 1 \right)^2 \bar{u} |\bar{u}|.$$

Η κλίση πίεσης λοιπόν έχει τη μορφή:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{8\pi\mu}{A} C_v \bar{u} + \rho C_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{A}{A_{max}} - 1 \right) \frac{L_a}{2L} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\rho}{2L} K_t \left(\frac{A}{A_{max}} - 1 \right)^2 \bar{u} |\bar{u}| \quad (1-23)$$

Αντικαθιστώντας στην (1-10) προκύπτει η διαμητική τάση του τοιχώματος:

$$\tau_R = -\frac{\rho R}{2} \left(\frac{8\pi\nu}{A} C_v \bar{u} + \left(C_u - 1 + \left(\frac{A}{A_{max}} - 1 \right) \frac{L_a}{4L} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{2L} K_t \left(\frac{A}{A_{max}} - 1 \right)^2 \bar{u} |\bar{u}| \right) \quad (1-24)$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τη διαμητική τάση στην εξίσωση ορμής (1-8), προκύπτει:

$$\left(C_u + \left(\frac{A}{A_{max}} - 1 \right) \frac{L_a}{4L} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{u}{A} + \frac{1}{2L} K_t \left(\frac{A}{A_{max}} - 1 \right)^2 \bar{u} |\bar{u}| = 0 \quad (1-25)$$

Οι προκύπτουσες άγνωστες συναρτήσεις από την κατάστρωση του μοντέλου είναι η ταχύτητα του ρευστού, η πίεση του ρευστού και η εγκάρσια διατομή του εύκαμπτου αγωγού. Για την εύρεση των τριών αυτών αγνώστων συναρτήσεων χρησιμοποιείται μια επιπλέον αλγεβρική καταστατική εξίσωση, πέραν αυτών της συνέχειας και της ορμής, η οποία συνδέει τη μεταβλητή διατομή του εύκαμπτου αγωγού με την εσωτερική διαμορφούμενη πίεση του ρευστού.

Και οι τρεις μαζί ανωτέρω εξισώσεις του μοντέλου αποτελούν ένα υπερβολικό σύστημα (3x3), του οποίου η επίλυση καθορίζει τα ρευστομηχανικά μεγέθη μιας μη μόνιμης μονοδιάστατης ροής ρευστού εντός εύκαμπτου κυλινδρικού αγωγού με τις προαναφερθείσες παραδοχές. Συνήθως η ροή που προκύπτει από τέτοιου είδους μοντέλα δεν καλείται μονοδιάστατη αλλά ψευδο-μονοδιάστατη εξαιτίας της επιπλέον μεταβολής της εγκάρσιας διατομής του εύκαμπτου αγωγού σε κάθετη διεύθυνση από αυτή της ταχύτητας του ρευστού. [Μανόπουλος, 2009]

1.4 Ανακλάσεις για το γραμμικοποιημένο σύστημα (1-7),(1-8)

Κάτω από φυσιολογικές συνθήκες το σύστημα των εξισώσεων (1-7),(1-8) παρουσιάζει σχετικά χαμηλή γραμμικότητα.

Στο σημείο ανάκλασης από το προσπίπτον κύμα (incident) έντασης P_1 δημιουργείται ένα ανακλώμενο κύμα P_2 και ένα διερχόμενο κύμα P_1' .

Ορίζεται ως συντελεστής ανάκλασης R_f (reflection coefficient) το πηλίκο:

$$R_f = \frac{P_2}{P_1} \quad (1-26)$$

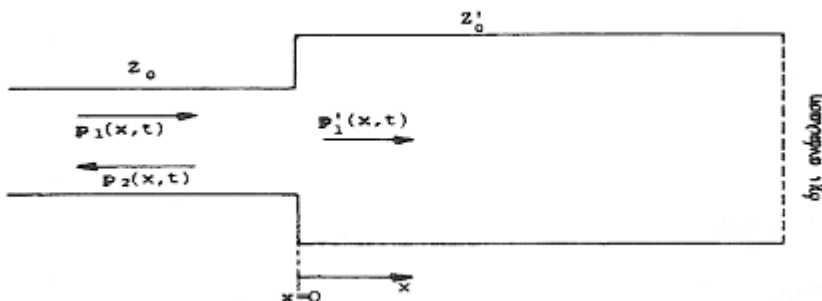
και ως συντελεστής διέλευσης T (transmission coefficient) το πηλίκο:

$$T = \frac{P_1'}{P_1} \quad (1-27)$$

Ισχύει ότι:

$$P_1 + P_2 = P_1' \quad (1-28)$$

1.4.1 Στένωση – διεύρυνση



Σχήμα 1.3 Σχηματική παράσταση στένωσης-διεύρυνσης

Το προσπίπτον κύμα $P_1(x,t)$ φθάνοντας στην ασυνέχεια της διατομής (στη θέση $x=0$) υφίσταται εν μέρει ανάκλαση, προκύπτει δε έτσι το ανακλώμενο κύμα $P_2(x,t)$ που οδεύει προς τα αριστερά και το διερχόμενο κύμα $P_1'(x,t)$ που οδεύει προς τα δεξιά. Υποτίθεται ότι το διερχόμενο κύμα $P_1'(x,t)$ λόγω του μεγάλου μήκους του αγωγού δεν υφίσταται νέα ανάκλαση.

Ο λόγος των εμπεδήσεων είναι :

$$\lambda = \frac{1-R}{1+R} = \left(\frac{E}{E'} \frac{h}{h'}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A'}{A}\right)^{\frac{5}{2}} \quad (1-29)$$

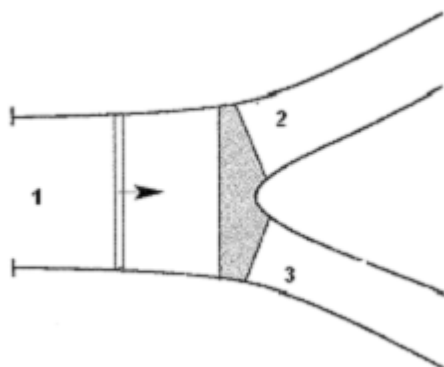
Γενικά :

- Υπάρχει ανάκλαση στην περίπτωση μεταβολής της διατομής A του αγγείου, $\lambda \neq 1$.
- Υπάρχει ανάκλαση στην περίπτωση μεταβολής του πάχους h του αγγείου, $\lambda \neq 1$.
- Υπάρχει ανάκλαση στην περίπτωση μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας E του αγγείου, $\lambda \neq 1$.
- Στην περίπτωση όπου $A' \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$, $R = -1$ έχουμε πλήρη ανάκλαση, χωρίς αλλαγή φάσης. Η περίπτωση αυτή είναι η περίπτωση κλειστού άκρου.
- Στην περίπτωση όπου $A' \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, $R = -1$ έχουμε ανάκλαση χωρίς μεταβολή πλάτους αλλά με αλλαγή φάσης. Η περίπτωση αυτή είναι η περίπτωση ανοικτού άκρου.
- Για $\lambda = 1$ έχουμε την περίπτωση προσαρμοσμένων συνθηκών και δεν έχουμε ανάκλαση.

Η ασυνέχεια ανάλογα με την τιμή του λ χαρακτηρίζεται ως:

- a) $\lambda < 1$: Αλλαγή από λιγότερο στερεή σε περισσότερο στερεή (κλειστό άκρο).
- b) $\lambda > 1$: Προσαρμοσμένες συνθήκες (μη ανάκλαση).
- c) $\lambda > 1$: Αλλαγή από περισσότερο στερεή σε λιγότερο στερεή (ανοικτό άκρο)
[Τσαγγάρης, 2004]

1.4.2 Διακλάδωση



Σχήμα 1.4 Σχηματική παράσταση διακλάδωσης

Ο συντελεστής ανάκλασης για την διακλάδωση δίνεται από την σχέση [Sherwin et al, 2003, Wang, 2003]:

$$R = \frac{\frac{A_0^1}{c_0^1} - \frac{A_0^2}{c_0^2} - \frac{A_0^3}{c_0^3}}{\frac{A_0^1}{c_0^1} + \frac{A_0^2}{c_0^2} + \frac{A_0^3}{c_0^3}} \quad (1-30)$$

, όπου: A_0^i είναι η αρχική διατομή του i αγγείου

και c_0^i είναι η αρχική ταχύτητα διάδοσης του κύματος του i αγγείου.

1.5 Αύξηση πλάτους πίεσης σε στενωμένες αρτηριακές περιοχές

Στένωση των αιμοφόρων αγγείων είναι μία σχετικά συνήθης κατάσταση στο κυκλοφορικό σύστημα. Η στένωση δημιουργείται με διάφορους μηχανισμούς, όπως π.χ. με απόθεση ινώδους ή δημιουργία ενδοαρτηριακής πλάκας. Υπάρχει καθολική συμφωνία μεταξύ των ερευνητών ότι μετά την απόθεση του ινώδους ή άλλου υλικού, το εσωτερικό τοίχωμα της αρτηρίας καλύπτεται από ενδοθηλιακό στρώμα και ενσωματώνεται στο αρτηριακό τοίχωμα. Επομένως η στενωμένη περιοχή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα τμήμα της αρτηρίας με διαφορετική ακτίνα και πάχος τοιχώματος και άλλες ελαστικές ιδιότητες.

Το προηγούμενο φαινόμενο είναι μια διαδεδομένη νόσος των ηλικιωμένων κυρίως και οδηγεί σε καρδιακό έμφραγμα, εγκεφαλική θρόμβωση και άλλες σοβαρές ασθένειες. Εν μέρει αυτές οι επιπλοκές οφείλονται στην αυξημένη συστολική πίεση που παρατηρείται όταν υπάρχει στένωση που προκαλεί περαιτέρω εξέλιξη της αρτηριοσκλήρωσης. Οι προκαλούμενες μεταβολές στην μορφή και την μέγιστη τιμή της πίεσης και παροχής μπορούν να υπολογισθούν αναλυτικά με την χρήση της μονοδιάστατης θεωρίας και με την βοήθεια των χαρακτηριστικών.

Οι μεταβολές δεν είναι μόνο γεωμετρικές (απότομη στένωση και διεύρυνση) αλλά και μεταβολές στις ελαστικές ιδιότητες του σωλήνα. Αντίστοιχη είναι η μεταβολή του πάχους του τοιχώματος και επομένως μεταβάλλεται και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος μεταβάλλεται και λόγω της κατάλληλης αλλαγής του μέτρου ελαστικότητας του τοιχώματος του σωλήνα.

Το προσπίπτον κύμα φθάνοντας στην στένωση, μόνο ένα τμήμα του διέρχεται δια της στένωσης και το άλλο τμήμα ανακλάται στο εγγύς τμήμα της στένωσης. Το ανακλώμενο τμήμα οδεύει προς τα πίσω και ανακλάται εκ νέου. Το τμήμα που διέρχεται από την στένωση διαχωρίζεται εκ νέου σε ανακλώμενο και διερχόμενο τμήμα φθάνοντας στην έξοδο του αγγείου. Η πίεση και η παροχή σε κάθε σημείο λαμβάνονται προσθέτοντας όλα τα διερχόμενα τμήματα.

1.6 Ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής

Ως ανεύρυσμα ορίζεται μια εντοπισμένη, παθολογική και μόνιμη διάταση του τοιχώματος ενός αγγείου, η οποία είναι τουλάχιστον 50% μεγαλύτερη από την αναμενόμενη φυσιολογική διάμετρό του. Η φυσιολογική διάμετρος της αορτής μειώνεται σταδιακά από το θώρακα μέχρι το διχασμό, είναι μεγαλύτερη στους άντρες απ' ό,τι στις γυναίκες και αυξάνεται με την ηλικία. Επομένως, με βάση τον παραπάνω ορισμό, το όριο διαμέτρου για το χαρακτηρισμό ενός διατεταμένου τμήματος της αορτής ως ανευρύσματος ποικίλλει. Για πρακτικούς λόγους, στην κοιλιακή αορτή το όριο αυτό θεωρείται τα 3 εκ.

Όσον αφορά στην παθογένεια, το ανεύρυσμα αποτελεί μια εκφυλιστική διαδικασία όπου η αθηροσκλήρωση φαίνεται να παίζει κεντρικό ρόλο. Ωστόσο, οι ιστολογικές διαταραχές του τοιχώματος της ανευρυσματικής αορτής (κατακερματισμός των φυσιολογικών στιβάδων κερατίνης - ελάττωση περιεκτικότητας σε ελασίνη), καθώς και η ύπαρξη ειδικών μορφών ανευρυσμάτων (μυκωτικά - φλεγμονώδη), συνηγορούν για μια πιο πολύπλοκη παθογένεια όπου εμπλέκονται γενετικοί παράγοντες σε συνδυασμό με φλεγμονώδεις και πιθανώς αυτοάνοσες αντιδράσεις.

1.7 Ενδοαγγειακό μόσχευμα

Το 1986 ο Volodos στην Ουκρανία και λίγο αργότερα, το 1991, οι Parodi, Palmaz και Barone στην Αργεντινή περιγράφουν μία πρωτοποριακή τεχνική που θα άλλαζε τα δεδομένα της χειρουργικής αντιμετώπισης των ΑΚΑ: την ενδοαγγειακή αποκατάσταση με τοποθέτηση ενδονάρθηκα (stent) μέσω των μηριαίων αρτηριών. Η ευκολία της προσπέλασης σε συνδυασμό με την ελάχιστη επεμβατική τεχνική αφενός την καθιστούσε εφικτή σε ασθενείς οι οποίοι λόγω υψηλού εγχειρητικού κινδύνου δεν θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με την ανοικτή μέθοδο, αφετέρου μείωνε τη βαρύτητα της επέμβασης (διάρκεια νοσηλείας, ανάγκη νοσηλείας σε μονάδα εντατικής θεραπείας, απώλεια αίματος, αναπνευστικές - καρδιολογικές επιπλοκές). Η μέθοδος με τις συνεχείς βελτιώσεις της αποτέλεσε έκτοτε αντικείμενο μεγάλου ενδιαφέροντος, αντικρουόμενων απόψεων αλλά κυρίως συνεχούς αξιολόγησης.



Σχήμα 1.5 Ενδομόσχευμα(σώμα, σκέλος, προεκτάσεις) [Μαράκης,2006]

1.8 Μοντέλα Κυκλοφορικού Συστήματος

Η επίλυση της ροής στο αγγείο, όπως αναλυτικά περιγράφεται στο 2^ο κεφάλαιο (Διαμόρφωση του Προβλήματος), αποτελεί την βάση για την επίλυση δικτύων με

αγγεία, τόσο πολύπλοκων που μπορούν να συμπεριλάβουν το κυκλοφορικό του εγκεφάλου ακόμα και ολόκληρο το κυκλοφορικό σύστημα του ανθρώπου. Πολλές εργασίες έχουν παρουσιαστεί τα τελευταία χρόνια και αποδεικνύουν το συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον για μαθηματική και υπολογιστική προσομοίωση του κυκλοφορικού συστήματος του ανθρώπου. Ανάμεσα σε αυτές τις εργασίες, μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα παρουσιάζεται για πολύπλοκα τρισδιάστατα μοντέλα ικανά να παρέχουν αρκετές λεπτομέρειες του πεδίου ροής, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός των τάσεων τοιχώματος. Ωστόσο, αυτοί οι υπολογισμοί είναι περισσότερο απαιτητικοί, ως προς την κατασκευή της γεωμετρίας, του υπολογιστικού μοντέλου και του υπολογιστικού χρόνου. Εκτός αυτού, οι μηχανικοί και οι ιατρικοί ερευνητές συνήθως δεν χρειάζεται να γνωρίζουν λεπτομέρειες της ροής σε τέτοιο βαθμό και έτσι η εφαρμογή απλοποιημένων μοντέλων, που αποδεικνύεται ικανή να παρέχει χρήσιμες πληροφορίες και με χαμηλό υπολογιστικό κόστος, κερδίζει συνεχώς έδαφος.

Πολλές μελέτες με επεμβατικό τρόπο (in vivo) έχουν γίνει για την μελέτη του κυκλοφορικού συστήματος. Το βασικό μειονέκτημα αυτών των μελετών είναι ότι είναι δύσκολες και ακριβές για να γίνουν καθώς επίσης και το γεγονός ότι περιορίζονται σε εύκολα προσβάσιμες αρτηρίες. Σαν αποτέλεσμα, η χρήση ενός υπολογιστικού μοντέλου με την χρήση υπολογιστή για την μελέτη του κυκλοφορικού συστήματος αποτελεί μία καλή εναλλακτική. Τα περισσότερα υπολογιστικά μοντέλα τέτοιου είδους βασίζονται στις ίδιες εξισώσεις, την μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση ορμής κατά x και την εξίσωση συνέχειας. Διαφορές υπάρχουν μεταξύ των μοντέλων κυρίως

(α) στον τύπο των οριακών συνθηκών,

(β) στην εξίσωση ελαστικότητας πίεσης – διατομής που χρησιμοποιείται και

(γ) στην μέθοδο επίλυσης.

Στην βιβλιογραφία [Stergiopoulos et al, 1992, Sherwin et al, 2003, Formaggia et al, 2003] παρατηρήθηκαν τα παρακάτω υπολογιστικά μοντέλα (μαθηματικό μοντέλο, οριακές συνθήκες, μέθοδος επίλυσης).

1.8.1 1^ο Υπολογιστικό μοντέλο κυκλοφορικού συστήματος

Μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο βασίζεται στις μονοδιάστατες εξισώσεις ροής που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας και της εξίσωσης ορμής. Οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1-31)$$

και

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\pi D \tau_0}{\rho} \quad (1-32)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A = \pi \cdot R^2$)

Q είναι η παροχή όγκου στην διατομή A

ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού

D είναι η διάμετρος του αγγείου

και τ_0 είναι η διατμητική τάση στο τοίχωμα και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\tau_0 = -\frac{\rho}{\pi D} \left(\frac{8\pi\mu}{\rho A} C_v Q + (C_u - 1) \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \quad (1-33)$$

, όπου: μ είναι η δυναμική συνεκτικότητα

και οι συντελεστές C_v και C_u είναι συναρτήσεις του αδιάστατου αριθμού Womersley W.

Το σύστημα των εξισώσεων συμπληρώνεται με την παρακάτω εξίσωση ελαστικότητας πίεσης-διατομής:

$$A(x) = A_0(x) (1 + C_0(p - p_0) + C_1(p - p_0)^2) \quad (1-34)$$

, όπου: $A_0(x)$ είναι η αρχική διατομή στην θέση x του αγγείου

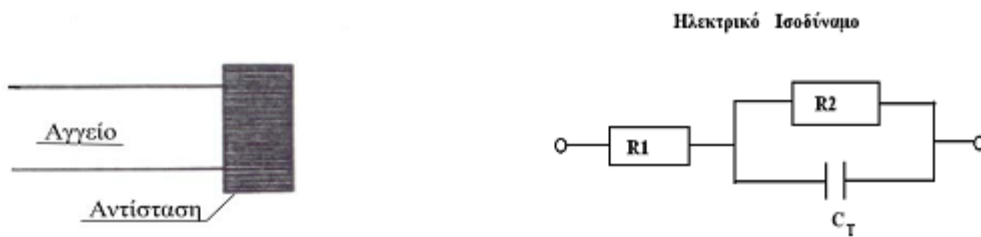
και p_0 είναι η αρχική πίεση

Οριακές συνθήκες

1) Στο εγγύς άκρο του δικτύου, ορίζεται η χρονική μεταβολή της πίεσης είτε της παροχής.

2) Στις διακλαδώσεις θεωρείται σταθερή στατική πίεση και συνέχεια παροχής.

3) Στο άπω άκρο των τερματικών αγγείων εισάγεται μία αντίσταση για να προσομοιώσει το επισωρευτικό αποτέλεσμα που επιφέρουν τα περιφερειακά αγγεία, στα οποία διακλαδίζεται το αρχικό αγγείο, και τα τριχοειδή αγγεία. Το μοντέλο της σύνθετης αντίστασης που χρησιμοποιείται αποτελείται από μία αντίσταση που βρίσκεται σε σειρά με ένα παράλληλο συνδυασμό αντίστασης και πυκνωτή (προσομοιώνει τη ποσότητα αίματος που μπορεί να διατηρηθεί σε ορισμένο τμήμα της κυκλοφορίας για κάθε αύξηση της πίεσης).



Σχήμα 1.6 Σχηματική παράσταση αντίστασης στο άπω άκρο των τερματικών αγγείων

Με βάση τα παραπάνω η οριακή συνθήκη στο δεξιό άκρο του αγγείου δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R_1} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{R_1 R_2 C_T} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{Q}{R_1 C_T} \quad (1-35)$$

Στη παραπάνω σχέση ορίζεται ως $R_1 + R_2 = R_T$ η συνολική αντίσταση στο άκρο του αγγείου και ως C_T η χωρητικότητα ή η αγγειακή ενδοτικότητα της περιφέρειας.

Επισημαίνεται ότι για το άπω άκρο των τερματικών αγγείων του δικτύου πρέπει να οριστούν τα R_T , C_T και R_1/R_T .

Μέθοδος υπολογισμού

Ένα απλό ρητό σχήμα χρησιμοποιήθηκε για την μετατροπή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων σε αλγεβρικές εξισώσεις. Οι εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών παραγώγων είχαν πρώτης τάξης ακρίβεια ως προς τον χρόνο και τον χώρο. [Stergiopoulos et al, 1992]

1.8.2 2^ο Υπολογιστικό μοντέλο κυκλοφορικού συστήματος

Μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο βασίζεται στις μονοδιάστατες εξισώσεις ροής που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας και της εξίσωσης ορμής. Οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1-36)$$

και

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\pi D \tau_0}{\rho} \quad (1-37)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A = \pi \frac{D^2}{4}$)

Q είναι η παροχή όγκου στην διατομή A

ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού

D είναι η διάμετρος του αγγείου

και τ_0 είναι η διατμητική τάση στο τοίχωμα και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\tau_0 = -\frac{\rho}{\pi D} \left(\frac{8\pi\mu}{\rho A} C_v Q + (C_u - 1) \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \quad (1-38)$$

, όπου: μ είναι η δυναμική συνεκτικότητα

και οι συντελεστές C_v και C_u είναι συναρτήσεις του αδιάστατου αριθμού Womersley W .

Αυτό το μαθηματικό μοντέλο διαφέρει από το προηγούμενο ως προς την εξίσωση ελαστικότητας. Στην προκειμένη περίπτωση η εξίσωση ελαστικότητας παίρνει την αλγεβρική μορφή:

$$p = p_{ext} + \beta (\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (1-39)$$

, όπου

$$\beta(x) = \frac{\sqrt{\pi} h_0 E}{(1-\nu^2) A_0} \quad (1-40)$$

h_0 είναι το πάχος του τοιχώματος του αγγείου

E είναι το μέτρο ελαστικότητας του αγγείου

ν είναι ο λόγος Poisson

Οριακές συνθήκες

1) Στο εγγύς άκρο ορίζεται η χρονική μεταβολή είτε της πίεσης είτε της παροχής όγκου.

2) Στις διακλαδώσεις θεωρείται σταθερή ολική πίεση και συνέχεια της παροχής όγκου.

3) Μοντελοποιώντας μονάχα το αρτηριακό σύστημα του κυκλοφορικού, το πρόβλημα μπορεί να γίνει πιο εύκολο. Ωστόσο, το φλεβικό σύστημα ανακλά προς τα πίσω οδεύοντα κύματα. Έτσι είναι επιτακτική η ανάγκη της προσέγγισης των χαρακτηριστικών αυτών των ανακλάσεων. Για αυτό τον λόγο εισάγεται η έννοια της τερματικής αντίστασης. Η τερματική αντίσταση είναι ο αρνητικός λόγος της προσεγγίζουσας το άκρο χαρακτηριστικής μεταβλητής προς την απομακρυνόμενη από το άκρο χαρακτηριστική μεταβλητή.

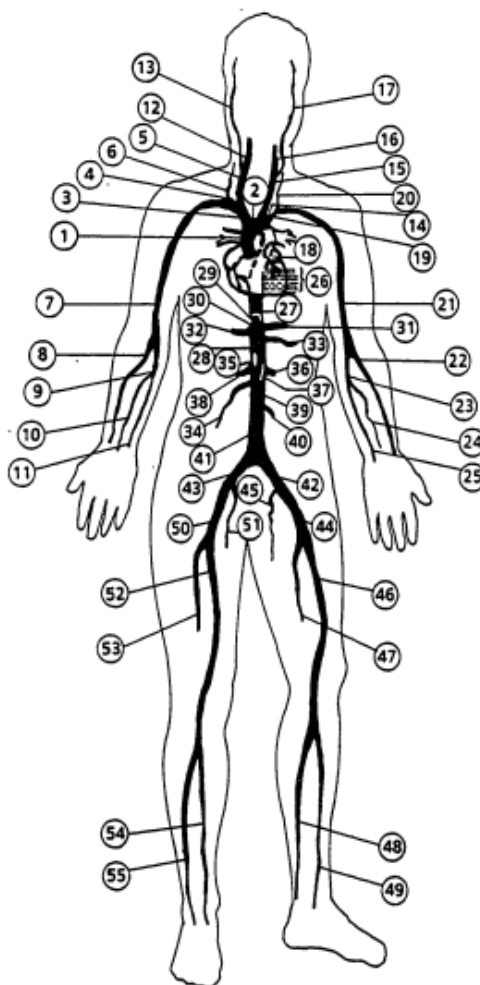
Μέθοδος υπολογισμού

Για τον υπολογισμό των μεγεθών του κυκλοφορικού συστήματος στα όρια υιοθετήθηκε η μέθοδος των χαρακτηριστικών, ενώ ένα ρητό σχήμα χρησιμοποιήθηκε για την μετατροπή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων σε αλγεβρικές εξισώσεις. [Sherwin et al, 2003, Formaggia et al, 2003]

1.9 Αρτηριακό δέντρο

Τα αποτελέσματα της βιβλιογραφικής έρευνας προκειμένου να συγκεντρωθούν δεδομένα για τα γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά των αγγείων δεν ήταν ικανοποιητικά. Για ορισμένα τμήματα του κυκλοφορικού συστήματος, που είτε παρουσιάζουν ιατρικό ενδιαφέρον είτε είναι εύκολα προσβάσιμα, συνεπώς και μετρήσιμα, οι ιδιότητές τους απαντώνται συχνά σε αντίθεση με άλλα.

Το αρτηριακό μοντέλο που μελετάται στην παρούσα εργασία βασίστηκε στα δεδομένα του Stergiopoulos et al, 1990. Αποτελείται από 55 αγγεία, όπως άλλωστε φαίνεται και στο σχήμα 1.7.



Σχήμα 1.7 Σχηματική παράσταση του κυκλοφορικού συστήματος

Εγγύς άκρο του συστήματος αποτελεί η ρίζα της ανιούσας αορτής που βρίσκεται στο άπω άκρο της αορτικής βαλβίδας. Τα γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά, καθώς και οι περιφερειακές αντιστάσεις είναι αντιπροσωπευτικά ενός υγιούς ενήλικα.

Σε ότι αφορά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, δίνεται το μήκος του κάθε αγγείου, καθώς και η ακτίνα στο εγγύς και άπω άκρο (Πίνακας 1.1). Υποθέτουμε ότι η διατομή κάθε αγγείου μεταβάλλεται γραμμικά από την είσοδο στην έξοδο.

Πίνακας 1.1 : Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά Αγγείων				
A/A Αγγείου	Όνομα	Μήκος L(cm)	Ακτίνα Εγγύς άκρου Rin(cm)	Ακτίνα Άπω άκρου Rout(cm)
1	Ascending Aorta	4.0	1.470	1.440
2	Aortic Arch A	2.0	1.120	1.120
3	Innominate	3.4	0.620	0.620
4	R. Subclavian A	3.4	0.423	0.423
5	R. Carotid	17.7	0.370	0.370
6	R. Vertebral	14.8	0.188	0.183
7	R. Subclavian B	42.2	0.403	0.236
8	R. Radial	23.5	0.174	0.142
9	R. Ulnar A	6.7	0.215	0.215
10	R. Interosseous	7.9	0.091	0.091
11	R. Ulnar B	17.1	0.203	0.183
12	R. Internal Carotid	17.7	0.177	0.083
13	R. External Carotid	17.7	0.177	0.083
14	Aortic Arch B	3.9	1.070	1.070
15	L. Carotid	20.8	0.370	0.370
16	L. Internal Carotid	17.7	0.177	0.083
17	L. External Carotid	17.7	0.177	0.083
18	Thoracic Aorta A	5.2	0.999	0.999
19	L. Subclavian A	3.4	0.423	0.423
20	Vertebral	14.8	0.188	0.183
21	L. Subclavian B	42.2	0.403	0.236
22	L. Radial	23.5	0.174	0.142
23	L. Ulnar A	6.7	0.215	0.215
24	L. Interosseous	7.9	0.091	0.091
25	L. Ulnar B	17.1	0.203	0.183
26	Intercostals	8.0	0.200	0.150
27	Thoracic Aorta B	10.4	0.675	0.645
28	Abdominal Aorta A	5.3	0.610	0.610
29	Celiac A	1.0	0.390	0.390
30	Celiac B	1.0	0.200	0.200
31	Hepatic	6.6	0.220	0.220

32	Gastric	7.1	0.180	0.180
33	Splenic	6.3	0.275	0.275
34	Superior Mesenteric	5.9	0.435	0.435
35	Abdominal Aorta B	1.0	0.600	0.600
36	L. Renal	3.2	0.260	0.260
37	Abdominal Aorta C	1.0	0.590	0.590
38	R. Renal	3.2	0.260	0.260
39	Abdominal Aorta D	10.6	0.580	0.548
40	Inferior Mesenteric	5.0	0.160	0.160
41	Abdominal Aorta E	1.0	0.520	0.520
42	R. Common Iliac	5.8	0.368	0.350
43	L. Common Iliac	5.8	0.368	0.350
44	L. External Iliac	14.4	0.320	0.270
45	L. Internal Iliac	5.0	0.200	0.200
46	L. Femoral	44.3	0.259	0.190
47	L. Deep Femoral	12.6	0.255	0.186
48	L. Posterior Tibial	32.1	0.247	0.141
49	L. Anterior Tibial	34.3	0.130	0.130
50	R. External Iliac	14.4	0.320	0.270
51	R. Internal Iliac	5.0	0.200	0.200
52	R. Femoral	44.3	0.259	0.190
53	R. Deep Femoral	12.6	0.255	0.186
54	R. Posterior Tibial	32.1	0.247	0.141
55	R. Anterior Tibial	34.3	0.130	0.130

Σε ότι αφορά τα ελαστικά χαρακτηριστικά και τις περιφερειακές αντιστάσεις θα γίνει λεπτομερής ανάλυση στο επόμενο κεφάλαιο.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 Εισαγωγή

Αρτηρίες ονομάζονται τα αγγεία του οργανισμού που μεταφέρουν οξυγονωμένο αίμα από την καρδιά προς τα υπόλοιπα όργανα. Όσο απομακρύνονται από την καρδιά διακλαδίζονται και σχηματίζουν όλο και μικρότερα αγγεία, μικρότερες αρτηρίες και αρτηρίδια, τα οποία τελικά καταλήγουν στα τριχοειδή αγγεία.

Οι αρτηρίες εκτός από την κατάταξή τους κατά μέγεθος, κατατάσσονται συχνά και με τη δομή τους. Οι μεγάλες αρτηρίες που εκβάλλουν από την καρδιά και οι πρώτοι κλάδοι τους είναι ελαστικές αρτηρίες διότι περιέχουν μεγάλο ποσοστό ελασίνης. Απομακρυνόμενοι από την καρδιά, το ποσοστό των μυϊκών κυττάρων που βρίσκεται υπό μορφή δακτυλίων γύρω από τον αυλό της αρτηρίας αυξάνει και η αρτηριακή δομή πλησιάζει εκείνης των μυϊκών αρτηριών.

Πέντε συντελεστές αποτελούν το τοίχωμα του αγγείου: Ενδοθηλιακός ιστός, ίνες κολλαγόνου, ίνες ελασίνης, λείοι μύες και βασική ουσία. Η επί της εκατό περιεκτικότητα κάθε αγγείου στις διάφορες συνιστώσες ποικίλει ανάλογα με το μέγεθος του αγγείου. Οι μεγαλύτερες μεταβολές στα ποσοστά εμφανίζονται στις αναλογίες ινών κολλαγόνου και ελασίνης, που είναι τα ελαστικά συστατικά του τοιχώματος. Επομένως, είναι επιτακτική η ανάγκη μοντελοποίησης των αρτηριών ως ελαστικοί σωλήνες. Η σχέση που δίνει την εξάρτηση της διατομής της αρτηρίας με την πίεση, λέγεται σχέση ελαστικότητας και παρουσιάζεται παρακάτω(2-3).

Η ροή που διαρρέει το αρτηριακό σύστημα είναι παλλόμενη, καθώς σε κάθε σημείο του κυκλοφορικού συστήματος η ταχύτητα και η πίεση είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Παλαιότερα λόγω των μειωμένων υπολογιστικών δυνατοτήτων των ηλεκτρονικών υπολογιστών ο υπολογισμός της ροής, σε πολύπλοκα δίκτυα, ήταν δυνατός μονάχα θεωρώντας σταθερή ροή.

Παρακάτω παρατίθεται όλη η διαδικασία διαμόρφωσης του προβλήματος που προηγήθηκε της σύνταξης του κώδικα υπολογισμού της ροής. [Τσαγγάρης, 2004]

2.2 Μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος

Το αίμα θεωρείται ως ασυμπύεστο και συνεκτικό ρευστό. Η ροή θεωρείται ως στρωτή και μονοδιάστατη, δηλαδή η ταχύτητα και η πίεση θεωρούνται σταθερές σε κάθε διατομή και λαμβάνουν μια μέση τιμή.

Για κάθε αρτηρία επιλύουμε τις μονοδιάστατες εξισώσεις κίνησης για την ροή. Οι εξισώσεις περιέχουν 3 άγνωστες παραμέτρους: την ταχύτητα, την πίεση και την διατομή και όλες είναι συναρτήσεις της θέσης x και του χρόνου t . Οι μονοδιάστατες εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής που επιλύθηκαν είναι οι παρακάτω:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(A\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (2-1)$$

και ή

$$C_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{\bar{u}}{A} = 0 \quad (2-2)$$

ή για την περίπτωση του ανευρύσματος

$$\left(C_u + \left(\frac{A}{A_{\max}} - 1 \right) \frac{L_a}{4L} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{\bar{u}}{A} + \frac{1}{2L} K_t \left(\frac{A}{A_{\max}} - 1 \right)^2 \bar{u} |\bar{u}| = 0 \quad (2-3)$$

Οι ελαστικές ιδιότητες του τοιχώματος των αρτηριών μοντελοποιούνται εισάγοντας την σχέση ελαστικότητας. Έτσι το σύστημα των εξισώσεων συμπληρώνεται με την παρακάτω μη-γραμμική σχέση ελαστικότητας πίεσης- διατομής:

$$p = p_{\text{ext}} + \beta(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (2-4)$$

,όπου

$$\beta(x) = \frac{\sqrt{\pi} h_0 E}{(1-\nu^2) A_0}$$

A_0 είναι η αρχική διατομή στη θέση x του αγγείου

p_{ext} είναι η εξωτερική πίεση του αγγείου

h_0 είναι το αρχικό πάχος του τοιχώματος στη θέση x του αγγείου

$E(x)$ είναι το μέτρο ελαστικότητας στη θέση x του αγγείου

ν είναι ο λόγος Poisson

Άρα η (2-4), αντικαθιστώντας γίνεται:

$$p = p_{\text{ext}} + \frac{\sqrt{\pi} h_0 E}{(1-\nu^2) A_0} (\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (2-5)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $\sqrt{A_0}$ και αντικαθιστώντας το με πR_0^2 , όπου R_0 η αρχική ακτίνα στη θέση x του αγγείου προκύπτει:

$$p = p_{\text{ext}} + \frac{h_0 E}{(1-\nu^2) R_0} \left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A_0}} - 1 \right) \quad (2-6)$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$C = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A}} \quad (2-7)$$

Από τη (2-6) παραγωγίζοντας ως προς A και αντικαθιστώντας το $A_0(x)$ με $\pi R_0^2(x)$ παίρνουμε:

$$\frac{\partial p}{\partial A} = \frac{E(x) h_0}{2(1-\nu^2) R_0} \frac{1}{R_0 \sqrt{\pi} \sqrt{A}}$$

Αντικαθιστώντας το πR_0^2 με A_0 και πολλαπλασιάζοντας με $\frac{A}{\rho}$ προκύπτει:

$$\frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} = \frac{E(x)h_0}{2R_0(1-v^2)\rho} \frac{A}{\sqrt{AA_0}}$$

Τέλος, κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην ακόλουθη:

$$\frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} = \frac{E(x)h_0}{2R_0(1-v^2)\rho} \sqrt{\frac{A}{A_0}} \quad (2-8)$$

Άρα από (2-7) και (2-8),

$$C^2 = \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} = \frac{E(x)h_0}{2R_0(1-v^2)\rho} \sqrt{\frac{A}{A_0}} \quad (2-9)$$

Για $A=A_0$, $C_0^2 = \frac{E(x)h_0}{2R_0(1-v^2)\rho}$
(2-10)

Άρα,

$$C^2 = C_0^2 \sqrt{\frac{A}{A_0}} \quad (2-11)$$

Η (2-5) πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους με 2ρ , λόγω των (2-9) και (2-10) δίνει:

$$p = p_{\text{ext}} + 2\rho(C^2 - C_0^2) \quad (2-12)$$

και εναλλακτικά:

$$p = p_{\text{ext}} + 2\rho C_0^2 \left(\sqrt{\frac{A}{A_0}} - 1 \right) \quad (2-13)$$

2.3 Αδιαστατοποίηση

Η αδιαστατοποίηση του μαθηματικού προβλήματος οδηγεί στην εμφάνιση αδιάστατων αριθμών που ελέγχουν το πρόβλημα και μειώνουν την πολυπαραμετρικότητα του. Τέτοιοι αριθμοί είναι οι γνωστοί αδιαστατοποιημένοι αριθμοί της ρευστομηχανικής, όπως ο αριθμός Reynolds.

Εισάγονται οι παρακάτω αδιάστατες παράμετροι:

$$t^* = \frac{tC_0}{L} \Rightarrow t = \frac{t^* L}{C_0} \quad (2-14)$$

$$x^* = \frac{x}{L} \Rightarrow x = x^* L \quad (2-15)$$

$$A^* = \frac{A}{A_0} \Rightarrow A = A^* A_0 \quad (2-16)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho C_o^2} \Rightarrow p = p^* \rho C_o^2 \quad (2-17)$$

$$u^* = \frac{u}{C_o} \Rightarrow u = u^* C_o \quad (2-18)$$

$$Re = \frac{C_o R_o}{\nu} \quad (2-19)$$

$$\delta = \frac{R_o}{L} \quad (2-20)$$

$$Str = \frac{\omega L}{C_o} \quad (2-21)$$

$$M = \frac{C_o}{C'_o} \quad (2-22)$$

, όπου

A_o , είναι η αρχική διατομή του αγωγού πριν υποστεί οποιαδήποτε συμπίεση

C_o , είναι η αρχική ταχύτητα διάδοσης του κύματος στα τοιχώματα του αγωγού

C'_o , είναι η αρχική ταχύτητα διάδοσης του κύματος του εκάστοτε αγωγού ή του τμήματος του ίδιου αγωγού με διαφορετικά όμως γεωμετρικά χαρακτηριστικά ή/και μέτρο ελαστικότητας

L είναι το μήκος αδιαστατοποίησης

Re είναι ο αριθμός Reynolds

ν η κινηματική συνεκτικότητα

Οι αδιάστατοι αριθμοί Re , Str και $Mach$ ονομάζονται Reynolds, Strouhal και Mach αντίστοιχα. Αυτό που διαφοροποιείται είναι η εισαγωγή της χαρακτηριστικής ταχύτητας του κύματος C_o , αντί κάποιας χαρακτηριστικής ταχύτητας του ρευστού. Αν ο αγωγός δεν παρουσιάζει αλλαγή γεωμετρικών χαρακτηριστικών ή ελαστικών ιδιοτήτων, το C_o συμπίπτει με το C'_o .

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω αδιάστατες παραμέτρους και θεωρώντας τη γενική περίπτωση C'_o , οι ανωτέρω εξισώσεις του μοντέλου αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(A^* u^*)}{\partial x^*} = 0 \quad (2-23)$$

$$C_u \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + 8C_v \frac{u^*}{A^*} \frac{1}{Re\delta} = 0 \quad (2-24)$$

$$\left(C_u + \left(\frac{A^*}{A_{max}^*} - 1 \right) \frac{L\alpha^*}{4L^*} \right) \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + 8C_v \frac{u^*}{A^*} \frac{1}{Re\delta} + \frac{1}{2L^*} K_t \left(\frac{A^*}{A_{max}^*} - 1 \right)^2 u^* |u^*| = 0 \quad (2-25)$$

$$P^* = \frac{P_{ext}}{\rho C_o^2} + 2 \left(\frac{C^2}{C_o^2} - \frac{C_o'^2}{C_o^2} \right) \quad (2-26)$$

και εναλλακτικά

$$P^* = \frac{P_{ext}}{\rho C_0^2} + 2 \frac{1}{M^2} \left(\sqrt{\frac{A^*}{A_0^*}} - 1 \right) \quad (2-27)$$

2.4 Διακριτοποίηση του χώρου

Ο μονοδιάστατος χώρος μήκους L_v/L , όπου L_v το μήκος του αγγείου και L το μήκος αδιαστατοποίησης, διακριτοποιείται με πλήθος k αριθμητικών κόμβων που ισαπέχουν μεταξύ τους με αδιάστατη απόσταση: $\Delta x = \frac{L_v}{L(k-1)}$. Η θέση κάθε κόμβου ορίζεται από την συντεταγμένη x_i :

$$x_i = (i-1)\Delta x, \quad i=1,2,\dots,k \quad (2-28)$$

Το χρονικό βήμα προκύπτει από την σχέση ευστάθειας (2-34). Κάθε χρονικός κόμβος ορίζεται από την συντεταγμένη t_n :

$$t_n = (n-1)\Delta t, \quad n=1,2,\dots \quad (2-29)$$

2.5 Διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων

Αντικαθιστώντας την πρώτη χρονική παράγωγο με πρόσω έκφραση διαφορών και τις χωρικές παραγώγους με πρόσω και πίσω έκφραση διαφορών (όπως επιτάσσει η μέθοδος επίλυσης Mac-Cormack) προκύπτουν οι παρακάτω διακριτοποιημένες αλγεβρικές σχέσεις:

Η (2-23) γίνεται:

$$\frac{A_i^{*n+1} - A_i^{*n}}{\Delta t^*} + \frac{1}{\Delta x^*} (A_{i+1}^{*n} u_{i+1}^{*n} - A_i^{*n} u_i^{*n}) = 0$$

Λύνοντας ως προς A_i^{*n+1} με πρόσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$A_i^{*n+1} = A_i^{*n} - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (A_{i+1}^{*n} u_{i+1}^{*n} - A_i^{*n} u_i^{*n}) \quad (2-30)$$

, ή με πίσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$A_i^{*n+1} = A_i^{*n} - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (A_i^{*n} u_i^{*n} - A_{i-1}^{*n} u_{i-1}^{*n}) \quad (2-31)$$

Η (2-24) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{u_i^{*n+1} - u_i^{*n}}{\Delta t^*} = - \frac{1}{C_u \Delta x^*} \left(\left(\frac{(u_{i+1}^{*n})^2}{2} + P_{i+1}^{*n} \right) - \left(\frac{(u_i^{*n})^2}{2} + P_i^{*n} \right) \right) - \delta \frac{C_v u_i^{*n}}{C_u A_i^{*n} \text{Re} \delta}$$

Λύνοντας ως προς u_i^{*n+1} με πρόσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$u_i^{*n+1} = u_i^{*n} - \frac{\Delta t^*}{C_u \Delta x^*} \left(\left(\frac{(u_{i+1}^{*n})^2}{2} + P_{i+1}^{*n} \right) - \left(\frac{(u_i^{*n})^2}{2} + P_i^{*n} \right) \right) - \delta \frac{\Delta t^* C_v u_i^{*n}}{C_u A_i^{*n} \text{Re} \delta} \quad (2-32)$$

, ή με πίσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$u_i^{*n+1} = u_i^{*n} - \frac{\Delta t^*}{C_u \Delta x^*} \left(\left(\frac{(u_i^{*n})^2}{2} + P_i^{*n} \right) - \left(\frac{(u_{i-1}^{*n})^2}{2} + P_{i-1}^{*n} \right) \right) - 8 \frac{\Delta t^* C_v}{C_u} \frac{u_i^{*n}}{A_i^{*n}} \frac{1}{Re\delta} \quad (2-33)$$

Το κριτήριο ευστάθειας είναι [Zagzoule et al, 1986]:

$$(|u| + C_o) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (2-34)$$

Αδιαστατοποιώντας το κριτήριο ευστάθειας σύμφωνα με τις σχέσεις (2-14) και (2-15) και κάνοντας αλγεβρικές πράξεις η (2-34) παίρνει την μορφή:

$$\frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \leq 1/C_o^* \quad (2-35)$$

Η (2-26) διακριτοποιείται ως εξής:

$$P_i^{*n+1} = \frac{P_{ext_i}^{n+1}}{\rho C_o^2} + 2 \left(\frac{(C_i^{n+1})^2}{C_o^2} - \frac{C_o'^2}{C_o^2} \right) \quad (2-36)$$

και εναλλακτικά

$$P_i^{*n+1} = \frac{P_{ext_i}^{n+1}}{\rho C_o^2} + 2 \frac{1}{M^2} \left(\sqrt{\frac{A_i^{*n+1}}{A_o^*}} - 1 \right) \quad (2-37)$$

2.6 Αρχικές και Οριακές συνθήκες

Οι περιπτώσεις που μελετήθηκαν είναι δύο. Στην πρώτη θεωρούμε την εξωτερική πίεση μηδέν, ενώ στη δεύτερη ίση με 97 mmHg. Δηλαδή, για $t=0$, $P(x,0)=P_{ext}(x,0)=0$ και $P(x,0)=P_{ext}(x,0)=97$ mmHg αντίστοιχα. Η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδενική, ενώ η ταχύτητα του κύματος ίση με C_o' . Συνεπώς, $A(x,0)=A_o=const$, $u(x,0)=0$ και $C(x,0)=C_o'$.

Ο υπολογισμός των οριακών συνθηκών γίνεται με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών με την παραδοχή ότι ο όρος της διαμηθικής τάσης αμελείται. Η μέθοδος των χαρακτηριστικών χρησιμοποιείται λόγω της ικανότητά της να εκμεταλλεύεται τις υπερβολικές ιδιότητες των μη συνεκτικών, ασυμπύεστων εξισώσεων της ορμής και της συνέχειας. Οι κύριες μεταβλητές που περιγράφουν το ρευστομηχανικό προβλημα (πίεση, διατομή και ταχύτητα) υπολογίζονται συναρτήσει των αντίστοιχων τιμών τους πάνω στις χαρακτηριστικές καμπύλες. Επί της ουσίας, σε ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων ονομάζουμε χαρακτηριστικές καμπύλες τις καμπύλες εκείνες, κατά μήκος των οποίων οι μερικές διαφορικές μετατρέπονται σε συνήθεις οπότε και επιλύονται απλούστερα. Στην περίπτωση των υπερβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, οι χαρακτηριστικές είναι πραγματικές και ξεχωριστές. Αυτό σημαίνει ότι η πληροφορία διαδίδεται σε δύο κατευθύνσεις. Εάν υπάρχουν πλευρικά όρια όπως στην περίπτωσή μας, μόνο μια συνθήκη απαιτείται σε κάθε σημείο γιατί μια χαρακτηριστική μεταφέρει την πληροφορία έξω από το υπολογιστικό πεδίο και μια την μεταφέρει μέσα. Υπάρχουν διάφοροι τύποι συνθηκών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Οι ιδανικές όμως είναι αυτές που επιτρέπουν στο κύμα να εξέλθει του πεδίου χωρίς τις επνομαζόμενες ψευδείς ανακλάσεις.

Εμείς θέλουμε να επιλύσουμε τις ακόλουθες μερικές διαφορικές:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Au) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων στην πρώτη και τον κανόνα αλυσίδας στη δεύτερη προκύπτουν οι ακόλουθες:

$$L_1 = \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-38)$$

$$L_2 = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (2-39)$$

Θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό L των L_1 και L_2 ως εξής:

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 \quad (2-40)$$

Αντικαθιστώντας τα L_1 και L_2 και κάνοντας πράξεις :

$$L = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} + (\lambda_1 u + \lambda_2 A) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\lambda_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} + \lambda_2 u\right) \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2-41)$$

Εάν $x=x(t)$ είναι η εξίσωση μιας καμπύλης τότε η κλίση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της καμπύλης θα είναι $\frac{dx}{dt}$, ενώ εάν $u=u(t,x)$ και $A=A(t,x)$ λύσεις των (2-38) και (2-39) τότε

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2-42)$$

$$\text{και } dA = \frac{\partial A}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial x} dx \quad (2-43)$$

αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας στην (2-41), το $\frac{\partial u}{\partial t}$ από την (2-42) και το $\frac{\partial A}{\partial t}$ από την (2-43) προκύπτει:

$$L = \lambda_1 \frac{du}{dt} + \lambda_2 \frac{dA}{dt} + [((\lambda_1 u + \lambda_2 A) - \lambda_1) \frac{dx}{dt}] \frac{\partial u}{\partial x} + [(\lambda_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} + \lambda_2 u) - \lambda_2] \frac{dx}{dt} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2-44)$$

Θέλουμε βάση της θεωρίας οι όροι των μερικών παραγώγων να μηδενιστούν, οπότε και επιλέγουμε τέτοια λ_1 και λ_2 ώστε να ισχύει :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 u + \lambda_2 A} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} + \lambda_2 u} \quad (2-45)$$

Η διαφορική λοιπόν έκφραση (2-44) για το L λαμβάνοντας υπ' όψη όλα τα παραπάνω δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$dtL = \lambda_1 du + \lambda_2 dA \quad (2-46)$$

Από τη σχέση (2-45) κάνοντας πράξεις :

$$-\lambda_1/\lambda_2 = \frac{-A dt}{dx - u dt} = \frac{dx - u dt}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} dt}$$

Εάν θέσουμε $\lambda_2/\lambda_1 = \lambda$ τότε:

$$\lambda = \frac{dx - u dt}{A dt} \quad (2-47)$$

$$\text{και } \lambda = \frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} dt}{u dt - dx} \quad (2-48)$$

Λύνοντας ως προς dx τη δεύτερη (2-48) προκύπτει:

$$dx = \left(u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} \frac{1}{\lambda} \right) dt$$

Αντικαθιστώντας από την πρώτη (2-47) το dx και λύνοντας ως προς λ καταλήγουμε στην:

$$\lambda^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} \frac{1}{A} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A}} A^{-\frac{1}{2}} \quad (2-49)$$

Αντικαθιστώντας στην (2-47) το λ προκύπτουν οι δύο χαρακτηριστικές κατευθύνσεις:

$$dx = \left(u + \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A}} A^{-\frac{1}{2}} \right) dt \xrightarrow{(2-8)} dx = (u + c) dt \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt_+} = (u + c) \quad (2-50)$$

και

$$dx = \left(u - \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A}} A^{-\frac{1}{2}} \right) dt \xrightarrow{(2-8)} dx = (u - c) dt \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt_-} = (u - c) \quad (2-51)$$

Οι εξισώσεις των χαρακτηριστικών προκύπτουν συνδυάζοντας τις σχέσεις (2-46) και (2-50) για τη μία κατεύθυνση και τις σχέσεις (2-46) και (2-51) για την άλλη :

$$A du + \left(\frac{dx}{dt_+} - u \right) dt = 0$$

και

$$A du + \left(\frac{dx}{dt_-} - u \right) dt = 0$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω τελικά καταλήγουμε στις:

$$\int u du + \int \frac{c}{A} dA = 0 \Rightarrow u + 4(c - c'_0) = \text{const} = \xi \quad (2-52)$$

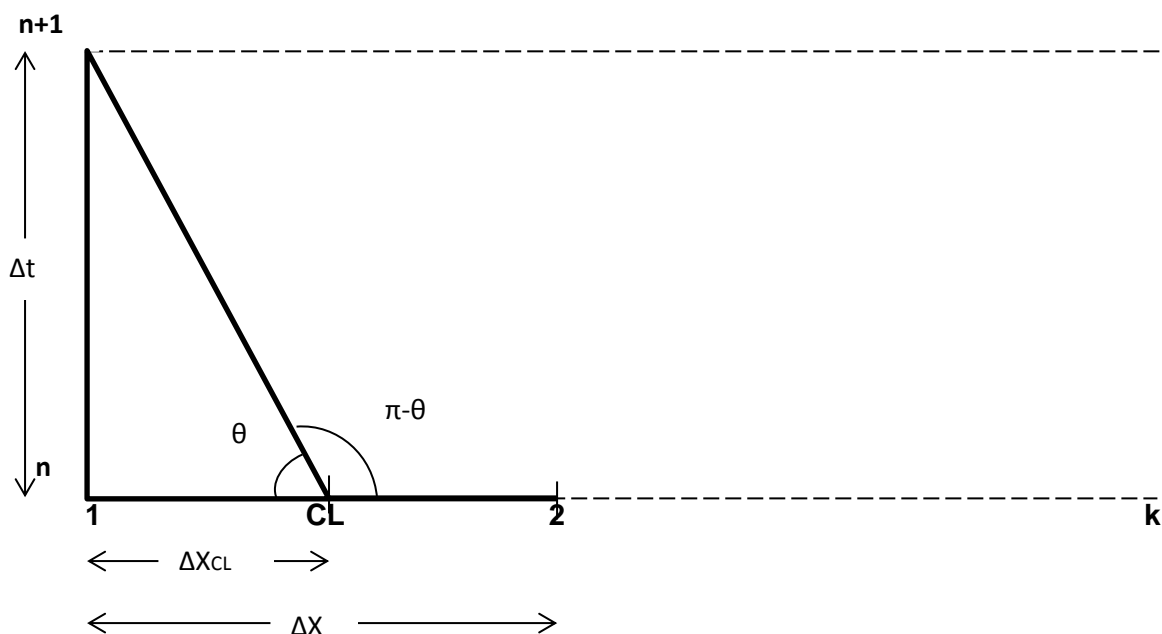
και

$$\int u du - \int \frac{c}{A} dA = 0 \Rightarrow u - 4(c - c'_0) = \text{const} = \eta \quad (2-53)$$

[Lister]

2.6.1 Εγγύς άκρο αγγείου

Θεωρούμε γνωστό το πεδίο ροής σε όλο το μήκος του αγγείου τον χρονικό κόμβο n και θέλουμε να το υπολογίσουμε τον χρονικό κόμβο $n+1$:



Σχήμα 2.1 Σχηματική παράσταση του χωροχρονικού πεδίου στο εγγύς άκρο

Τα σημεία 1,2 αποτελούν τον πρώτο και δεύτερο χωρικό κόμβο αντίστοιχα. Το σημείο CL ανήκει πάνω στην αριστεροκλινή χαρακτηριστική $\eta = \text{const}$. Εφαρμόζοντας γραμμική παρεμβολή για την ταχύτητα στο αριστερό άκρο του αγγείου παίρνουμε:

$$\frac{\Delta x_{CL}}{\Delta x} = \frac{u_{CL}^n - u_1^n}{u_2^n - u_1^n} \quad (2-54)$$

Εφαρμόζοντας αντίστοιχα γραμμική παρεμβολή για την ταχύτητα του κύματος στο αριστερό άκρο του αγγείου προκύπτει:

$$\frac{\Delta x_{CL}}{\Delta x} = \frac{c_{CL}^n - c_1^n}{c_2^n - c_1^n} \quad (2-55)$$

Για απειροστές ποσότητες $\Delta x, \Delta t$ θεωρούμε την αριστεροκλινή χαρακτηριστική ευθεία. Οπότε ισχύει:

$$\cot(\pi - \theta) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow -\cot(\theta) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} \approx - \frac{\Delta x_{CL}}{\Delta t} \quad (2-51)$$

$$\Delta x_{CL} = \Delta t(c_{CL} - u_{CL}) \quad (2-56)$$

Αντικαθιστώντας τη (2-56) στη (2-54) έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} (c_{CL}^n - u_{CL}^n) = \frac{u_{CL}^n - u_1^n}{u_2^n - u_1^n} \quad (2-57)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το u_{CL}^n και κάνοντας ανακατανομή των όρων η (2-57) γίνεται:

$$\left(\frac{1}{u_2^n - u_1^n} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_{CL}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{CL}^n + \frac{u_1^n}{u_2^n - u_1^n}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(u_2^n - u_1^n)\Delta x$ και λύνοντας ως προς u_{CL}^n :

$$u_{CL}^n = \frac{c_{CL}^n \Delta t (u_2^n - u_1^n) + u_1^n \Delta x}{\Delta x + \Delta t (u_2^n - u_1^n)}$$

Τελικά βγάζοντας κοινό παράγοντα από τον αριθμητή και παρονομαστή το Δx καταλήγουμε στην:

$$u_{CL}^n = \frac{c_{CL}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n) + u_1^n}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n)} \quad (2-58)$$

Αντικαθιστώντας τη (2-56) στη (2-55) έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} (c_{CL}^n - u_{CL}^n) = \frac{c_{CL}^n - c_1^n}{c_2^n - c_1^n} \quad (2-59)$$

Αναπτύσσοντας την επιμεριστική του πρώτου μέλους και αντικαθιστώντας το u_{CL}^n από τη (2-58) προκύπτει:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} c_{CL}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{c_{CL}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n) + u_1^n}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n)} = \frac{c_{CL}^n}{c_2^n - c_1^n} - \frac{c_1^n}{c_2^n - c_1^n}$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για το c_{CL}^n :

$$c_{CL}^n = \frac{-u_1^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_2^n - c_1^n) + c_1^n (1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n))}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_1^n - c_2^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n)} \quad (2-60)$$

Από τη συνθήκη συμβατότητας (2-53) για αριστεροκλινή χαρακτηριστική ισχύει:

$$u_{CL}^n - 4(c_{CL}^n - c_0') = \text{const}$$

Άρα, και με δεδομένο ότι το c_0' απαλοίφεται:

$$u_1^{n+1} - 4c_1^{n+1} = u_{CL}^n - 4c_{CL}^n \quad (2-61)$$

Αδιαστατοποιούμε τις σχέσεις (2-58), (2-60), (2-61) :

$$u_{CL}^{*n} = \frac{c_{CL}^{*n} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_2^{*n} - u_1^{*n}) + u_1^{*n}}{1 - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_1^{*n} - u_2^{*n})} \quad (2-62)$$

$$c_{CL}^{*n} = \frac{-u_1^{*n} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (c_2^{*n} - c_1^{*n}) + c_1^{*n} (1 + \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_2^{*n} - u_1^{*n}))}{1 + \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (c_1^{*n} - c_2^{*n}) + \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_2^{*n} - u_1^{*n})} \quad (2-63)$$

$$u_1^{*n+1} - 4c_1^{*n+1} = u_{CL}^{*n} - 4c_{CL}^{*n} \quad (2-64)$$

Έχουν επιλεγεί δύο τύπου οριακές συνθήκες για την είσοδο του αρτηριακού δέντρου. Στη μεν πρώτη επιβάλλουμε παλμό παροχής, στη δε δεύτερη παλμό με όρους χαρακτηριστικών εξισώσεων. Ακολουθεί η ανάλυση και των δύο.

2.6.1.1 Παλμός παροχής

Ο παλμός σε κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$Q_{in} = \sum_{i=0}^{20} (C_i \cos(i\omega t) + S_i \sin(i\omega t)) \quad (2-65)$$

Οι συντελεστές Fourier που χρησιμοποιήθηκαν στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 2.1 : Συντελεστές Fourier Παλμού Παροχής		
i	C_i m³/s	S_i m³/s
0	0.86393*10 ⁻⁴	0
1	-0.88455*10 ⁻⁴	0.13368*10 ⁻³
2	-0.52515*10 ⁻⁴	-0.1228*10 ⁻³
3	0.86471*10 ⁻⁴	0.22459*10 ⁻⁴
4	-0.26395*10 ⁻⁴	0.22693*10 ⁻⁴
5	-0.12987*10 ⁻⁴	0.22398*10 ⁻⁵
6	0.20133*10 ⁻⁵	-0.22315*10 ⁻⁴
7	0.70896*10 ⁻⁵	0.10065*10 ⁻⁴
8	0.32577*10 ⁻⁵	-0.21066*10 ⁻⁵
9	-0.56573*10 ⁻⁵	0.90633*10 ⁻⁵
10	-0.19302*10 ⁻⁵	-0.85422*10 ⁻⁵
11	0.22387*10 ⁻⁵	0.1477*10 ⁻⁵
12	0.2305*10 ⁻⁵	-0.32397*10 ⁻⁵
13	0.11909*10 ⁻⁵	0.59775*10 ⁻⁵
14	-0.39818*10 ⁻⁵	-0.18464*10 ⁻⁵
15	0.58176*10 ⁻⁶	-0.14751*10 ⁻⁵
16	0.19556*10 ⁻⁵	-0.12112*10 ⁻⁵
17	0.48907*10 ⁻⁶	0.24434*10 ⁻⁵
18	-0.66338*10 ⁻⁶	0.50967*10 ⁻⁶
19	-0.21719*10 ⁻⁵	-0.23241*10 ⁻⁶
20	0.19705*10 ⁻⁵	-0.2019*10 ⁻⁵

Η σχέση (2-65) αντικαθιστώντας την παροχή με μA γίνεται:

$$\mu A \cdot \sum_{i=0}^{20} (C_i \cos(i\omega t) + S_i \sin(i\omega t)) = 0 \quad (2-66)$$

Από τη σχέση (2-11), λύνοντας ως προς A παίρνουμε:

$$A=A_0\left(\frac{c}{c_0}\right)^4 \quad (2-67)$$

Οπότε η (2-66) δίνει:

$$u\left(\frac{c}{c_0}\right)^4 A_0 - \sum_{i=0}^{20} (C_i \cos(i\omega t) + S_i \sin(i\omega t))=0$$

Σε συνδυασμό με τη συνθήκη συμβατότητας για αριστεροκλινή χαρακτηριστική, σχέση (2-61), προκύπτει το ακόλουθο μη γραμμικό σύστημα 2x2:

$$u_1^{n+1} - 4(c_1^{n+1} - c_{0_1})=u_{CL}^n - 4(c_{CL}^n - c_{0_1})$$

$$u_1^{n+1} \left(\frac{c_1^{n+1}}{c_{0_1}}\right)^4 A_{0_1} - \sum_{i=0}^{20} (C_i \cos(i\omega t) + S_i \sin(i\omega t))=0$$

Αδιαστατοποιώντας καταλήγουμε στο:

$$u_1^{*n+1} - 4(c_1^{*n+1} - C_{0_1}^*)=u_{CL}^{*n} - 4(c_{CL}^{*n} - C_{0_1}^*)$$

$$u_1^{*n+1} \left(\frac{c_1^{*n+1}}{C_{0_1}^*}\right)^4 A_{0_1}^* - \frac{1}{A_0 c_0} \sum_{i=0}^{20} (C_i \cos(i\omega t) + S_i \sin(i\omega t))=0$$

Το μη γραμμικό σύστημα επιλύεται με τη μέθοδο Newton - Raphson(2.11). Υπολογίζονται λοιπόν οι τιμές της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας u^* και της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας κύματος c^* στην είσοδο του πρώτου αγγείου τη νέα χρονική στιγμή n+1.

Σε ότι αφορά τη διατομή, δίνεται από τη σχέση (2-67):

$$A_1^{*n+1}=A_0^* \left(\frac{c_1^{*n+1}}{C_{0_1}^*}\right)^4 \quad (2-68)$$

Τέλος, η πίεση δίνεται από τη σχέση (2-36):

$$P_1^{*n+1} = \frac{P_{ext}^{n+1}}{\rho C_0^2} + 2\left(\frac{(C_1^{n+1})^2}{C_0^2} - 1\right)$$

ή

$$P_1^{*n+1} = P_{ext}^{*n+1} + 2((C_1^{*n+1})^2 - 1) \quad (2-69)$$

[Formaggia et al,2003]

2.6.1.2 Παλμός με όρους χαρακτηριστικών εξισώσεων

Θεωρούμε την ακόλουθη συνθήκη:

$$u+4(c-c_0)=f(t) \quad (2-70)$$

Σε συνδυασμό με τη συνθήκη συμβατότητας,σχέση (2-64), για αριστεροκλινή χαρακτηριστική, προκύπτει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους από το

οποίο υπολογίζονται οι τιμές της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας u^* και της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας κύματος c^* στην είσοδο του αγγείου τη νέα χρονική στιγμή $n+1$.

$$u_1^{*n+1} = \frac{u_{CL}^{*n} - 4(c_{CL}^{*n} - C_{01}^*) + f^*(t)}{2} \quad (2-71)$$

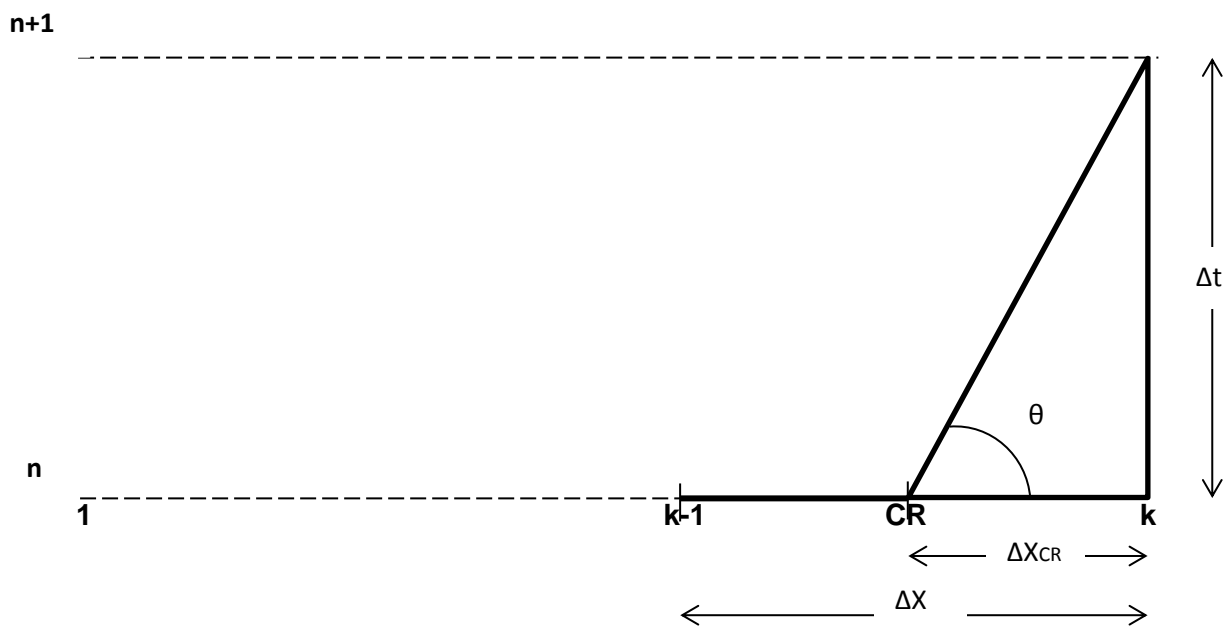
$$c_1^{*n+1} = \frac{f^*(t) - u_1^{*n+1}}{4} + C_{01}^* \quad (2-72)$$

Η διατομή και η πίεση υπολογίζονται ως ανωτέρω από τις σχέσεις (2-68),(2-69). [Sherwin et al, 2003]

Κάνοντας χρήση του ανωτέρου παλμού στην ουσία ελέγχουμε πλήρως τις ανακλάσεις στην είσοδο.

2.6.2 Άπω άκρο αγγείου

Θεωρούμε γνωστό το πεδίο ροής σε όλο το μήκος του τερματικού αγγείου τον χρονικό κόμβο n και θέλουμε να το υπολογίσουμε τον χρονικό κόμβο $n+1$:



Σχήμα 2.2 Σχηματική παράσταση του χωροχρονικού πεδίου στο άπω άκρο

Τα σημεία $k-1$, k αποτελούν τον προτελευταίο και τελευταίο χωρικό κόμβο αντίστοιχα. Το σημείο CR ανήκει πάνω στη δεξιοκλίνη χαρακτηριστική $\xi = \text{const}$. Εφαρμόζοντας γραμμική παρεμβολή για την ταχύτητα στο δεξί άκρο του αγγείου παίρνουμε:

$$\frac{\Delta x_{CR}}{\Delta x} = \frac{u_{CR}^n - u_k^n}{u_{k-1}^n - u_k^n} \quad (2-73)$$

Εφαρμόζοντας αντίστοιχα γραμμική παρεμβολή για την ταχύτητα του κύματος στο αριστερό άκρο του αγγείου προκύπτει:

$$\frac{\Delta x_{CR}}{\Delta x} = \frac{c_{CR}^n - c_k^n}{c_{k-1}^n - c_k^n} \quad (2-74)$$

Για απειροστές ποσότητες $\Delta x, \Delta t$ θεωρούμε την δεξιοκλινή χαρακτηριστική ευθεία. Οπότε ισχύει:

$$\cot(\theta) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \cot(\theta) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} \simeq - \frac{\Delta x_{CR}}{\Delta t} \xrightarrow{(2-50)}$$

$$\Delta x_{CR} = \Delta t(c_{CR} + u_{CR}) \quad (2-75)$$

Αντικαθιστώντας τη (2-75) στη (2-73) έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} (c_{CR}^n + u_{CR}^n) = \frac{u_{CR}^n - u_k^n}{u_{k-1}^n - u_k^n} \quad (2-76)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το u_{CR}^n και κάνοντας ανακατανομή των όρων η (2-76) γίνεται:

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} - \frac{1}{u_{k-1}^n - u_k^n} \right) u_{CR}^n = - \frac{u_k^n}{u_{k-1}^n - u_k^n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{CR}^n$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(u_{k-1}^n - u_k^n)\Delta x$ και λύνοντας ως προς u_{CR}^n :

$$u_{CR}^n = \frac{c_{CR}^n \Delta t (u_{k-1}^n - u_k^n) + u_k^n \Delta x}{\Delta x - \Delta t (u_{k-1}^n - u_k^n)}$$

Τελικά, βγάζοντας κοινό παράγοντα από τον αριθμητή και τον παρονομαστή το Δx καταλήγουμε στην:

$$u_{CR}^n = \frac{c_{CR}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n) + u_k^n}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n)} \quad (2-77)$$

Αντικαθιστώντας τη (2-75) στη (2-74) έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} (c_{CR}^n + u_{CR}^n) = \frac{c_{CR}^n - c_k^n}{c_{k-1}^n - c_k^n} \quad (2-78)$$

Αναπτύσσοντας την επιμεριστική του πρώτου μέλους και αντικαθιστώντας το u_{CR}^n από τη (2-77) προκύπτει:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{c_{CR}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n) + u_k^n}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n)} + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{CR}^n = \frac{c_{CR}^n}{c_{k-1}^n - c_k^n} - \frac{c_k^n}{c_{k-1}^n - c_k^n}$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για το c_{CR}^n :

$$c_{CR}^n = \frac{u_k^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_{k-1}^n - c_k^n) + c_k^n (1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n))}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_{k-1}^n - c_k^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n)} \quad (2-79)$$

Από τη συνθήκη συμβατότητας για δεξιοκλινή χαρακτηριστική (2-52) ισχύει:

$$u_{CR}^n + 4(c_{CR}^n - c'_0) = \text{const}$$

Άρα, και με δεδομένο ότι το c'_0 απαλοίφεται:

$$u_k^{n+1} + 4c_k^{n+1} = u_{CR}^n + 4c_{CR}^n \quad (2-80)$$

Αδιαστατοποιούμε τις σχέσεις (2-77),(2-79),(2-80) :

$$u_{CR}^{*n} = \frac{c_{CR}^{*n} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_{k-1}^{*n} - u_k^{*n}) + u_k^{*n}}{1 - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_{k-1}^{*n} - u_k^{*n})} \quad (2-81)$$

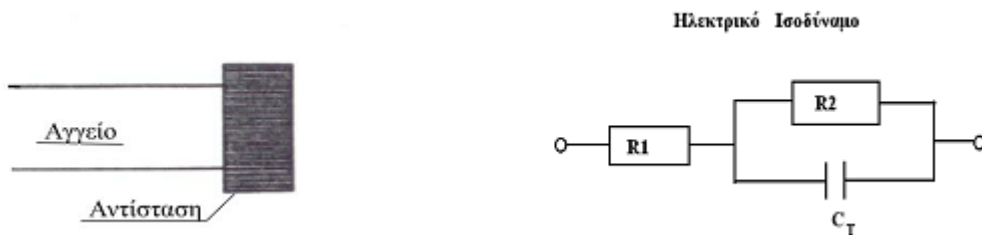
$$c_{CR}^{*n} = \frac{u_k^{*n} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (c_{k-1}^{*n} - c_k^{*n}) + c_k^{*n} (1 + \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_{k-1}^{*n} - u_k^{*n}))}{1 - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (c_{k-1}^{*n} - c_k^{*n}) - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_{k-1}^{*n} - u_k^{*n})} \quad (2-82)$$

$$u_k^{*n+1} + 4c_k^{*n+1} = u_{CR}^{*n} + 4c_{CR}^{*n} \quad (2-83)$$

Το κυκλοφορικό σύστημα αποτελείται από αρτηρίες, οι οποίες διακλαδίζονται συνεχώς σε μικρότερες μέχρι τα τριχοειδή αγγεία. Έχουν επιλεγεί τρεις διαφορετικές οριακές συνθήκες για το άπω άκρο των τριχοειδών αγγείων του αρτηριακού δέντρου. Στην πρώτη χρησιμοποιείται το μοντέλο της σύνθετης αντίστασης (modified windkessel model). Στη δεύτερη επιβάλλουμε μη ανακλαστικές ιδιότητες, ενώ στην τρίτη θεωρούμε έναν συντελεστή τερματικής αντίστασης R_T .

2.6.2.1 Μοντέλο Σύνθετης Αντίστασης

Το μοντέλο της σύνθετης αντίστασης που χρησιμοποιείται αποτελείται από μία αντίσταση που βρίσκεται σε σειρά με ένα παράλληλο συνδυασμό αντίστασης και πυκνωτή (προσομοιώνει τη ποσότητα αίματος που μπορεί να διατηρηθεί σε ορισμένο τμήμα της κυκλοφορίας για κάθε αύξηση της πίεσης).



Σχήμα 2.3 Σχηματική παράσταση αντίστασης στο άπω άκρο των τερματικών αγγείων

Η σχέση λοιπόν παροχής-πίεσης βάση του μοντέλου είναι:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{R_1 R_2 C_T} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{Q}{R_1 C_T} \quad (2-84)$$

, όπου $R_1 + R_2 = R_T$ είναι η ολική αντίσταση της τερματικής διακλάδωσης.

Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι προσομοιώνει τόσο την αντίσταση όσο και την ποσότητα αίματος που μπορεί να διατηρηθεί εξαιτίας των αγγείων που έχουν αμεληθεί.

Αντικαθιστώντας την παροχή και διακριτοποιώντας η (2-84) δίνει:

$$\frac{u_k^{n+1} A_k^{n+1} - u_k^n A_k^n}{\Delta t} - \frac{1}{R_1} \frac{p_k^{n+1} - p_k^n}{\Delta t} - \frac{p_k^n}{R_1 R_2 C_T} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{u_k^n A_k^n}{R_1 C_T} = 0$$

Επιλύοντας ως προς τα μεγέθη για τη νέα χρονική στιγμή παίρνουμε:

$$\frac{u_k^{n+1} A_k^{n+1}}{\Delta t} - \frac{1}{R_1} \frac{p_k^{n+1}}{\Delta t} = \frac{u_k^n A_k^n}{\Delta t} - \frac{1}{R_1} \frac{p_k^n}{\Delta t} + \frac{p_k^n}{R_1 R_2 C_T} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{u_k^n A_k^n}{R_1 C_T}$$

Αντικαθιστώντας τη διατομή και την πίεση από τις σχέσεις (2-67) και (2-12) αντίστοιχα προκύπτει:

$$u_k^{n+1} c_k^{n+1} \frac{A_0}{c_0^4 \Delta t} - \frac{1}{\Delta t R_1} (p_{ext} + 2\rho (c_k^{n+1}{}^2 - c_0^2)) = \frac{u_k^n A_k^n}{\Delta t} - \frac{1}{R_1} \frac{p_k^n}{\Delta t} + \frac{p_k^n}{R_1 R_2 C_T} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{u_k^n A_k^n}{R_1 C_T}$$

Τέλος, θέτοντας για απλοποίηση

$$\alpha = \frac{A_0}{c_0^4 \Delta t}, \quad \beta = \frac{1}{\Delta t R_1} \text{ και}$$

$$\gamma = \frac{u_k^n A_k^n}{\Delta t} - \frac{1}{R_1} \frac{p_k^n}{\Delta t} + \frac{p_k^n}{R_1 R_2 C_T} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{u_k^n A_k^n}{R_1 C_T} \text{ η ανωτέρω σχέση γίνεται:}$$

$$u_k^{n+1} c_k^{n+1} \alpha - \beta (p_{ext} + 2\rho (c_k^{n+1}{}^2 - c_0^2)) - \gamma = 0 \quad (2-85)$$

Η (2-85) σε συνδυασμό με τη σχέση συμβατότητας δεξιοκλινούς χαρακτηριστικής (2-80) αποτελούν ένα μη γραμμικό σύστημα 2x2, το οποίο επιλύεται ως προς την ταχύτητα του ρευστού και την ταχύτητα διάδοσης κύματος με τη μέθοδο Newton - Raphson(2.11).

Η διατομή και η πίεση προκύπτουν αντίστοιχα από τις σχέσεις (2-67) και (2-12).

Χάρην πληρότητας ακολουθεί το αδιαστατοποιημένο σύστημα, το οποίο και επιλύεται.

$$u_k^{*n+1} + 4c_k^{*n+1} = u_{CR}^{*n} + 4c_{CR}^{*n}$$

$$u_k^{*n+1} c_k^{*n+1} \frac{A_0^*}{c_0^{*4} \Delta t^*} - \frac{1}{\Delta t^* R_1^*} (p_{ext}^* + (c_k^{*n+1}{}^2 - c_0^{*2})) = \frac{u_k^{*n} A_k^{*n}}{\Delta t^*} - \frac{1}{R_1^*} \frac{p_k^{*n}}{\Delta t^*} + \frac{p_k^{*n}}{R_1^* R_2^* C_T^*} - \left(1 + \frac{R_1^*}{R_2^*}\right) \frac{u_k^{*n} A_k^{*n}}{R_1^* C_T^*}$$

$$\text{, όπου } R = R^* \frac{\rho c_0^2}{A_0} \text{ και } C_T = C_T^* \frac{L A_0}{\rho c_0^2}.$$

Οι τιμές των R και C_T είναι:

Πίνακας 2.2 : Ολική Αντίσταση και Χωρητικότητα Τερματικών Αγγείων		
A/A Αγγείου	Ολική Αντίσταση R_T (Ns/m⁵)	Τερματική Χωρητικότητα C_T (m⁵/N)
6	0.64+10	0.30955-10

8	0.55+10	0.35235-10
10	0.86+11	0.22069-11
11	0.55+10	0.35235-10
12	0.038+11	0.13384-10
13	0.038+11	0.13384-10
16	0.038+11	0.13384-10
17	0.038+11	0.13384-10
20	0.64+10	0.30955-10
22	0.55+10	0.35235-10
24	0.86+11	0.22069-11
25	0.55+10	0.35235-10
26	0.75+10	0.13384-09
31	0.27+10	0.51251-10
32	0.5+10	0.34389-10
33	0.2+10	0.80191-10
34	0.98+09	0.20005-09
36	0.15+10	0.16464-09
38	0.12+10	0.16464-09
40	0.3+10	0.27041-10
45	0.75+10	0.23443-10
47	0.477+10	0.39003-10
48	0.477+10	0.39003-10
49	0.559+10	0.33281-10
51	0.7936+10	0.23443-10
53	0.477+10	0.39003-10
54	0.477+10	0.39003-10
55	0.559+10	0.33281-10

Για να υπολογίσουμε τις τερματικές αντιστάσεις R_1 και R_2 θεωρούμε το λόγο $\frac{R_1}{R_T}$ σταθερό και ίσο με 0.2. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στη μηριαία αρτηρία και έχει εκτιμηθεί στη βιβλιογραφία [Stergiopoulos, 1992].

2.6.2.2 Συνθήκη μη-ανάκλασης

Προκειμένου να μην υπάρχουν ανακλάσεις, θέτουμε τον όρο $u-4(c-c'_0)$ ίσο με το μηδέν, δηλαδή:

$$u-4(c-c'_0)=0 \quad (2-86)$$

Από τις σχέσεις (2-86) και (2-52) προκύπτει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, από το οποίο υπολογίζονται οι τιμές της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας

u^* και της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας κύματος c^* στην έξοδο του αγγείου τη νέα χρονική στιγμή $n+1$.

$$u_k^{*n+1} = \frac{u_{CR}^{*n} + 4(c_{CR}^{*n} - c_o'^*)}{2} \quad (2-87)$$

$$c_k^{*n+1} = \frac{u_k^{*n+1}}{4} + c_o'^* \quad (2-88)$$

Η διατομή και η ταχύτητα δίνονται από τις σχέσεις (2-68) και (2-36):

$$A_k^{*n+1} = A_o^* \left(\frac{c_k^{*n+1}}{c_o'^*} \right)^4 \quad (2-89)$$

$$P_k^{*n+1} = \frac{P_{ext}^{*n+1}}{\rho c_o'^2} + 2 \left(\frac{(c_k^{*n+1})^2}{c_o'^2} - \frac{c_o'^2}{c_o'^2} \right) \text{ ή}$$

$$P_k^{*n+1} = P_{ext}^{*n+1} + 2((c_k^{*n+1})^2 - c_o'^2) \quad (2-90)$$

2.6.2.3 Τερματική αντίσταση

Το δίκτυο των αγγείων, που αμελούμε, προκαλεί ανακλάσεις. Πρέπει να προσεγγιστούν αυτές οι ανακλάσεις στο τέλος του μοντελοποιημένου δικτύου. Έτσι εισάγεται η έννοια της τερματικής αντίστασης R_t (terminal resistance).

Για $R_t=1$ έχουμε πλήρη ανάκλαση.

Για $R_t=0$ έχουμε μηδενική ανάκλαση.

Για $R_t > 0$ το πίσω οδεύον κύμα συνεισφέρει με αρνητική ταχύτητα.

Για $R_t < 0$ το πίσω οδεύον κύμα συνεισφέρει με θετική ταχύτητα.

Με γνωστή λοιπόν την τιμή του R_t , από τη σχέση:

$$R_t = - \frac{u - 4(C - C_o)}{u + 4(C - C_o)} \quad (2-91)$$

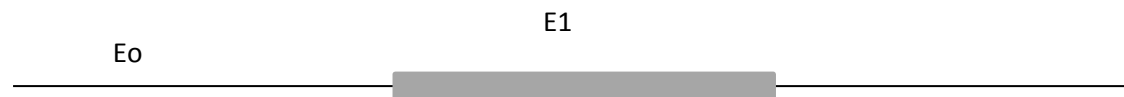
και τη συνθήκη συμβατότητας (2-52) για δεξιοκλινή χαρακτηριστική προκύπτει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, από το οποίο υπολογίζονται οι τιμές της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας u^* και της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας κύματος c^* στην έξοδο του αγγείου τη νέα χρονική στιγμή $n+1$.

$$u_k^{*n+1} = \frac{u_{CR}^{*n} + 4(c_{CR}^{*n} - c_o'^*)}{1 + \frac{1+R_t}{1-R_t}} \quad (2-92)$$

$$c_k^{*n+1} = \frac{u_k^{*n+1}(1+R_t)}{4(1-R_t)} + c_o'^* \quad (2-93)$$

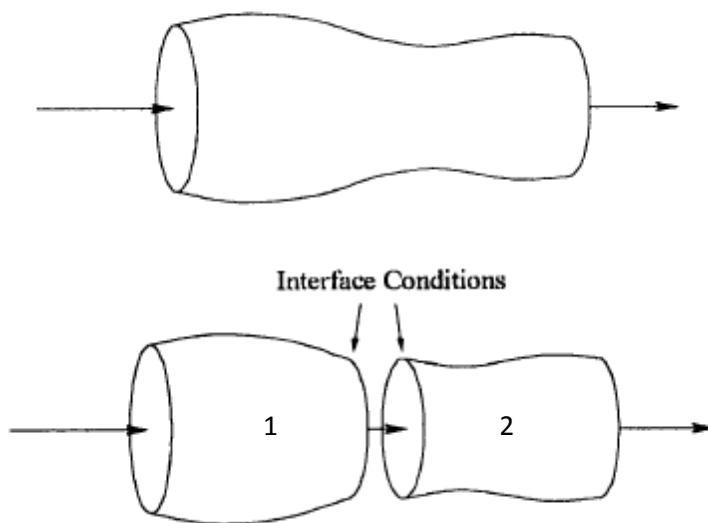
Η διατομή και η πίεση υπολογίζονται ως ανωτέρω από τις σχέσεις (2-89),(2-90).

2.7 Αγγείο με stent ή ενδομόσχευμα



Σχήμα 2.4 Σχηματική παράσταση αγγείου με stent

Όταν σε ένα αγγείο τοποθετείται stent ή ενδομόσχευμα, οι ελαστικές του ιδιότητες ποικίλουν. Αν απλά αλλάξουμε συναρτήσει του μήκους x την τιμή του $\beta(x)$, μπορεί οι διαφορετικές ιδιότητες να λαμβάνονται υπόψη, όμως στο σημείο της αλλαγής παρουσιάζεται ασυνέχεια. Προκειμένου να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα θεωρούμε το stent ως ξεχωριστό αγγείο.



Σχήμα 2.5 Σχηματική παράσταση υποδιαίρεσης αγγείου με stent σε δύο αγγεία

Ισχύουν τα εξής για το σημείο της αλλαγής:

Συνέχεια των παροχών μάζας:

$$Q_1=Q_2 \Rightarrow A_1u_1=A_2u_2 \quad (2-94)$$

Συνέχεια ολικής πίεσης:

$$P_{t1}=P_{t2} \Rightarrow P_1+\frac{1}{2}\rho u_1^2 = P_2+\frac{1}{2}\rho u_2^2 \quad (2-95)$$

Στην ουσία αυτό που κάνουμε είναι να θεωρούμε το τμήμα με το stent διαφορετικό αγωγό. Σε αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα, η πίεση και η διατομή της εξόδου του φυσιολογικού αγγείου και της εισόδου του stent ή αντίστοιχα της εξόδου του stent και της εισόδου του φυσιολογικού αγγείου υπολογίζονται ως οριακές συνθήκες. Προκύπτει ένα μη γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους, το οποίο εκτός από τις ανωτέρω εξισώσεις περιλαμβάνει και τις συνθήκες

συμβατότητας των χαρακτηριστικών της εξόδου και της εισόδου αντίστοιχα, οι οποίες είναι:

$$u_k^{n+1} + 4c_k^{n+1} = u_{CR}^n + 4c_{CR}^n$$

$$u_1^{n+1} - 4c_1^{n+1} = u_{CL}^n - 4c_{CL}^n$$

Αντικαθιστώντας τις πιέσεις στην (2-95) από τη σχέση (2-13) και τη διατομή στην (2-94) από τη σχέση (2-67) και αδιαστατοποιώντας:

$$u_k^{*n+1} + 4c_k^{*n+1} = u_{CR}^{*n} + 4c_{CR}^{*n} \quad (2-96)$$

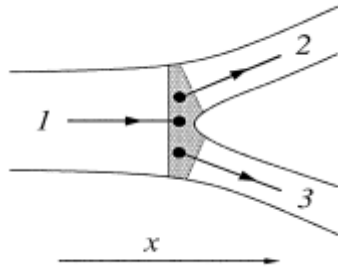
$$u_1^{*n+1} - 4c_1^{*n+1} = u_{CL}^{*n} - 4c_{CL}^{*n} \quad (2-97)$$

$$(u_k^{*n+1})^2 + 4((c_k^{*n+1})^2 - C_{o1}^{*n}) = (u_1^{*n+1})^2 + 4((c_1^{*n+1})^2 - C_{o2}^{*n}) \quad (2-98)$$

$$\frac{A_{o1}^*}{C_{o1}^{*n}} (c_1^{*n+1})^4 u_1^{*n+1} = \frac{A_{o2}^*}{C_{o2}^{*n}} (c_2^{*n+1})^4 u_2^{*n+1} \quad (2-99)$$

Το μη γραμμικό σύστημα επιλύεται με τη μέθοδο Newton - Raphson(2.11). Έχοντας υπολογίσει λοιπόν την αδιαστατοποιημένη ταχύτητα εξόδου του φυσιολογικού αγγείου και εισόδου του stent, καθώς και την αδιαστατοποιημένη ταχύτητα κύματος αντίστοιχα, η διατομή και η πίεση προκύπτουν αδιαστατοποιώντας τις σχέσεις (2-67) και (2-13) για το φυσιολογικό αγγείο και το stent αντίστοιχα.

2.8 Διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης



Σχήμα 2.6 Σχηματική παράσταση διακλάδωσης

Αρχικά ισχύει η συνέχεια των παροχών μάζας, δηλαδή:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2 + A_3 u_3 \quad (2-100)$$

Επίσης, θεωρούμε συνέχεια ολικής πίεσης. Τότε:

$$P_{t1} = P_{t2} \Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \quad (2-101)$$

$$P_{t1} = P_{t3} \Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = P_3 + \frac{1}{2} \rho u_3^2 \quad (2-102)$$

Προκύπτει ένα μη γραμμικό σύστημα έξι εξισώσεων με έξι αγνώστους, το οποίο εκτός από τις ανωτέρω εξισώσεις περιλαμβάνει και τις συνθήκες συμβατότητας των χαρακτηριστικών της εξόδου του αγγείου 1 και της εισόδου των 2 και 3 αντίστοιχα, οι οποίες είναι:

$$u_k^{n+1} + 4c_k^{n+1} = u_{CR}^n + 4c_{CR}^n$$

$$u_{1_2}^{n+1} - 4c_{1_2}^{n+1} = u_{CL_2}^n - 4c_{CL_2}^n$$

$$u_{1_3}^{n+1} - 4c_{1_3}^{n+1} = u_{CL_3}^n - 4c_{CL_3}^n,$$

, όπου οι δείκτες 2 και 3 συμβολίζουν ότι πρόκειται για τα αγγεία 2 και 3 αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας τις πιέσεις στις (2-101) και (2-102) από τη σχέση (2-13) και τη διατομή στην (2-100) από τη σχέση (2-67) και αδιαστατοποιώντας:

$$u_k^{*n+1} + 4c_k^{*n+1} = u_{CR}^{*n} + 4c_{CR}^{*n} \quad (2-103)$$

$$u_{1_2}^{*n+1} - 4c_{1_2}^{*n+1} = u_{CL_2}^{*n} - 4c_{CL_2}^{*n} \quad (2-104)$$

$$u_{1_3}^{*n+1} - 4c_{1_3}^{*n+1} = u_{CL_3}^{*n} - 4c_{CL_3}^{*n} \quad (2-105)$$

$$(u_k^{*n+1})^2 + 4((c_k^{*n+1})^2 - C_{o_1}^{*n+1}) = (u_{1_2}^{*n+1})^2 + 4((c_{1_2}^{*n+1})^2 - C_{o_2}^{*n+1}) \quad (2-106)$$

$$(u_k^{*n+1})^2 + 4((c_k^{*n+1})^2 - C_{o_1}^{*n+1}) = (u_{1_3}^{*n+1})^2 + 4((c_{1_3}^{*n+1})^2 - C_{o_3}^{*n+1}) \quad (2-107)$$

$$\frac{A_{o_1}^*}{C_{o_1}^{*n+1}} (c_k^{*n+1})^4 u_1^{*n+1} = \frac{A_{o_2}^*}{C_{o_2}^{*n+1}} (c_{1_2}^{*n+1})^4 u_{1_2}^{*n+1} + \frac{A_{o_3}^*}{C_{o_3}^{*n+1}} (c_{1_3}^{*n+1})^4 u_{1_3}^{*n+1} \quad (2-108)$$

Το μη γραμμικό σύστημα επιλύεται με τη μέθοδο Newton-Raphson(2.11). Έχοντας υπολογίσει λοιπόν την αδιαστατοποιημένη ταχύτητα εξόδου του πατρικού αγγείου και εισόδου των θυγατρικών, καθώς και την αδιαστατοποιημένη ταχύτητα κύματος αντίστοιχα, η διατομή και η πίεση προκύπτουν αδιαστατοποιώντας τις σχέσεις (2-67) και (2-13).

Ακολουθεί πίνακας των αγγείων του αρτηριακού δέντρου που διακλαδίζονται.

Πίνακας 2.3 : Διακλαδιζόμενα Αγγεία		
A/A Αγγείου	Γονικό	Παιδιά
1	-	2,3
2	1	14,15
3	1	4,5
4	3	6,7
5	3	12,13
7	4	8,9
9	7	10,11
14	2	18,19
15	2	16,17

18	14	26,27
19	14	20,21
21	19	22,23
23	21	24,25
27	18	28,29
28	27	34,35
29	27	30,31
30	29	32,33
35	28	36,37
37	35	38,39
39	37	40,41
41	39	42,43
42	41	44,45
43	41	50,51
44	42	46,47
46	44	48,49
50	43	52,53
52	50	54,55

2.9 Μέθοδος επίλυσης Mac-Cormack

Η μέθοδος MacCormack αποτελεί ένα ρητό σχήμα πεπερασμένων διαφορών, που έχει δεύτερης τάξης ακρίβεια στον χώρο και τον χρόνο. Εισάχθηκε το 1969 και έγινε η πιο φημισμένη ρητή μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση πεδίων ροής για τα επόμενα 15 χρόνια. Σήμερα έχει εμπλουτιστεί με περισσότερο περίπλοκες προσεγγίσεις.

Θεωρούμε ότι το πεδίο ροής σε κάθε θέση του όγκου ελέγχου είναι γνωστό την χρονική στιγμή t και θέλουμε να υπολογιστεί την χρονική στιγμή $t+\Delta t$, δηλαδή πρόκειται για μία μέθοδο χρονοπροέλασης. Στην συνέχεια, παρατίθεται ο τρόπος υπολογισμού της διατομής A με την βοήθεια της εξίσωσης διατήρησης της μάζας, κάνοντας χρήση της μεθόδου MacCormack. Ομοίως υπολογίζεται και η ταχύτητα με την εξίσωση διατήρησης της ορμής. Η πίεση υπολογίζεται από την σχέση ελαστικότητας, αφού είναι γνωστή η διατομή.

Η διατομή στην θέση i για την χρονική στιγμή $t+\Delta t$ είναι:

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{av} \Delta t \quad (2-109)$$

Όπου, $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{av}$ είναι μια αντιπροσωπευτική μέση τιμή της χρονικής παραγώγου $\frac{\partial A}{\partial t}$ ανάμεσα στις χρονικές τιμές t και Δt . Αυτή η μέση τιμή υπολογίζεται σε δύο βήματα, πρόβλεψης και διόρθωσης.

2.9.1 Βήμα πρόβλεψης(predictor step)

Αντικαθιστούμε με πρόσω διαφορές το δεξί άκρο της εξίσωσης διατήρησης της μάζας:

$$\frac{\partial A^n}{\partial t_i} = -\left(\frac{A_{i+1}^n u_{i+1}^n - A_i^n u_i^n}{\Delta x}\right)$$

Όλες οι μεταβλητές είναι γνωστές την χρονική στιγμή t , άρα το δεξί μέλος είναι γνωστό. Έτσι υπολογίζεται η διατομή A την χρονική στιγμή $t+\Delta t$, με τους δύο πρώτους όρους σειράς Taylor:

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \frac{\partial A^n}{\partial t_i} \Delta t \quad (2-110)$$

Η διατομή A_i^{n+1} υπολογιζόμενη από αυτό το βήμα πρόβλεψης, αποτελεί πρώτης τάξης ακρίβεια, αφού περιέχει όρους πρώτης τάξης της σειράς Taylor.

2.9.2 Βήμα διόρθωσης(Corrector step)

Στο βήμα διόρθωσης, αρχικά υπολογίζεται η χρονική παράγωγος με τα δεδομένα του βήματος πρόβλεψης για την χρονική στιγμή $t+\Delta t$:

$$\frac{\partial A^{n+1}}{\partial t_i} = -\left(\frac{A_i^{n+1} u_i^{n+1} - A_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)$$

Η μέση τιμή της χρονικής παραγωγού της διατομής υπολογίζεται από τον αριθμητικό μέσο των χρονικών παραγωγών:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{av} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_i^n + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_i^{n+1} \right]$$

Έτσι υπολογίζεται η διορθωμένη τιμή της διατομής την χρονική στιγμή $t+\Delta t$ από τη γνωστή σχέση:

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{av} \Delta t \quad (2-111)$$

Αυτά τα δύο βήματα πρόβλεψης και διόρθωσης επαναλαμβάνονται για όλα τα σημεία του αγγείου και έτσι υπολογίζεται το πεδίο ροής σε όλα τα σημεία την χρονική στιγμή $t+\Delta t$. Για να υπολογιστεί η ταχύτητα u κατά μήκος του αγγείου επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία κάνοντας χρήση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής.

Όπως περιγράφηκε παραπάνω στο βήμα πρόβλεψης χρησιμοποιούμε πρόσω διαφορές και στο βήμα διόρθωσης πίσω διαφορές, γεγονός που καθιστά την μέθοδο Mac-Cormack διπλής ακρίβειας μέθοδο. [Anderson, 1995]

2.10 Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Η μέθοδος απαλοιφής Gauss είναι μία από τις πλέον αποτελεσματικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων με υπολογιστή. Η μέθοδος βασίζεται στη μετατροπή του αρχικού συστήματος, με επιτρεπτές πράξεις, σε ισοδύναμο του οποίου ο πίνακας των συντελεστών είναι άνω τριγωνικός. Τότε το νέο σύστημα επιλύεται εύκολα με διαδοχικές αντικαταστάσεις. Ο πίνακας συντελεστών θα πρέπει να είναι τετραγωνικός και ομαλός. Η μέθοδος Gauss εφαρμόζεται σε δύο φάσεις:

2.10.1 Φάση τριγωνοποίησης

Το γραμμικό σύστημα των έξι εξισώσεων που έχουμε να επιλύσουμε για να βρούμε τους συντελεστές του $E(x)$ είναι:

$$E_0 = s_0 + s_1E(a_1 - \delta) + s_2E(a_1 - \delta)^2 + s_3E(a_1 - \delta)^3 + s_4E(a_1 - \delta)^4 + s_5E(a_1 - \delta)^5$$

$$E_1 = s_0 + s_1E(a_1 + \delta) + s_2E(a_1 + \delta)^2 + s_3E(a_1 + \delta)^3 + s_4E(a_1 + \delta)^4 + s_5E(a_1 + \delta)^5$$

$$\frac{E_0 + E_1}{2} = s_0 + s_1E(a_1) + s_2E(a_1)^2 + s_3E(a_1)^3 + s_4E(a_1)^4 + s_5E(a_1)^5$$

$$0 = s_1 + 2s_2E(a_1 - \delta) + 3s_3E(a_1 - \delta)^2 + 4s_4E(a_1 - \delta)^3 + 5s_5E(a_1 - \delta)^4$$

$$0 = s_1 + 2s_2E(a_1 + \delta) + 3s_3E(a_1 + \delta)^2 + 4s_4E(a_1 + \delta)^3 + 5s_5E(a_1 + \delta)^4$$

$$0 = 2s_2 + 6s_3E(a_1) + 12s_4E(a_1)^2 + 20s_5E(a_1)^3$$

Το φέρνουμε στην ακόλουθη μορφή:

$$b_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 + \alpha_{15}x_5 + \alpha_{16}x_6 \quad (2-112)$$

$$b_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 + \alpha_{25}x_5 + \alpha_{26}x_6 \quad (2-113)$$

$$b_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4 + \alpha_{35}x_5 + \alpha_{36}x_6 \quad (2-114)$$

$$b_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{44}x_4 + \alpha_{45}x_5 + \alpha_{46}x_6 \quad (2-115)$$

$$b_5 = \alpha_{51}x_1 + \alpha_{52}x_2 + \alpha_{53}x_3 + \alpha_{54}x_4 + \alpha_{55}x_5 + \alpha_{56}x_6 \quad (2-116)$$

$$b_6 = \alpha_{61}x_1 + \alpha_{62}x_2 + \alpha_{63}x_3 + \alpha_{64}x_4 + \alpha_{65}x_5 + \alpha_{66}x_6 \quad (2-117)$$

, όπου $x_1 : x_6$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές του $E(x)$

α_{ij} οι γνωστοί συντελεστές των x_i

b_i οι γνωστές τιμές της κάθε εξίσωσης

Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & b_4 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & b_5 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & b_6 \end{pmatrix}$$

Για $p=1$ έως 6 αν χρειάζεται αντάλλαξε τη γραμμή p με κάποια από τις επόμενες ώστε να ισχύει $a_{pp} \neq 0$. Εν συνεχεία απάλειψε τον άγνωστο x_p στις γραμμές $p+1$ έως 6. Εάν ε_1 έως ε_6 οι εξισώσεις μας, η παραπάνω διαδικασία συμβολίζεται ως εξής:

$$(\varepsilon_r) \rightarrow (\varepsilon_r - m_{rp}\varepsilon_p) \text{ για κάθε } r = p+1,6$$

,όπου m_{rp} είναι ο πολλαπλασιαστής της γραμμής p που αφαιρείται από τη γραμμή r και την αντικαθιστά.

Το τελικό αποτέλεσμα μετά και την απαλοιφή του x_5 στη γραμμή 6 είναι:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & b_6 \end{pmatrix}$$

Εάν κάποιο στοιχείο της διαγωνίου μηδενιστεί η μέθοδος είναι μη εφαρμόσιμη.

2.10.2 Φάση πίσω-αντικατάσταση

Το άνω τριγωνικό σύστημα επιλύεται εύκολα με τη διαδικασία της πίσω αντικατάστασης. Έτσι αρχίζοντας από την τελευταία εξίσωση υπολογίζουμε το x_6 , αντικαθιστούμε στην προηγούμενη και υπολογίζουμε το x_5 και ούτω καθεξής οπότε τελικά από την πρώτη εξίσωση υπολογίζουμε το x_1 . [Παπαγεωργίου-Τσίτουρας,2004]

2.11 Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson

Η μέθοδος Newton-Raphson είναι μία από τις πιο δυνατές και γνωστές επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων. Εκτός του ότι η σύγκλιση επιτυγχάνεται γρήγορα, η μέθοδος χρησιμοποιεί τις τιμές της συνάρτησης με αποτέλεσμα να προκύπτουν περισσότερο ακριβείς προσεγγίσεις της λύσης σε κάθε επανάληψη. Ο μόνος της περιορισμός έγκειται στη σωστή επιλογή της αρχικής προσέγγισης. Αν αυτή δεν βρίσκεται κοντά στη ρίζα, η μέθοδος μπορεί να αποκλίνει. Στη δικιά μας περίπτωση η Newton-Raphson χρησιμοποιείται σε κάθε χρονική στιγμή στις οριακές συνθήκες. Από τη στιγμή που για την εύρεση των τιμών της χρονικής στιγμής $t+\Delta t$ χρησιμοποιούνται ως αρχικές προσεγγίσεις οι τιμές της προηγούμενης χρονικής στιγμής t , η σύγκλιση εξασφαλίζεται.

Στη γενικευμένη περίπτωση για ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους ισχύουν τα εξής:

Εστω
$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{matrix}^{(r+1)}$$
 η τιμή του διανύσματος \mathbf{x} στην $(r+1)$ επανάληψη. Τότε έχουμε την επαναληπτική σχέση :

$$\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{x}^r + \delta\mathbf{x}^r, \quad r=0,1,2,\dots \quad (2-118)$$

,όπου $\delta\mathbf{x}^r$ το διάνυσμα των αντίστοιχων διορθώσεων.

Αν το $\mathbf{x}^{(r+1)}$ είναι μία βελτιωμένη προσέγγιση του \mathbf{x} τότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(r+1)}) &\approx \mathbf{0} \text{ ή} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^r + \delta\mathbf{x}^r) &\approx \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2-119)$$

,όπου \mathbf{f} το διάνυσμα των εξισώσεων του συστήματος.

Αναπτύσσοντας τη σχέση (2-119) σε σειρά Taylor και παραλείποντας όλους τους όρους που περιέχουν δυνάμεις του $\delta\mathbf{x}^r$ μεγαλύτερες του 1 προκύπτει:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^r) + \mathbf{J}_f(\mathbf{x}^r) \delta\mathbf{x}^r \approx \mathbf{0} \quad (2-120)$$

$$\text{,όπου } \mathbf{J}_f(\mathbf{x}^r) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^r)}{\partial x_j}, \text{ για } i=1,2,\dots,n \text{ και } j=1,2,\dots,n \quad (2-121)$$

είναι ο Ιακωβιανός πίνακας (Jacobian), και ο δείκτης r δηλώνει ότι υπολογίζεται στο σημείο \mathbf{x}^r .

Λύνοντας την σχέση (2-120) προκύπτει ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Newton:

$$\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{x}^r - \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^r)}{\mathbf{J}_f(\mathbf{x}^r)} \quad (2-122)$$

Στην πράξη επιλύουμε το γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}^r) \delta\mathbf{x}^r = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^r) \quad (2-123)$$

και εν συνεχεία υπολογίζουμε την επόμενη προσέγγιση

$$\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{x}^r + \delta\mathbf{x}^r \quad (2-124)$$

Με την έννοια αυτή, η μέθοδος Newton-Raphson αντικαθιστά ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων με ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, αλλά επειδή οι λύσεις των δύο συστημάτων γενικά δεν ταυτίζονται, η διαδικασία πρέπει να επαναλαμβάνεται μέχρις ότου η προσεγγιστική λύση να έχει την επιθυμητή ακρίβεια. Ένα κριτήριο είναι να συνεχίσουμε τις επαναληψεις έως ότου να ικανοποιηθεί η ανισότητα:

$$\frac{\delta x^r}{x^r + \delta x^r} < \varepsilon$$

(2-125)

,όπου ε το επιθυμητό σφάλμα. [Παπαγεωργίου-Τσίτουρας,2004]

2.12 Έλεγχος κώδικα

Επειδή ο υπολογιστικός κώδικας που συντάχτηκε δεν είχε ελεγχθεί ως προς την εγκυρότητά του, κρίθηκε σκόπιμο να συγκριθούν τα αποτελέσματά του με αυτά αντίστοιχων δημοσιευμένων άρθρων [Sherwin et al, 2003].

Ακολουθεί πίνακας με τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν.

Πίνακας 2.4 : Δεδομένα Προβλήματος [Sherwin et al, 2003]					
A/A	Όνομα	L (cm)	Ao (cm²)	β (kg/s cm²)	Rt
1	Ascending Aorta	4	5.983	97	-
2	Aortic Arch A	2	5.147	87	-
3	Innominate	3.4	1.219	233	-
4	R. Subclavian A	3.4	0.562	423	-
5	R. Carotid	17.7	0.432	516	-
6	R. Vertebral	14.8	0.123	2590	0.906
7	R. Subclavian B	42.2	0.51	466	-
8	R. Radial	23.5	0.106	2866	0.82
9	R. Ulnar A	6.7	0.145	2246	-
10	R. Interosseous	7.9	0.031	12894	0.956
11	R. Ulnar B	17.1	0.133	2446	0.893
12	R. Internal Carotid	17.6	0.121	2644	0.784
13	R. External Carotid	17.7	0.121	2467	0.79
14	Aortic Arch B	3.9	3.141593	130	-
15	L. Carotid	20.8	0.43	519	-
16	L. Internal Carotid	17.6	0.121	2644	0.784
17	L. External Carotid	17.7	0.121	2467	0.791
18	Thoracic Aorta A	5.2	3.141593	124	-
19	L. Subclavian A	3.4	0.562	416	-
20	Vertebral	14.8	0.123	2590	0.906
21	L. Subclavian B	42.2	0.51	466	-
22	L. Radial	23.5	0.106	2866	0.821
23	L. Ulnar A	6.7	0.145	2246	-
24	L. Interosseous	7.9	0.031	12894	0.956
25	L. Ulnar B	17.1	0.133	2446	0.893

26	Intercostals	8	0.196	885	0.627
27	Thoracic Aorta B	10.4	3.017	117	-
28	Abdominal Aorta A	5.3	1.911	167	-
29	Celiac A	2	0.479475	475	-
30	Celiac B	1	0.126	1805	-
31	Hepatic	6.6	0.152	1142	0.925
32	Gastric	7.1	0.102	1567	0.921
33	Splenic	6.3	0.238	806	0.93
34	Superior Mesenteric	5.9	0.43	569	0.934
35	Abdominal Aorta B	1	1.247	227	-
36	L. Renal	3.2	0.332	566	0.861
37	Abdominal Aorta C	1	1.021	278	-
38	R. Renal	3.2	0.159	1181	0.861
39	Abdominal Aorta D	10.6	0.697	381	-
40	Inferior Mesenteric	5	0.08	1895	0.918
41	Abdominal Aorta E	1	0.578	399	-
42	R. Common Iliac	5.9	0.328	649	-
43	L. Common Iliac	5.8	0.328	649	-
44	L. External Iliac	14.4	0.252	1493	-
45	L. Internal Iliac	5	0.181	3134	0.925
46	L. Femoral	44.3	0.139	2559	-
47	L. Deep Femoral	12.6	0.126	2652	0.885
48	L. Posterior Tibial	32.1	0.11	5808	0.724
49	L. Anterior Tibial	34.3	0.06	9243	0.716
50	R. External Iliac	14.5	0.252	1493	-
51	R. Internal Iliac	5.1	0.181	3134	0.925
52	R. Femoral	44.4	0.139	2559	-
53	R. Deep Femoral	12.7	0.126	2652	0.888
54	R. Posterior Tibial	32.2	0.11	5808	0.724
55	R. Anterior Tibial	34.4	0.06	9243	0.716

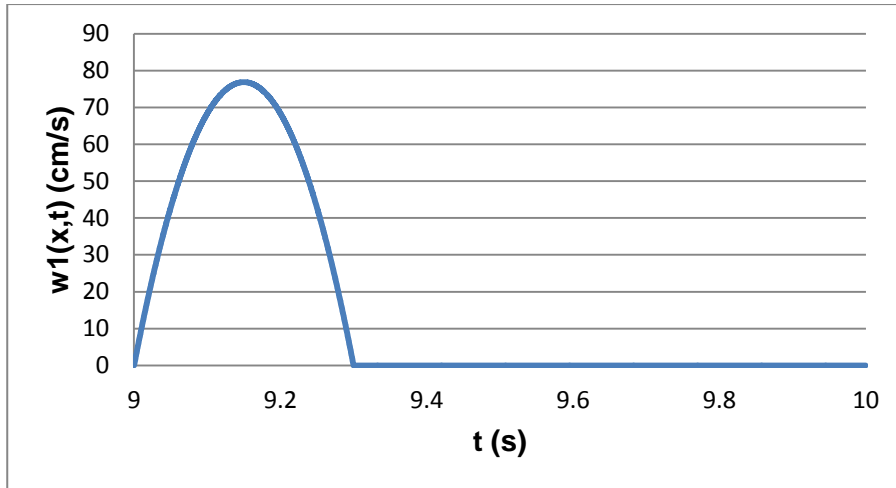
Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$P(x,0)=0, u(x,0)=0, A(x,0)=A_0 \text{ και } C(x,0)=C_0.$$

Στην είσοδο του αρτηριακού δέντρου επιβάλλεται ο ακόλουθος παλμός με περίοδο $T=1 \text{ sec}$:

$$W_1 = u_0 + 4c_{0_1} \left((1 + 0.597\delta(t)H(\delta(t)))^{0.25} - 1 \right) \quad (2-126)$$

$$, \text{ όπου } u_0 = 0, \delta(t) = \sin(\omega t + 0.628) - 0.588 \text{ και } H(\delta(t)) = \begin{cases} 1, & \delta(t) > 0 \\ 0, & \delta(t) < 0 \end{cases}.$$



Σχήμα 2.7 Παλμός παροχής εισόδου αρτηριακού δέντρου

Οι τιμές της ταχύτητας, της διατομής και της πίεσης υπολογίζονται σύμφωνα με τα λεχθέντα στην ανάλυση των οριακών συνθηκών στην παράγραφο 2.6.2.1.

Στο άπω άκρο των τερματικών αγγείων αρχικώς θεωρούμε συνθήκη μη-ανάκλασης (non-reflecting), με τον όρο $u-4(c-c_0)$ να παραμένει σταθερός και ίσος με την αρχική του τιμή, δηλαδή $u-4(c-c_0) = 0$ (αγγείο απείρου μήκους όπου το οδεύον κύμα πίεσης δεν φτάνει στο άπω άκρο). Στη συνέχεια, έγινε χρήση του συντελεστή τερματικής αντίστασης R_t . Οι τιμές της ταχύτητας, της διατομής και της πίεσης και για τις δύο περιπτώσεις υπολογίζονται σύμφωνα με τα λεχθέντα στην παράγραφο 2.6.2.1.

Τέλος, η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho = 1,021 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ και η δυναμική συνεκτικότητα $\mu = 0,0035 \text{ Ns/m}^2$.

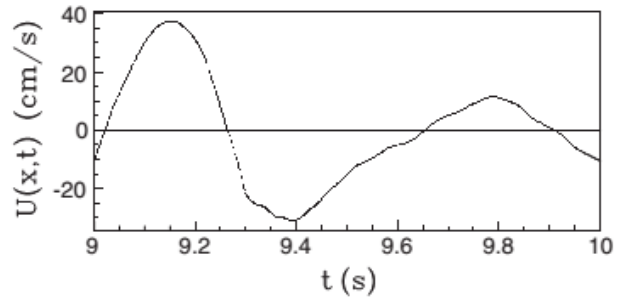
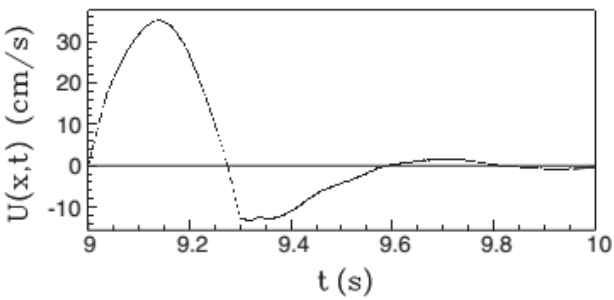
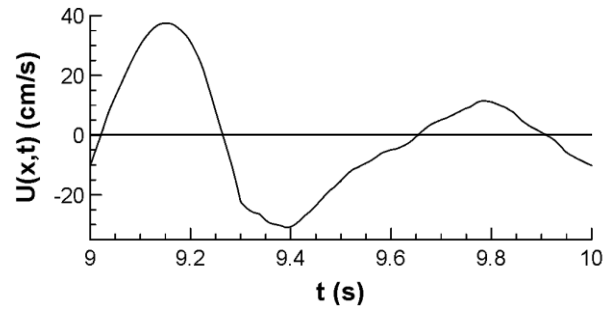
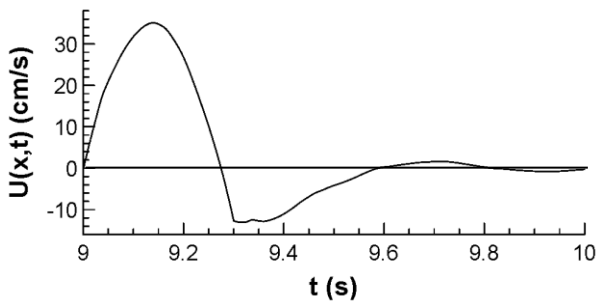
Ακολουθούν, τόσο για την περίπτωση μη-ανάκλασης όσο και για την περίπτωση συντελεστή τερματικής αντίστασης, τα διαγράμματα της ταχύτητας του ρευστού και της διατομής στις εισόδους των αγγείων 1 (ascending aorta), 46 (femoral artery) και 49 (anterior tibial artery), συγκρινόμενα με τα αντίστοιχα της βιβλιογραφίας [Sherwin, 2003].

Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της 10^{ης} επανάληψης.

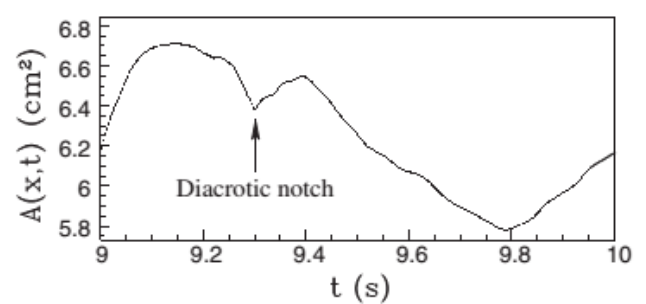
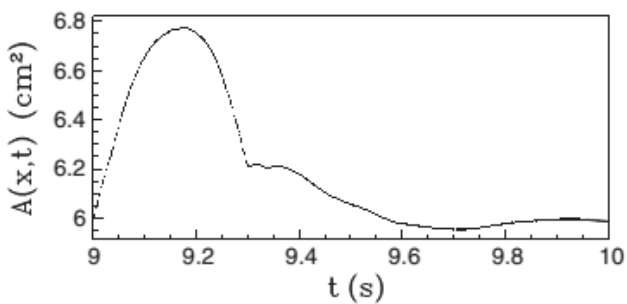
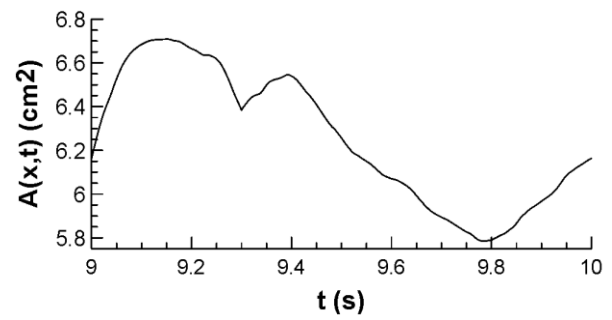
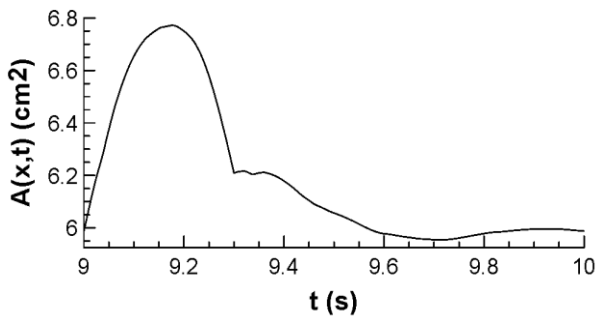
Συνθήκη μη-ανάκλασης

Τερματική Αντίσταση R_t

Ascending Aorta



Σχήμα 2.8 Ταχύτητα στο εγγύς άκρο της ανιούσας αορτής του μοντέλου (πάνω) σε σχέση με του Sherwin (κάτω)

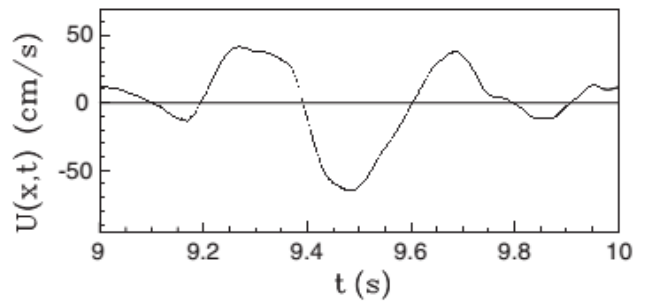
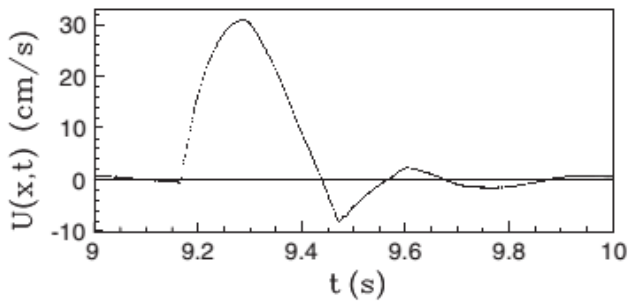
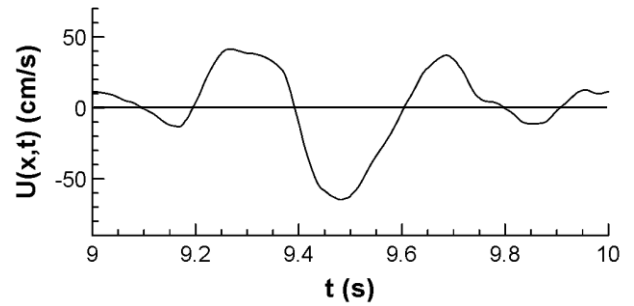
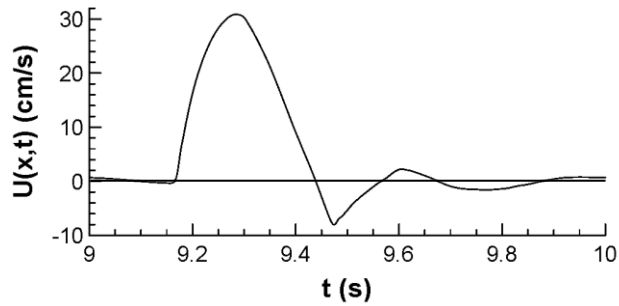


Σχήμα 2.9 Διατομή στο εγγύς άκρο της ανιούσας αορτής του μοντέλου (πάνω) σε σχέση με του Sherwin (κάτω)

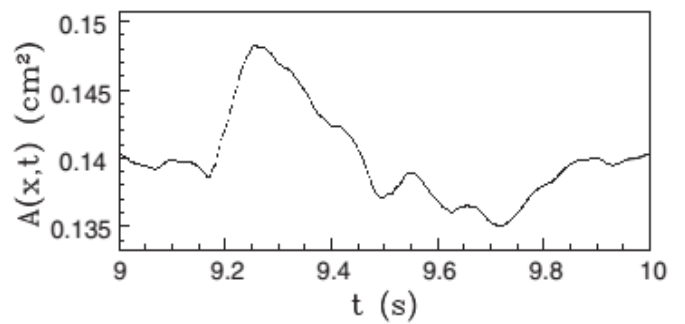
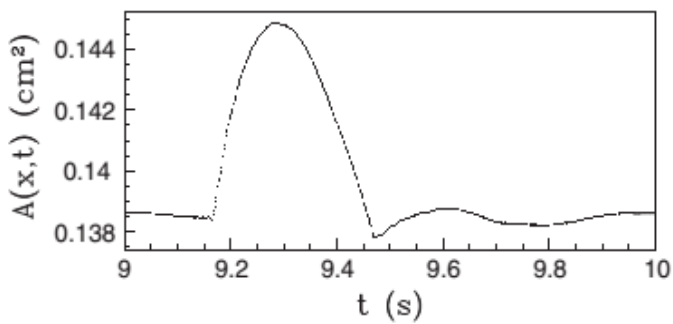
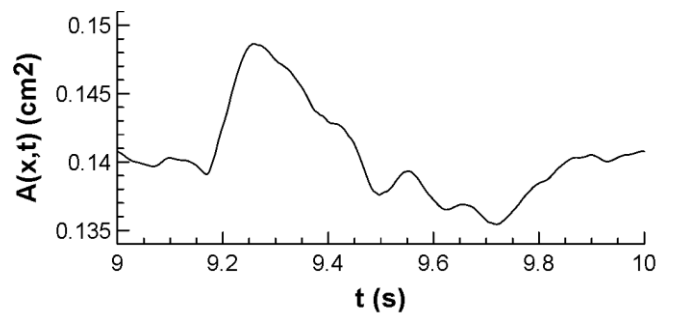
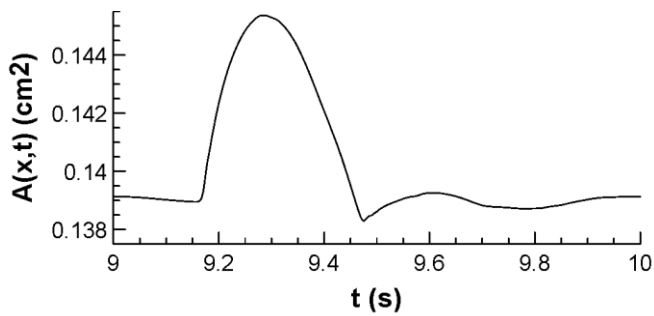
Συνθήκη μη-ανάκλασης

Τερματική Αντίσταση R_t

Femoral Artery



Σχήμα 2.10 Ταχύτητα στο εγγύς άκρο της μηριαίας αρτηρίας του μοντέλου (πάνω) σε σχέση με του Sherwin (κάτω)

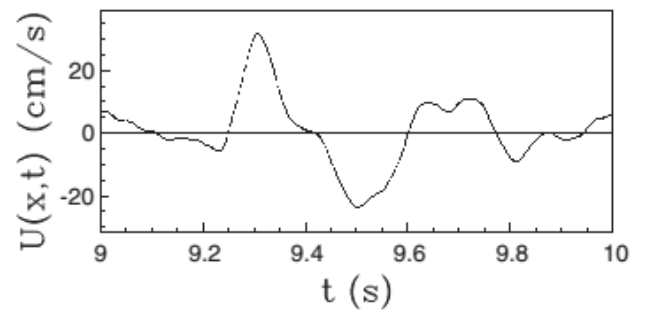
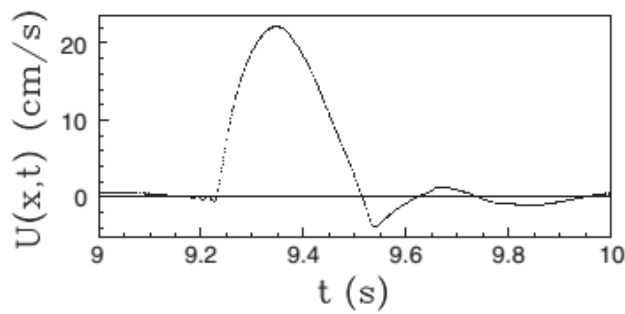
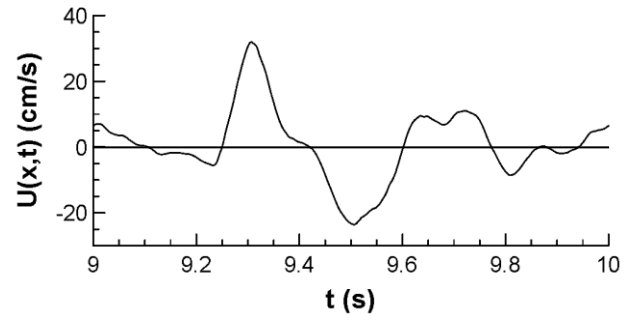
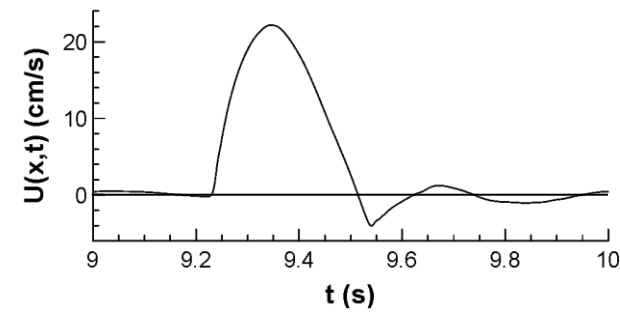


Σχήμα 2.11 Διατομή στο εγγύς άκρο της μηριαίας αρτηρίας του μοντέλου (πάνω) σε σχέση με του Sherwin (κάτω)

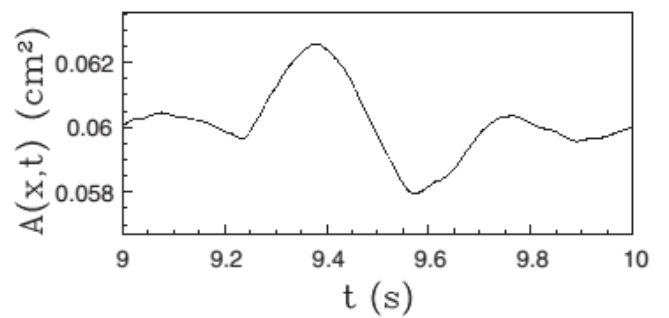
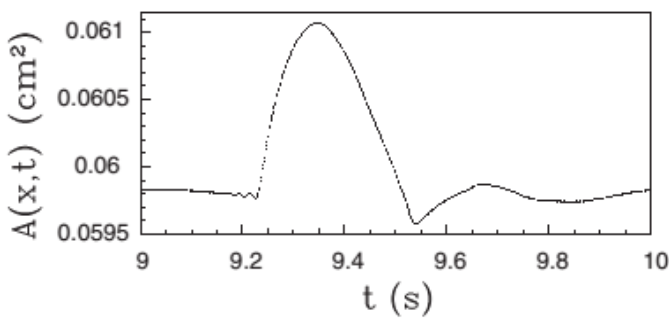
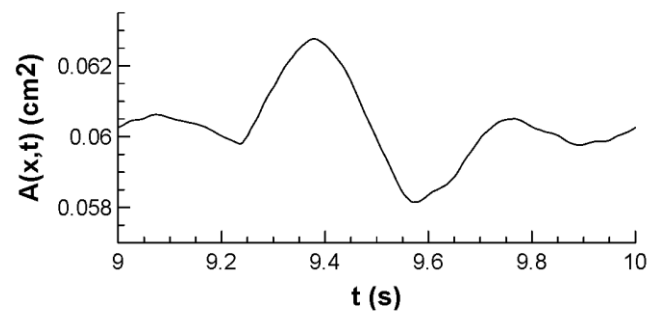
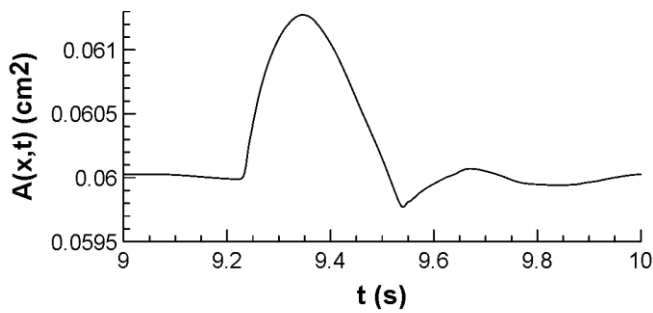
Συνθήκη μη-ανάκλασης

Τερματική Αντίσταση R_t

Anterior Tibial Artery



Σχήμα 2.12 Ταχύτητα στο εγγύς άκρο της πρόσθιας κνημιαίας αρτηρίας του μοντέλου (πάνω) σε σχέση με του Sherwin (κάτω)



Σχήμα 2.13 Διατομή στο εγγύς άκρο της πρόσθιας κνημιαίας αρτηρίας του μοντέλου (πάνω) σε σχέση με του Sherwin (κάτω)

Τα αποτελέσματα του κώδικα με αυτά των άρθρων ταυτίζονται σε μεγάλο βαθμό. Οι μικρές παρ'όλ'αυτά αποκλίσεις, οφείλονται σε δύο λόγους:

1. Οι υπολογιστικές μεθοδολογίες είναι διαφορετικές.
2. Η χαμηλού επιπέδου επεξεργασία εικόνας που υπέστησαν τα διαγράμματα, ενδεχομένως δημιούργησε κάποιες αλλοιώσεις.

Η χρήση του συντελεστή τερματικής αντίστασης καθιστά το σύστημα ιδιαίτερα πολύπλοκο. Το εισερχόμενο κύμα ανακλάται στα τερματικά αγγεία και το ανακλώμενο, εκ νέου στις διακλαδώσεις. Η αλληλεπίδραση εισερχόμενων και ανακλώμενων κυμάτων φαίνεται εντονότερα στα διαγράμματα των τερματικών αγγείων, κάτι το οποίο δικαιολογείται και από τις τιμές των συντελεστών τερματικής αντίστασης, αφού πλησιάζουν τη μονάδα. Η κυματομορφή κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου αλλάζει σημαντικά σε αντίθεση με την περίπτωση της συνθήκης μη-ανάκλασης.

Λαμβάνοντας υπ'όψη την τερματική αντίσταση τα αποτελέσματα είναι πιο ρεαλιστικά. Παρατηρείται λοιπόν μικρή αύξηση της μέγιστης πίεσης (αντίστοιχη συμπεριφορά με τη διατομή) κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου και πτώση της μέγιστης ταχύτητας, με τη μέγιστη ταχύτητα να εμφανίζεται νωρίτερα από τη μέγιστη πίεση. Αξίζει επίσης να σημειωθεί, η δικροτική εγκοπή που φαίνεται στο διάγραμμα της ανιούσας αορτής (Σχήμα 2.9) και συμφωνεί με τη συστολή-διαστολή της αορτικής βαλβίδας στις in vivo μελέτες [Sherwin, 2003].

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Εισαγωγή

Εφόσον ο υπολογιστικός κώδικας που συντάχθηκε ελέγχθηκε ως προς την εγκυρότητά του, παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα της μεθοδολογίας για την περίπτωση υγιούς ενήλικα, για τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις ασθενών με ανεύρυσμα κοιλιακής αρτηρίας, καθώς και για την περίπτωση τοποθέτησης ενδομοσχεύματος προκειμένου να γίνει αποκατάσταση. Τέλος, έγινε μελέτη και για περίπτωση ασθενών με φραγή προ του αορτικού διχασμού.

3.2 Εξισώσεις

Οι εξισώσεις που επιλύονται για την περίπτωση του υγιούς ενήλικα, καθώς και για την περίπτωση αποκατάστασης με ενδομόσχευμα είναι:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(A\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (3-1)$$

$$C_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{\bar{u}}{A} = 0 \quad (3-2)$$

$$p = p_{\text{ext}} + 2\rho(C^2 - C_0^2) \quad (3-3)$$

Για τις τέσσερις περιπτώσεις ανευρυσμάτων, η εξίσωση διατήρησης ορμής είναι:

$$\left(C_u + \left(\frac{A}{A_{\text{max}}} - 1\right) \frac{L_a}{4L}\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{\bar{u}}{A} + \frac{1}{2L} K_t \left(\frac{A}{A_{\text{max}}} - 1\right)^2 \bar{u}|\bar{u}| = 0 \quad (3-4)$$

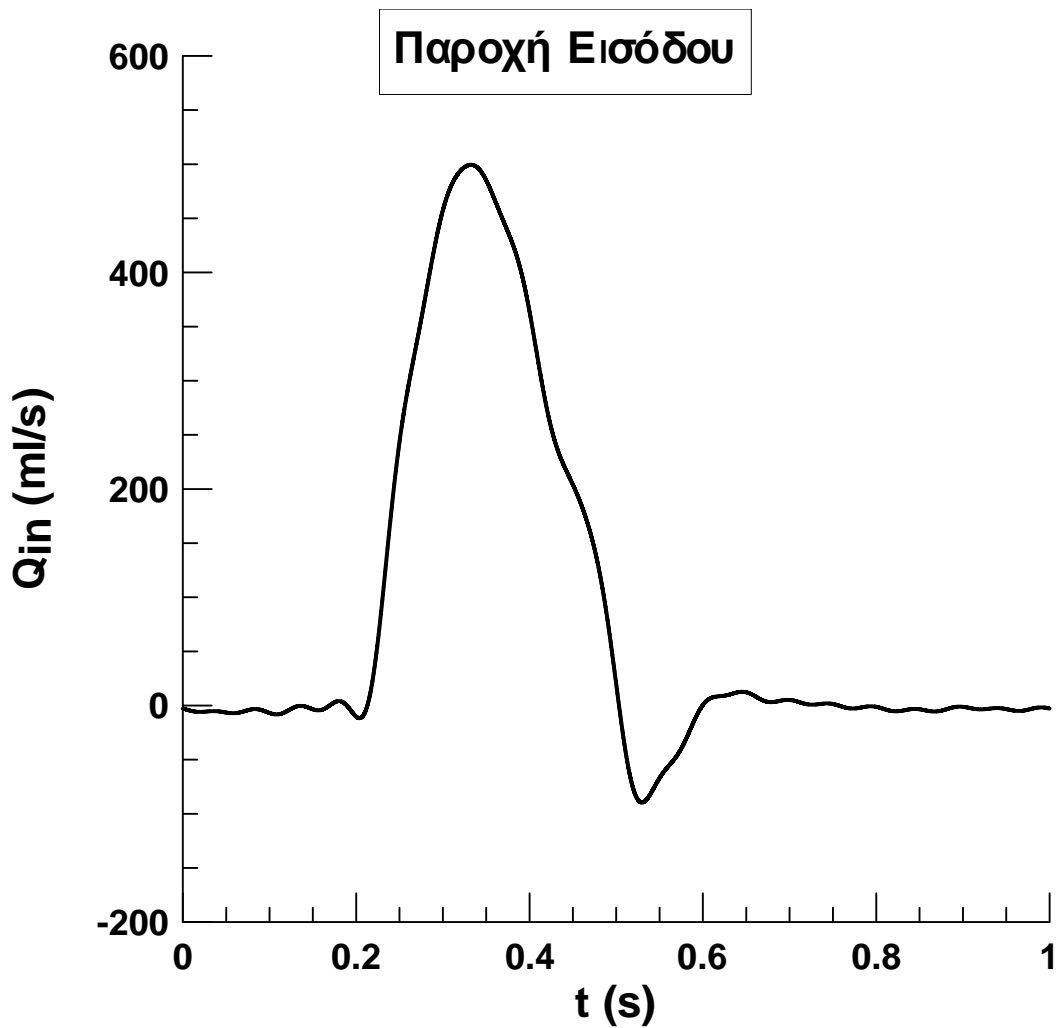
3.3 Αρχικές και οριακές συνθήκες

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$P(x,0)=97 \text{ mmHg}, u(x,0)=0, A(x,0)=A_0 \text{ και } C(x,0)=C_0.$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

Στο εγγύς άκρο, κατά τα λεγόμενα της παραγράφου 2.6.1.1 επιβάλλεται ο ακόλουθος παλμός παροχής, με περίοδο $T=1 \text{ sec}$.



Σχήμα 3.1 Παροχή συναρτήσει του χρόνου στην είσοδο του αρτηριακού δέντρου

Στις διακλαδώσεις θεωρούμε διατήρηση ολικής πίεσης και παροχής, σύμφωνα με την παράγραφο 2.8.

Στο άπω άκρο, γίνεται χρήση της σύνθετης αντίστασης, όπως αναλύεται στην παράγραφο 2.6.2.1.

Η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho=1,050 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ και η δυναμική συνεκτικότητα $\mu=0,0045 \text{ Ns/m}^2$.

3.4 Γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά

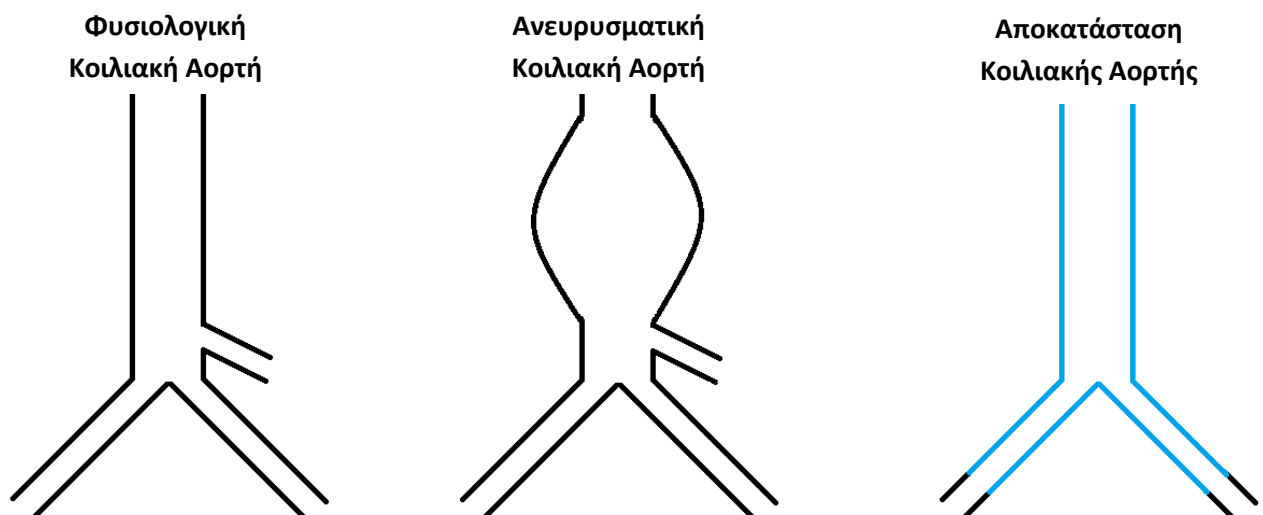
Σε ότι αφορά τα ελαστικά χαρακτηριστικά δίνεται για κάθε αγγείο ο λόγος:

$$\beta'_i = \frac{\sqrt{\pi} h_{0_i} E_i}{(1-\nu_i^2)} \text{ και στη συνέχεια από τη σχέση } \beta(x)_i = \frac{\sqrt{\pi} h_{0_i} E_i}{(1-\nu_i^2) A(x)_{0_i}} \text{ υπολογίζεται το } \beta(x)_i.$$

Πίνακας 3.1 : Γεωμετρικά και Ελαστικά Χαρακτηριστικά Αγγείων Υγιούς Ενήλικα					
A/A	Όνομα	Μήκος L(cm)	Ακτίνα Εγγύς άκρου Rin(cm)	Ακτίνα Άπω άκρου Rout(cm)	$\beta \cdot 10^4$ (kg/s)
1	Ascending Aorta	4.0	1.470	1.440	0.131
2	Aortic Arch A	2.0	1.120	1.120	0.106
3	Innominate	3.4	0.620	0.620	0.067
4	R. Subclavian A	3.4	0.423	0.423	0.051
5	R. Carotid	17.7	0.370	0.370	0.047
6	R. Vertebral	14.8	0.188	0.183	0.063
7	R. Subclavian B	42.2	0.403	0.236	0.05
8	R. Radial	23.5	0.174	0.142	0.056
9	R. Ulnar A	6.7	0.215	0.215	0.067
10	R. Interosseous	7.9	0.091	0.091	0.074
11	R. Ulnar B	17.1	0.203	0.183	0.062
12	R. Internal Carotid	17.7	0.177	0.083	0.055
13	R. External Carotid	17.7	0.177	0.083	0.055
14	Aortic Arch B	3.9	1.070	1.070	0.102
15	L. Carotid	20.8	0.370	0.370	0.047
16	L. Internal Carotid	17.7	0.177	0.083	0.055
17	L. External Carotid	17.7	0.177	0.083	0.055
18	Thoracic Aorta A	5.2	0.999	0.999	0.097
19	L. Subclavian A	3.4	0.423	0.423	0.051
20	Vertebral	14.8	0.188	0.183	0.063
21	L. Subclavian B	42.2	0.403	0.236	0.05
22	L. Radial	23.5	0.174	0.142	0.056
23	L. Ulnar A	6.7	0.215	0.215	0.067
24	L. Interosseous	7.9	0.091	0.091	0.074
25	L. Ulnar B	17.1	0.203	0.183	0.062
26	Intercostals	8.0	0.200	0.150	0.016
27	Thoracic Aorta B	10.4	0.675	0.645	0.07
28	Abdominal Aorta A	5.3	0.610	0.610	0.066
29	Celiac A	1.0	0.390	0.390	0.049
30	Celiac B	1.0	0.200	0.200	0.029
31	Hepatic	6.6	0.220	0.220	0.034
32	Gastric	7.1	0.180	0.180	0.031
33	Splenic	6.3	0.275	0.275	0.039
34	Superior Mesenteric	5.9	0.435	0.435	0.052
35	Abdominal Aorta B	1.0	0.600	0.600	0.06
36	L. Renal	3.2	0.260	0.260	0.038
37	Abdominal Aorta C	1.0	0.590	0.590	0.06
38	R. Renal	3.2	0.260	0.260	0.038

39	Abdominal Aorta D	10.6	0.580	0.548	0.062
40	Inferior Mesenteric	5.0	0.160	0.160	0.029
41	Abdominal Aorta E	1.0	0.520	0.520	0.045
42	R. Common Iliac	5.8	0.368	0.350	0.065
43	L. Common Iliac	5.8	0.368	0.350	0.065
44	L. External Iliac	14.4	0.320	0.270	0.027
45	L. Internal Iliac	5.0	0.200	0.200	0.014
46	L. Femoral	44.3	0.259	0.190	0.042
47	L. Deep Femoral	12.6	0.255	0.186	0.138
48	L. Posterior Tibial	32.1	0.247	0.141	0.132
49	L. Anterior Tibial	34.3	0.130	0.130	0.1
50	R. External Iliac	14.4	0.320	0.270	0.027
51	R. Internal Iliac	5.0	0.200	0.200	0.014
52	R. Femoral	44.3	0.259	0.190	0.042
53	R. Deep Femoral	12.6	0.255	0.186	0.138
54	R. Posterior Tibial	32.1	0.247	0.141	0.132
55	R. Anterior Tibial	34.3	0.130	0.130	0.1

Στις περιπτώσεις των ανευρυσμάτων κοιλιακής αορτής, αλλά και της τοποθέτησης ενδομοσχεύματος για αποκατάσταση, τόσο τα γεωμετρικά όσο και τα ελαστικά χαρακτηριστικά διαφοροποιούνται.



Σχήμα 3.2 Σχηματική παράσταση κοιλιακής αορτής

Πίνακας 3.2 : Ελαστικά Χαρακτηριστικά φυσιολογικών, ανευρυσματικών και μετά από αποκατάσταση αγγείων			
$\beta \cdot 10^4$ (kg/s)	Υγιής Ενήλικας	Ανεύρυσμα	Ενδομόσχευμα
β_{39}	0.062	0.154	0.057
β_{40}	0.029	0.029	-
β_{41}	0.045	0.045	0.057
β_{42}	0.065	0.065	0.057
β_{43}	0.065	0.065	0.057

Μελετήθηκαν τέσσερις περιπτώσεις ανευρυσμάτων κοιλιακής αορτής, οι οποίες διαφέρουν ως προς τη μέγιστη ακτίνα. Η μοντελοποίηση της διατομής του ανευρύσματος έγινε με την ακόλουθη σχέση:

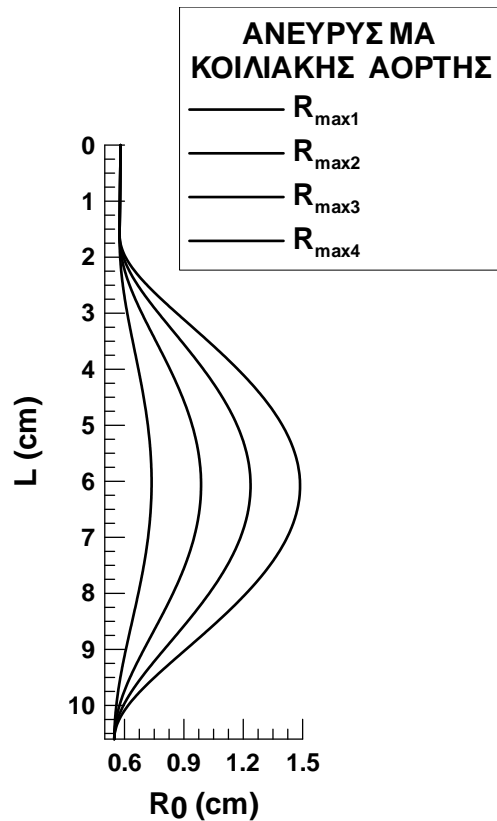
$$A_{an} = A_{0in} + (A_{max} - A_{0in})\sin^2(\pi x/L) \quad (3-5)$$

Αδιαστατοποιώντας προκύπτει:

$$A_{an}^* = A_{0in}^* + (A_{max}^* - A_{0in}^*)\sin^2\left(\frac{\pi x^*}{L^*}\right) \quad (3-6)$$

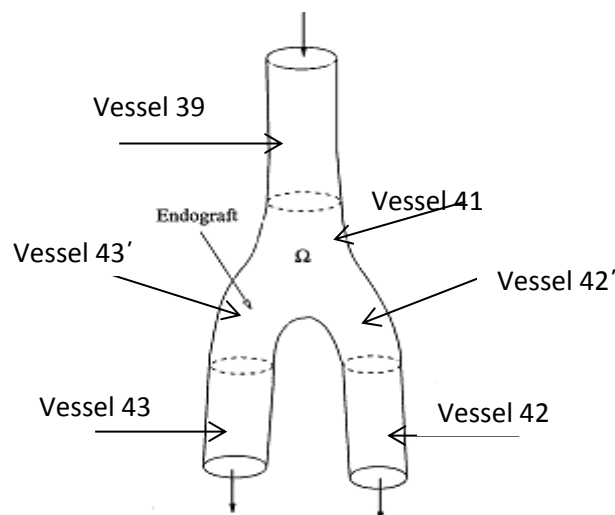
Πίνακας 3.3 : Μέγιστη Ακτίνα Ανευρύσματος				
Μέγιστη Ακτίνα Ανευρύσματος	1	2	3	4
R_{max} (cm)	0.75	1.0	1.25	1.5
D_{max} (cm)	1.5	2.0	2.5	3.0

Το όριο διαμέτρου για το χαρακτηρισμό ενός διατεταμένου τμήματος της αορτής ως ανευρύσματος ποικίλλει. Για την υπό μελέτη κοιλιακή αορτή, μέγιστης διαμέτρου 1.16cm, το όριο θραύσης είναι 3cm, ενώ το όριο, άνω του οποίου αποκαθίσταται είναι 2.5cm.



Σχήμα 3.3 Σχηματική παράσταση ανευρυσματικής κοιλιακής αορτής

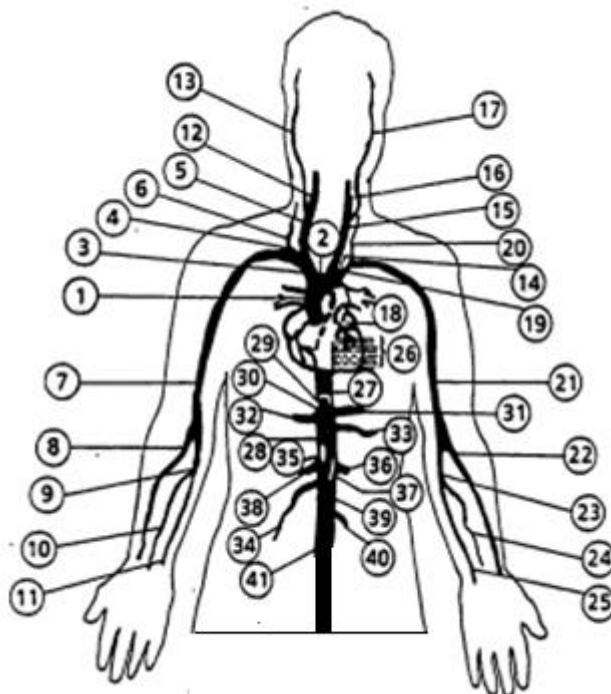
Στην περίπτωση τοποθέτησης ενδομοσχεύματος στην κοιλιακή αορτή θεωρούμε 6 διαφορετικά αγγεία, αντί για τέσσερα, όπως δείχνει και το ακόλουθο σχήμα. Η ταχύτητα, η πίεση και η διατομή της εξόδου του stent και της εισόδου του φυσιολογικού αγγείου υπολογίζονται ως οριακές συνθήκες, κατά τα λεγόμενα της παραγράφου 2.7..



Σχήμα 3.4 Σχηματική παράσταση ενδομοσχεύματος

Τα αγγεία 42 και 43 έχουν τα χαρακτηριστικά των φυσιολογικών αγγείων του οργανισμού, ενώ τα αγγεία 39, 41, 42' και 43' αποτελούν το ενδοαγγειακό μόσχευμα. Στο ανωτέρω σχήμα χρησιμοποιήθηκε η αρίθμηση του αρτηριακού δέντρου.

Στην περίπτωση ασθενών με φραγή προ του αορτικού διχασμού, αυτό που διαφοροποιείται σε σχέση με τα προηγούμενα είναι η αφαίρεση από το αρτηριακό δέντρο όλων των αγγείων από τις λαγόνιες αρτηρίες και μετά. Το δέντρο δηλαδή έχει την ακόλουθη μορφή:



Σχήμα 3.5 Αρτηριακό δέντρο ασθενών με φραγή προ του αορτικού διχασμού

Στο άνω άκρο της κοιλιακής αορτής πριν το διχασμό (αγγείο 41), γίνεται χρήση του συντελεστή τερματικής αντίστασης, σύμφωνα με τα λεχθέντα στην παράγραφο 2.6.2.3. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε $R_t = 1$, που αντιστοιχεί σε πλήρη ανάκλαση.

3.5 Υπολογιστικά δεδομένα

Σε ότι αφορά τα υπολογιστικά δεδομένα, οι χρονικοί κόμβοι είναι 60000, οπότε $\Delta t = \frac{1}{60000}$, η ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας είναι $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 16.667 \text{ m/s}$, ενώ οι χωρικοί κόμβοι και η αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_{0i} κάθε αγγείου για υγιή ενήλικα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 3.4 : Υπολογιστικά Δεδομένα			
A/A Αγγείου	L (cm)	Αριθμός Χωρικών Κόμβων	c_{0i} (m/s)
1	4	145	4.946
2	2	73	4.859
3	3.4	123	5.376
4	3.4	123	5.696
5	17.7	638	5.821

6	14.8	533	9.581
7	42.2	1520	7.537
8	23.5	847	10.276
9	6.7	242	9.134
10	7.9	285	14.745
11	17.1	616	9.552
12	17.6	638	13.365
13	17.7	638	13.365
14	3.9	141	5.058
15	20.8	749	5.821
16	17.6	638	13.365
17	17.7	638	13.365
18	5.2	188	5.094
19	3.4	123	5.696
20	14.8	533	9.581
21	42.2	1520	7.537
22	23.5	847	10.276
23	6.7	242	9.134
24	7.9	285	14.745
25	17.1	616	9.552
26	8	289	5.414
27	10.4	375	5.394
28	5.3	191	5.373
29	2	37	5.779
30	1	37	6.203
31	6.6	238	6.442
32	7.1	256	6.747
33	6.3	227	6.169
34	5.9	213	5.662
35	1	37	5.183
36	3.2	116	6.221
37	1	37	5.23
38	3.2	116	6.221
39	10.6	383	5.532
40	5	181	6.949
41	1	37	4.801
42	5.9	210	7.077
43	5.8	210	7.077
44	14.4	519	5.142
45	5	181	4.251
46	44.3	1595	7.737

47	12.6	454	14.118
48	32.1	1156	15.845
49	34.3	1235	14.35
50	14.5	519	5.142
51	5.1	181	4.251
52	44.4	1595	7.737
53	12.7	454	14.118
54	32.2	1156	15.845
55	34.4	1235	14.35

Παρατηρούμε πως το κριτήριο ευστάθειας $C_o \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ ικανοποιείται για κάθε αγγείο. Το ίδιο συμβαίνει και στις περιπτώσεις του ανευρύσματος και του ενδομοσχεύματος. Όταν η διαφορά στις τιμές της ταχύτητας του ρευστού και της διατομής για κάθε χωρικό κόμβο μεταξύ του τρέχοντος και του προηγούμενου κύκλου είναι μικρότερη από την τιμή 10^{-7} , η επαναληπτική διαδικασία ολοκληρώνεται. Χρειάστηκαν 15 επαναλήψεις για την περίπτωση του υγιούς ενήλικα, 16 για την περίπτωση του ανευρύσματος με τη μεγαλύτερη μέγιστη ακτίνα, που είναι και η δυσχερέστερη υπολογιστικά, 15 για την περίπτωση αποκατάστασης με ενδομόσχευμα και τέλος 14 για την περίπτωση ασθενών με φραγή προ του αορτικού διχασμού.

3.6 Αποτελέσματα

Στην περίπτωση του υγιούς ενήλικα έγινε υπολογισμός της μέσης παροχής στην είσοδο κάθε αγγείου προκειμένου να δούμε πως κατανέμεται κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου η παροχή που επιβάλλουμε στην είσοδο.

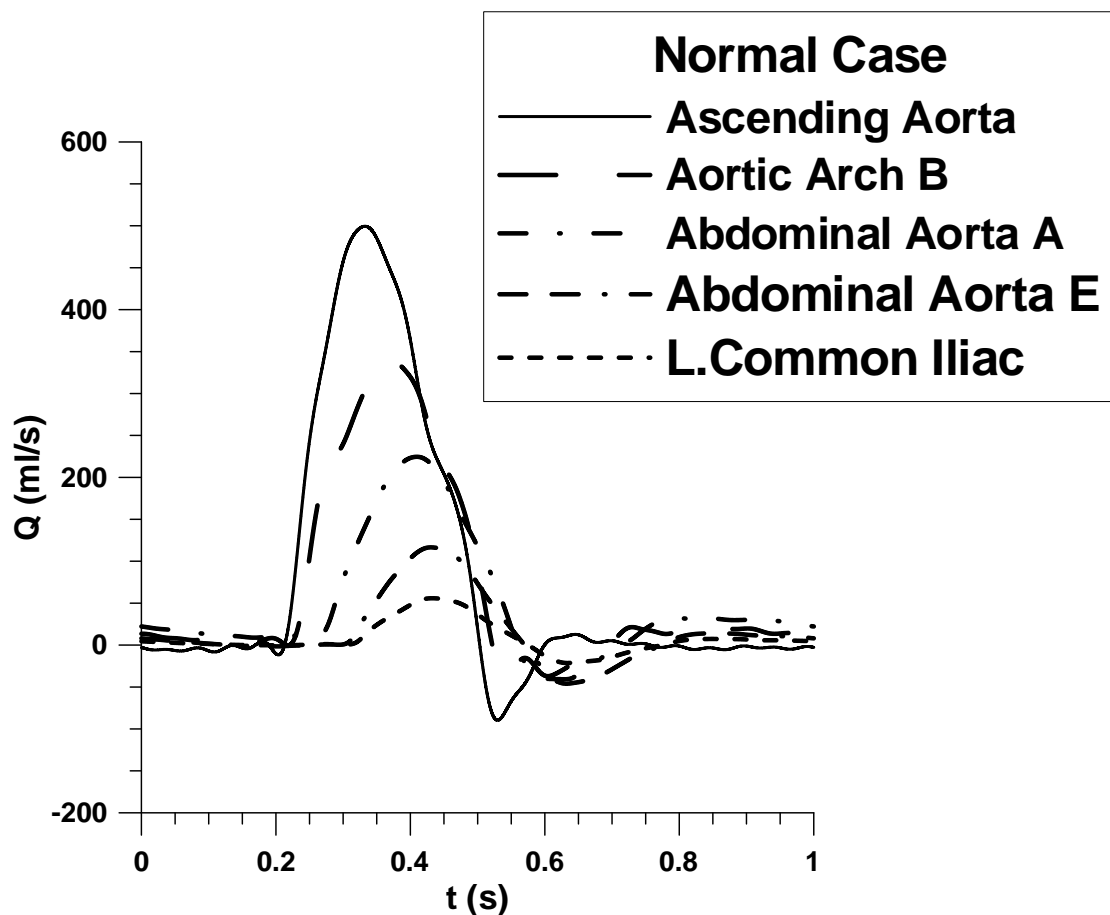
Πίνακας 3.5 : Μέση Παροχή κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου				
A/A Αγγείου	Όνομα	Q_{av} (ml/s)	$\frac{Q_i}{Q_1} 100(\%)$	$(\frac{Q_i}{Q_1} 100(\%))_{\text{physiol}}$
1	Ascending Aorta	82.393	100.00	100
2	Aortic Arch A	72.626	88.15	88
3	Innominate	10.677	12.96	12
4	R. Subclavian A	6.139	7.45	5
5	R. Carotid	4.538	5.51	7
6	R. Vertebral	1.878	2.28	2
7	R. Subclavian B	4.261	5.17	-
8	R. Radial	2.007	2.44	-
9	R. Ulnar A	2.248	2.73	-
10	R. Interosseous	0.137	0.17	-

11	R. Ulnar B	2.111	2.56	-
12	R. Internal Carotid	2.269	2.75	-
13	R. External Carotid	2.269	2.75	-
14	Aortic Arch B	67.091	81.43	81
15	L. Carotid	4.535	5.50	7
16	L. Internal Carotid	2.267	2.75	-
17	L. External Carotid	2.267	2.75	-
18	Thoracic Aorta A	60.954	73.98	76
19	L. Subclavian A	6.137	7.45	5
20	Vertebral	1.877	2.28	-
21	L. Subclavian B	4.26	5.17	-
22	L. Radial	2.006	2.43	-
23	L. Ulnar A	2.247	2.73	-
24	L. Interosseous	0.137	0.17	-
25	L. Ulnar B	2.111	2.56	-
26	Intercostals	1.858	2.26	1
27	Thoracic Aorta B	59.097	71.73	75
28	Abdominal Aorta A	47.061	57.12	58
29	Celiac A	12.007	14.57	17
30	Celiac B	8.028	9.74	-
31	Hepatic	3.979	4.83	-
32	Gastric	2.34	2.84	-
33	Splenic	5.688	6.90	-
34	Superior Mesenteric	13.057	15.85	14
35	Abdominal Aorta B	34.005	41.27	44
36	L. Renal	8.589	10.42	10
37	Abdominal Aorta C	25.416	30.85	34
38	R. Renal	8.587	10.42	10
39	Abdominal Aorta D	16.813	20.41	24
40	Inferior Mesenteric	1.108	1.34	5
41	Abdominal Aorta E	15.689	19.04	19
42	R. Common Iliac	7.829	9.50	9.5
43	L. Common Iliac	7.829	9.50	9.5
44	L. External Iliac	6.21	7.54	-
45	L. Internal Iliac	1.603	1.95	-
46	L. Femoral	3.745	4.55	-
47	L. Deep Femoral	2.457	2.98	-
48	L. Posterior Tibial	2.145	2.60	-
49	L. Anterior Tibial	1.6	1.94	-
50	R. External Iliac	6.21	7.54	-
51	R. Internal Iliac	1.603	1.95	-

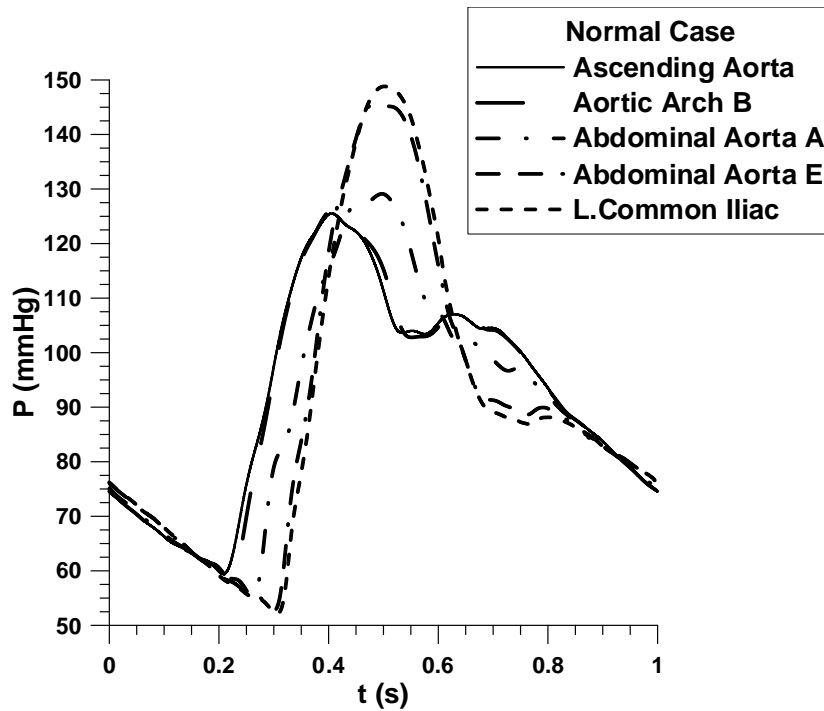
52	R. Femoral	3.745	4.55	-
53	R. Deep Femoral	2.457	2.98	-
54	R. Posterior Tibial	2.145	2.60	-
55	R. Anterior Tibial	1.6	1.94	-

Τα ανωτέρω αποτελέσματα συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με τα αντίστοιχα της βιβλιογραφίας. Οι διαφορές οφείλονται αφενός στα γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά των αγγείων και αφετέρου στις τιμές της τερματικής αντίστασης και της χωρητικότητας, στη μέθοδο δηλαδή μοντελοποίησης της οριακής συνθήκης του άπω άκρου των τερματικών αγγείων.

Ακολουθούν διαγράμματα παροχής και πίεσης συναρτήσει του χρόνου σε διάφορα σημεία κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου για την περίπτωση του υγιούς ενήλικα.



Σχήμα 3.6 Παροχή συναρτήσει του χρόνου στο εγγύς άκρο της ανιούσας αορτής, του θωρακικού τόξου B, της κοιλιακής αορτής A, της κοιλιακής αορτής E και της αριστερής λαγόνιας αρτηρίας για την περίπτωση του υγιούς ενήλικα



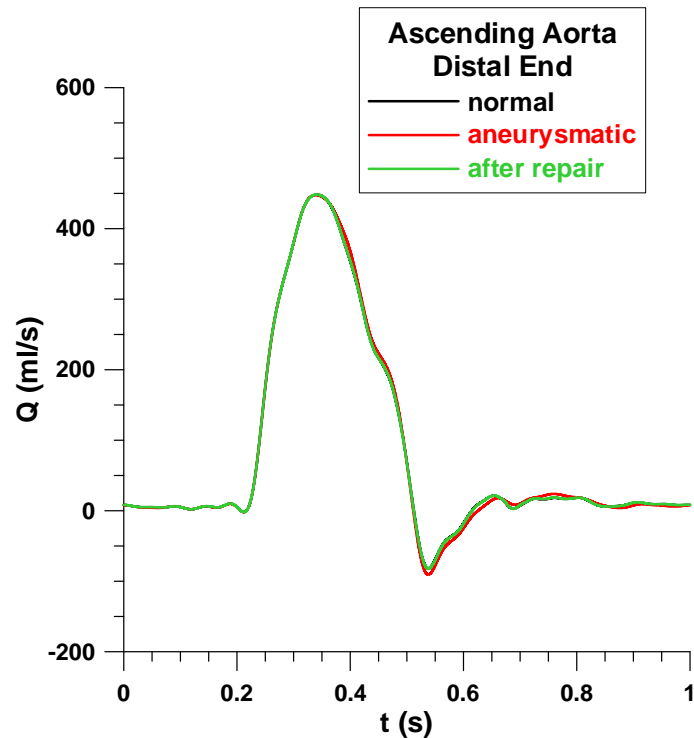
Σχήμα 3.7 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο εγγύς άκρο της ανιούσας αορτής, του θωρακικού τόξου Β, της κοιλιακής αορτής Α, της κοιλιακής αορτής Ε και της αριστερής λαγόνιας αρτηρίας για την περίπτωση του υγιούς ενήλικα

Σε ότι αφορά την παροχή, καθώς το κύμα της διαδίδεται στο αρτηριακό δέντρο το πλάτος της μειώνεται, γεγονός αναμενόμενο εξαιτίας των διακλαδώσεων στις οποίες διαμοιράζεται και των ανακλάσεων στις διακλαδώσεις και την περιφέρεια, ενώ παρατηρείται και χρονική καθυστέρηση από αγγείο σε αγγείο των μεγίστων και ελαχίστων λόγω της όδευσης του κύματος. Στα μεγάλα αγγεία σε αντίθεση με τα τερματικά, η μορφή του κύματος δεν αλλάζει πολύ σε σχέση με την παροχή εισόδου του δέντρου. Σε ότι αφορά την πίεση, βλέπουμε πως η μέση τιμή δε διαφέρει πολύ από αγγείο σε αγγείο, παρατηρώντας μια ασθενή μείωση κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου. Η μέγιστη τιμή αυξάνεται. Η διαστολική πίεση, εμφανίζεται με χρονική καθυστέρηση και εξασθενημένη καθώς το κύμα διαδίδεται. Ο παλμός κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου εξομαλύνεται. Η διαφορά στις κυματομορφές της πίεσης και της παροχής, καθώς και η μεταξύ τους διαφορά φάσης οφείλεται στον διαφορετικό τρόπο με τον οποίο ανακλώνται τα δύο κύματα πίεσης και παροχής.

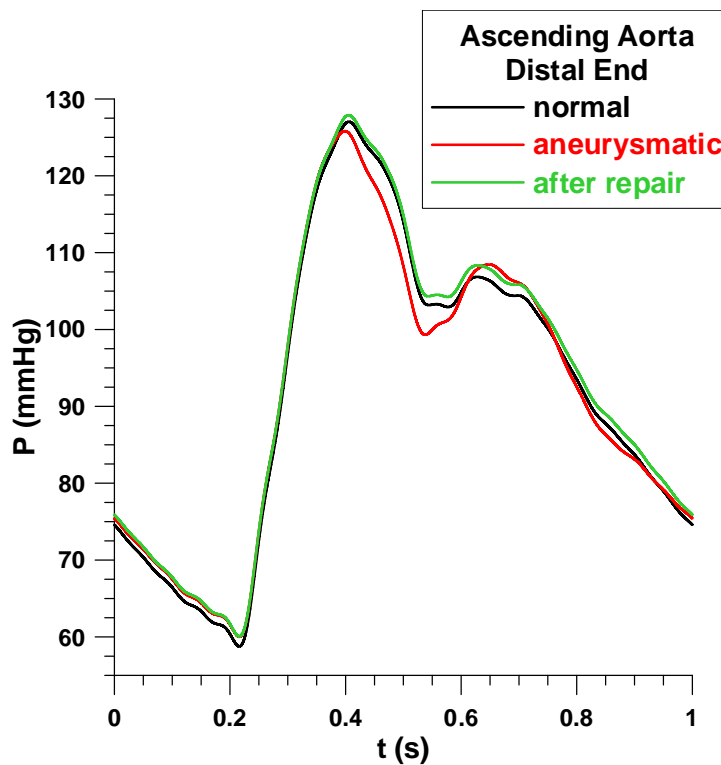
Πίνακας 3.6 : Μέση και Μέγιστη Παροχή και Πίεση κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου

Αγγείο	Ανιούσα Αορτή	Αορτικό Τόξο Β	Κοιλιακή Αορτή Α	Κοιλιακή Αορτή Ε	Αριστερή Λαγόνια
$Q_{av} \left(\frac{ml}{s}\right)$	82.39	67.09	47.06	15.69	7.83
$Q_{max} \left(\frac{ml}{s}\right)$	499.45	341.35	224.52	116.50	55.83
$P_{av} \text{ (mmHg)}$	92.23	91.98	90.65	90.43	90.06
$P_{max} \text{ (mmHg)}$	125.52	126.14	129.12	145.63	148.82

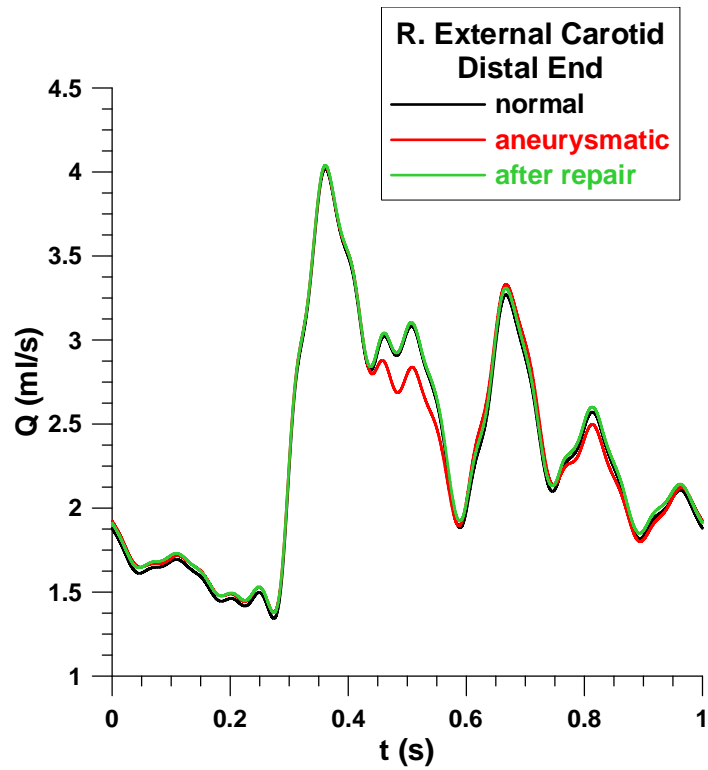
Ακολουθούν διαγράμματα παροχής και πίεσης συναρτήσει του χρόνου σε επιλεγμένα σημεία κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου για τις περιπτώσεις υγιή ενήλικα, ανευρύσματος κοιλιακής αορτής στο όριο αποκατάστασης ($R_{max} = R_{max3}$) και ενδομοσχεύματος.



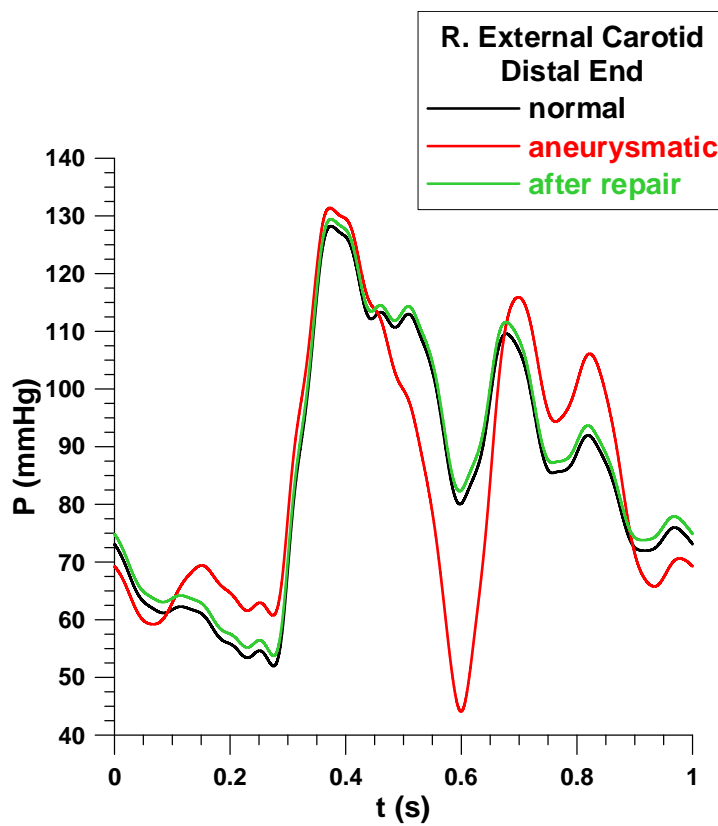
Σχήμα 3.8 Παροχή συναρτήσει του χρόνου στο άπω άκρο της ανιούσας αορτής



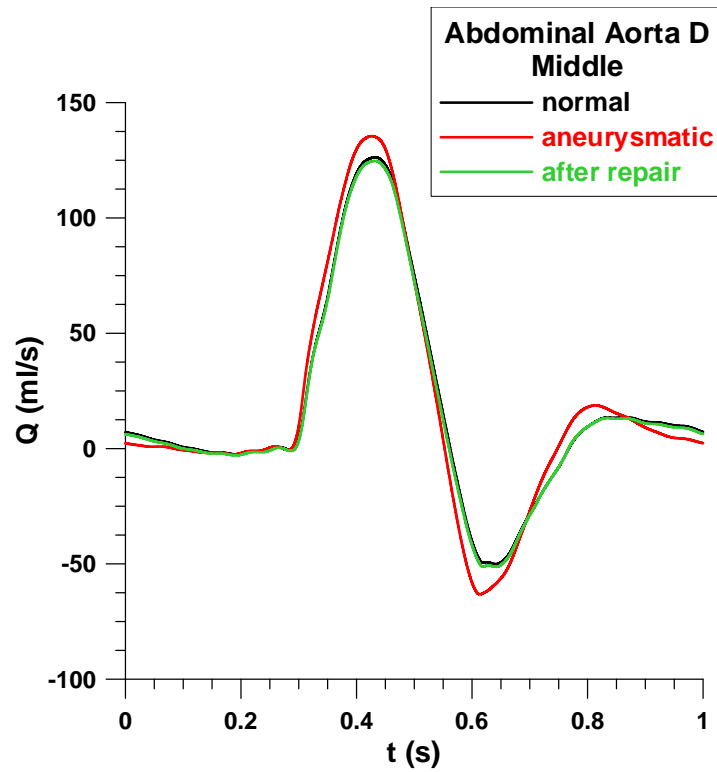
Σχήμα 3.9 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο άπω άκρο της ανιούσας αορτής



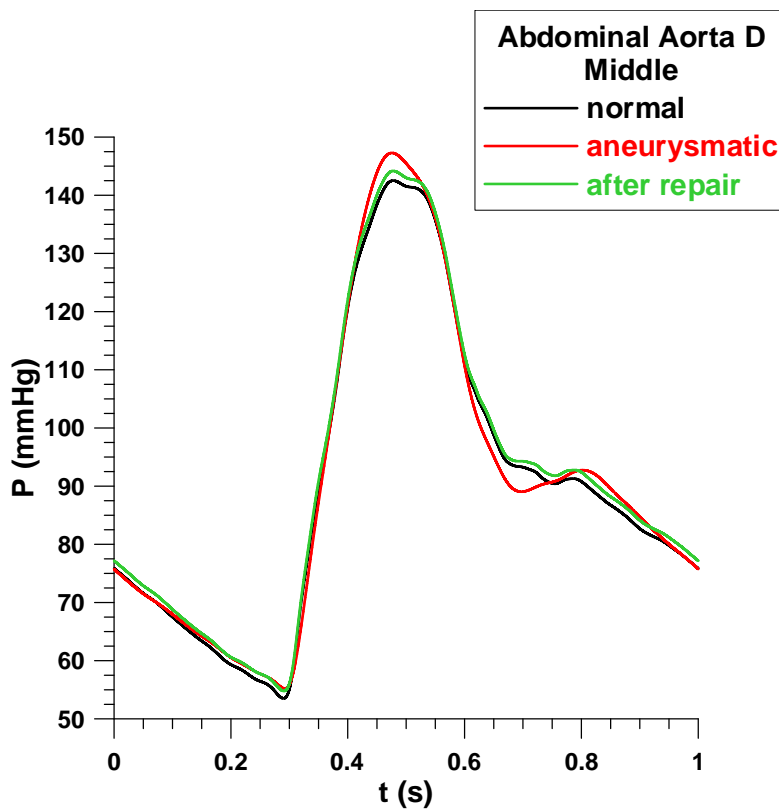
Σχήμα 3.10 Παροχή συναρτήσει του χρόνου στο άπω άκρο της δεξιάς εξωτερικής καρωτίδας



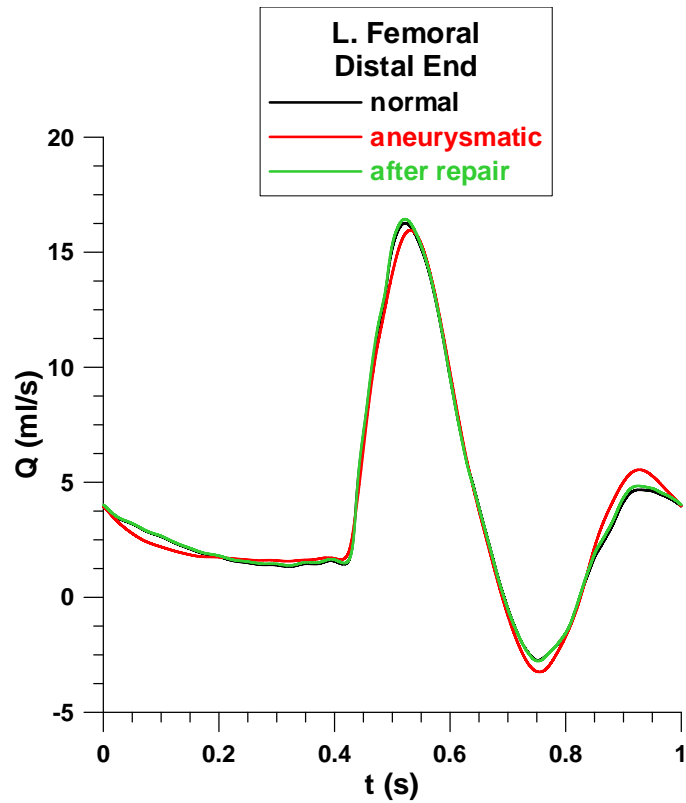
Σχήμα 3.11 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο άπω άκρο της δεξιάς εξωτερικής καρωτίδας



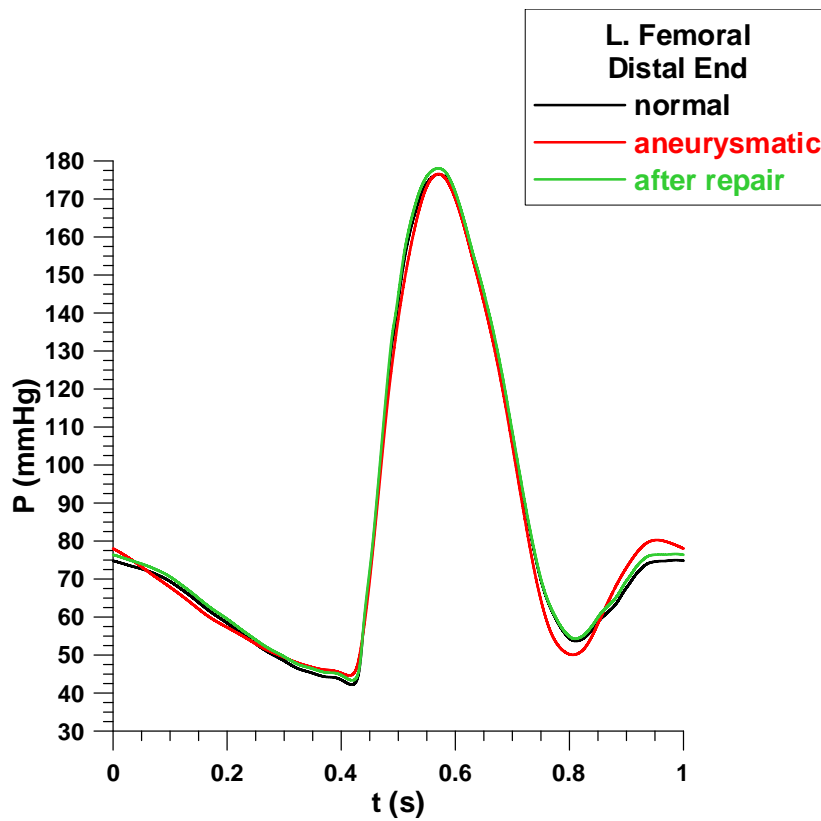
Σχήμα 3.12 Παροχή συναρτήσεϊ του χρόνου στο μέσο του ανευρύσματος κοιλιακής αρτηής



Σχήμα 3.13 Πίεση συναρτήσεϊ του χρόνου στο μέσο του ανευρύσματος κοιλιακής αρτηής



Σχήμα 3.14 Παροχή συναρτήσει του χρόνου στο άπω άκρο της αριστερής μηριαίας αρτηρίας



Σχήμα 3.15 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο άπω άκρο της αριστερής μηριαίας αρτηρίας

Σε ότι αφορά την παροχή, μετά την τοποθέτηση του ενδομοσχεύματος αποκαθίσταται πλήρως. Συγκρίνοντας με την περίπτωση ασθενούς με ανεύρυσμα, οι διαφορές είναι μικρές σε σχέση με την περίπτωση του υγιούς ενήλικα (control) και εντοπίζονται στα ελάχιστα και τα μέγιστα σε κάθε αγγείο, τόσο στο μέτρο όσο και στη χρονική στιγμή που παρουσιάζονται. Οι μεγαλύτερες διαφορές, αλλά όχι σημαντικές, παρατηρούνται στο μέσο του ανευρύσματος Σχήμα 3.12.

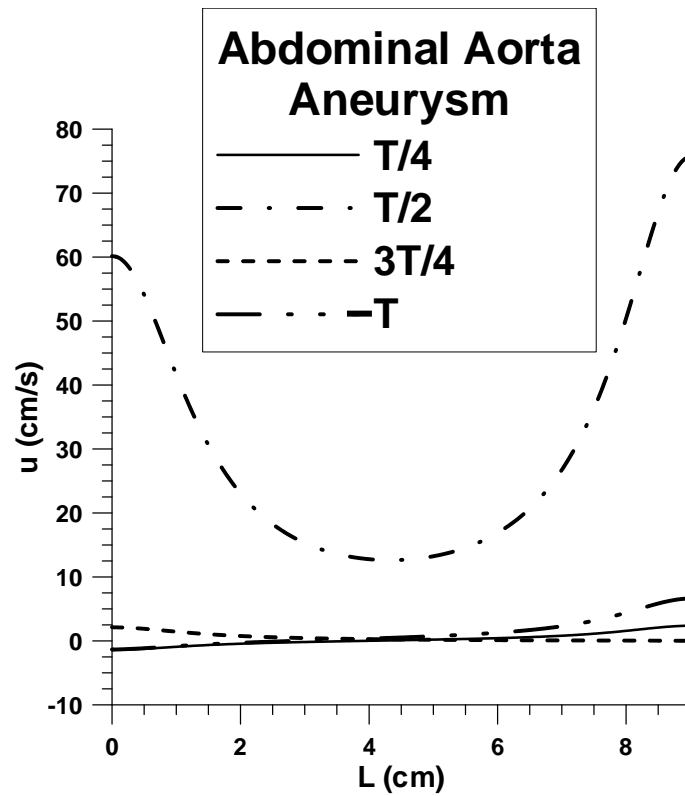
Έχει αποδειχθεί ότι η συστολική πίεση της ανιούσης αορτής αποτελεί καλύτερο δείκτη πρόβλεψης εξέλιξης της νόσου σε σχέση με την περιφερειακή πίεση. Συνεπώς, η παρατήρηση της κυματομορφής της πίεσης στην ανιούσα αορτή (Σχήμα 3.9), καθίσταται πολύ σημαντική. Έτσι, παρατηρήθηκε στα αποτελέσματα ότι η ύπαρξη του ανευρύσματος στην κοιλιακή αορτή συντελεί σε απώλεια πίεσης στην ανιούσα, οπότε επιβαρύνεται η λειτουργία της καρδιάς προκειμένου να διατηρήσει σταθερή παροχή. Όσο μεγαλώνει η μέγιστη ακτίνα του ανευρύσματος, περισσότερη δυναμική ενέργεια χάνεται από το πίσω οδύον ανακλώμενο κύμα από τα περιφερειακά αγγεία, οπότε και η πτώση πίεσης είναι μεγαλύτερη στην ανιούσα μέχρι να κλείσει η αορτική βαλβίδα στο τέλος της πρωτοδιαστολής. Εκτός της έντασης των ανακλάσεων, σημαντικό ρόλο παίζει και η χρονική στιγμή κατά την οποία φτάνουν στο εκάστοτε σημείο. Τοποθετώντας ενδομόσχευμα, η πίεση αποκαθίσταται. Οι διαφορές ωστόσο που παρατηρούνται οφείλονται στα διαφορετικά ελαστικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του τοιχώματος του ενδομοσχεύματος, καθώς και στην πλήρη έκφραξη της κάτω μεσεντερίου αρτηρίας (αγγείο 40) από το ενδομόσχευμα.

Στο ανευρυσματικό τμήμα, εντός δηλαδή της κοιλιακής αορτής, η πίεση αυξάνεται, σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση της ελαστικότητας πίεσης-διατομής, ενώ επανέρχεται στα φυσιολογικά επίπεδα μετά από την τοποθέτηση του ενδομοσχεύματος.

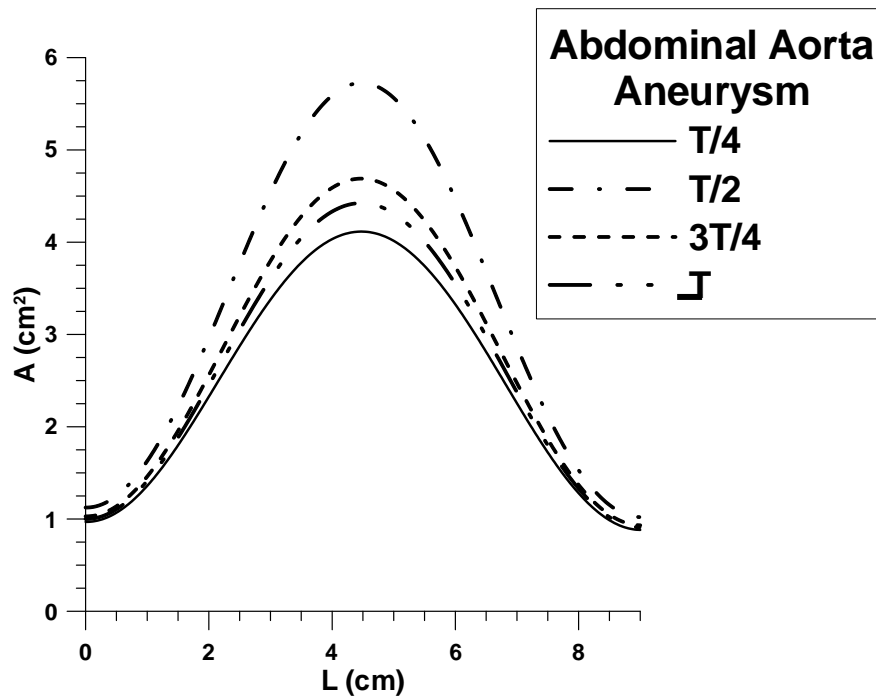
Πίνακας 3.7 : Συστολική και Μέση Πίεση Ανιούσας Αορτής

Συστολική Πίεση (mmHg)	Υγιής Ενήλικας	Ασθενής με ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής	Μετά από αποκατάσταση
$P_{sys_{ascending\ aorta}}$	127.03	125.82	127.9
Μέση Πίεση (mmHg)	Υγιής Ενήλικας	Ασθενής με ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής	Μετά από αποκατάσταση
$P_{av_{ascending\ aorta}}$	92.24	92.05	93.47

Ακολουθούν τα διαγράμματα της ταχύτητας και της διατομής συναρτήσει του μήκους του ανευρύσματος, της κοιλιακής δηλαδή αορτής Δ, στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο τέλος της περιόδου του παλμού για την περίπτωση ασθενούς με ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής.



Σχήμα 3.16 Ταχύτητα συναρτήσει του μήκους του ανευρύσματος στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο τέλος της περιόδου T



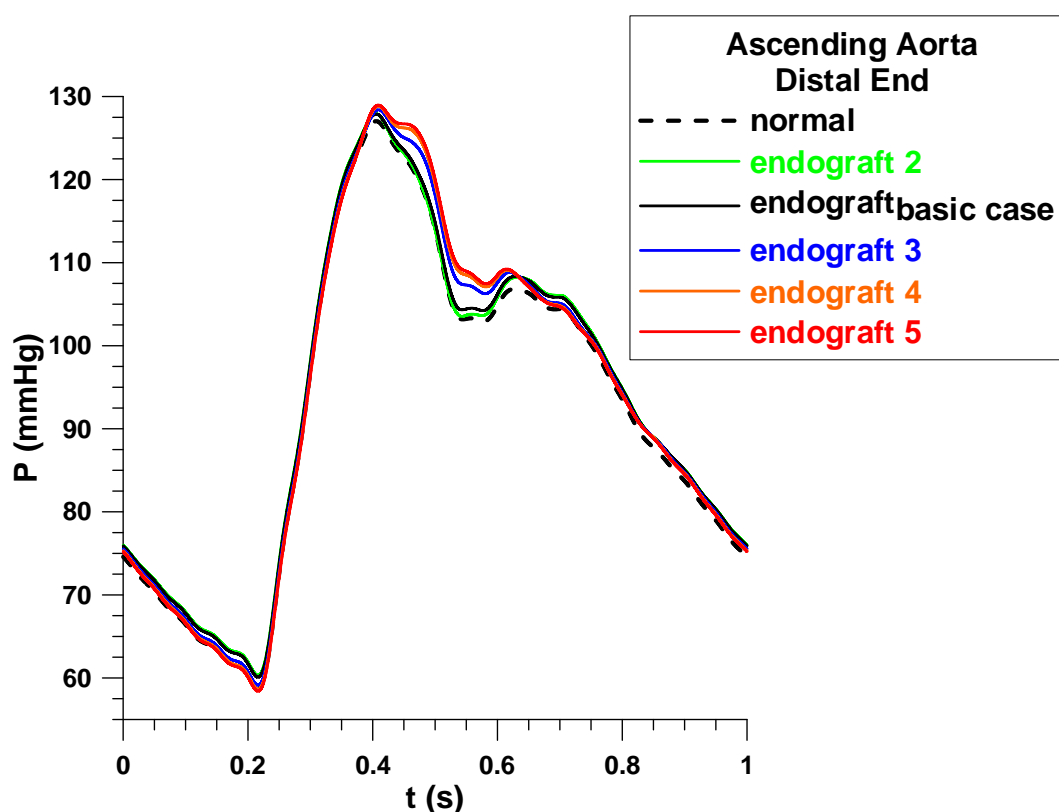
Σχήμα 3.17 Διατομή συναρτήσει του μήκους του ανευρύσματος στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο τέλος της περιόδου T

Προκειμένου να μελετηθεί η επίδραση του μέτρου ελαστικότητας του ενδομοσχεύματος στα ρευστομηχανικά μεγέθη του αρτηριακού δέντρου, έγινε υπολογισμός για επιπλέον τέσσερις διαφορετικές τιμές του συντελεστή $\beta'_i = \frac{\sqrt{\pi} h_{o_i} E_i}{(1-\nu_i^2)}$, όπως φαίνεται και στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 3.8 : Ελαστικά Χαρακτηριστικά αγγείων μετά από αποκατάσταση αγγείων

$\beta' \cdot 10^4$ (kg/s)	Ενδομόσχευμα (βασική περίπτωση)	Ενδομόσχευμα (2 ^η περίπτωση)	Ενδομόσχευμα (3 ^η περίπτωση)	Ενδομόσχευμα (4 ^η περίπτωση)	Ενδομόσχευμα (5 ^η περίπτωση)
β'_{39}	0.057	0.051	0.114	0.217	0.342
β'_{40}	-	-	-	-	-
β'_{41}	0.057	0.051	0.114	0.217	0.342
β'_{42}	0.057	0.051	0.114	0.217	0.342
β'_{43}	0.057	0.051	0.114	0.217	0.342

Ακολουθεί το διάγραμμα της πίεσης συναρτήσει του χρόνου στο άπω άκρο της ανιούσας αορτής για την περίπτωση του υγιούς ενήλικα και τις πέντε διαφορετικές περιπτώσεις ενδομοσχευμάτων.



Σχήμα 3.18 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο άπω άκρο της ανιούσας αορτής για τον υγιή ενήλικα και τις πέντε διαφορετικές περιπτώσεις ενδομοσχεύματος

Όσο αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας του ενδομοσχεύματος, η πίεση στο αρτηριακό δέντρο κυμαίνεται σε υψηλότερα επίπεδα.

Η ταχύτητα διάδοσης κύματος είναι ο λόγος της απόστασης που διανύει το κύμα ως προς το χρόνο που χρειάζεται προκειμένου να διανύσει αυτήν την απόσταση, δηλαδή $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αγγείου και τις ελαστικές του ιδιότητες.

Υπολογίζεται η ταχύτητα διάδοσης κύματος από το εγγύς άκρο της ανιούσας αορτής έως το άπω άκρο της μηριαίας αρτηρίας με δύο ξεχωριστούς τρόπους για τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις, τη φυσιολογική, την ανευρυσματική και μετά από αποκατάσταση με το πρώτο και τρίτο ενδομόσχευμα.

‘Α Τρόπος: Η απόσταση που διανύει το κύμα από την ανιούσα αορτή έως και τη μηριαία αρτηρία είναι 1.089 m. Ο χρόνος που απαιτείται βρίσκεται από τα διαγράμματα της πίεσης συναρτήσει του χρόνου και είναι η διαφορά των χρονικών στιγμών της διαστολικής πίεσης, της ελάχιστης δηλαδή πίεσης, στο εγγύς άκρο της ανιούσας αορτής και στο άπω άκρο της μηριαίας αρτηρίας. Στην περίπτωση που υπολογιζόταν η χρονική διαφορά βάση της συστολικής πίεσης, η ταχύτητα διάδοσης κύματος θα ήταν υπερεκτιμημένη εξαιτίας αφενός των ανακλάσεων και αφετέρου του γεγονότος ότι στις υψηλές πιέσεις οι αρτηρίες είναι σκληρότερες.

‘Β Τρόπος: Από τη σχέση πίεσης-διατομής (σχέση 3-3) υπολογίζεται η ταχύτητα διάδοσης κύματος συναρτήσει του χρόνου στην αρχή, τη μέση και το τέλος για κάθε αγγείο από την ανιούσα αορτή έως και τη μηριαία αρτηρία, της διαδρομής δηλαδή του αίματος. Η ελάχιστη τιμή σε κάθε θέση (συνολικά 39 χωρικά σημεία) αντιστοιχεί στη διαστολική πίεση. Γνωρίζοντας λοιπόν την ταχύτητα διάδοσης κύματος και την απόσταση δύο διαδοχικών σημείων προκύπτει η εκάστοτε χρονική διαφορά ως εξής:

$$\Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{\frac{c_{i+1} - c_i}{2}}$$

Αθροίζοντας λοιπόν τις χρονικές διαφορές και με γνωστή τη συνολική απόσταση που διανύει το ρευστό παίρνουμε τελικά την ταχύτητα διάδοσης κύματος.

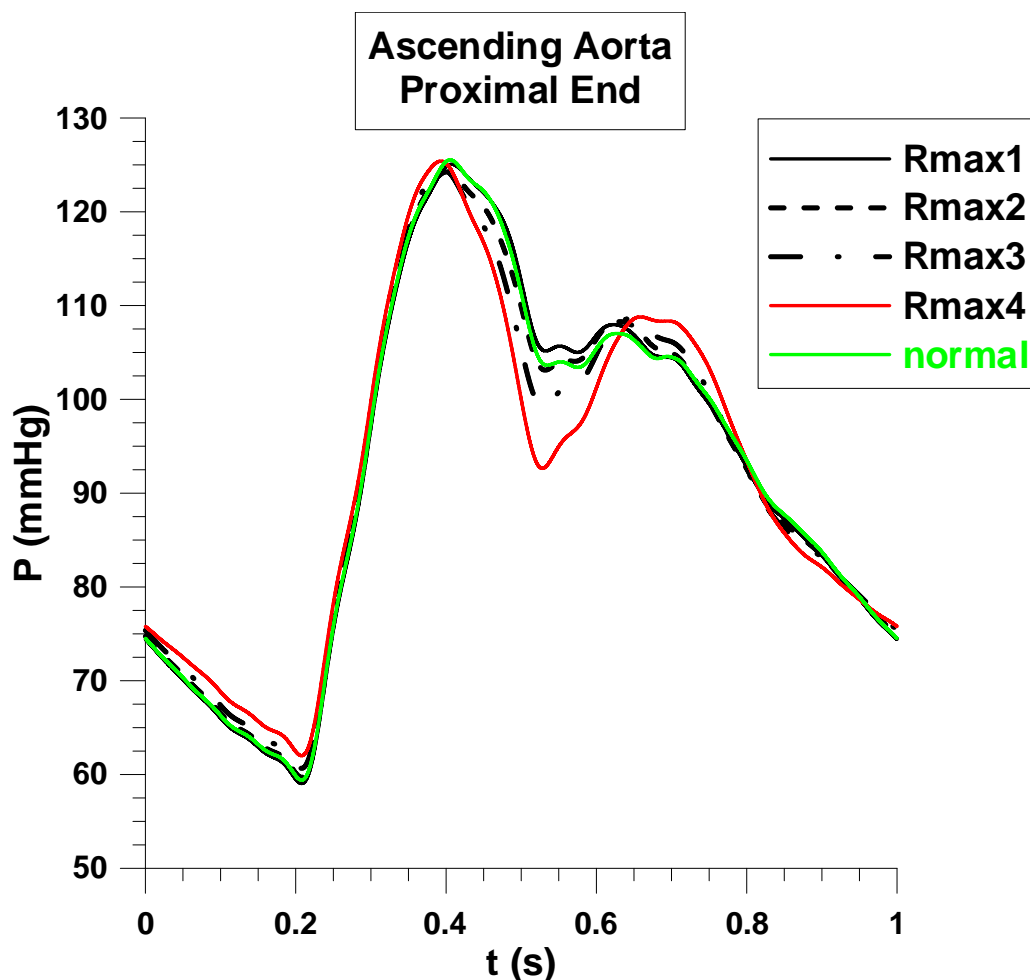
Ακολουθεί πίνακας των αποτελεσμάτων.

Πίνακας 3.9 : Ταχύτητα διάδοσης κύματος c (m/s) από το εγγύς άκρο της ανιούσας αορτής μέχρι το άπω άκρο της μηριαίας αρτηρίας				
	Υγιής Ενήλικας	Ανεύρυσμα Κοιλιακής Αορτής	Ενδομόσχευμα Κοιλιακής Αορτής (βασική περίπτωση)	Ενδομόσχευμα Κοιλιακής Αορτής (πέμπτη περίπτωση)
‘Α Τρόπος	5.164	5.266	5.147	5.63
‘Β Τρόπος	5.906	6.035	5.907	6.45

Η διαφορά στις τιμές είναι μικρή. Ο ‘Β τρόπος είναι πιο ακριβής διότι προσεγγίζει καλύτερα τη μη γραμμική χωρική μεταβολή της C. Η ταχύτητα διάδοσης στην ανευρυσματική περίπτωση είναι μεγαλύτερη σε σχέση με τη φυσιολογική, ενώ παρατηρούμε πως όσο αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας του ενδομοσχεύματος, αυξάνεται. Η ταχύτητα διάδοσης του ενδομοσχεύματος της βασικής περίπτωσης είναι η μικρότερη όλων γεγονός που οφείλεται στο συνδυασμό των ελαστικών και

γεωμετρικών του χαρακτηριστικών, όπου έχει μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας από αυτό του φυσιολογικού, αλλά το πάχος του είναι αρκετά μικρότερο [21].

Ακολουθούν διαγράμματα παροχής και πίεσης συναρτήσει του χρόνου στην είσοδο του αρτηριακού δέντρου, καθώς και στο εγγύς άκρο, στο μέσο και στο άπω άκρο της κοιλιακής αορτής για υγιή ενήλικα και για τις τέσσερις περιπτώσεις ανευρυσμάτων κοιλιακής αορτής.

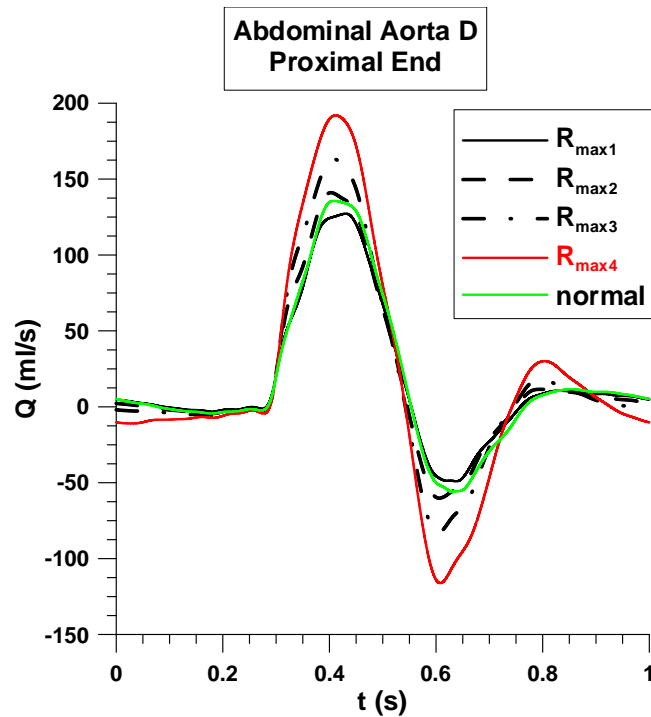


Σχήμα 3.19 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο άπω άκρο της ανιούσας αορτής για υγιή ενήλικα και για τις τέσσερις περιπτώσεις ανευρύσματος

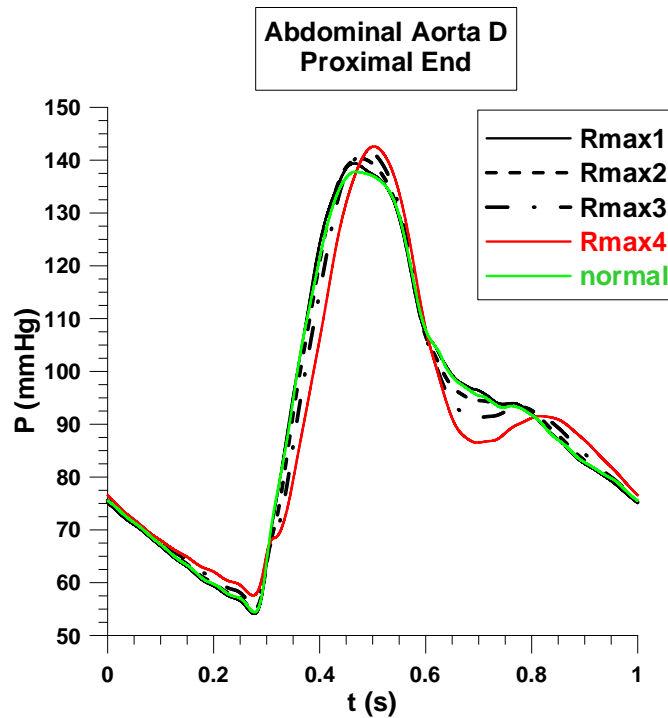
Όσο μεγαλώνει η μέγιστη ακτίνα του ανευρύσματος, περισσότερη δυναμική ενέργεια χάνεται από το πίσω οδεύον ανακλώμενο κύμα από τα περιφερειακά αγγεία, οπότε και η πτώση πίεσης είναι μεγαλύτερη στην ανιούσα μέχρι να κλείσει η αορτική βαλβίδα στο τέλος της πρωτοδιαστολής. Εκτός της έντασης των ανακλάσεων, σημαντικό ρόλο παίζει και η χρονική στιγμή κατά την οποία φτάνουν στο εκάστοτε σημείο. Ο συνδυασμός λοιπόν των ανωτέρω συντελεί στην αυξομείωση των μεγίστων και ελαχίστων των καμπυλών από τη μία περίπτωση ανευρύσματος στην άλλη.

Στην είσοδο του ανευρύσματος και του αορτικού διχασμού, αυξανόμενης της μέγιστης ακτίνας του ανευρύσματος, η διαστολική πίεση αυξάνεται ελαφρώς. Ωστόσο, η μέση τιμή της πίεσης μειώνεται στην είσοδο του ανευρύσματος πιθανώς

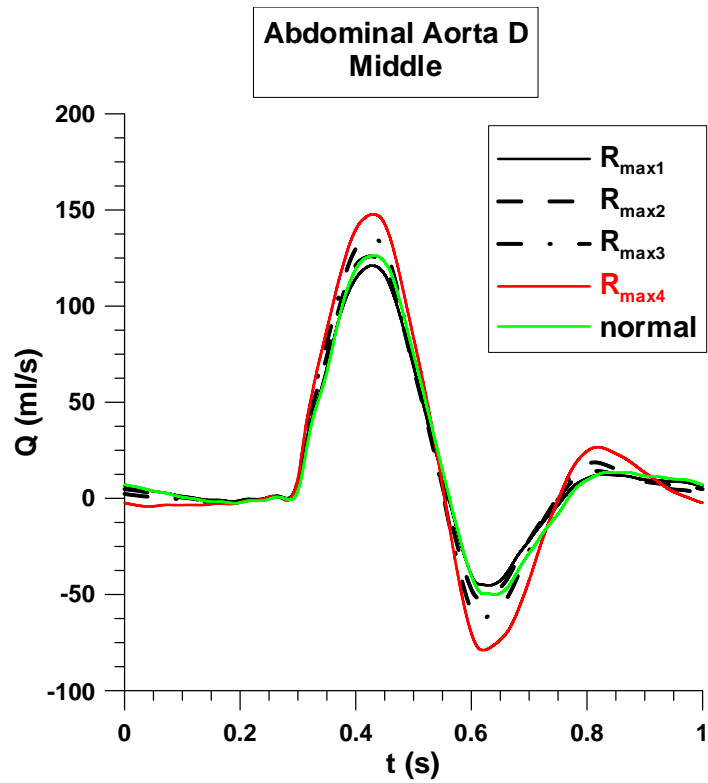
εξαιτίας της δυναμικής ενέργειας που χάνεται από το πίσω οδεύον ανακλώμενο κύμα από τα περιφερειακά αγγεία και στον αορτικό διχασμό πιθανώς εξαιτίας της δυναμικής ενέργειας που χάνεται από το διερχόμενο κύμα εντός του ανευρύσματος που προηγείται του διχασμού (Σχήμα 3.21-Σχήμα 3.25).



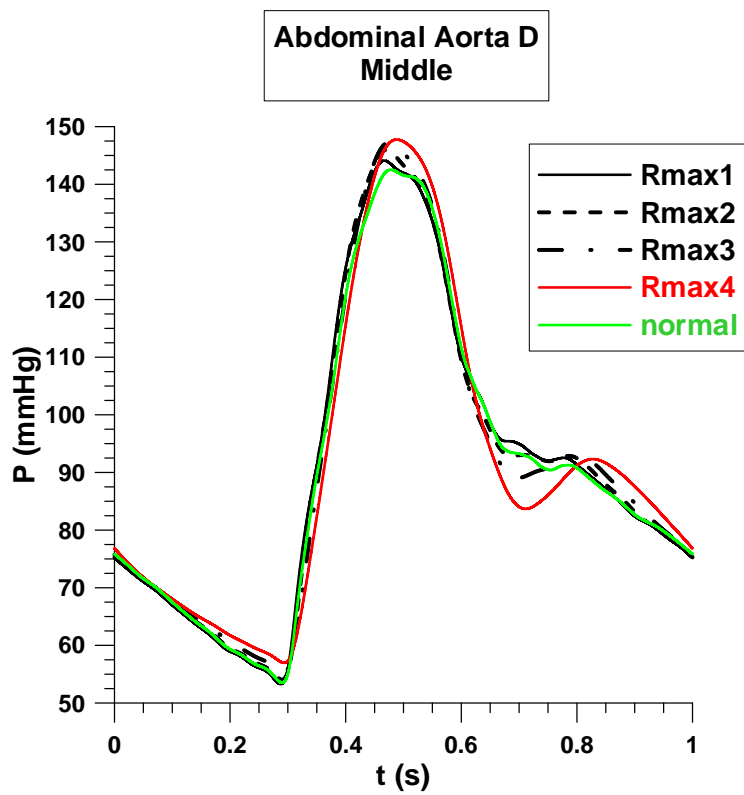
Σχήμα 3.20 Παροχή συναρτήσεϊ του χρόνου στο εγγύς άκρο της κοιλιακής αορτής για υγιή ενήλικα και για τις τέσσερις περιπτώσεις ανευρύσματος



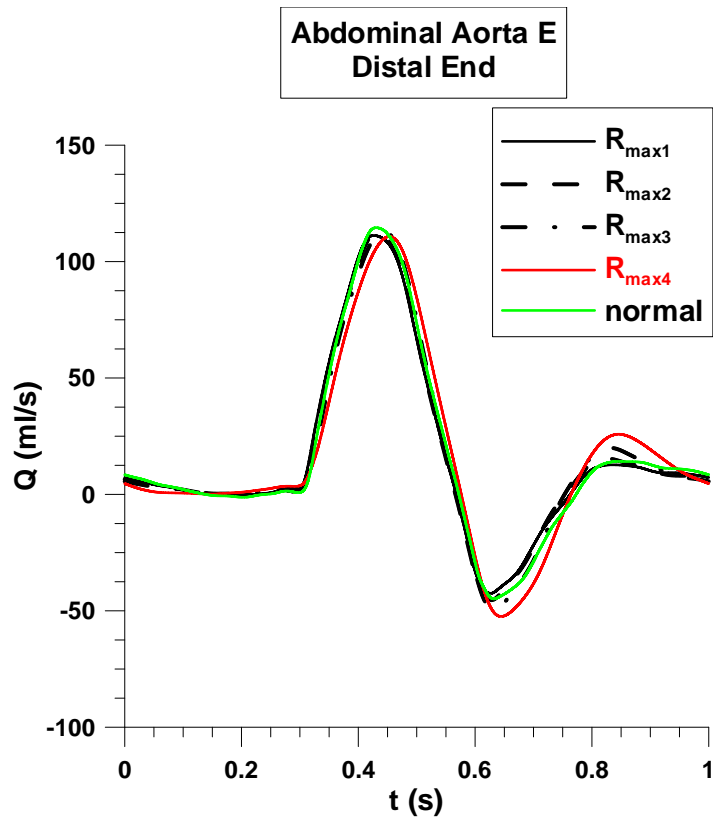
Σχήμα 3.21 Πίεση συναρτήσεϊ του χρόνου στο εγγύς άκρο της κοιλιακής αορτής για υγιή ενήλικα και για τις τέσσερις περιπτώσεις ανευρύσματος



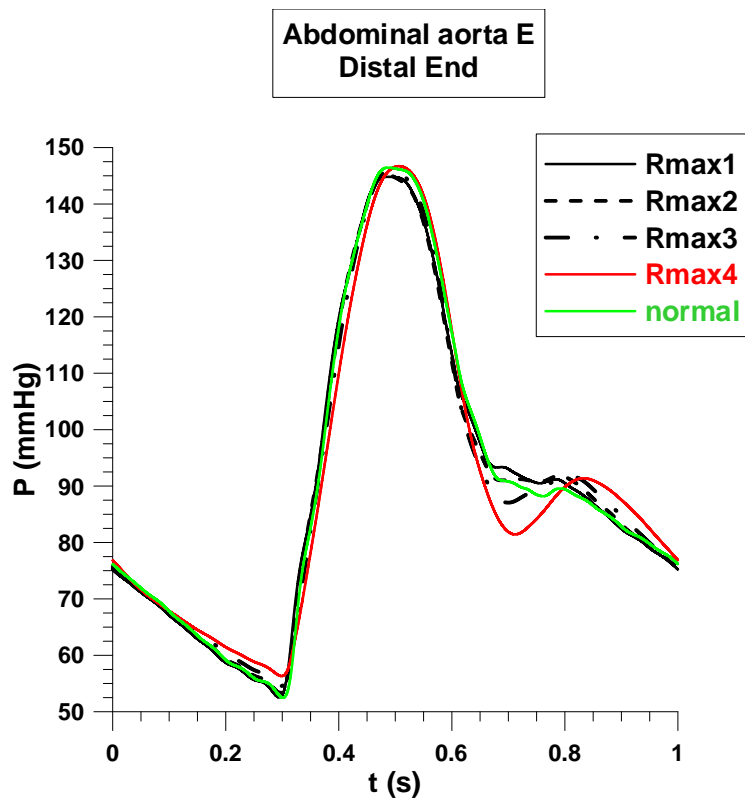
Σχήμα 3.22 Παροχή συναρτήσει του χρόνου στο μέσο της κοιλιακής αορτής για υγιή ενήλικα και για τις τέσσερις περιπτώσεις ανευρύσματος



Σχήμα 3.23 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο μέσο της κοιλιακής αορτής για υγιή ενήλικα και για τις τέσσερις περιπτώσεις ανευρύσματος



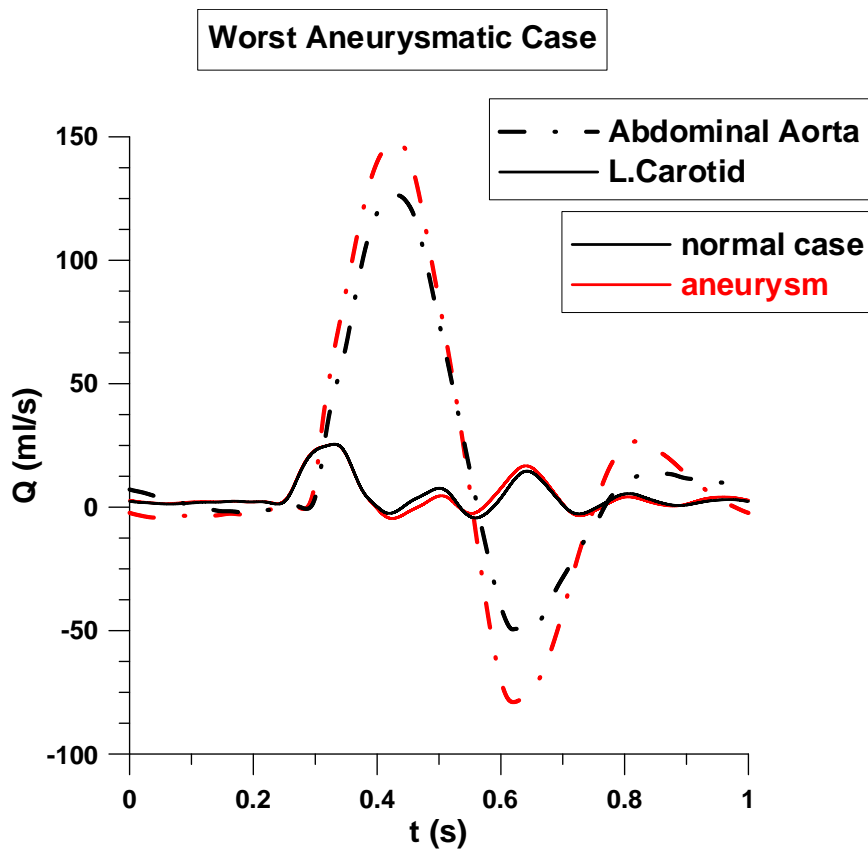
Σχήμα 3.24 Παροχή συναρτήσει του χρόνου στο άνω άκρο της κοιλιακής αορτής για υγιή ενήλικα και για για τις τέσσερις περιπτώσεις ανευρύσματος



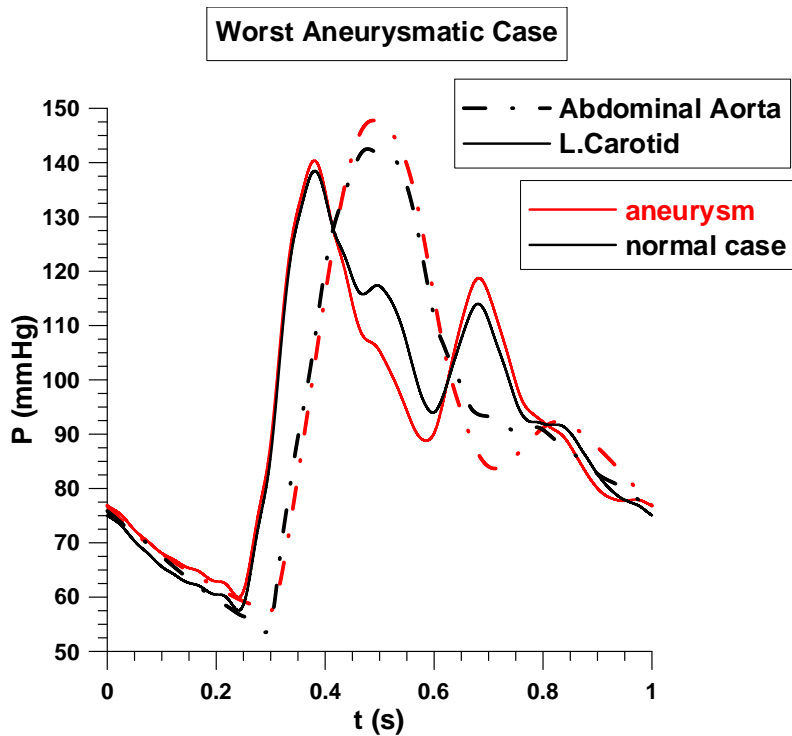
Σχήμα 3.25 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο άνω άκρο της κοιλιακής αορτής για υγιή ενήλικα και για για τις τέσσερις περιπτώσεις ανευρύσματος

Ακολουθούν τα διαγράμματα παροχής και πίεσης για τη φυσιολογική και τη χειρότερη ανευρυσματική περίπτωση (όριο θραύσης) στο μέσο της αριστερής καρωτίδας και της κοιλιακής αορτής.

Αξίζει να σημειώσουμε τη διαφορά φάσης με την οποία τόσο το διερχόμενο κύμα, όσο και το πίσω-ανακλώμενο διαδίδεται στο δέντρο. Πιο συγκεκριμένα στο διάγραμμα της πίεσης συναρτήσεϊ του χρόνου παρατηρούμε πως η ελάχιστη πίεση στην αριστερή καρωτίδα εμφανίζεται νωρίτερα σε σχέση με την αντίστοιχη της κοιλιακής αορτής.



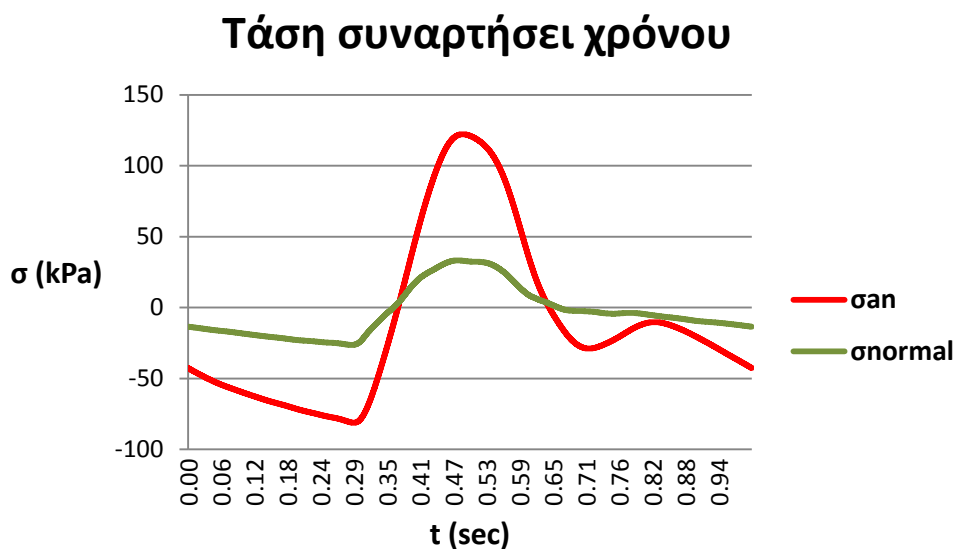
Σχήμα 3.26 Παροχή συναρτήσεϊ του χρόνου στο μέσο του ανευρύσματος και της αριστερής καρωτίδας για υγιή ενήλικα και για τη χειρότερη περίπτωση ανευρύσματος



Σχήμα 3.27 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο μέσο του ανευρύσματος και της αριστερής καρωτίδας για υγιή ενήλικα και για τη χειρότερη περίπτωση ανευρύσματος

Από το νόμο του Laplace : $\sigma = \frac{Pr}{h}$, μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τάση που ασκείται στο τοίχωμα.

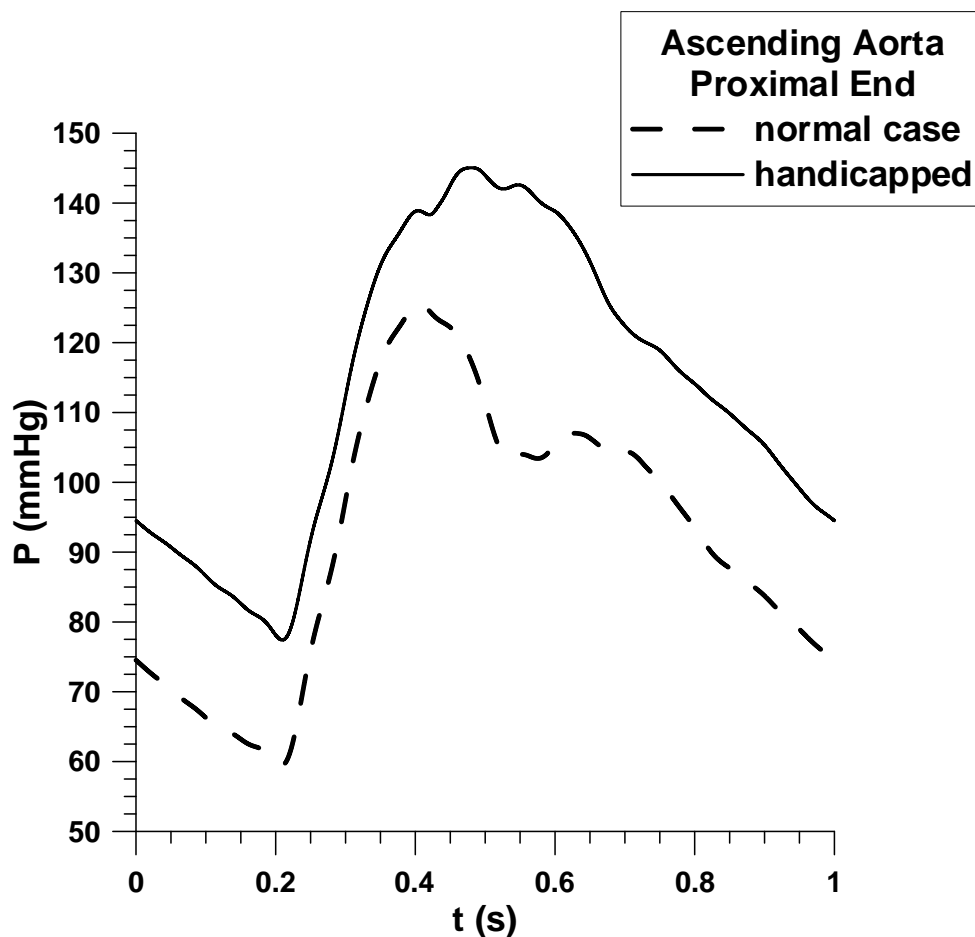
Ακολουθεί το διάγραμμα τάσης για την περίπτωση υγιούς ενήλικα και για την χειρότερη ανευρυσματική περίπτωση στο μέσο της κοιλιακής αρτηής.



Σχήμα 3.28 Τάση συναρτήσει του χρόνου στο μέσο της κοιλιακής αρτηής για υγιή ενήλικα και για τη χειρότερη ανευρυσματική περίπτωση

Παρατηρούμε πως η διαφορά μέγιστης-ελάχιστης τάσης στην ανευρυσματική περίπτωση είναι αρκετά μεγαλύτερη σε σχέση με την αντίστοιχη του φυσιολογικού, αφού είναι ανάλογη του γινομένου **Pr**.

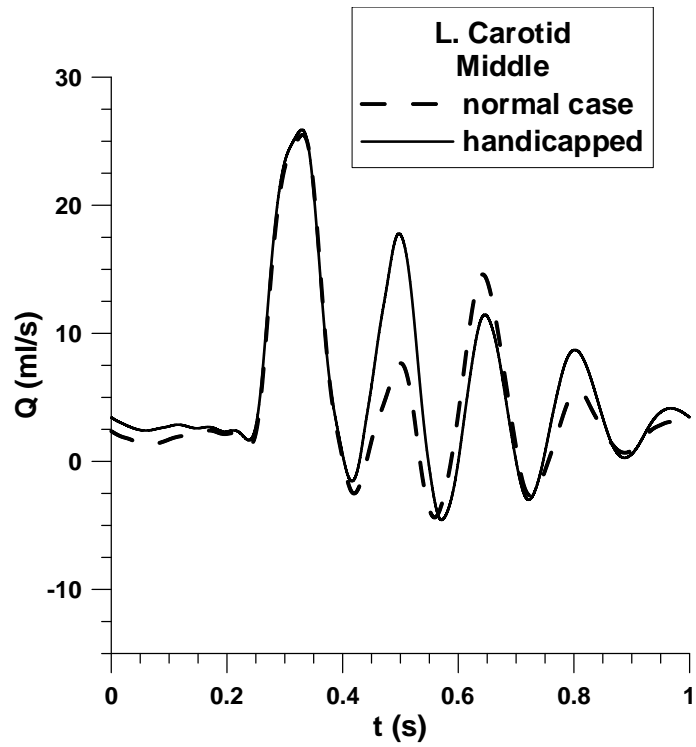
Ακολουθούν τα διαγράμματα της παροχής και της πίεσης συναρτήσει του χρόνου σε επιλεγμένα σημεία κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου για την περίπτωση υγιή ενήλικα και ασθενή με φραγή προ του αορτικού διχασμού αντίστοιχα.



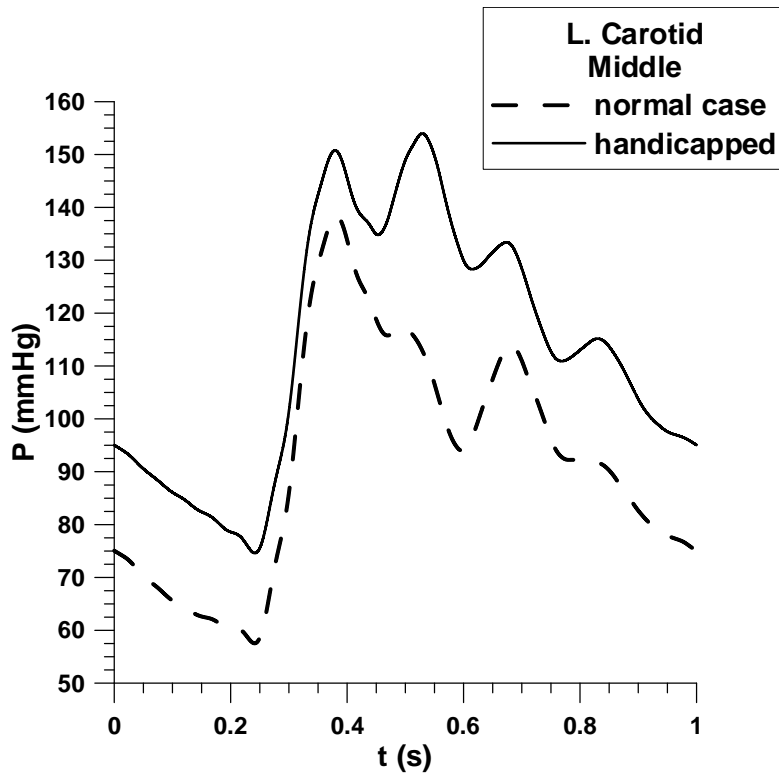
Σχήμα 3.29 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο εγγύς άκρο της ανιούσας αορτής για υγιή ενήλικα και για ανάπηρο

Σε ότι αφορά την πίεση, παρατηρούμε στο Σχήμα 3.29 πως η κυματομορφή αλλάζει σε σχέση με την περίπτωση του υγιούς ενήλικα, εξαιτίας της πλήρους ανάκλασης στο διχασμό της κοιλιακής αορτής. Η μέση πίεση στην ανιούσα αορτή είναι μεγαλύτερη και συγκεκριμένα ίση με 113.63 mmHg, από την αντίστοιχη του υγιούς ενήλικα που κυμαίνεται στα 92.23 mmHg. Η αύξηση αυτή παρατηρείται και στα υπόλοιπα αγγεία. Στην περίπτωση δηλαδή ασθενών με πλήρη έμφραξη περί τον αορτικό διχασμό, η πίεση κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου κυμαίνεται σε υψηλότερα επίπεδα.

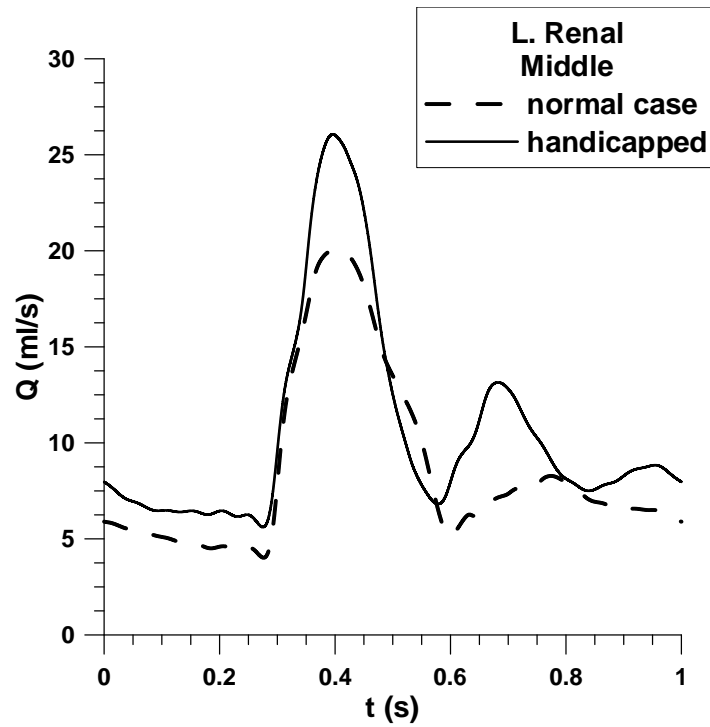
Σε ότι αφορά την παροχή, στην κοιλιακή αορτή (Σχήμα 3.34) είναι σχεδόν μηδενική, αφού η ταχύτητα του ρευστού στο άπω άκρο μηδενίζεται.



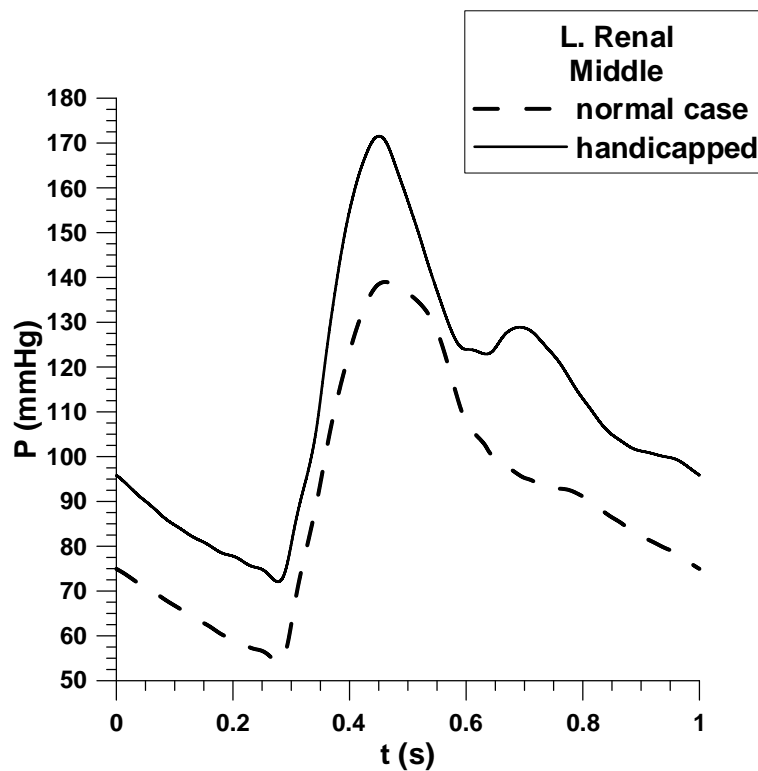
Σχήμα 3.30 Παροχή συναρτήσει του χρόνου στο μέσο της αριστερής καρωτίδας για υγιή ενήλικα και για ανάπηρο



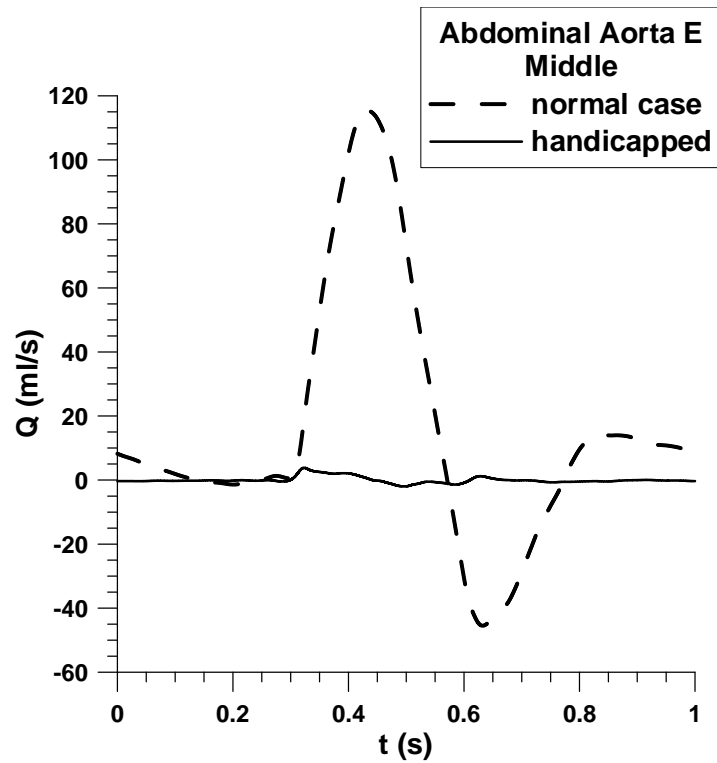
Σχήμα 3.31 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο μέσο της αριστερής καρωτίδας για υγιή ενήλικα και για ανάπηρο



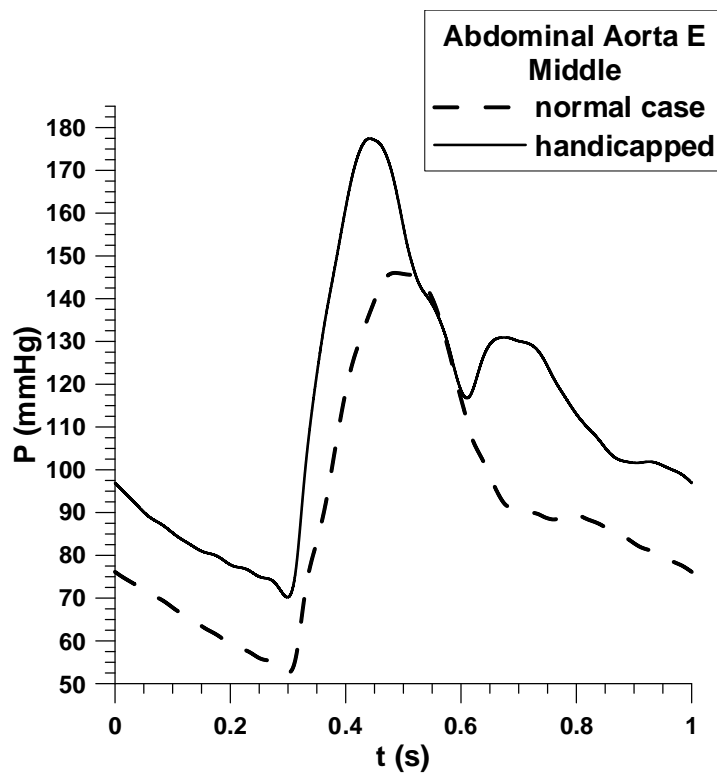
Σχήμα 3.32 Παροχή συναρτήσει του χρόνου στο μέσο της αριστερής νεφρικής αρτηρίας για υγιή ενήλικα και για ανάπηρο



Σχήμα 3.33 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο μέσο της αριστερής νεφρικής αρτηρίας για υγιή ενήλικα και για ανάπηρο



Σχήμα 3.34 Παροχή συναρτήσει του χρόνου στο μέσο της κοιλιακής αορτής E για υγιή ενήλικα και για ανάπηρο



Σχήμα 3.35 Πίεση συναρτήσει του χρόνου στο μέσο της κοιλιακής αορτής E για υγιή ενήλικα και για ανάπηρο

Όπως και στην περίπτωση του υγιούς ενήλικα έγινε υπολογισμός της μέσης παροχής στην είσοδο κάθε αγγείου προκειμένου να δούμε πως κατανέμεται κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου η παροχή που επιβάλλουμε στην είσοδο. Ακολουθεί πίνακας της μέσης παροχής για την περίπτωση του υγιούς ενήλικα και του ανάπτηρου για όλα τα αγγεία έως και την κοιλιακή αορτή Ε.

Πίνακας 3.10 : Μέση Παροχή κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου για υγιή ενήλικα και για ασθενή με φραγή προ του αορτικού διχασμού				
	Υγιής Ενήλικας		Φραγή προ του αορτικού διχασμού	
A/A Αγγείου	Q_{av} (ml/s)	$\frac{Q_i}{Q_1} 100$	Q_{av} (ml/s)	$\frac{Q_i}{Q_1} 100$
1	82.393	100.00	82.393	100.00
2	72.626	88.15	69.108	83.88
3	10.677	12.96	13.188	16.01
4	6.139	7.45	7.58	9.20
5	4.538	5.51	5.608	6.81
6	1.878	2.28	2.315	2.81
7	4.261	5.17	5.265	6.39
8	2.007	2.44	2.483	3.01
9	2.248	2.73	2.776	3.37
10	0.137	0.17	0.169	0.21
11	2.111	2.56	2.608	3.17
12	2.269	2.75	2.804	3.40
13	2.269	2.75	2.804	3.40
14	67.091	81.43	63.504	77.07
15	4.535	5.50	5.604	6.80
16	2.267	2.75	2.802	3.40
17	2.267	2.75	2.802	3.40
18	60.954	73.98	55.925	67.88
19	6.137	7.45	7.58	9.20
20	1.877	2.28	2.314	2.81
21	4.26	5.17	5.266	6.39
22	2.006	2.43	2.483	3.01
23	2.247	2.73	2.776	3.37
24	0.137	0.17	0.169	0.21
25	2.111	2.56	2.608	3.17
26	1.858	2.26	2.295	2.79
27	59.097	71.73	53.63	65.09
28	47.061	57.12	38.764	47.05
29	12.007	14.57	14.838	18.01

30	8.028	9.74	9.922	12.04
31	3.979	4.83	4.916	5.97
32	2.34	2.84	2.893	3.51
33	5.688	6.90	7.029	8.53
34	13.057	15.85	16.136	19.58
35	34.005	41.27	22.629	27.46
36	8.589	10.42	10.617	12.89
37	25.416	30.85	12.013	14.58
38	8.587	10.42	10.615	12.88
39	16.813	20.41	1.385	1.68
40	1.108	1.34	1.373	1.67
41	15.689	19.04	-0.000005	0

Επιβεβαιώνεται η αύξηση των τιμών στα τερματικά αγγεία και η μείωση στα κεντρικά, σε σχέση πάντα με την περίπτωση του υγιούς ενήλικα.

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1 Υπολογιστικό μοντέλο

Πολλές εργασίες έχουν παρουσιαστεί τα τελευταία χρόνια και αποδεικνύουν το συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον για μαθηματική και υπολογιστική προσομοίωση του κυκλοφορικού συστήματος του ανθρώπου. Ανάμεσα σε αυτές τις εργασίες, μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα παρουσιάζεται για πολύπλοκα τρισδιάστατα μοντέλα ικανά να παρέχουν αρκετές λεπτομέρειες του πεδίου ροής, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός των τάσεων τοιχώματος. Ωστόσο, αυτοί οι υπολογισμοί είναι περισσότερο απαιτητικοί, ως προς την κατασκευή της γεωμετρίας, του υπολογιστικού μοντέλου και του υπολογιστικού χρόνου. Εκτός αυτού, οι μηχανικοί και οι ιατρικοί ερευνητές συνήθως δεν χρειάζεται να γνωρίζουν λεπτομέρειες της ροής σε τέτοιο βαθμό και έτσι η εφαρμογή απλοποιημένων μοντέλων, που αποδεικνύεται ικανή να παρέχει χρήσιμες πληροφορίες και με χαμηλό υπολογιστικό κόστος, κερδίζει συνεχώς έδαφος. Πέραν αυτού, οι μελέτες με επεμβατικό τρόπο (in vivo) είναι δύσκολες και κοστοβόρες, ενώ περιορίζονται σε εύκολα προσβάσιμες αρτηρίες. Η χρήση λοιπόν ενός μονοδιάστατου υπολογιστικού μοντέλου αποτελεί μία καλή εναλλακτική.

Το υπολογιστικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε στην εν λόγω εργασία διαφέρει από τα υπόλοιπα που παρουσιάζονται έως τώρα στη βιβλιογραφία σε ένα ή και περισσότερα από τα ακόλουθα σημεία:

- A) στον τρόπο υπολογισμού της διαμητρικής τάσης στην εξίσωση της ορμής
- B) στον τρόπο υπολογισμού των οριακών συνθηκών,
- Γ) στην επιλογή της καταστατικής εξίσωσης ελαστικότητας πίεσης – διατομής,
- Δ) στον αριθμό και στα γεωμετρικά και στα ελαστικά χαρακτηριστικά των αγγείων του αρτηριακού δέντρου,
- Ε) στη μέθοδο επίλυσης.

Ο υπολογιστικός κώδικας που αναπτύχθηκε ελέγχθηκε ως προς την εγκυρότητά του, συγκρίνοντας τα αποτελέσματά του με αυτά αντίστοιχων δημοσιευμένων άρθρων. Οι κυματομορφές των ρευστομηχανικών μεγεθών, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές τους προσομοιάζουν σε ικανοποιητικό βαθμό την πραγματικότητα, ενώ οι παραδοχές που έγιναν δεν επηρεάζουν σημαντικά τη φυσιολογική ροή του αίματος στο ανθρώπινο αρτηριακό δέντρο.

4.2 Αρτηριακό δέντρο υγιούς ενήλικα σε ηρεμία και ύπτια θέση

Σε ότι αφορά την παροχή, καθώς το κύμα της διαδίδεται στο αρτηριακό δέντρο το πλάτος της μειώνεται, γεγονός αναμενόμενο εξαιτίας των διακλαδώσεων στις οποίες διαμοιράζεται, των ανακλάσεων στις διακλαδώσεις και την περιφέρεια και της απόσβεσης λόγω συνεκτικότητας, ενώ παρατηρείται και χρονική καθυστέρηση από αγγείο σε αγγείο των μεγίστων και ελαχίστων λόγω της όδευσης του κύματος.

Στα τερματικά αγγεία σε αντίθεση με τα μεγάλα, η μορφή του κύματος αλλάζει πολύ σε σχέση με την παροχή εισόδου του δέντρου (παροχή εξόδου της καρδιάς). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στα τερματικά αγγεία οι ανακλάσεις είναι εμφανέστερες λόγω της εγγύτητάς τους στην περιφέρεια.

Έγινε υπολογισμός της μέσης παροχής στην είσοδο κάθε αγγείου προκειμένου να δούμε πως κατανέμεται κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου η παροχή που επιβάλλουμε στην είσοδο. Τα αποτελέσματα συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με αντίστοιχα φυσιολογικά της βιβλιογραφίας.

Σε ότι αφορά την πίεση, βλέπουμε πως η μέση τιμή δε διαφέρει πολύ από αγγείο σε αγγείο, παρατηρώντας μια ασθενή μείωση κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου. Η ασθενής αυτή μείωση (πτώση πίεσης) οφείλεται στην μικρή αντίσταση (1%) που κατέχουν οι μεγάλες αρτηρίες σε σχέση με την αντίστοιχη της περιφέρειας. Η μέγιστη τιμή της πίεσης (συστολική) αυξάνεται καθώς το κύμα οδεύει, επειδή τα μεγάλα αγγεία πιο κοντά την περιφέρεια επηρεάζονται πιο πολύ από τις ανακλάσεις των περιφερειακών αγγείων όπου τα ανακλώμενα κύματα συμβάλλουν αυξητικά. Η ελάχιστη τιμή της πίεσης (διαστολική), εμφανίζεται με χρονική καθυστέρηση και εξασθενημένη ελαφρώς καθώς το κύμα οδεύει, επειδή το συστολικό κύμα που γεννάται από την καρδιά έχει όλο και περισσότερη απόσταση να διανύσει και καθυστερεί την αύξηση της πίεσης, η οποία κατά τη διαστολή έχει πτωτική τάση. Η μορφή του παλμού όσο αυτός απομακρύνεται από την καρδιά κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου εξομαλύνεται χωρίς την εμφάνιση του δικροτικού κύματος, εξαιτίας της συμβολής του διερχόμενου και ανακλώμενου κύματος, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να γίνει διάκριση μεταξύ των δύο.

Η διαφορά στις κυματομορφές της πίεσης και της παροχής, καθώς και η μεταξύ τους διαφορά φάσης οφείλεται και στον διαφορετικό τρόπο με τον οποίο ανακλώνται τα δύο κύματα πίεσης και παροχής. Το ανακλώμενο κύμα πίεσης δρα αθροιστικά στο διερχόμενο κύμα πίεσης, ενώ το ανακλώμενο κύμα παροχής δρα αφαιρετικά στο διερχόμενο.

4.3 Ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής

Σε ότι αφορά την παροχή, οι διαφορές είναι μικρές σε σχέση με την περίπτωση του υγιούς ενήλικα (control) και εντοπίζονται στα ελάχιστα και τα μέγιστα σε κάθε αγγείο, τόσο στο μέτρο όσο και στη χρονική στιγμή που παρουσιάζονται. Οι μεγαλύτερες διαφορές, αλλά όχι σημαντικές, παρατηρούνται στο μέσο του ανευρύσματος.

Σε ότι αφορά την πίεση συνολικά, οι διαφορές οφείλονται στα διαφορετικά γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά. Πιο συγκεκριμένα, στα ανευρύσματα η διατομή και το μέτρο ελαστικότητας αυξάνονται, ενώ το πάχος μειώνεται. Η αύξηση του μέτρου ελαστικότητας συντελεί σε αύξηση της πίεσης στο αρτηριακό δέντρο, λόγω των ανακλάσεων που δημιουργούνται εξαιτίας της μεταβολής της ενδοτικότητας (μείωση). Η μείωση του πάχους του τοιχώματος συντελεί σε μείωση της πίεσης, αφού αυξάνεται η ενδοτικότητα του. Η αύξηση της διατομής στο ανεύρυσμα συντελεί σε μείωση της πίεσης του δέντρου προ του ανευρύσματος, καθώς το πίσω οδεύον κύμα από τα περιφερειακά αγγεία (ανακλάσεις) πιθανώς χάνει τη δυναμική του ενέργεια διερχόμενο από το ανεύρυσμα και δεν συμβάλει σημαντικά στο διερχόμενο κύμα πίεσης από την καρδιά. Οι συνέπειες του ανευρύσματος κοιλιακής αορτής εξαρτώνται από το συνδυασμό των ανωτέρω παραμέτρων και διαφέρουν σε κάθε περίπτωση.

Έχει αποδειχθεί ότι η συστολική πίεση της ανιούσης αορτής αποτελεί καλύτερο δείκτη πρόβλεψης εξέλιξης της νόσου σε σχέση με την περιφερειακή πίεση. Συνεπώς, η παρατήρηση της κυματομορφής της πίεσης στην ανιούσα αορτή καθίσταται πολύ σημαντική. Έτσι, παρατηρήθηκε στα αποτελέσματα ότι η ύπαρξη του ανευρύσματος στην κοιλιακή αορτή συντελεί σε απώλεια πίεσης στην ανιούσα, οπότε επιβαρύνεται η λειτουργία της καρδιάς προκειμένου να διατηρήσει σταθερή παροχή. Όσο μεγαλώνει η μέγιστη ακτίνα του ανευρύσματος, περισσότερη δυναμική ενέργεια χάνεται από το πίσω οδεύον ανακλώμενο κύμα από τα περιφερειακά αγγεία, οπότε και η πτώση πίεσης είναι μεγαλύτερη στην ανιούσα μέχρι να κλείσει η αορτική βαλβίδα στο τέλος της πρωτοδιαστολής. Εκτός της έντασης των ανακλάσεων, σημαντικό ρόλο παίζει και η χρονική στιγμή κατά την οποία φτάνουν στο εκάστοτε σημείο. Ο συνδυασμός λοιπόν των ανωτέρω συντελεί στην αυξομείωση των μεγίστων και ελαχίστων των καμπυλών από τη μία περίπτωση ανευρύσματος στην άλλη.

Στο ανευρυσματικό τμήμα, εντός δηλαδή της κοιλιακής αορτής, η πίεση αυξάνεται, σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση της ελαστικότητας πίεσης-διατομής, όπου η πίεση είναι ανάλογη (μη γραμμικά) της διατομής.

Στην είσοδο του ανευρύσματος και του αορτικού διχασμού, αυξανόμενης της μέγιστης ακτίνας του ανευρύσματος, η διαστολική πίεση αυξάνεται ελαφρώς. Ωστόσο, η μέση τιμή της πίεσης μειώνεται στην είσοδο του ανευρύσματος πιθανώς εξαιτίας της δυναμικής ενέργειας που χάνεται από το πίσω οδεύον ανακλώμενο κύμα από τα περιφερειακά αγγεία και στον αορτικό διχασμό πιθανώς εξαιτίας της δυναμικής ενέργειας που χάνεται από το διερχόμενο κύμα εντός του ανευρύσματος που προηγείται του διχασμού.

4.4 Αποκατάσταση κοιλιακής αορτής με ενδομόσχευμα

Μετά την τοποθέτηση ενδομοσχεύματος, τόσο η παροχή όσο και η πίεση σχετικά αποκαθίστανται. Ωστόσο, οι διαφορές που παρατηρούνται οφείλονται στα διαφορετικά ελαστικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του τοιχώματος του ενδομοσχεύματος, καθώς και στην πλήρη έμφραξη της κάτω μεσεντερίου αρτηρίας (αγγείο 40) από το ενδομόσχευμα. Το μέτρο ελαστικότητας του ενδομοσχεύματος είναι μεγαλύτερο, ενώ το πάχος του είναι μειωμένο. Η αύξηση του μέτρου ελαστικότητας συντελεί σε αύξηση της πίεσης στο αρτηριακό δέντρο, λόγω των ανακλάσεων που δημιουργούνται εξαιτίας της μεταβολής της ενδοτικότητας (μείωση). Η μείωση του πάχους του τοιχώματος συντελεί σε μείωση της πίεσης, αφού αυξάνεται η ενδοτικότητα του. Επίσης, αύξηση της πίεσης προκαλείται και από την έμφραξη της κάτω μεσεντερίου αρτηρίας (αγγείο 40).

Όσο αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας του ενδομοσχεύματος, η πίεση στο αρτηριακό δέντρο κυμαίνεται σε σχετικά υψηλότερα επίπεδα.

4.5 Φραγή προ του αορτικού διχασμού

Η περίπτωση φραγής προ του αορτικού διχασμού αντιπροσωπεύει είτε περιπτώσεις ακρωτηριασμών σε ατυχήματα είτε περιπτώσεις έμφραξης των αρτηριών π.χ. λόγω αθηρωμάτωσης.

Σε ότι αφορά την πίεση, η κυματομορφή αλλάζει σε σχέση με την περίπτωση του υγιούς ενήλικα, εξαιτίας της πλήρους ανάκλασης στο διχασμό της κοιλιακής αορτής. Η μέση πίεση στην ανιούσα αορτή είναι μεγαλύτερη και συγκεκριμένα ίση με 113.63 mmHg, από την αντίστοιχη του υγιούς ενήλικα που κυμαίνεται στα 92.23 mmHg. Η αύξηση αυτή παρατηρείται και στα υπόλοιπα αγγεία. Στην περίπτωση δηλαδή ασθενών με πλήρη έμφραξη περί τον αορτικό διχασμό, η πίεση κατά μήκος του αρτηριακού δέντρου κυμαίνεται σε υψηλότερα επίπεδα.

Σε ότι αφορά την παροχή, στην κοιλιακή αορτή είναι σχεδόν μηδενική, αφού η ταχύτητα του ρευστού στο άπω άκρο μηδενίζεται. Υπολογίζοντας τις μέσες παροχές των αγγείων κατά μήκος του δέντρου παρατηρείται αύξηση των τιμών στα τερματικά αγγεία και μείωση στα κεντρικά, σε σχέση πάντα με την περίπτωση του υγιούς ενήλικα.

4.6 Ταχύτητα διάδοσης κύματος

Η ταχύτητα διάδοσης κύματος είναι ο λόγος της απόστασης που διανύει το κύμα ως προς το χρόνο που χρειάζεται προκειμένου να διανύσει αυτήν την απόσταση. Εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αγγείου και τις ελαστικές του ιδιότητες.

Υπολογίζεται η ταχύτητα διάδοσης κύματος από το εγγύς άκρο της ανιούσας αορτής έως το άπω άκρο της μηριαίας αρτηρίας για τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις, τη φυσιολογική, την ανευρυσματική και μετά από αποκατάσταση με ενδομοσχευμα.

Σε κάθε περίπτωση, η διακύμανση της ταχύτητας διάδοσης του κύματος είναι κοντά στην τιμή της αρχικής ταχύτητας διάδοσης κύματος c_0 . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ταχύτητα διάδοσης κύματος προκύπτει από την καταστατική εξίσωση ελαστικότητας πίεσης-διατομής και συγκεκριμένα είναι ανάλογη της πίεσης, η οποία ωστόσο ως ρευστομηχανικό μέγεθος δεν μεταβάλλεται σημαντικά. Η ταχύτητα διάδοσης στην ανευρυσματική περίπτωση είναι μεγαλύτερη σε σχέση με τη φυσιολογική, ενώ παρατηρούμε πως όσο αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας του ενδομοσχεύματος, αυξάνεται. Η ταχύτητα διάδοσης του ενδομοσχεύματος της βασικής περίπτωσης είναι η μικρότερη όλων γεγονός που οφείλεται στο συνδυασμό των ελαστικών και γεωμετρικών του χαρακτηριστικών, όπου έχει μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας από αυτό του φυσιολογικού, αλλά το πάχος του είναι αρκετά μικρότερο [21].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ορισμός συμβόλων

μ : δυναμική συνεκτικότητα

ρ : πυκνότητα

ν : λόγος Poisson

L_v : μήκος αγγείου

D : διάμετρος αγγείου

E : μέτρο ελαστικότητας αγγείου

h : πάχος τοιχώματος αγγείου

R : ακτίνα αγγείου

A : διατομή αγγείου

P : πίεση αγγείου

P_{ext} : εξωτερική πίεση

C : ταχύτητα διάδοσης αγγείου

W : αδιάστατος αριθμός Womersley

C_v : συντελεστής ιξώδους

C_u : συντελεστής αδράνειας

k : πλήθος χωρικών κόμβων αγγείου

n : πλήθος χρονικών κόμβων αγγείου

δ : αδιάστατη παράμετρος δ

Re : αδιάστατος αριθμός Reynolds

Str : αδιάστατος αριθμός Strouhal

M : λόγος ταχυτήτων διάδοσης κύματος

A^* : αδιαστατοποιημένη διατομή

P^* : αδιαστατοποιημένη πίεση

V^* : αδιαστατοποιημένη ταχύτητα

C^* : αδιαστατοποιημένη ταχύτητα διάδοσης

dx^* : αδιαστατοποιημένο χωρικό βήμα

dt^* : αδιαστατοποιημένο χρονικό βήμα

Δx_{CL} : μήκος για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών μεταβλητών

Δx_{CR} : μήκος για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών μεταβλητών

ξ : συνθήκη συμβατότητας δεξιοκλινούς χαρακτηριστικής

η : συνθήκη συμβατότητας αριστεροκλινούς χαρακτηριστικής

P_t : ολική πίεση

Q : παροχή μάζας

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. Σ. Τσαγγάρης, Βιορρευστομηχανική και Βιοϊατρική Τεχνολογία, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2004 σελ. 117 - 154.
- [2]. Σ. Τσαγγάρης, Μηχανική των Ρευστών, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα 2005 σελ. 56 - 88.
- [3]. Γ. Μπεργελές, Υπολογιστική Ρευστομηχανική, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα 2006 σελ. 95 -125.
- [4]. Χ. Μανόπουλος, «Μελέτη αντλητικών φαινομένων σε ιατροβιολογικές εφαρμογές, μέσω αλληλεπίδρασης ροής ρευστού και κίνησης σώματος», Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2009, σελ. 49 - 66.
- [5]. N.Stergioupolos, D.F. Young, T.R. Rogge, 1992, Computer Simulation of Arterial Flow with Applications to Arterial and Aortic Stenosis, J. Biomechanics, Vol. 25, pp. 1477 – 1488.
- [6]. Γ.Σ.Παπαγεωργίου, Χ.Γ.Τσίτουρας, Αριθμητική Ανάλυση με εφαρμογές σε Matlab και Mathematica, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα 2004 σελ 96-112,244-252.
- [7]. Γ.Δάσιος, Κ.Κυριακή, Μερικές διαφορικές εξισώσεις, Αθήνα 1994 σελ 33-41.
- [8]. J.J. Wang, K.H.Parker, Wave propagation in a model of the arterial circulation, 2003, J.Biomechanics, Vol 37, pp.457-470.
- [9]. John D. Anderson, Computational Fluid Dynamics the Basics with Applications, United States of America 1995 pp. 222 – 225.
- [10]. I. Formaggia, A. Veneziani, "Reduced and multiscale models for the human cardiovascular system", VKI-Lecture Series, 2003.
- [11]. S.J. Sherwin, V. Franke, J. Peiro, K. Parker, 2003, One-Dimensional Modeling of a Vascular network in Space-Time Variables, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 47, pp.217 – 250.
- [12]. C. G. Manopoulos, D. S. Mathioulakis, S. G. Tsangaris, 2006, One dimensional model of Valveless pumping in a Closed Loop and a Numerical Solution, Physics of Fluids, 2006, Volume : 18, Issue : 1
- [13]. R. Lohner, J. Cebra, O. Soto, P. Yum, J. E. Burgess, 2003, Applications of Patient-Specific CFD in Medicine and Life Sciences, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 43, pp. 637 – 650.
- [14]. M.Lister, The numerical solution of hyperbolic partial differential equations by the method of characteristics, The Pennsylvania State University.
- [15]. S.J. Sherwin, L.Formaggia, J.Peiro,V. Franke, 2003, Computational modeling of 1D Blood flow with variable mechanical properties and its application to the

simulation of wave propagation in the human arterial system, *International Journal for numerical methods in fluids*, Vol. 43, pp.673 – 700.

[16]. L.Formaggia, D.Lamponi, A.Quarteroni, 2003, One-Dimensional Models for blood flow in arteries, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 47, pp.251 – 276.

[17]. Ι. Μαράκης, Χ. Ρηγόπουλος, Β. Κασικας, Ενδοαγγειακή αντιμετώπιση ανευρυσμάτων αορτής στο ΓΝΑ «Γ. Γεννηματάς», *Ιατρικό βήμα*, Ιούνιος-Αύγουστος 2006, σελ 18-23.

[18]. Κ. Στόκος, “ Υπολογιστική προσομοίωση μη μόνιμης ροής στο κυκλοφορικό σύστημα ”, Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2009

[19]. Κ.Χ.Γιαννάκογλου, Ι.Αναγνωστόπουλος, Γ.Μπεργελές, Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2004, σελ 3.3-3.7, 3.9-3.15.

[20]. N. Westerhof, N. Stergiopoulos, M. I.M. Noble, “ Snapshots of Hemodynamics-An Aid for Clinical Research and Graduate Education ”, Springer 2010

[21]. N. P.E. Kadoglou, K. G. Moulakakis, I. Papadakis, I. Ikonomidis, M. Alepaki, J. Lekakis, C. D. Liapis, Changes in Aortic Pulse Wave Velocity of Patients Undergoing Endovascular Repair of Abdominal Aortic Aneurysms, *J. Endovasc. Ther.* 2012;19:661–666.