

Ricostruzione di Superfici basata sulla forma a partire da Grafi di Reeb

Michela Mortara

Rapporto Tecnico No.17/00

Istituto per la Matematica Applicata, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Genova, Italia

1 Introduzione

Lo scopo della ricostruzione di superfici a partire da contorni è quello di determinare la superficie “ottima” tra quelle consistenti con le sezioni osservate. Tale problema sorge in diversi contesti applicativi: ad esempio in medicina viene di frequente utilizzata la tomografia come metodo di acquisizione dei dati sugli organi o strutture interne al corpo umano. Tale metodo di acquisizione produce in generale una serie di immagini che, una volta analizzate, forniscono un set di contorni (curve di livello) da cui è possibile ricostruire un'approssimazione tridimensionale delle strutture reali. In generale, esistono infinite superfici consistenti con un qualunque insieme di sezioni; un algoritmo di ricostruzione di superfici deve scegliere il migliore matching con l'oggetto reale. Questo è ottenuto fissando alcuni vincoli addizionali sulla soluzione: per esempio, un vincolo comunemente usato è la richiesta che la superficie trovata abbia area minima. La qualità della superficie risultante dipende dalla scelta di vincoli che meglio modellano la soluzione desiderata.

Il grafo di Reeb è un grafo topologico, che mantiene le relazioni di adiacenza tra i punti critici della superficie originale, trasformata tramite la funzione altezza. Esso è mirato alla descrizione ad alto livello della forma di una superficie e fornisce una compressione della rappresentazione che senza dubbio è di notevole interesse. Per questo motivo, è interessante studiare anche il passaggio inverso, ossia come da tale rappresentazione si possa passare ad una visualizzazione fedele della superficie originale, aggiungendo eventualmente dettagli per rendere più realistica la rappresentazione. Il grafo di Reeb, infatti, mantiene soltanto le sezioni critiche di una superficie, che possono anche essere in numero molto limitato, e quindi il problema in questo caso è di ipotizzare in modo ragionevole l'evolversi della forma tra due sezioni critiche e la creazione, di conseguenza, di sezioni aggiuntive che possano essere usate nella fase di ricostruzione vera e propria della superficie.

Mentre la risoluzione del problema della ricostruzione, nel caso più generale, presenta difficoltà notevoli a causa della complessità di forma che gli oggetti possono assumere, è stato studiato in dettaglio il caso della ricostruzione di superfici a partire non da semplici sezioni, ma dal grafo di Reeb, che mantiene le relazioni di adiacenza tra i punti critici della superficie originale. Il punto di partenza dunque è un insieme di curve di livello per il quale sia nota a priori l'evoluzione dei contorni in termini di adiacenze topologiche.

Il lavoro qui descritto è consistito nello studio della teoria di Morse e dei grafi di Reeb e delle loro proprietà, e inoltre nello sviluppo e nell'implementazione di un

metodo per risolvere il problema del blending tra contorni adiacenti, ossia di un processo che determina corrispondenze tra i vertici di coppie di contorni in base a diversi criteri di similarità, e interpola tali vertici corrispondenti per generare i poligoni intermedi.

Il problema dello *shape blending* – la metamorfosi di una forma in un'altra – ha una grande importanza, soprattutto nel campo dell'animazione computerizzata (si pensi ad esempio all'imponente utilizzo del morphing nelle produzioni di film e video), ma è tuttavia lontano da una soluzione del tutto soddisfacente. In particolare lo *shape blending* richiede tuttora un notevole intervento manuale. Per questo motivo si sono cercati metodi che minimizzino la necessità di interazione con l'utente.

Inoltre è stato affrontato il caso in cui un contorno sia adiacente a più contorni appartenenti alla sezione consecutiva, ed è stato proposto un metodo per generare sezioni intermedie in presenza di diramazioni.

Più nel dettaglio, il metodo sviluppato consiste nei seguenti punti.

- L'obiettivo principale è quello di determinare segmenti privilegiati tra contorni su curve di livello adiacenti che agiscano come “linee guida” per la ricostruzione. Si vuole inoltre che tali linee guida individuino, od almeno approssimino, le linee caratteristiche della superficie da ricostruire, e che siano distribuite in modo abbastanza omogeneo lungo i contorni. Dopo tale ricostruzione, si potrà generare ad esempio una triangolazione vincolata tra i contorni adiacenti per ottenere una ricostruzione della superficie.
- In primo luogo i contorni vengono analizzati in base alla curvatura, per determinare quali siano i punti significativi della forma del contorno, ossia quali sono i punti che contribuiscono maggiormente alla caratterizzazione della forma del contorno. La scelta della curvatura come indicatore principale dei punti significativi è motivato dall'ipotesi che le linee caratteristiche sulla superficie originaria siano in relazione con punti estremi della curvatura della superficie, almeno in qualche direzione. Tali linee caratteristiche quindi, sezionate dalle curve di livello, produrranno anche sulle sezioni stesse degli estremi di curvatura.
- Dopo aver classificato i punti, si passa ad un'analisi di similarità tra contorni adiacenti, utilizzando diversi criteri che possono essere usati o congiuntamente oppure in alternativa. Coppie di punti su contorni adiacenti che sono classificati simili verranno uniti a formare una linea guida. In particolare sono stati sviluppati due criteri di similarità: uno locale, basato su distanza e curvatura, ed uno globale, basato sulla similarità tra gli skeleton approssimati dei contorni stessi.
- Infine, le linee guida determinano le sezioni intermedie, e viene generata una triangolazione del set di contorni così arricchito.

2 Definizione di grafo di Reeb

Definizione 2.1

Sia $f: M \rightarrow R$ una funzione a valori reali definita su una varietà compatta M . Un grafo di Reeb è lo spazio quoziente di M ottenuto dalla relazione di equivalenza: ' \approx ' definita da

$$x_1 \approx x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

e x_1 e x_2 appartengono alla stessa componente connessa di $f^{-1}(f(x_1))$.

Si può osservare che i due punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ nel grafo di Reeb sono rappresentati dallo stesso punto se il valore di f è lo stesso e appartengono alla stessa componente connessa dell'immagine inversa di $f(x_1)$ (o di $f(x_2)$). Il grafo rappresenta tutti i punti appartenenti alla stessa classe di equivalenza della varietà M come un unico punto nello spazio quoziente. Per esempio se consideriamo il grafo di Reeb per una funzione altezza, $h(S)$, definita su una superficie $S = (x, y, z)$ immersa regolarmente in \mathbb{R}^3 (e quindi $h(x, y, z) = z$), è lo spazio quoziente dato dalla relazione di equivalenza che identifica i punti (x_1, y_1, z) e (x_2, y_2, z) se giacciono sulla stessa componente connessa della sezione orizzontale effettuata sulla superficie ad altezza z .

Ogni contorno connesso sul piano orizzontale nel grafo di Reeb è rappresentato da un punto. Il grafo di Reeb rispetto alla funzione altezza di un toro è rappresentato nella figura 2.1. I grafi di Reeb risultano utili nella visualizzazione di alcune caratteristiche delle superfici di oggetti di grosse dimensioni. Recentemente i grafi di Reeb sono stati studiati e sono state sviluppate alcune loro applicazioni da T. L. Kunii e Y. Shinagawa [1992]; inoltre un raffinamento di tali grafi è stato introdotto da A. Fomenko con lo scopo iniziale di classificare topologicamente i sistemi Hamiltoniani integrabili.

Riferimenti bibliografici per i grafi di Reeb possono essere trovati in [SKK91], [SHK91],[SH91], [FK97]. Un metodo per la costruzione del grafo di Reeb è [SILVIA].

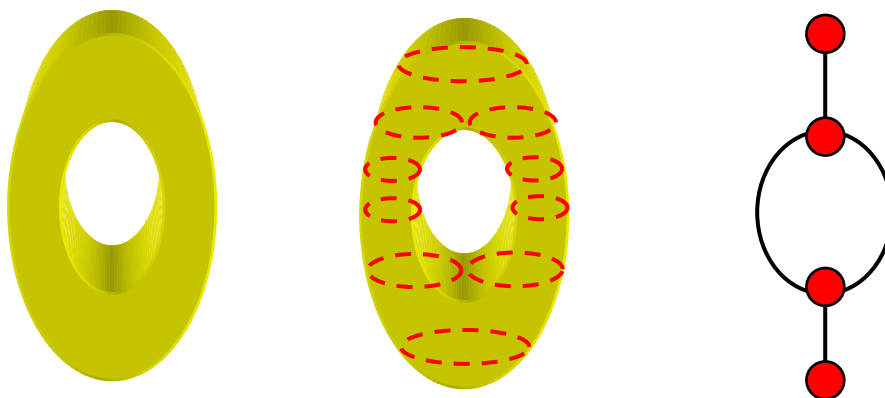


Figura 2.1. Costruzione del grafo di Reeb per un toro

2.1 Proprietà del grafo di Reeb

La definizione 2.1 definisce il grafo di Reeb come uno spazio topologico astratto. Per facilitarne la visualizzazione si può pensare ogni componente connessa di un insieme di livello, $f^{-1}(a)$, come un punto di altezza a . Al variare di a i punti della controimmagine “spazzano” un segmento, o un arco, e la topologia del grafo rimane invariata fino a che non si raggiunge un livello critico. Ai livelli critici, invece, un arco può sparire oppure diramarsi in più direzioni.

Più precisamente il grafo di Reeb è formato da due tipi di elementi: nodi e archi.

- I Nodi (o Vertici) corrispondono ai punti critici;
- Gli Archi provengono dalla parte di superficie strettamente situata tra due livelli critici.

Raggiunto un livello critico, un arco del grafo non deve necessariamente terminare: se la componente connessa da esso rappresentata non contiene valori critici a tale livello, il punto che sull'arco corrisponde a questo livello non è un nodo per il grafo bensì un punto interno all'arco. Se la funzione f tramite la quale si definisce il grafo di Reeb è una funzione di Morse semplice definita su una superficie liscia, allora i nodi del grafo sono solo di due tipi:

tipo A: I nodi rappresentano un punto di massimo o di minimo.

In questo caso essi sono le foglie del grafo: cioè esiste un solo arco che si diparte da tali nodi e punta verso l'alto nel caso il punto critico sia di minimo, verso il basso nel caso di un massimo.

tipo B: I nodi rappresentano un punto di sella.

In questo caso, poiché stiamo trattando una funzione di Morse semplice, la curva di livello critico è topologicamente una figura a forma di otto.

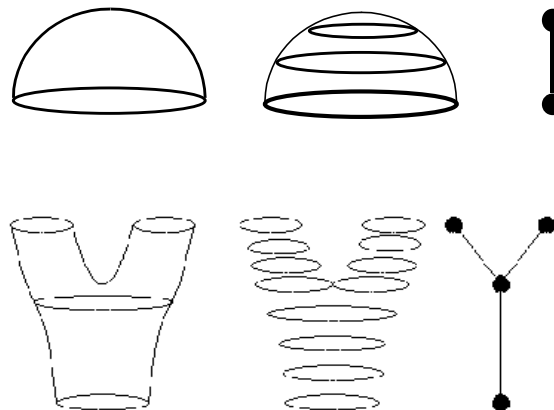


Fig. 2.2 Nodi corrispondenti a punti di massimo e di minimo e ad un punto di sella.

Da un lato, quindi, le curve di livello diventano un unico cerchio e dall'altro sono rappresentate da due cerchi distinti. Nella rappresentazione di un punto di sella non degenerare nel grafo di Reeb, dunque, concorrono tre archi: due puntano verso l'alto e l'altro verso il basso oppure viceversa. Per immagazzinare ulteriori informazioni nel grafo si può associare un orientamento agli archi concorde con la direzione di crescita di f ; a tal guisa gli archi del grafo, rispetto al loro comportamento nei nodi, possono essere divisi in due classi: quelli in entrata e quelli in uscita. Nel caso di funzioni di Morse complicate (oppure in cui la funzione altezza non sia di Morse ma solo liscia), anche archi dello stesso tipo possono non essere equivalenti, e i punti critici non possono essere rappresentati con solo due tipi di nodi. Si osserva che, nel caso di funzioni a un sol valore, cioè che possono essere espresse nella forma $\{ (x, y, z)$

appartenenti a $R^3: z = f(x, y)$ }, se si considera l'aggiunta di un punto di “minimo virtuale globale” cioè un minimo assoluto fittizio che “chiude” la superficie allo scopo di ottenere un oggetto 3D, il grafo di Reeb assume sempre la forma di un albero (la radice in questo caso risulta essere il punto di minimo virtuale aggiunto). (A questo proposito si veda [IKS92]).

3 Il problema della ricostruzione

Modellare ed analizzare oggetti tridimensionali a partire da sezioni parallele è una metodologia comune a diverse discipline: ad esempio un biologo usa il microscopio per vedere e fotografare serie di sezioni di un organismo; un paleontologo può sezionare resti fossili ed ottenere immagini del suo aspetto. In radiologia si possono ottenere dati importanti sulla salute del paziente grazie alla tomografia assiale computerizzata (TAC), o alla risonanza magnetica. Nel campo del *Reverse Engineering*, un modello che si vuole riprodurre può essere scannerizzato seguendo linee quasi parallele (profili). In ognuno di questi casi è necessario ricostruire un modello della superficie dalla quale sono stati ottenuti i dati.

In generale il problema della ricostruzione da contorni è piuttosto complesso, a causa principalmente delle situazioni in cui alcune sezioni dell'oggetto sono composte da più di un contorno. In tal caso, infatti, è necessario stabilire, o almeno ipotizzare, quale sia la ricostruzione corretta della superficie. E' opportuno semplificare il problema imponendo ad esempio che la superficie non abbia “nodi” e che il numero di sezioni sia sufficiente rispetto alla forma dell'oggetto. Possiamo pensare ad un oggetto che determina più contorni in una sezione come se fosse composto da un certo numero di “tubi” che si biforcano e si riuniscono, dove il numero dei contorni in una sezione, in generale, cambia.

Questo problema non si pone se si hanno a disposizione le informazioni a proposito delle relazioni di adiacenza tra i contorni. E' questo il caso del grafo di Reeb, in cui i contorni sono rappresentati dai nodi, e gli archi indicano quali tra i contorni devono essere collegati fra loro a formare la superficie. Il grafo rappresenta l'adiacenza topologica dell'insieme di contorni, senza specificare nel dettaglio le connessioni geometriche tra i vertici dei contorni.

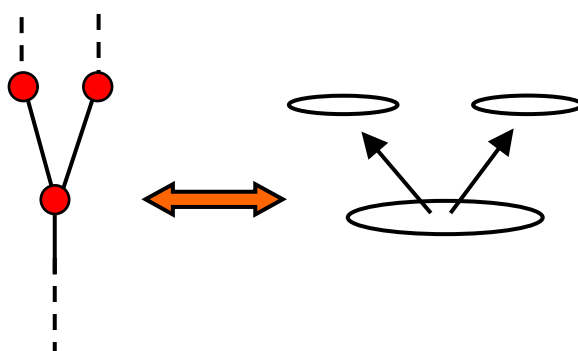


Fig 3.1 sezioni adiacenti secondo la struttura del grafo di Reeb

3.1 Scomposizione del problema

Il processo di ricostruzione di un oggetto da contorni può essere scomposto in quattro sottoproblemi: il problema della Corrispondenza (tra più contorni su due diverse sezioni), il problema del Tiling (triangolare la “fascia” tra due contorni), il problema

del Branching (biforcazioni) e il problema del Fitting di superfici [MSS92], come illustrato in figura 3.2.

Decomporre il problema in questo modo dà alcuni vantaggi: la scomposizione consente un approccio modulare, ed inoltre il metodo usato per risolvere uno dei sottoproblemi può essere modificato senza dover alterare i metodi usati per risolvere gli altri sottoproblemi. Alcuni dei sottoproblemi sono particolarmente difficili da risolvere automaticamente; se il risultato computato ad un qualunque passo è inaccettabile, l'approccio modulare consente l'interazione con l'utente per correggere la soluzione prima di passare a risolvere il sottoproblema seguente.

3.1.1 Il problema della corrispondenza

Il problema della corrispondenza sorge quando un oggetto è rappresentato da più di un contorno in alcune sezioni dell'insieme dei dati, oppure quando nell'insieme di dati c'è più di un oggetto. Quando un singolo oggetto è rappresentato da più contorni in alcune o in tutte le sezioni, è necessario determinare quale dei contorni in una sezione deve essere connesso ad ogni contorno della sezione adiacente; una soluzione al problema della corrispondenza deve determinare come meglio connettere i contorni di un data set alla luce di queste ed altre possibilità.

In alcuni casi il problema della corrispondenza può essere risolto facilmente esaminando la sovrapposizione dei contorni appartenenti ad una coppia di sezioni quando vengono proiettati sullo stesso piano. Questo approccio non è ottimale nel caso in cui lo spazio tra le sezioni è grande e l'oggetto interseca i piani delle sezioni con un angolo acuto, in modo che i contorni su sezioni adiacenti non si sovrappongono. Spesso, il solo spazio necessario alla memorizzazione dei dati non consente una minore spaziatura tra le sezioni. Se è possibile collezionare un numero superiore di dati, questo è sicuramente l'approccio migliore; se la spaziatura tra le sezioni è troppo grande, determinare la corretta relazione di adiacenza tra contorni può non essere possibile.

Una soluzione al problema della corrispondenza può essere rappresentato dal grafo di Reeb, in cui i contorni sono rappresentati dai nodi, e gli archi indicano quali contorni devono essere linkati tramite una superficie. Il grafo rappresenta l'adiacenza topologica dell'insieme di contorni, senza specificare nel dettaglio le connessioni topologiche tra tutti i vertici dei contorni. La soluzione del Tiling problem determina tale informazione.

3.1.2 Tiling problem

La soluzione del Tiling problem per una coppia di contorni piani poligonali è una superficie piana avente i contorni come linee di contorno. La superficie prende la forma di una striscia di triangoli, ognuno dei quali è generato unendo un lato di uno dei due contorni con un vertice dell'altro. Poichè le superfici degli oggetti reali non hanno auto-intersezioni, poniamo l'ulteriore condizione che i triangoli non si intersechino se non lungo gli spigoli. La Fig. 3.2 è un esempio del tiling problem e della sua soluzione.

Il tiling problem è facilmente risolvibile se i contorni hanno forma, dimensioni ed orientazione simili. Altrimenti, come spesso accade nei dati reali, calcolare un tiling soddisfacente è più difficile. Parte del problema è il fatto che la funzione usata per calcolare il tiling non sempre è adatta agli oggetti da ricostruire, o non usa informazioni sufficienti a trovare una buona soluzione. Le funzioni che si usano comunemente cercano di minimizzare o massimizzare alcune funzioni del tiling semplici da calcolare. Forme complesse, come la corteccia cerebrale del cervello,

sono modellate in modo troppo povero da tali semplici funzioni metriche. Soluzioni accettabili in tali casi complessi richiedono una visione più globale dell'insieme dei dati e una conoscenza più approfondita del dominio di quella che viene usata dai metodi esistenti. A causa della difficoltà del problema, l'interazione con l'utente ha una grande utilità in ogni sistema pratico per la ricostruzione di superfici a partire da contorni.

Un buon algoritmo di matching di contorni dovrebbe soddisfare alcune importanti caratteristiche, quali:

- produrre buone corrispondenze sull'intero dominio;
- consentire all'utente di correggere le zone in cui le corrispondenze trovate risultino poco soddisfacenti;
- essere in grado di produrre un buon matching anche tra contorni con notevoli differenze di forma;
- essere computazionalmente efficiente.

Sfortunatamente nessun algoritmo esistente soddisfa tutti questi criteri.

3.1.3 *Branching problem*

Molti metodi per ricostruire una soluzione al tiling problem richiedono che l'input sia esattamente un contorno per ogni sezione, una restrizione che è violata se un oggetto si ramifica. In una diramazione, un singolo "tubo" può suddividersi in più "tubi" (una diramazione *one-to-many*), oppure un certo numero di "tubi" può riunirsi a formare un singolo "tubo" e poi ramificarsi nuovamente (una diramazione *many-to-many*). Un modo per risolvere il problema è quello di sviluppare metodi che modificano i contorni nelle diramazioni in modo da soddisfare la corrispondenza uno a uno richiesta dagli algoritmi di tiling. Un altro è quello di sviluppare una soluzione diretta del problema: il metodo della triangolazione di Delaunay di Boissonnat [BOI88] è una di tali soluzioni. La strategia che usiamo è quella di formare contorni composti da contorni individuali derivati da una diramazione, o di suddividere un complesso contorno che precede una diramazione in "sottocontorni" per stabilire un mapping uno a uno tra i contorni che precedono e che seguono la diramazione. Un algoritmo che segue tale strategia deve saper decidere quando dividere un contorno in sottocontorni o quando formare un contorno dai contorni derivati da una diramazione. Deve inoltre specificare dove i contorni devono essere uniti se bisogna che si fondano a formarne uno unico, o dove dividerne uno singolo quando esso deve essere scomposto. Poiché questo dipende dalla geometria della diramazione, può essere difficile decidere dove queste modifiche debbano essere fatte. La fig. 3.3 mostra uno dei casi che un algoritmo per la costruzione automatica delle diramazioni deve affrontare. La frammentazione del contorno che precede la diramazione verrà corretta quando tale contorno sarà connesso con l'altra sezione adiacente. Notare il risultato insoddisfacente nella zona dello stretto corridoio tra due contorni della sezione che segue la diramazione.

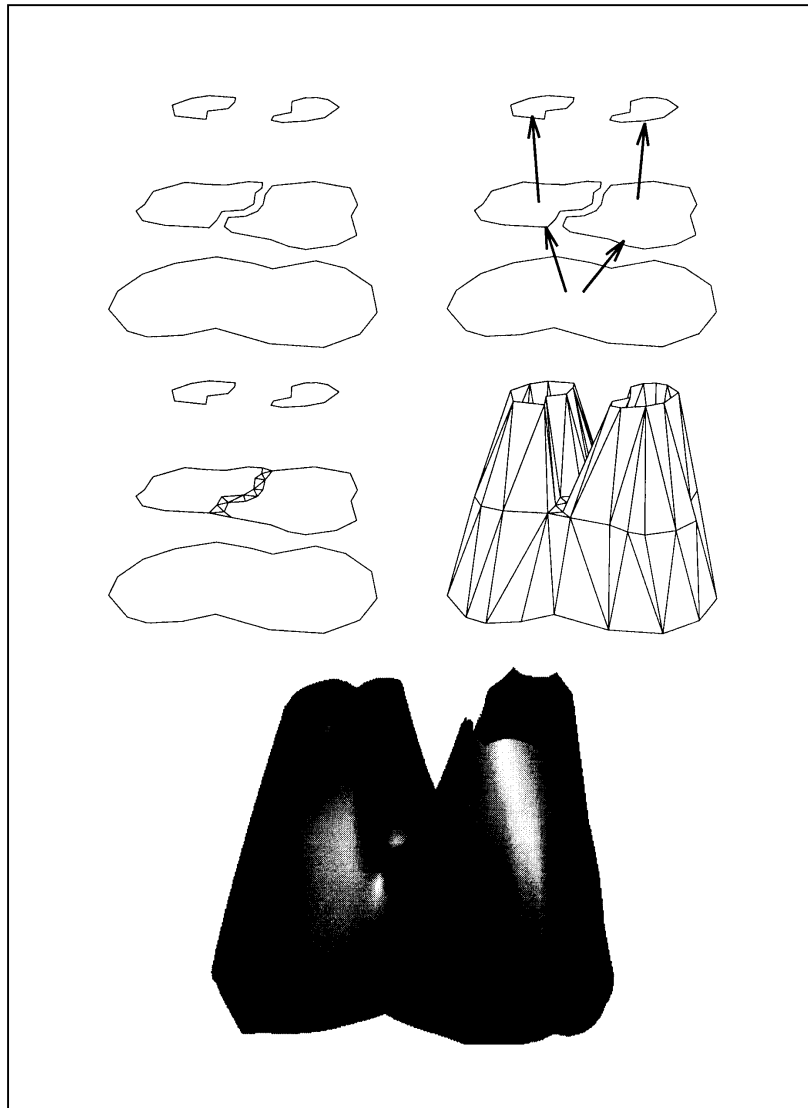


Fig 3.2 Ricostruzione della superficie di un oggetto a partire da contorni. Possiamo vedere, in alto a sinistra, i contorni dati in input; a destra: la soluzione del problema della corrispondenza determina quali contorni connettere; al centro a sinistra la soluzione del branching problem che si occupa dei casi di diramazione; a destra il tiling problem costruisce una triangolazione tra i contorni; in basso: il problema di surface fitting costruisce la superficie finale.

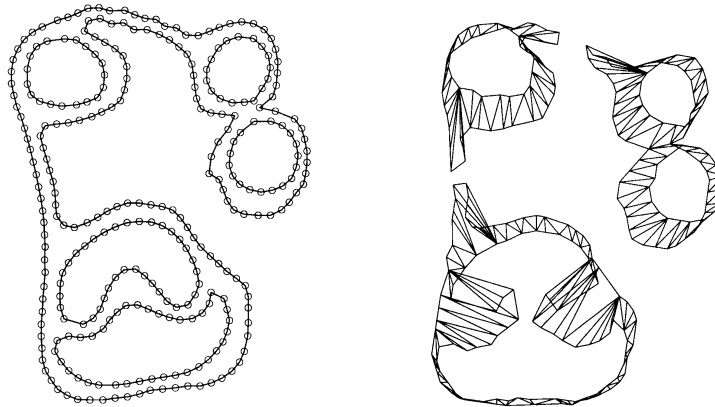


fig. 3.3 A sinistra: un insieme di contorni che rappresenta un oggetto con diramazioni con una complessa geometria di branching. I contorni si trovano su sezioni adiacenti, viste dall'alto. A destra: la superficie triangolata trovata con il metodo di Boissonnat.

3.1.4 Surface fitting

Il risultato che si ottiene dopo aver risolto il problema della corrispondenza, il branching e il tiling problem, è una triangolazione che è un'approssimazione di una superficie consistente con i contorni. Per alcuni scopi, questo risultato può essere una soluzione adeguata. Se la frequenza di campionamento dei dati lungo il perimetro dei contorni è sufficientemente elevata e la distanza tra le sezioni è abbastanza piccola, la superficie triangolata così ottenuta può essere accettabile: altrimenti, è necessario un ulteriore passo di Surface Fitting. Tale algoritmo usa le informazioni di adiacenza della triangolazione per costruire un insieme di "pezzi" di superficie parametrica tale che in ogni punto la superficie risulti continua. Poiché una collezione di contorni, generalmente, non fornisce informazioni sulla normale alla superficie nei vertici dati, è desiderabile avere a disposizione un algoritmo di fitting che non richieda tale informazione. Un metodo che soddisfa queste caratteristiche è descritto da Halstead, Kass e DeRose [HKD83].

4 Individuazione delle corrispondenze

Affrontiamo ora il problema del riconoscimento di punti corrispondenti su diversi contorni per mezzo di alcuni criteri di similarità; in particolare si analizza l'aspetto della vicinanza, della similarità di curvatura e di corrispondenza di posizione nella forma del contorno dei punti.

Un contorno immerso in uno spazio tridimensionale è rappresentato da una sequenza ordinata di punti di $P_i = \{ P_i \in R^3, P_i = (x_i, y_i, z_i), 0 < i < N \}$, dove N è il numero di punti che formano il contorno. Il nostro scopo è quello di classificare questi punti in base a diversi criteri per stabilire il maggior numero possibile di corrispondenze tra punti di contorni adiacenti (rispetto all'asse z). In questo modo vengono evidenziate delle "linee guida" che collegano i punti simili tra i vari contorni, che identificano le caratteristiche principali dell'oggetto. Una volta stabilite le corrispondenze, si esegue una interpolazione tra i vertici corrispondenti e si genera in questo modo il contorno intermedio.

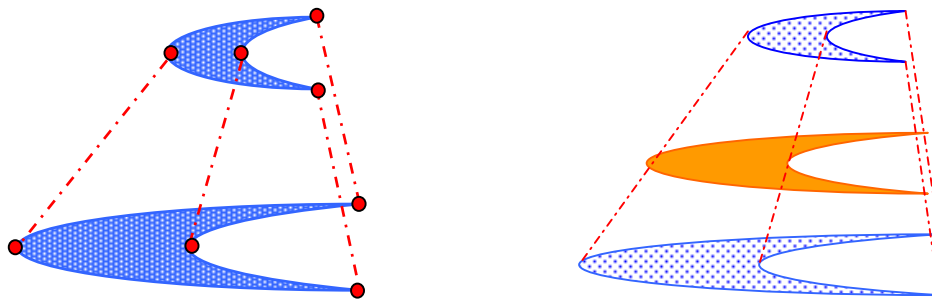


Fig 4.1 A sinistra: due contorni consecutivi. Sono evidenziati i punti significativi, i loro corrispondenti e le linee guida. A destra: sezione intermedia ottenuta per interpolazione dei punti corrispondenti sul contorno superiore e inferiore.

Questo processo è molto utile ai fini della ricostruzione dell'oggetto tridimensionale: grazie alle nuove sezioni intermedie così generate si ottiene infatti un campionamento più fitto dell'oggetto. Questo porterà ad una ricostruzione più precisa, poiché alla fine del procedimento, tutti i punti (sia delle vecchie sia delle nuove sezioni) saranno assemblati in una triangolazione 3D (il modello dell'oggetto).

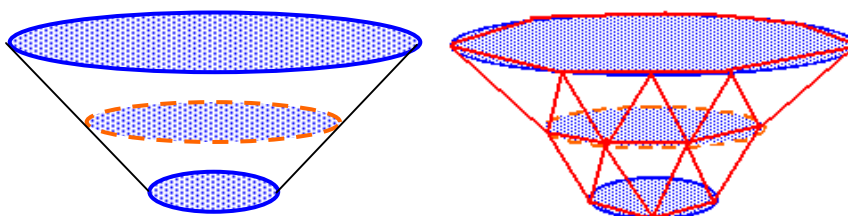


Fig 4.2 Triangolazione 3D del nuovo insieme di punti.

Lo schema generale dell'algorithm di ricostruzione è perciò riassumibile nei seguenti tre punti:

- si stabiliscono i punti simili;
- si generano (tramite interpolazione guidata dalle similarità trovate) le linee guida e di conseguenza le sezioni intermedie;
- si triangola l'insieme di punti più vincoli così ottenuti.

La scelta di un criterio per stabilire corrispondenze tra i vertici è naturalmente di fondamentale importanza, poiché il fatto di considerare anche un numero molto limitato di corrispondenze inesatte può portare a risultati non soddisfacenti, anche nel

caso di forme molto semplici. Gli spigoli dei poligoni così generati possono facilmente avere auto-intersezioni, portando così ad un blending di contorni assolutamente privo di senso. Semplici proprietà geometriche, come la lunghezza, gli angoli e le aree, possono variare in maniera inconsistente. Questo purtroppo accade quando l'inseguimento di ogni vertice lungo i contorni avviene indipendentemente da tutti gli altri vertici (vale a dire che le corrispondenze sono stabilite solo in base a caratteristiche "locali"), senza seguire vincoli di forma dell'oggetto (vale a dire senza preoccuparsi di preservarne le linee caratteristiche) e senza considerare le caratteristiche di un vertice rispetto all'intero contorno a cui appartiene, nella sua globalità.

Per questo motivo il metodo da noi seguito per stabilire punti "simili" è basato su vari criteri, sia di carattere "locale" sia di carattere "globale", al fine di garantire la consistenza dei poligoni intermedi e il rispetto di vincoli di forma. Naturalmente la scelta del criterio migliore dipende fortemente dall'input; per questo i risultati ottimali si ottengono tramite l'interazione con l'utente. Tuttavia tale interazione può essere ridotta al minimo utilizzando contemporaneamente tutti i criteri sopra descritti, e decidendo poi le coppie di punti dando un "voto" alle corrispondenze trovate con un criterio piuttosto che con un altro. Il peso di ogni criterio deve essere scelto dall'utente in base al tipo di input.

4.1 Criteri per determinare similarità di punti

In questo capitolo abbiamo finora esposto diversi metodi per stabilire la similarità fra punti appartenenti a diversi contorni. Vediamo ora i criteri da noi scelti per stabilire quando due punti possono considerarsi simili, ed essere così "attaccati" per formare un edge appartenente al tiling dei due contorni.

4.1.1 Similarità per vicinanza.

Avendo due contorni formati da punti in 3D, il primo e più semplice criterio per trovare coppie di punti corrispondenti sui due contorni è sicuramente quello di vicinanza:

- (i) scelto P appartenente al contorno C_1 , affermeremo che Q appartenente a C_2 è simile (secondo il criterio di vicinanza) a P se $d(P, Q) \leq \bar{d}$

dove la distanza \bar{d} può essere definita dall'utente, secondo le particolari esigenze.

Nel nostro caso, abbiamo immaginato di proiettare il contorno superiore sul piano del contorno inferiore, e di calcolare poi la distanza in 2D su tale piano. Allora, imporre che un punto di C_2 abbia distanza inferiore a \bar{d} da $P \in C_1$, significa richiedere che la sua proiezione sul piano di C_1 cada all'interno di un cerchio di centro P e di raggio \bar{d} . La distanza di soglia \bar{d} può essere la stessa per tutti i punti di C_1 , oppure si potrebbe assegnarle un diverso valore per ogni punto di C_1 di cui si vogliono identificare i punti simili per vicinanza.

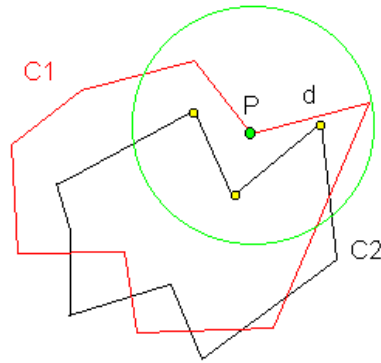


Figura 4.3 Sono evidenziati i punti di C_2 a distanza minore di d da P appartenente a C_1 .

Ancora, si potrebbe definire la similitudine per vicinanza come:

$$(ii) \quad P \approx_v Q \quad sse \quad d(P, Q) = \min \{ d(P, P') \mid P' \in C_2 \}$$

In questo caso, se consideriamo sempre la proiezione del secondo contorno sul primo, questo equivale a scegliere come punti simili solo quelli più vicini a P di tutti gli altri punti di C_2 .

Oppure ancora: definendo

$$(iii) \quad P \approx_v Q \quad sse \quad d(P, Q) < d(P', Q) \quad \forall P' \in C_1$$

si intende che tutti i punti di C_2 che sono più vicini a P che a qualsiasi altro punto di C_1 saranno considerati simili a P . Questo equivale a richiedere che, costruito il diagramma di Voronoi dell'insieme dei punti di C_1 , i punti di C_2 simili a P cadano nella regione di Voronoi associata a P .

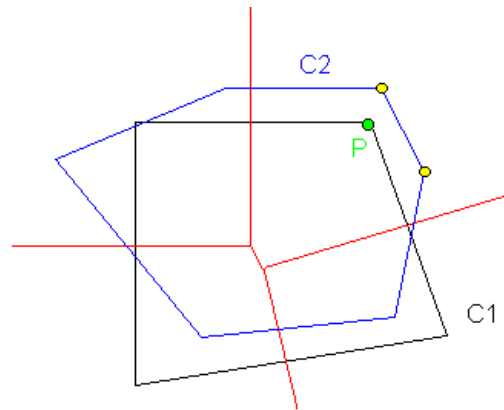


Figura 4.4 Sono evidenziati i punti di C_2 che cadono nella regione di Voronoi di P .

Nella nostra implementazione si è scelto di utilizzare la definizione (ii) leggermente modificata in questo modo:

$$(iv) \quad P \approx_v Q \quad sse \quad d(P, Q) \leq \min \{ d(P, P') \mid P' \in C_2 \} + \bar{d} \varepsilon.$$

Così non deve essere necessariamente definito dall'utente il valore di \bar{d} (come nel caso della definizione (i)), ma può eventualmente essere specificato un valore non nullo per $d \varepsilon$.

4.1.2 Similarità per curvatura.

Ad ogni punto su un contorno è possibile associare una informazione molto importante per il nostro scopo: si tratta del valore della curvatura del contorno in quel punto, o meglio, poiché lavoriamo non su una curva continua ma bensì su una successione di punti discreti, dell'ampiezza dell'angolo formato dal punto con il suo predecessore e il suo successivo lungo il contorno.

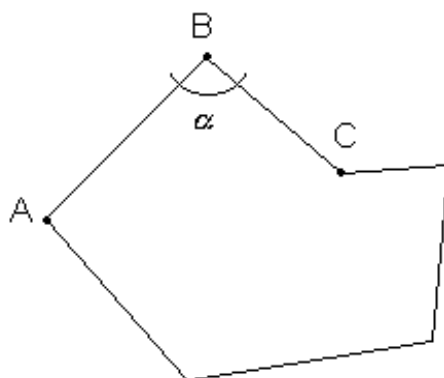


Fig. 4.5 La curvatura in B.

Sempre nell'ipotesi che due contorni adiacenti (secondo l'asse z) siano "abbastanza simili", due punti corrispondenti su due sezioni consecutive avranno simile curvatura. Perciò un altro modo per scoprire punti simili tra loro è quello di cercare punti che abbiano un angolo "simile" tra loro. Da questo punto di vista potremmo dire che

(i) $P \in C_1$ e $Q \in C_2$ sono simili per curvatura sse l'angolo in P non differisce dall'angolo in Q più di un certo angolo soglia $\bar{\alpha}$, cioè:

$$P \approx_{curv} Q \quad sse \quad |\alpha_P - \alpha_Q| < \bar{\alpha}$$

Nella nostra implementazione, tuttavia abbiamo ritenuto opportuno utilizzare come criterio di similarità la curvatura definita non come l'ampiezza dell'angolo, ma come misura del raggio del cerchio passante per il vertice in questione e per il punto che lo precede e per il punto che lo segue sul contorno:

$$(ii) \quad P \approx_{curv} Q \quad sse \quad R(P_{prec}, P, P_{sec}) \leq \bar{R}$$

dove \bar{R} è un valore di soglia che può essere deciso dall'utente, e variato a piacere a seconda delle esigenze.

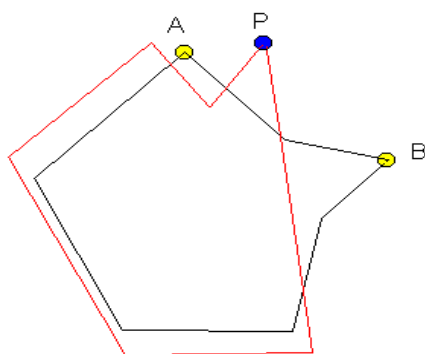


Fig. 4.6 P è più vicino ad A, ma secondo il criterio di curvatura è più simile a B.

La scelta di seguire la definizione (ii) deriva dalla necessità di “catturare” corrispondenze che in molti casi pratici risultano “sensate” all’occhio umano, ma che non sarebbero considerate secondo la definizione (i), come nell’esempio mostrato nella figura seguente:

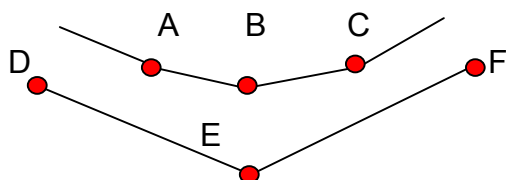


Fig. 4.7 I punti B ed E sono visivamente corrispondenti. Gli angoli in B e in E sono abbastanza diversi, mentre i raggi delle circonferenze passanti per A, B, C e per D, E, F sono simili.

Inoltre si osservi l’importanza dell’impostare valori diversi di \bar{R} a seconda del tipo dei dati: nel caso di un manufatto, è probabile che ci si trovi a trattare un oggetto con caratteristiche (scanalature, protuberanze, biforcazioni...) nette e ben definite; dunque ci si aspetta che da un contorno all’altro i punti corrispondenti mantengano una curvatura molto simile (per cui sarà da usarsi un piccolo valore di \bar{R}); al contrario di quanto accade invece per le superfici naturali (curve di livello di zone geografiche) in cui i cambi di curvatura sono molto più dolci e difficili da interpretare.

4.1.3 Similarità per concavità.

Un’altra caratteristica di un punto su un contorno è il fatto di essere un punto concavo o convesso. Considerando sempre la proiezione in 2D del contorno, i punti che lo compongono formano rientranze e protusioni. Nell’ipotesi che il campionamento delle sezioni sia abbastanza fitto, è ragionevole pensare che un punto concavo resti tale anche sul contorno seguente.

Naturalmente questo criterio è troppo poco restrittivo per costituire un metodo per individuare corrispondenze, ma resta comunque un valido aiuto per riconoscere, al contrario, i punti che non possono essere in corrispondenza tra di loro, riducendo così l’area di ricerca. A questo proposito, si veda la figura seguente: si nota chiaramente

che i punti P, A, e B hanno tutti una curvatura di 90° ; tuttavia, anche se P è più vicino a B, sarebbe errato considerarli simili. Scartando il punto B in base al criterio di similarità per concavità / convessità invece, P sarà considerato simile ad A, come è giusto.

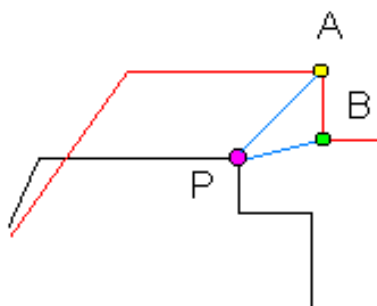


Fig.4.8 Considerando la similarità per concavità si attacca P con A e non P con B.

4.1.4 Similarità per scheletro

Un altro mezzo per descrivere una forma bidimensionale e la Medial Axis Transformation, proposta per la prima volta da Blum nel 1967, (cfr. [B67]).

La Medial Axis Transformation è un processo che riduce regioni piane a una struttura scheletrale che conserva molte informazioni sulla struttura della regione.

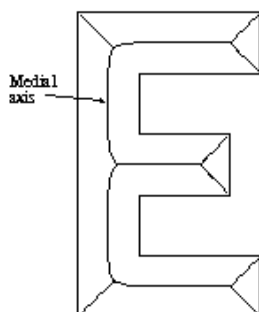


Fig.4.9 Medial Axis di una " E ".

Per definire similarità di punti su sezioni diverse di un oggetto è importante soprattutto far corrispondere le strutture portanti dei due contorni. Per questo il confronto di due contorni potrebbe essere ridotto al confronto dei loro scheletri; in questo modo si minimizzano i dati da processare, mantenendo però l'informazione sulla struttura di base della forma dei contorni.

Ci sono molte definizioni equivalenti fra loro della Medial Axis Transformation. La più intuitiva è la seguente: immaginate che l'interno della figura sia composto di erba secca, mentre il contorno sia composto da erba bagnata. Supponiamo che venga appiccato il fuoco simultaneamente in tutti i punti lungo il contorno della figura. Il fuoco si propagherà a velocità uniforme, verso il centro della figura. In certi punti, comunque, il fronte di fuoco generato da un lato del contorno si incontrerà con un

altro fronte, e i due si estingueranno a vicenda. L'insieme di tali punti definiscono lo scheletro della figura.

A volte può risultare utile descrivere lo scheletro in termini di distanze piuttosto che di fronti di fuoco che si estinguono. Prima di presentare la definizione, è necessario precisare la nozione di distanza di un punto dato da un insieme di punti. La distanza del punto x dall'insieme A è definita come la distanza di x dal punto di A più vicino a x .

Formalmente:

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, y) : y \in A \}$$

Dato un poligono qualunque di contorno B , è possibile associare ad ogni punto del poligono la sua distanza da B . Per alcuni punti (ad esempio il punto x), comunque, può succedere che esistano due (o più) punti del contorno (ad esempio y e z) che sono a distanza minima da x , cioè tali che

$$d(x, B) = d(x, y) = d(x, z).$$

I punti che si comportano come x sono detti punti singolari; essi definiscono lo scheletro. Questa definizione rende esplicita la dipendenza dello scheletro dalla scelta della distanza d : in genere si assume per d la metrica Euclidea.

Un altro modo per definire la Medial Axis è il luogo dei cerchi (almeno) bitangenti inscrivibili nel poligono considerato. La figura seguente illustra questo per una forma rettangolare.

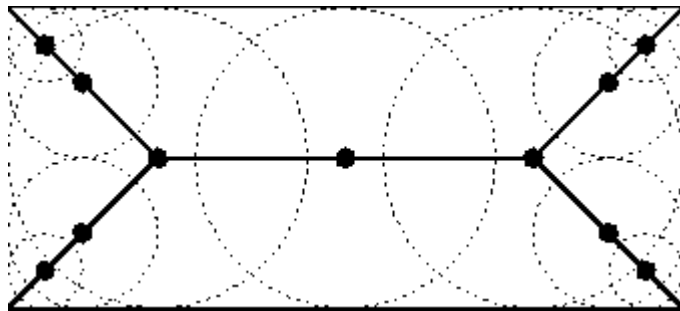


Fig 4.10 Scheletro di un rettangolo definito in termini di cerchi bitangenti.

Ad ogni punto x dello scheletro di una forma poligonale di contorno B , possiamo associare una distanza $q(x)$ e una velocità di propagazione $v(x)$ definita come segue:

$$q(x) = d(x, B) \quad e \quad v(x) = (dq / ds)^{-1}$$

dove s è la distanza da x al contorno calcolata lungo lo scheletro.

Questo risulta più immediato se si pensa a $q(x)$ come al tempo che impiega il fuoco a raggiungere il punto x , piuttosto che alla distanza di x dal boundary. Poiché la velocità del fuoco è costante nella direzione normale al fronte, le due differiscono solo per una costante moltiplicativa.

Come mostrato in figura, poiché $q(x) = s * \sin \theta$, la velocità di propagazione $v(x)$ diventa $\frac{1}{\sin \theta}$. Così, maggiore è l'angolo tra i due lati del contorno, minore è la velocità di propagazione lungo quel segmento di scheletro. I valori limite della velocità di propagazione sono:

- 1 quando l'angolo θ vale zero, cioè l'angolo degenera in una linea retta
- ∞ quando $\theta = 90^\circ$, ossia quando i due lati del boundary diventano paralleli.

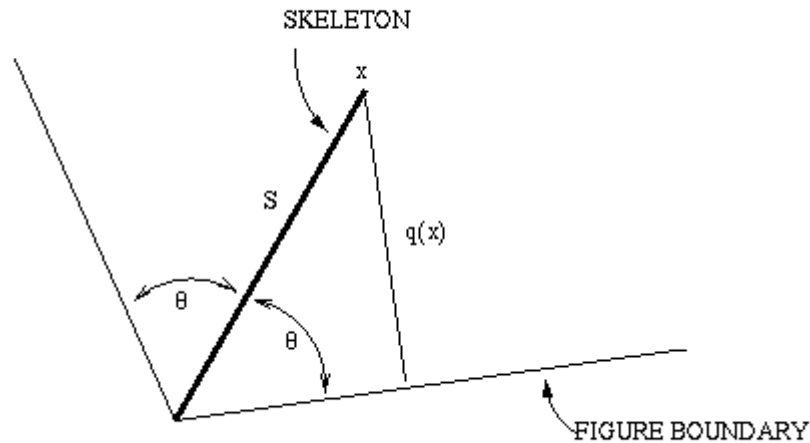


Fig.4.11 Lo scheletro vicino a un angolo del boundary.

In questo modo, ignorare i rami dello scheletro che hanno minore velocità di propagazione corrisponde in un certo senso ad ignorare ondulazioni in linee “quasi rette”.

5 Algoritmo di ricostruzione

Come abbiamo visto nel paragrafo 3, in cui è stato esposto il problema generale della ricostruzione e la sua possibile scomposizione in sottoproblemi, la conoscenza a priori delle adiacenze topologiche tra i contorni, memorizzate tramite il grafo di Reeb, risolve il problema della corrispondenza tra contorni.

Inoltre, decidendo di rappresentare la superficie finale ricostruita tramite una triangolazione, il processo di ricostruzione si riduce alla soluzione dei problemi di *branching* e di *tiling*. Vedremo perciò come vengono determinate coppie di punti simili tramite i criteri di similarità e come, a partire da queste, possono essere determinati alcuni degli spigoli della triangolazione 3D che modella la superficie dell'oggetto; verrà mostrato inoltre il comportamento dell'algoritmo nel caso di situazioni di *branching*.

Intuitivamente, il metodo si basa su un'analisi di similarità tra contorni adiacenti rispetto al grafo di Reeb, utilizzando diversi criteri che possono essere usati o congiuntamente oppure in alternativa. Coppie di punti su contorni adiacenti che sono classificati *simili* dall'algoritmo verranno uniti a formare da una *linea guida* che può essere efficacemente utilizzata da uno specifico algoritmo di triangolazione tra contorni che può ad esempio utilizzare tali linee come vincoli [Biasotti 1999].

I passi principali dell'algoritmo per il riconoscimento di linee guida tra due contorni adiacenti sono i seguenti:

1. Determinare punti significativi sui contorni.
2. Trovare i punti vicini a quelli significativi sul contorno adiacente.
3. Determinare tra questi quelli più simili per curvatura. Così si ottengono alcune coppie di punti simili.
4. Calcolare la medial axis approssimata dei contorni.
5. Confrontare le medial axis tra di loro per ottenere altre coppie di punti simili.
6. Si procede con un merge delle coppie di punti determinate al passo 3 con quelle determinate al passo 6.
7. Si eliminano dall'insieme delle coppie di punti simili quelle che generano spigoli che si intersecano tra di loro.

Questo procedimento viene ripetuto per ogni coppia di contorni adiacenti, scandendoli dal basso verso l'alto. Vediamo ora nel dettaglio i passi dell'algoritmo di ricostruzione appena elencati.

5.1 Determinazione di punti significativi

Come già detto, l'obiettivo principale è quello di determinare tra due contorni adiacenti alcuni segmenti che agiscono come "linee guida" nella generazione della triangolazione, nel senso che tali segmenti saranno forzati a far parte dell'insieme degli spigoli della triangolazione. Naturalmente le linee guida devono essere definite in modo sensato: vogliamo cioè che esse individuino, od almeno approssimino, le linee caratteristiche della superficie da ricostruire, e che siano distribuite in modo abbastanza omogeneo lungo i contorni. Dopo tale ricostruzione, si potrà generare una triangolazione vincolata a tale insieme di linee. In questo modo viene limitata la possibilità di generare una triangolazione "a ventaglio" come visto in figura 3.9 a proposito del tiling tramite il metodo di minima distanza.

Dati due contorni adiacenti A e B, il primo passo nell'individuazione di un siffatto insieme di spigoli consiste nel selezionare, tra tutti i vertici del contorno A, un sottoinsieme di punti, che chiameremo *punti significativi*; dopodichè cercheremo di attaccare ciascuno dei punti significativi con uno o più vertici del contorno B, generando linee guida "sensate".

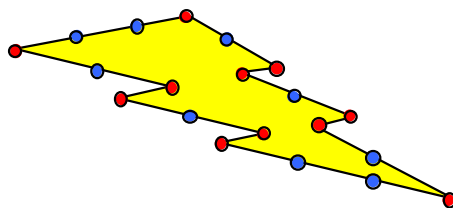


Fig. 5.1 Un contorno a forma di saetta; in rosso sono marcati i punti significativi, in blu gli altri punti.

In questa implementazione, abbiamo scelto di classificare i punti come significativi in base alla curvatura, scartando quindi i punti allineati e quelli a curvatura molto bassa. Questa scelta è stata motivata dall'ipotesi che le linee caratteristiche sulla superficie originaria siano in relazione con punti estremi della curvatura della superficie, almeno in qualche direzione. Tali linee caratteristiche quindi, sezionate dalle curve di livello, produrranno anche sulle sezioni stesse degli estremi di curvatura, che suggeriscono la direzione delle linee guida della superficie stessa.

Naturalmente la scelta di un angolo soglia per mezzo del quale individuare i punti significativi non può essere universale, per ogni tipo di input: come già detto, si possono presentare casi in cui i contorni presentano curvature ben nette, con angoli abbastanza acuti, e casi in cui, al contrario, la forma di un contorno risulta più morbida e liscia con valori di curvatura abbastanza uniformi e angoli vicini a 180° . Per questo motivo abbiamo scelto di permettere all'utente di specificare il valore di soglia per la determinazione dei punti significativi. Saranno considerati significativi tutti i punti il cui angolo (sia esso concavo o convesso) risulterà inferiore a tale soglia.

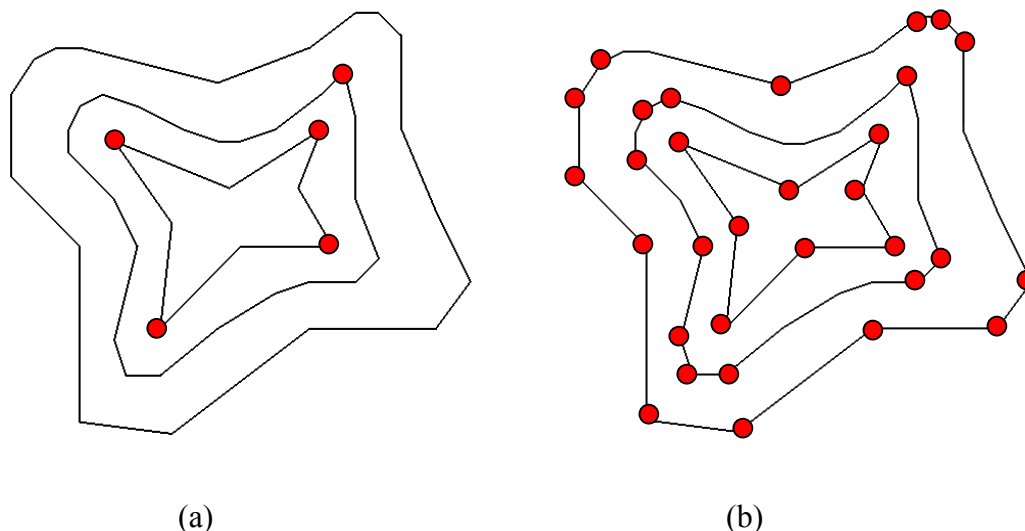


Fig. 5.2 I punti significativi trovati su un set di tre contorni, con angolo soglia pari a 90° (a) e a 150° (b).

In figura 5.2, vediamo come al crescere della soglia i punti classificati come significativi aumentano notevolmente.

5.2 Valutazione della similarità in base alla vicinanza.

Una volta determinati i punti significativi rispetto alla curvatura sui contorni A e B, determiniamo per ognuno dei punti significativi del contorno A quelli sul contorno B simili ad essi secondo il criterio di vicinanza. Anche in questo caso è difficile scegliere una distanza soglia ottimale per tutti i casi: la soglia infatti deve essere abbastanza grande da consentire il riconoscimento di un buon numero di punti vicini, ma allo stesso tempo deve essere abbastanza piccola da evitare di considerare simili anche punti molto distanti tra loro. Per questo motivo, anche nel passo di individuazione di punti vicini, è possibile che l'utente definisca una distanza soglia d_ϵ ottimale in base all'input.

Ricordiamo che la similarità in base alla vicinanza viene calcolata tenendo conto della proiezione dei punti del contorno B sul piano definito dal contorno A. Tale proiezione è necessaria perché punti vicini nel senso della distanza Euclidea tradizionale, possono essere invece "lontani" sulla superficie. Proiettare i contorni sullo stesso piano non risolve ovviamente il problema in tutti i casi, ma soprattutto in casi semplici in cui la proiezione di un contorno sia inclusa nell'altro.

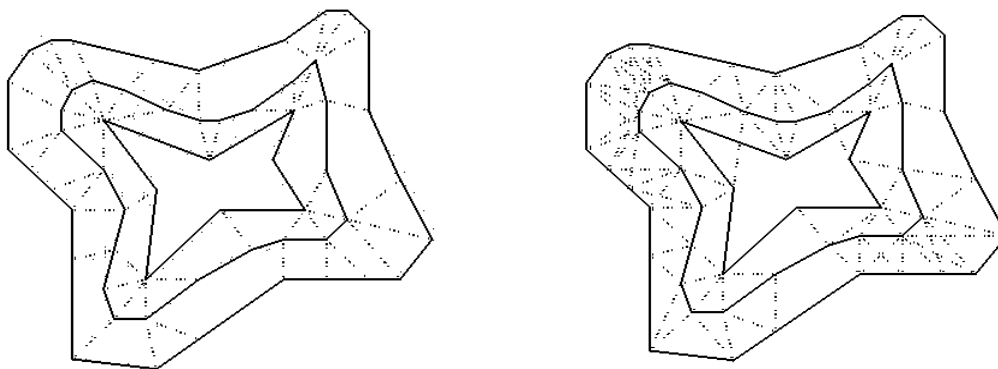


Fig. 5.3 Relazioni di similarità per vicinanza trovate fra punti significativi a 150° dei tre contorni della fig. 5.2 con due diverse soglie di distanza.

5.3 Individuazione punti con simile curvatura

Una volta selezionati i punti significativi e determinate le corrispondenze per vicinanza, abbiamo costruito un insieme di potenziali "attacchi" cioè coppie di punti su contorni diversi "candidate" a diventare spigoli permanenti nella triangolazione 3D che sarà generata tra essi. Tra queste coppie di punti però sceglieremo di mantenere solo le coppie di punti simili per curvatura e per concavità, mentre verranno dunque scartate le coppie di punti che non sono entrambi concavi o entrambi convessi e tali che la differenza della loro curvatura, intesa come raggio della circonferenza tangente al contorno in tali punti, sia maggiore di una certa soglia specificata dall'utente.

Una volta eseguiti i passi 1, 2 e 3 è stato generato un insieme di coppie di punti simili, candidati a diventare spigoli della triangolazione.

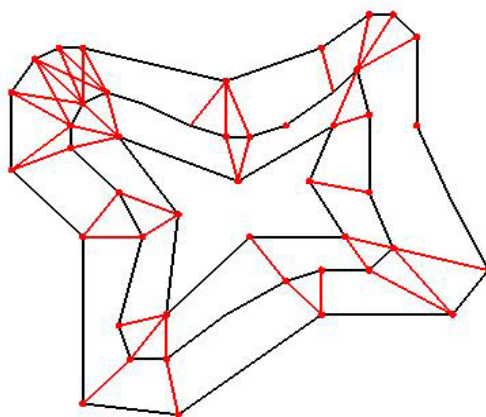


Fig. 5.4 Coppie di punti simili determinate per angoli significativi a 170° , distanza soglia $d_\varepsilon = 0.6$ e differenza di raggio di curvatura pari a 10.

5.4 Calcolo della medial axis approssimata

Finora abbiamo stabilito corrispondenze di punti solo in base a criteri di forma "locali", che riguardano cioè le caratteristiche dei singoli vertici. A questo punto vogliamo stabilire corrispondenze osservando la forma globale del contorno, ed "attaccare" quindi punti in base alla loro posizione relativa alla forma del contorno. Si pone quindi il problema di confrontare le forme di due contorni "in toto", cercando

di far corrispondere le varie diramazioni e protuberanze per poi tradurre questa corrispondenza in termini di vertici dei contorni. Proprio a questo scopo, è stata introdotta la *Medial Axis Transformation*. E' possibile confrontare la struttura globale dei due contorni calcolando le loro medial axis e confrontando queste ultime, semplificando così la forma del contorno da analizzare al suo "scheletro". Nel nostro caso inoltre non è necessario calcolare la medial axis vera e propria, ma basta determinare una medial axis approssimata del contorno, che chiameremo *scheletro*, che codifichi a grandi linee la struttura del contorno.

Lo scheletro viene calcolato su una triangolazione di Delaunay del contorno in esame. Nel caso di un poligono semplicemente connesso, l'algoritmo da noi sviluppato per il calcolo dello scheletro è il seguente:

- Si sceglie un triangolo di partenza che abbia 2 lati sul boundary
- Si genera il ramo di scheletro che unisce il vertice in comune ai lati sul boundary con il punto medio dell'edge opposto (sia tale vertice P).
- Si prosegue considerando il triangolo adiacente secondo tale edge.
- Si determina quanti lati di tale triangolo sono sul boundary:
 - *0 lati*: biforcazione. Si unisce allora P al baricentro del triangolo; anche i punti medi degli altri due lati (siano A e B) vengono uniti al baricentro, e si torna al punto 3 sia con P=A che con P=B.
 - *1 lato*: si prosegue unendo P con il punto medio dell'altro edge non sul boundary. Il punto medio diventa il nuovo P. Si torna al punto 3.
 - *2 lati*: fine di un ramo. Si unisce P con il vertice tra i lati sul boundary.

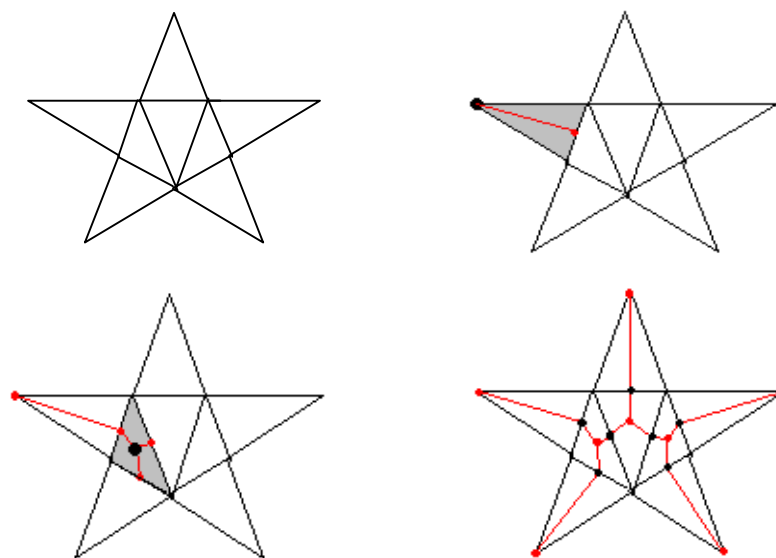


Fig 5.5 Esempio di funzionamento dell'algoritmo per il calcolo dello scheletro.

In questo modo abbiamo generato un grafo, memorizzato tramite liste di adiacenza, i cui nodi sono di due tipi:

- nodi terminali, che sono anche vertici della triangolazione, cioè punti del contorno;

- nodi di biforcazioni, che sono punti “nuovi”.

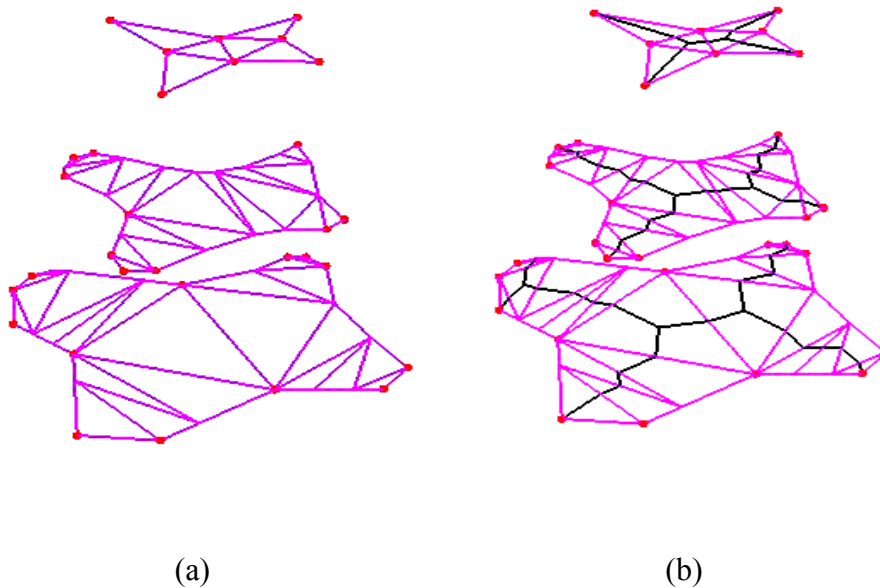


Fig. 5.6 I tre contorni triangolati (a) e la medial axis approssimata calcolata per ognuno di essi (b).

Naturalmente i nodi di biforcazione sono punti “temporanei” che servono solo per stabilire la similarità tra due scheletri, cioè tra due grafi, come spiegato nel prossimo paragrafo. Una volta stabilite le corrispondenze tra gli archi dello scheletro, saranno solamente i nodi terminali dei due archi corrispondenti ad essere “attaccati” tra loro a formare linee guida.

5.5 Confronto degli scheletri

Il confronto tra due grafi è un problema complesso, la cui descrizione dettagliata esula da questo contesto. Rimandiamo quindi a riferimenti specifici sull’argomento per una trattazione approfondita ([LP99]).

Sempre nell’ottica di ottenere un buon matching di similarità a costi ragionevoli dal punto di vista computazionale, è stato utilizzato un algoritmo che nuovamente utilizza la vicinanza tra le proiezioni dei nodi delle rispettive medial axis come criterio per misurarne la similarità. Va detto tuttavia, che proprio su questa fase dell’algoritmo saranno fatti i primi approfondimenti per sviluppi futuri del metodo.

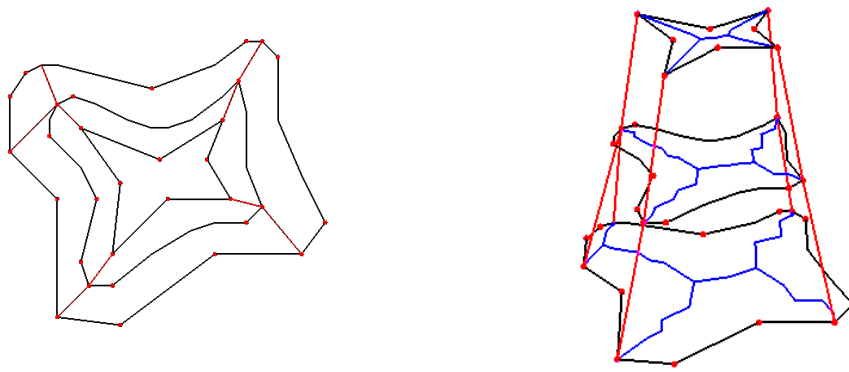


Fig. 5.7 Attacchi calcolati per mezzo del confronto degli scheletri dei tre contorni, visti in 2D e in 3D

5.6 Unione degli attacchi trovati

A questo punto l'algoritmo ha determinato due insiemi di "attacchi", uno derivato dall'analisi della similarità locale tra i vertici dei due contorni, basata sulla vicinanza e sulla curvatura; l'altro, come abbiamo appena visto, determinato in base alla corrispondenza di forma globale dei contorni tramite il confronto dei due scheletri. Naturalmente, poichè la superficie da generare non deve avere autointersezioni, è necessario vietare intersezioni tra gli attacchi. Quello di cui si occupa questo passo dell'algoritmo è di produrre l'insieme unione dei due insiemi di attacchi, scartando per prima cosa i segmenti che causano intersezioni. Per mantenere il massimo numero possibile di attacchi trovati, se si riscontra un'intersezione tra due segmenti, essi non vengono scartati entrambi, ma uno soltanto, in base a una certa priorità.

Nella nostra implementazione, si è scelto di dare la priorità agli attacchi determinati tramite scheletro, e tra attacchi dello stesso tipo, si mantiene sempre il segmento più corto e che collega punti più simili per curvatura.

Lo schema dell'algoritmo di merge tra i due insiemi di attacchi è il seguente:

1. siano A e B gli insiemi di attacchi rispettivamente dovuti alla similarità locale e alla similarità per struttura;
2. prelevare il primo elemento di B , sia esso b ;
3. per tutti gli elementi $a \in A$, se a interseca b , a viene rimosso da A . Quindi, b viene inserito nell'insieme finale degli attacchi.
4. Una volta eseguito il passo 3 per tutti gli elementi di B , si applica il test di intersezione fra tutte le coppie possibili di elementi di A . Quando viene rilevata un'intersezione, viene inserito nell'insieme finale di attacchi il segmento di A più corto e che unisce i punti che hanno curvatura più simile, mentre l'altro elemento viene cancellato.

Così si ottiene un insieme finale di attacchi senza intersezioni, come mostrato nella figura 5.8.

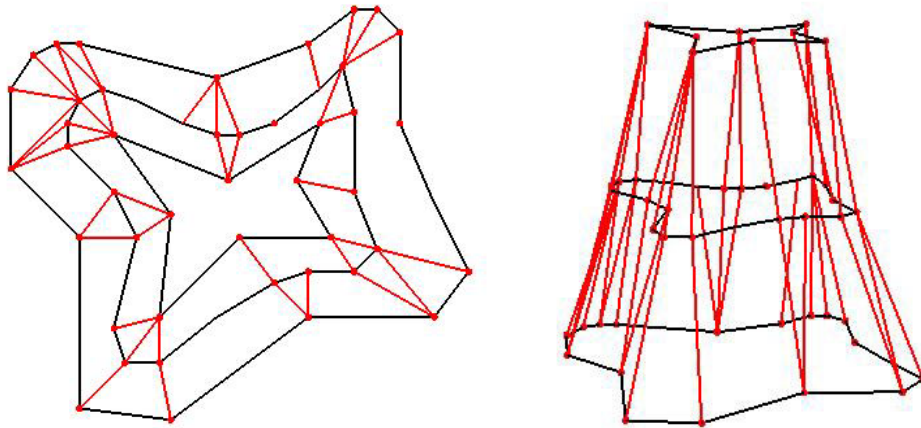


Fig 5.8 L'insieme di attacchi senza intersezioni determinati al passo 6, visti in 2D e in 3D .

5.7 Generazione delle sezioni intermedie

A questo punto il passo finale dell'algoritmo consiste nel generare un nuovo contorno intermedio ai due in esame, tramite le informazioni date dall'insieme di attacchi: ogni coppia di punti collegati fra loro produce un nuovo punto che è l'interpolazione dei due estremi del segmento. Nel caso più semplice, tramite un'interpolazione lineare, il nuovo punto non sarà altro che il punto medio del segmento (un esempio di sezioni generate in questo modo è mostrato in figura 5.9), ma sono possibili anche altre scelte.

Naturalmente per generare un contorno consistente, le coppie di vertici devono essere interpolate secondo un ordine preciso; in questo caso gli attacchi vengono preventivamente ordinati tra di loro in senso antiorario.

A questo punto non rimane altro che generare la triangolazione 3D vincolata agli attacchi nelle fasce comprese tra i due contorni analizzati e il contorno intermedio. La generazione di quest'ultimo prima della fase di ricostruzione permette di ottenere una triangolazione più dettagliata, aggiungendo dettagli dove la compressione prodotta dal grafo di Reeb è troppo elevata.

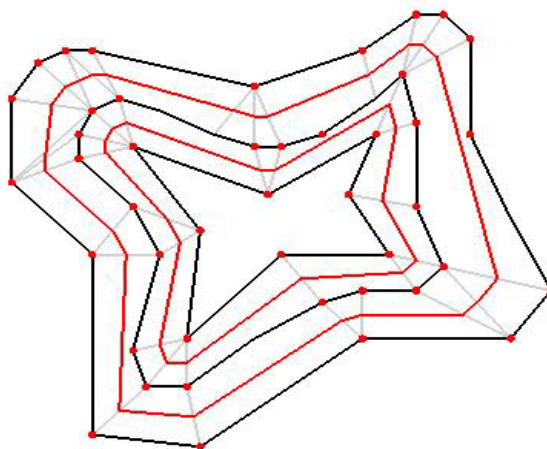


Fig. 5.9 Contorni intermedi calcolati per interpolazione degli attacchi.

5.8 Casi di branching

Nel caso in cui ci siano delle diramazioni, come abbiamo già detto, il metodo di trovare corrispondenze di punti simili non è valido: ci troviamo infatti a dover confrontare un contorno (il contorno *pre-branch*) con più contorni (i contorni *post-branch*), proprio perchè nel caso di diramazioni l'adiacenza topologica fra contorni è una relazione *one-to-many*. La soluzione da noi adottata al problema di generare un contorno intermedio tra il pre-branch e i post-branch è di scegliere di generare come "pseudocontorno" intermedio la medial axis "ripulita" del poligono non semplicemente connesso ottenuto proiettando i contorni post-branch sul contorno pre-branch. Naturalmente perchè questo abbia senso, è necessario che tutti i contorni post-branch cadano internamente al contorno pre-branch, una volta proiettati sullo stesso piano. Se questo non accade, si può sempre ricorrere ad una scalatura e ad una traslazione dei contorni post-branch, in modo da farli cadere internamente al contorno pre-branch.

Ottenuto così il poligono non semplicemente connesso, se ne calcola la medial axis approssimata nel modo visto nel paragrafo 5.4.

Lo scheletro così calcolato, non è ancora adatto a rappresentare lo pseudocontorno intermedio: è necessario un ulteriore passo, che consiste nel rimuovere dallo scheletro i nodi con *degree* inferiore a 2, come mostrato nella figura seguente.

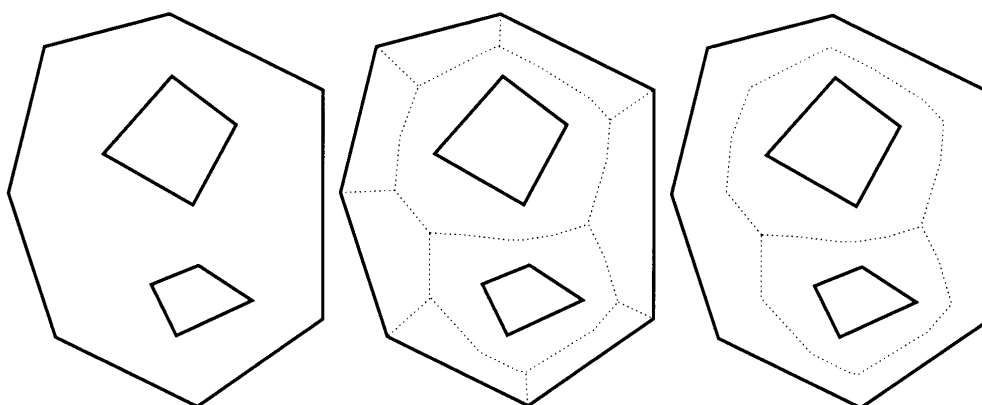


Fig 5.10 In (a), è raffigurata la proiezione dei contorni sullo stesso piano; in (b) la costruzione della medial axis; infine in (c) la medial axis ottenuta dopo aver eliminato i nodi di grado minore di due.

Come abbiamo già detto, il fatto che un poligono sia non semplicemente connesso garantisce che la medial axis abbia dei cicli, precisamente un ciclo che circonda ogni "buco" del poligono. Allora è intuitivo generare come pseudo-contorno intermedio l'unione di tali cicli, spogliando la medial axis dei rami terminali. Questo si ottiene eliminando i nodi terminali che hanno grado uguale ad uno e cancellando l'arco in essi entrante.

6 Esempi

In questo paragrafo mostriamo alcuni dei risultati ottenuti su due insiemi di dati di diversa natura: il primo input è un set di sezioni ricavate da un modello stilizzato dell'astronave "Enterprise", come esempio di contorni netti e dalle caratteristiche di forma ben delineate. Il secondo, è un insieme di dati reali, formato da sezioni orizzontali estratte da una tibia. Si noti come in questo caso i cambi di curvatura siano più dolci e le linee caratteristiche più difficili da determinare.

7 Conclusioni e sviluppi futuri

Abbiamo qui descritto un metodo efficiente per la ricostruzione di superfici a partire da sezioni. L'algoritmo considera le relazioni topologiche che sussistono tra le sezioni tramite un grafo di Reeb. Tale ricostruzione rappresenta il passaggio inverso del processo di compressione delle informazioni dato dal grafo, ovvero esplicita le stesse producendo in output la superficie completa. Questo dimostra, quindi, come l'estrazione del grafo di Reeb da una superficie sia una operazione vantaggiosa dal punto di vista della semplificazione dei dati e come tale semplificazione non comporti alcuna perdita di informazioni sulla superficie, la quale può essere comunque ricostruita in modo fedele. L'algoritmo implementato utilizza contemporaneamente diversi criteri di similarità per l'estrazione di linee guida che leghino le sezioni, minimizzando l'intervento dell'utente in questa fase. Abbiamo evidenziato, da un lato, l'importanza del calcolo dello scheletro di un contorno (medial axis approssimata) come criterio "globale" di similarità, che riconosce i vertici del contorno di maggiore rilevanza ai fini della forma dello stesso. Dall'altro, osservando che le informazioni trovate seguendo solo questo criterio non erano sufficienti per una ricostruzione consistente, si è deciso di affiancarvi nuovi criteri di similarità "locali" (ad esempio, un "raffinamento") che permettono di determinare ulteriori relazioni tra i contorni.

Durante il lavoro di studio del problema e di implementazione dell'algoritmo descritto abbiamo compreso quanto sia importante approfondire il concetto di similarità fra scheletri. Crediamo, infatti, che lo sviluppo di un metodo efficace per determinare in modo preciso il "grado di similarità" tra medial axis costituirebbe uno strumento assai potente, capace di produrre risultati ancor più soddisfacenti di quelli ottenuti. Una completa teoria di similarità permetterebbe lo sviluppo di algoritmi in grado di semplificare ulteriormente l'interazione uomo-macchina.

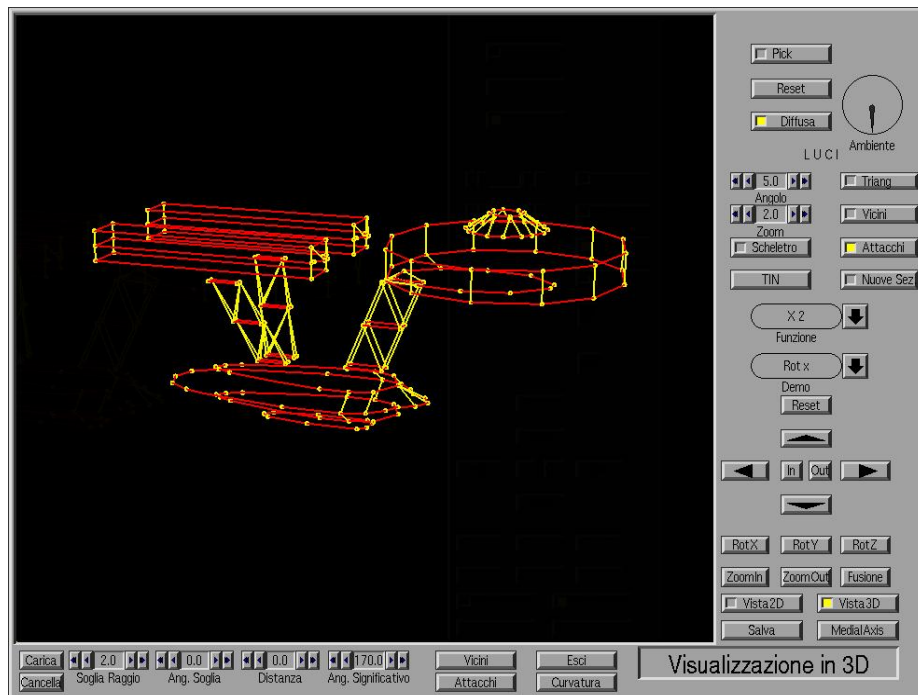
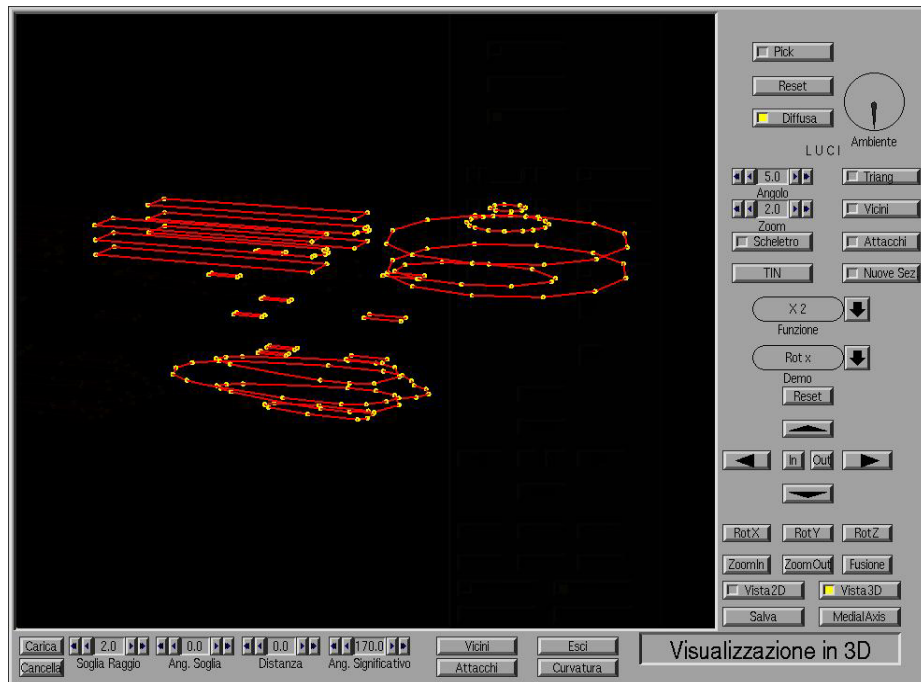


Fig. 6.1 In alto: sezioni dell'Enterprise, con evidenziati i punti significativi (a 170°); in basso: attacchi determinati in base a vicinanza e curvatura.

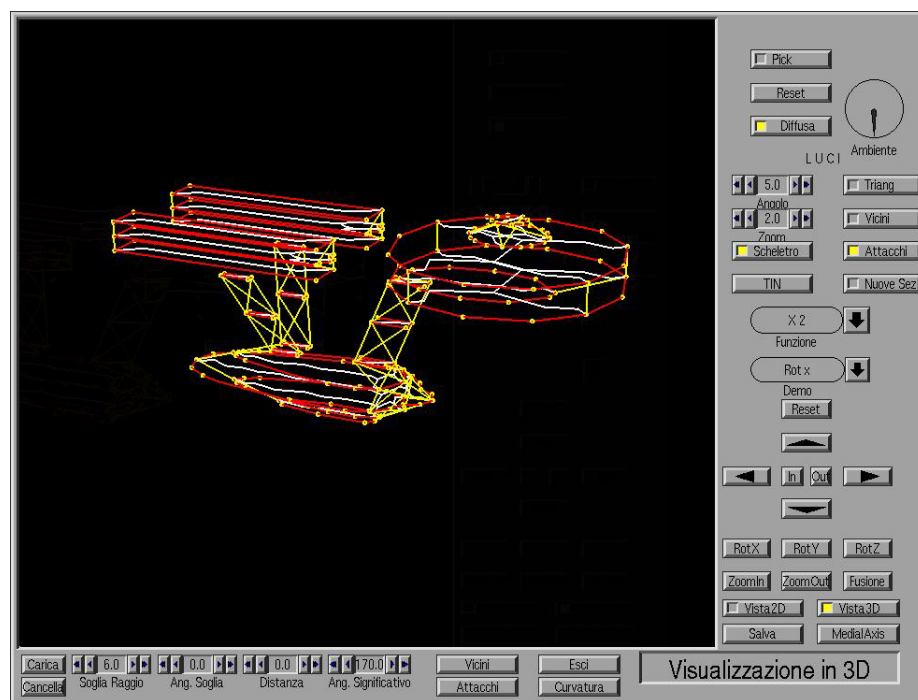
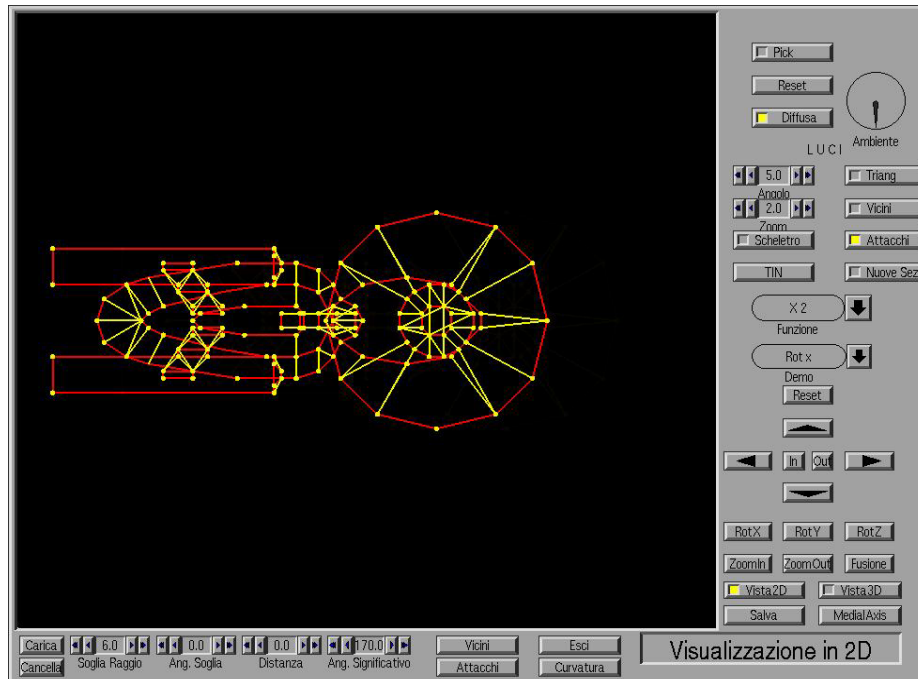


fig. 6.2 In alto: attacchi trovati in base alla similarità degli scheletri dei contorni; in basso: unione degli attacchi trovati in base allo scheletro e degli attacchi determinati in base alla curvatura, senza intersezioni.

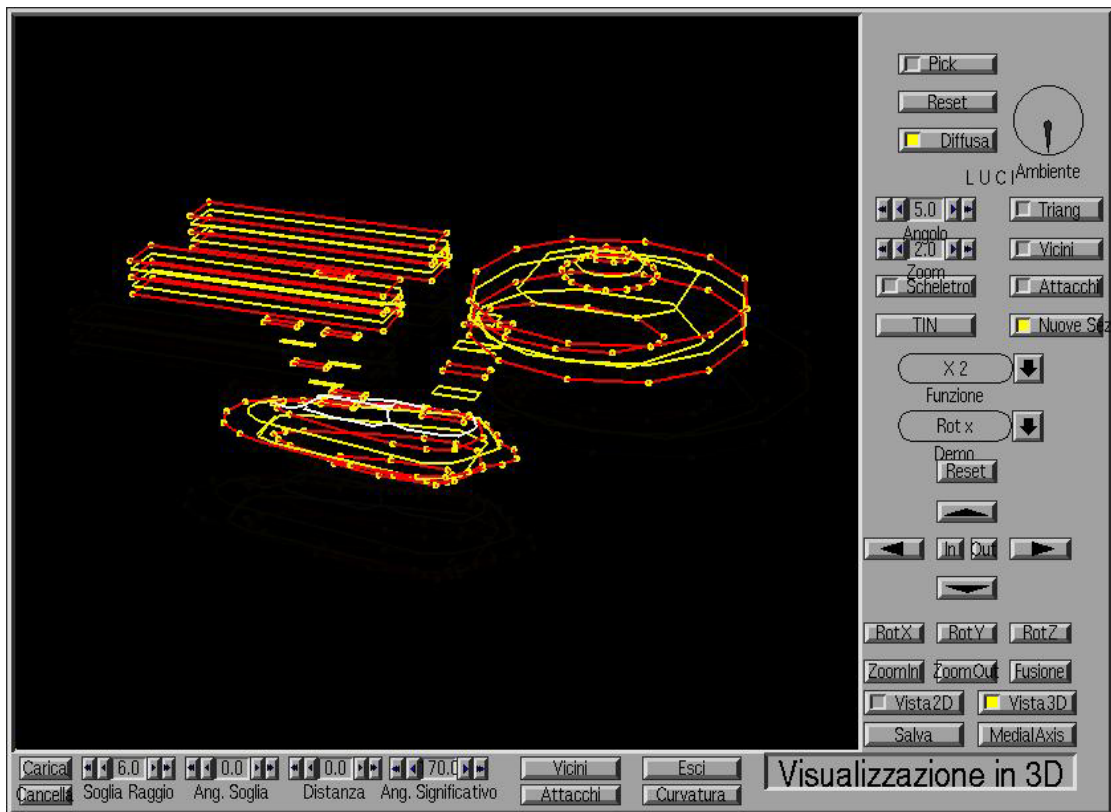


Fig. 6.3 Le nuove sezioni calcolate.

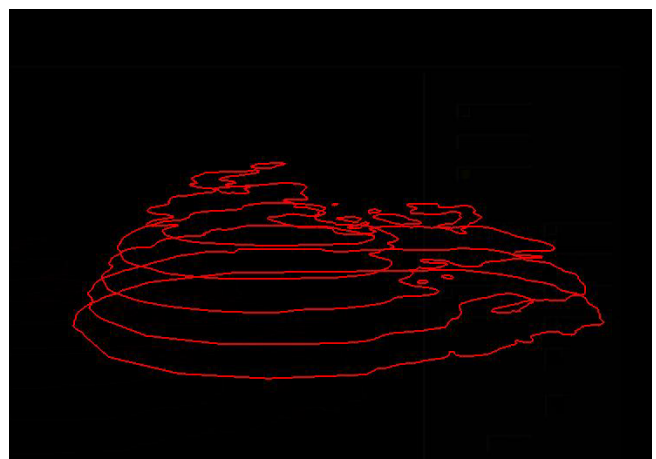
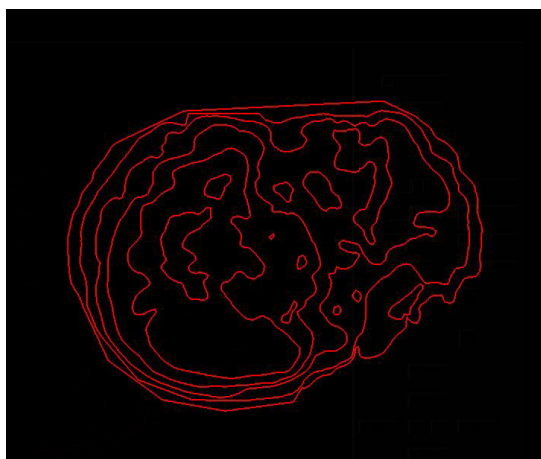


Fig. 6.4 Le sezioni della tibia lette in input., visualizzate in 2D e in 3D. Si noti che dal basso verso l'alto, ogni sezione ha delle diramazioni.

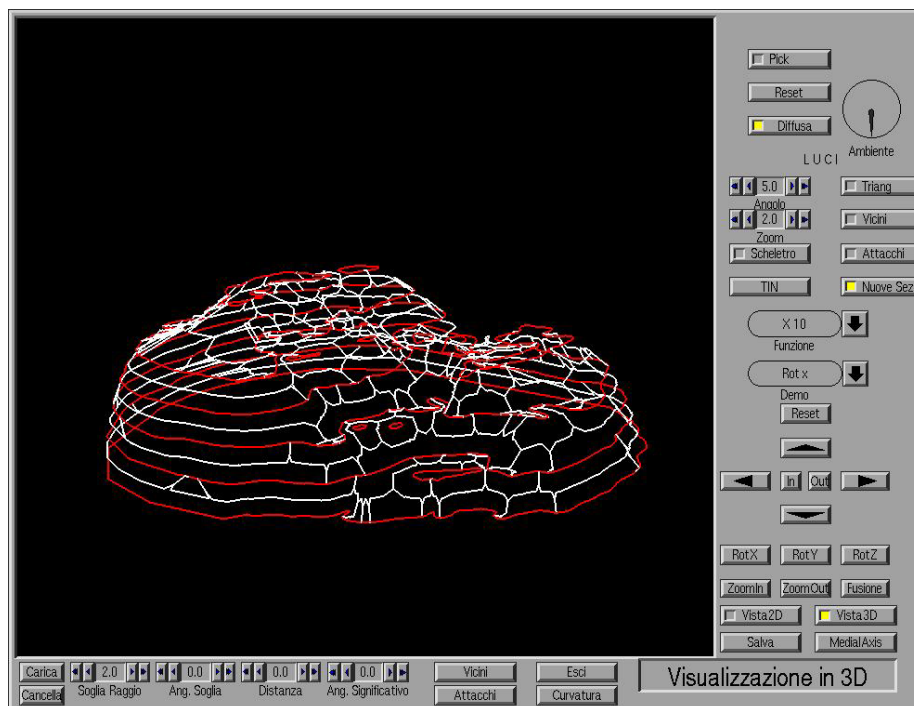
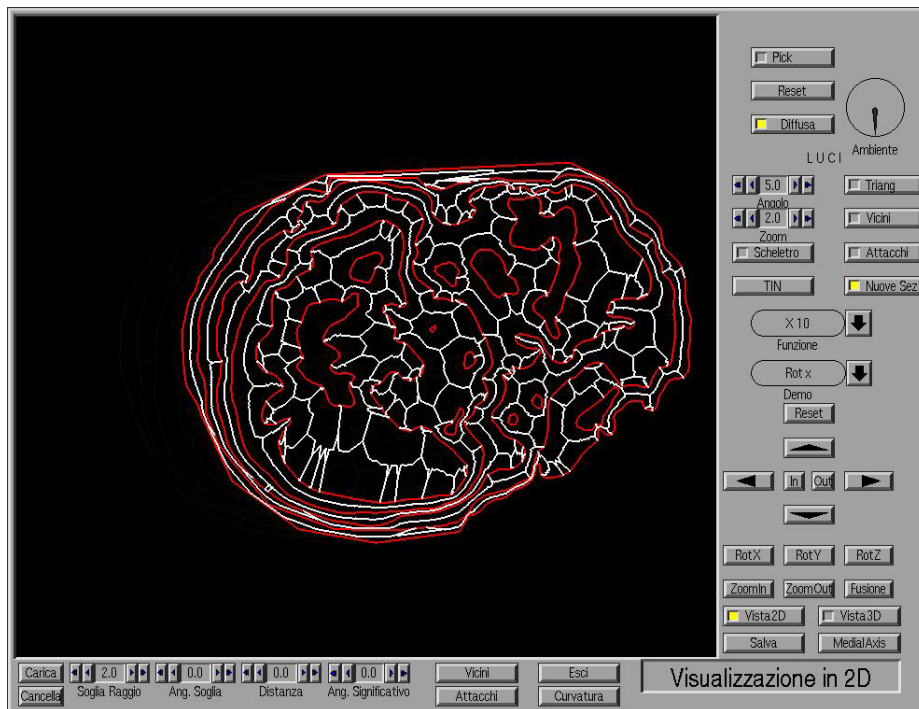


Fig. 6.5 Nuovi “pseudocontorni” calcolati come medial axis approssimata delle proiezioni di ogni sezione sulla precedente, visti in 2D e in 3D.