View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Biblioteca Digital da Produção Intelectual da Universidade de São Paulo (BDPI/USP)

Universidade de São Paulo
Biblioteca Digital da Produção Intelectual - BDPI

Departamento de Física Aplicada - IF/FAP

Artigos e Materiais de Revistas Científicas - IF/FAP

2013-02-25

Crônica dos Potenciais Vetor e Quântico.

Publicação do Instituto de Física, São Paulo, n.1675, p.1-18, 2013.
http://www.producao.usp.br/handle/BDPI/44646

Downloaded from: Biblioteca Digital da Produção Intelectual - BDPI, Universidade de São Paulo

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

CRÔNICA DOS POTENCIAIS VETOR E QUÂNTICO.

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, CP 66.318
05315-970, São Paulo, SP, Brasil

José Maria Filardo Bassalo, Paulo de Tarso Santos Alencar, Antônio Boulhosa Nassar, Mauro Sérgio Dorsa Cattani

Publicação IF
1675 / 2013

25/02/2013

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física
Cidade Universitária
Caixa Postal 66.318
05315-970 - São Paulo - Brasil

CRÔNICA DOS POTENCIAIS VETOR E QUÂNTICO

José Maria Filardo Bassalo e Paulo de Tarso Santos Alencar

Departamento de Física da UFPA,66075-900,Belém, Pará, Brasil

Antônio Boulhosa Nassar

The Harvard-Westlake School, Science Department CA 91604
University of California, Department of Sciences CA 90024

Mauro Sérgio Dorsa Cattani

Instituto de Física da USP, 05389-970, São Paulo, Brasil

INTRODUÇÃO

Neste artigo, vamos apresentar o desenvolvimento histórico dos conceitos dos potenciais **vetor** e **quântico** formulados, respectivamente, por Maxwell e Bohm. Em suas concepções iniciais, eles foram considerados apenas como um *artifício matemático*. Contudo, enquanto o **potencial vetor** já apresenta uma grande evidência experimental (**efeito Aharonov-Bohm**) sobre a sua interpretação física, o **potencial quântico** ainda aguarda a sua, muito embora esse efeito e alguns resultados teóricos sinalizem a sua existência física. Este artigo já foi publicado na revista MensAgitat vol.1(2),pp.93-108(2006) da Academia Roraimense e Paraense de Ciências. Está sendo publicado novamente como e-print no IFUSP para que ele tenha uma divulgação mais ampla e mais ágil pela internet.

1)POTENCIAL VETOR

As primeiras idéias sobre o potencial vetor $\vec{A}$ foram apresentadas pelo físico alemão Franz Ernst Neumann (1798-1895), entre 1845 e 1847,[1,2] quando analisou o processo de **indução magnética**[3] em um circuito devido ao movimento relativo de magnetos ou circuitos próximos. Muito embora ele não haja definido o potencial vetor diretamente da expressão que calculou para representar a força entre dois circuitos (C, C'),[4] infere-se que, na linguagem atual, o **potencial vetor de Neumann** $\vec{A}_N$ é representado por:[5]

$$\vec{A}_N = \frac{I'}{c} \oint_{C'} \frac{\hat{n}'}{r} ds' , \qquad (2.1)$$

onde I' representa a corrente elétrica que circula em um circuito C', r indica a distância de um elemento de circuito ds' de C' a um elemento ds do circuito C, $\hat{n}'$ é o versor que indica o sentido de circulação de I', e c é a velocidade da luz no vácuo.

Independentemente de Neumann e quase ao mesmo tempo, o físico alemão Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) iniciou, em 1846, suas famosas publicações intituladas ***Elektrodynamische Maasbestimmungen*** (``Medidas Eletrodinâmicas''), concluídas em 1878, e compostas de sete longos trabalhos.[6] Na primeira dessas publicações, Weber formulou a sua famosa *lei da força* entre cargas elétricas em movimento, dada pela expressão:

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2 r}{dt^2}\right], \tag{2.2}$$

onde $\frac{dr}{dt}$ e $\frac{d^2r}{dt^2}$ representam, respectivamente, a velocidade e a aceleração radiais relativas entre as cargas e_1 e e_2, e c é uma constante que expressa a relação entre as unidades eletrostática e eletrodinâmica da carga elétrica.[7] Nessa expressão, o termo dominante $\frac{e_1 e_2}{r^2}$ representa a **força de Coulomb**,[8] e os demais termos modificam essa força à medida que as cargas elétricas apresentam um movimento relativo.[9]

Desse modo, usando a expressão (2.2), Weber passou a estudar a força entre dois circuitos (C, C'). No entanto, ele adotou a hipótese de que a ``corrente elétrica'' ($I$) em um circuito era devido a igual número de cargas de mesmo sinal que se movem com a mesma velocidade, porém em sentidos contrários. Essa hipótese, contudo, divergia da hipótese em vigor que considerava aquela corrente como devida ao fluxo de ``dois fluidos elétricos''.[10] Como Neumann, Weber também não definiu o potencial vetor diretamente. No entanto, da análise que fez, em 1848,[11] sobre dois circuitos sem movimento relativo, pode-se escrever que, na linguagem atual, o **potencial vetor de Weber** $\vec{A}_W$ é traduzido por:[5]

$$\vec{A}_W = \frac{I'}{c}\oint_{C'} \frac{\hat{r}\hat{r}\cdot\hat{n}'}{r}\,ds', \tag{2.3}$$

onde as letras indicadas têm o mesmo significado da expressão (2.1).

Conforme salientamos acima, o potencial vetor $\vec{A}$ não foi explicitamente apresentado nem por Neumann nem por Weber, e sim, somente pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), em 1857,[12] ao estudar a propagação de um distúrbio elétrico ao longo de um condutor perfeito. Desse modo, ele foi o primeiro a escrever explicitamente a expressão (2.3) em forma de componentes. Além do mais, ele também afirmou que as componentes da **densidade de corrente induzida** ($\vec{J}$) poderiam ser obtidas como a **condutividade** (σ) multiplicada pela soma negativa do gradiente do **potencial escalar elétrico** (Φ) e a derivada temporal do potencial vetor. Na linguagem moderna, essa afirmação tem o seguinte aspecto:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \sigma\left(-\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right), \tag{2.4}$$

expressão essa que traduz a famosa **lei de Ohm**.[13] Registre-se que Kirchhoff atribuiu o segundo termo da expressão (2.4) a Weber.[5]

Em seu trabalho, Kirchhoff generalizou a forma do potencial vetor que decorre do trabalho de Weber [vide expressão (2.3)], bem como encontrou uma relação entre os potenciais $\vec{A}$ e Φ. Em linguagem atual, esses resultados obtidos por Kirchhoff têm os seguintes aspectos:[5]

$$\vec{A}_{W-K} = \frac{1}{c}\int_V \frac{1}{r}\hat{r}\hat{r}\cdot\vec{J}dV, \qquad \nabla\cdot\vec{A}_{W-K} = \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \qquad (2.5,2.6)$$

A idéia de potencial vetor voltou a ser objeto de estudo nas pesquisas realizadas pelo físico escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) sobre as ‘’linhas de força de Faraday’’[14] e os processos eletromagnéticos gerais. Desse modo, entre 1861 e 1862, Maxwell analisou a existência de tensões e vibrações no meio éter (que ocupa o espaço vazio entre os corpos do Universo), associadas àquelas ``linhas de força’’ e relativas ao campo magnético. Ao estudar as leis da Dinâmica dessas tensões e vibrações, intuiu que: *A luz consiste nas ondulações transversais do mesmo meio ambiente que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos*.

Mais tarde, em 1865,[15] Maxwell publicou o resultado de suas pesquisas relacionadas com o caráter eletromagnético da luz. Nessas pesquisas, demonstrou que um distúrbio eletromagnético em um meio uniforme se propagava como se fosse uma onda caracterizada pela seguinte equação (na linguagem dos quatérnios hamiltonianos[16] e atualizada):

$$\mu(4\pi C + K\frac{d}{dt})(\frac{d\vec{A}_M}{dt} + \nabla\psi) + \nabla^2\vec{A}_M + \nabla J = 0, \qquad (2.7)$$

onde μ é a **permeabilidade magnética**, K é a **capacidade indutiva específica**, C é a **condutividade específica**, ψ é o **potencial elétrico**, e $J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}$, com F, G, H representando as componentes do **potencial vetor** $\vec{A}_M$, introduzido pelo próprio Maxwell que, por sinal, denotava-o por A .[17]

Obtida essa equação, Maxwell demonstrou que quando o meio é não condutor ($C = 0$), a função J é no máximo uma função linear no tempo (t) podendo, também, ser constante ou nula. Desse modo, considerando que a função ψ é independente de t, Maxwell chegou à celebre equação:

$$\nabla^2\vec{A}_M + \mu K\frac{d^2\vec{A}_M}{dt^2} = 0. \qquad (2.8)$$

Examinando essa equação, Maxwell percebeu que ela já havia sido observada pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), em 1818, ao estudar o movimento dos sólidos elásticos incompressíveis, e, também, havia sido aplicada à Teoria da Difração pelo matemático e físico inglês Sir George Gabriel Stokes (1819-1903), em 1849. Desse modo, como a equação (2.8) correspondia a uma equação de ondas, portanto, $\mu K = v^{-2}$, onde

v representava a velocidade de propagação dos distúrbios eletromagnéticos no meio não-condutor considerado. Em seguida, usando os valores de μ e K que haviam sido determinados experimentalmente por Weber e pelo físico alemão Rudolph Hermann Arndt Kohlrausch (1809-1858), em 1857, Maxwell obteve o seguinte valor para aquela velocidade: $v = 310.740 km/s$. Em vista desse resultado, e considerando que a velocidade da luz no vácuo era da ordem de $298.360 km/s$, valor esse obtido pelo físico francês Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868), em 1850, Maxwell confirmou, por fim, a conjectura que havia feito em 1861-1862: *A luz é uma onda eletromagnética*.

Antes de continuarmos com o trabalho de Maxwell sobre os fenômenos eletromagnéticos-ópticos (principalmente com o conceito do potencial vetor, objeto principal deste artigo) que culminou com a publicação de seu célebre livro intitulado **A Treatise on Electricity and Magnetism**, em 1873,[17] vejamos a contribuição de outros cientistas sobre esse mesmo tema.

Em 1863,[18] o físico dinamarquês Ludwig Valentin Lorenz (1829-1891) desenvolveu a teoria matemática da luz usando os conhecimentos básicos de sua época, como a teoria ondulatória da luz formulada por Fresnel, sem, contudo, considerar as propriedades bizarras do ``éter luminífero'', subjacente nessa teoria.[19] Depois de trabalhar mais alguns anos em sua teoria, Lorenz apresentou, em 1867,[20] a sua Teoria Eletromagnética da Luz, na qual generalizou os conceitos de potencial elétrico $\Phi(\vec{r},t)$ e potencial vetor $\vec{A}_L(\vec{r},t)$, apresentando-os na forma (em notação atual):

$$\Phi(\vec{r},t) = \int \frac{\rho(\vec{r}',t-r/c)}{r} d^3\vec{r}', \qquad \vec{A}_L(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-r/c)}{r} d^3\vec{r}'. \qquad (2.9,2.10)$$

Nesse artigo, depois de mostrar que todos os fatos conhecidos sobre eletricidade e magnetismo (nesse tempo todos quase-estáticos) são consistentes com os potenciais retardados definidos acima, Lorenz passou a deduzir as equações dos campos respectivos (elétrico e magnético), mais tarde obtidas por Maxwell – as famosas **equações de Maxwell** – e que eram equivalentes às que havia obtido em 1863. Em seguida, ele discutiu a propagação da luz em metais, em dielétricos, no espaço livre, e na ausência de cargas livres no interior de condutores. Na dedução daquelas equações, Lorenz estabeleceu que os potenciais retardados são soluções de uma equação de onda e que devem satisfazer a seguinte condição (na notação atual):[21]

$$\nabla \cdot \vec{A}_L = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad (2.11)$$

expressão que também seria obtida pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902), em seu trabalho sobre a teoria eletromagnética maxwelliana. Em vista disso, tal expressão passou a ser conhecida, erroneamente,[22] como o **`gauge' de Lorentz**.

A teoria eletromagnética também foi objeto de estudo por parte do fisiologista e físico alemão Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) em uma série de artigos escritos entre 1870 e 1874.[23] Nesses artigos, ele analisou os potenciais vetor de Neumann ($\vec{A}_N$) e de Weber ($\vec{A}_W$), e propôs a seguinte expressão generalizada (em notação atual):[5]

$$\vec{A}_H^{\alpha} = \frac{1}{2}(1+\alpha)\vec{A}_N + \frac{1}{2}(1-\alpha)\vec{A}_W = \vec{A}_N + \frac{(1-\alpha)}{2}\nabla\psi\,, \qquad (2.12)$$

onde $\alpha = 1$ dá o potencial de Neumann, $\alpha = -1$, o de Weber, e:

$$\psi = -\frac{1}{c}\int \hat{r}\cdot\vec{J}(\vec{r}\,',t)d^3\vec{r}\,'\,. \qquad (2.13)$$

Em seus trabalhos, Helmholtz demonstrou ainda que:

$$\nabla\cdot\vec{A}_H^{\alpha} = -\frac{\alpha}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,, \qquad (2.14)$$

em que $\Phi(\vec{r},t)$ representa o potencial eletrostático instantâneo. A expressão (2.14) nos mostra que quando $\alpha = -1$ obtém-se o mesmo resultado de Kirchhoff [vide expressão (2.6)] e, formalmente, o mesmo resultado de Lorenz [vide expressão (2.11)]. Contudo, enquanto Kirchhoff trata com potenciais quase-estáticos, Lorenz trabalha com potenciais retardados [vide expressões (2.9,2.10)].

Agora, voltemos a Maxwell. Em seu livro **A Treatise on Electricity and Magnetism**, de 1873,[17] no qual ele apresentou suas célebres equações, a segunda delas representa o fato experimental de que as linhas de força do vetor indução magnética $\vec{B}$ são fechadas, isto é: $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ (na linguagem atual). Foi essa condição solenoidal que levou Maxwell a introduzir o **potencial vetor** A ($\vec{A}$, hoje). Vejamos como. Em 1871, ele havia demonstrado que a ``convergência'' (hoje, **divergência** - $\nabla\cdot$) da ``rotação'' (hoje, **rotacional** - $\nabla\times$) de uma função vetorial ($\vec{F}$) era nula, ou seja: $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0$. Assim, aplicando esse resultado a sua segunda equação, concluiu que (ainda, em notação atual): $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$. Ainda em 1871, Maxwell demonstrou que a ``rotação'' do gradiente de uma função escalar (χ) era nula, ou seja: $\nabla\times(\nabla\chi) = 0$. Juntando os dois resultados, Maxwell apresentou em seu **Treatise** a atual transformação de `gauge':

$$\vec{A} = \vec{A}' - \nabla\chi\,, \qquad (2.15)$$

com a seguinte observação:[5] ``A quantidade χ desaparece quando se usa a equação [$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$] e ela não se relaciona com qualquer fenômeno físico''.

Desse modo, Maxwell introduziu o potencial vetor apenas como um artifício matemático, sem apresentar uma expressão analítica para ele. Hoje, em qualquer livro texto que trata do assunto, mostra-se como se encontra essa expressão analítica a partir da definição de $\vec{B}$. Com efeito:[24,25]

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' = \nabla \times \left(\frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \right) \equiv \nabla \times \vec{A} . \qquad (2.16)$$

Conforme vimos, Lorentz também trabalhou com a teoria eletromagnética. Com efeito, em 1875, ele defendeu sua tese de doutoramento na Universidade de Leiden, obtendo o grau *summa cum laude*, tendo como tema central a óptica eletromagnética (título da tese: ``Sobre a teoria da reflexão e da refração da luz'').[26] A partir de 1892,[27] Lorentz começou a desenvolver a sua famosa **teoria dos elétrons** no trabalho intitulado **La théorie eletromagnétique de Maxwell et son apllication aus corps mouvants**.[28] Nesse trabalho, Lorentz mostrou que a solução da equação de onda não-homogênea (em notação atual):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \nabla^2 F = s(\vec{r},t) , \qquad (2.17)$$

depende da posição da fonte $s(\vec{r},t)$ em um instante anterior $t' = t - r/c$, ou seja:

$$F(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} s(\vec{r}', t' = t - r/c) d^3\vec{r}' . \qquad (2.18)$$

Em 1895,[29] Lorentz usa esse resultado[30] para encontrar as soluções retardadas dos potenciais escalar $\Phi(\vec{r},t)$ e vetor $\vec{A}(\vec{r},t)$, do tipo das expressões (2.9,2.10), e tomando como a fonte $s(\vec{r},t)$, respectivamente, $\rho(\vec{r},t)$ e $\vec{J}(\vec{r},t)$. Contudo, somente em 1904[31] é que Lorentz demonstrou a expressão (11). Ainda nesse trabalho, ele discute a arbitrariedade desses potenciais, afirmando que os potenciais Φ_o e $\vec{A}_o$ podem corresponder aos mesmos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, desde que satisfaçam as relações:[5]

$$\vec{A} = \vec{A}_o - \nabla\chi , \qquad \Phi = \Phi_o + \frac{1}{c}\dot{\chi} , \qquad (2.19,2.20)$$

e χ satisfaça a equação de onda não-homogênea,

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi} = \nabla \cdot \vec{A}_o + \frac{1}{c}\dot{\Phi}_o , \qquad (2.21)$$

expressão essa que decorre do hoje **`gauge' de Lorenz-Lorentz**, dada pela expressão (2.11).

Apesar de todo o uso formal do potencial vetor $\vec{A}$, conforme visto acima, não existia uma interpretação física para ele. Somente em 1959,[32] os físicos, o israelense Yaki Aharonov e o inglês David Bohm (1917-1992) apresentaram essa interpretação por intermédio da Eletrodinâmica Quântica, hoje conhecida como o **efeito Aharonov-Bohm**. Nesse artigo, eles mostram que a figura de interferência decorrente da difração de um feixe de elétrons que atravessa um anteparo com duas fendas (experiência ``tipo Young'') pode ser deslocada desde que, entre as fendas e por trás delas, se possa concentrar um campo magnético, de tal modo que este seja nulo na região da ``trajetória'' do feixe de elétrons depois de difratado pelas duas fendas. Isto pode ser conseguido, segundo esses físicos, com um solenóide longo de dimensões transversais microscópicas. Assim, uma corrente estacionária no solenóide gera um fluxo ϕ dado por:[32,33,34]

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \,, \tag{2.22}$$

onde C é qualquer circuito envolvendo o solenóide. Embora o campo de indução magnética $\vec{B}$ seja nulo fora do solenóide, o potencial vetor $\vec{A}$, que satisfaz a expressão (2.16), deve permanecer finito em algum lugar ao longo do circuito C, de modo que a expressão (2.22) possa ser satisfeita, seja qual for o `gauge' [vide expressão (2.15)] escolhido. O solenóide é envolvido por uma barreira de modo que não há interferência (``overlap'') entre ele e as ``ondas'' eletrônicas. Desse modo, inserindo-se uma escolha específica do potencial vetor na **equação de Schrödinger** (ver adiante essa equação) correspondente, por exemplo,[34]

$$\vec{A} = \left(\frac{\phi}{2\pi r} \right) \hat{\theta} \tag{2.23}$$

em coordenadas cilíndricas, uma solução rigorosa daquela equação nos mostra que as franjas formadas em um anteparo colocado atrás do solenóide são deslocadas dependendo do fluxo ϕ.

Esse experimento proposto por Aharonov e Bohm mostra que, embora o campo $\vec{B}$ seja nulo (e, portanto, também será nula a parte magnética da **força de Lorentz** $\vec{F}_L$ correspondente, pois: $\vec{F}_L = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$ [24]) ao longo da trajetória do feixe de elétrons (de carga q e velocidade $\vec{v}$), ele implica um significado quântico especial para o potencial $\vec{A}$ que transcende seu ``papel clássico'' como mero artifício matemático para o cálculo desse potencial, bem como o do potencial elétrico [vide expressão (2.4)].[35] Mais adiante mostraremos que a conexão entre os potenciais eletromagnéticos clássicos ($\Phi, \vec{A}$) com os efeitos não-clássicos decorrentes desse experimento proposto é feita por intermédio do **potencial quântico** proposto por Bohm, em 1952, do qual trataremos a seguir.

3)POTENCIAL QUÂNTICO.

A Mecânica Quântica Não-Relativista (MQNR) foi desenvolvida[36] entre 1925 e 1926 nos trabalhos dos físicos, os alemães Max Born (1882-1970; PNF, 1954), Ernst Pascual Jordan (1902-1980) e Werner Karl Heisenberg (1901-1976; PNF, 1932), o austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961; PNF, 1933), e o inglês Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984; PNF, 1933). Essa Mecânica é traduzida pela célebre **equação de Schrödinger**:[37]

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{3.1}$$

onde $\psi(\vec{r},t)$ é a função de onda, Δ é o operador laplaciano e $V(\vec{r},t)$ é um dado potencial.

Depois da proposta dessa equação, surgiu uma questão intrigante, qual seja, a de saber o significado de ψ, conhecida como **função de onda de Schrödinger**. Apesar de o próprio Schrödinger apresentar uma interpretação para ela,[38] a que hoje tem maior número de adeptos é a formulada por Born, em 1926,[39] que a considerou como uma **amplitude de probabilidade**.

A essa interpretação de Born sobrepôs-se uma outra relevante questão. Será sempre possível observar uma grandeza física? A resposta a essa pergunta foi dada por Heisenberg, ao apresentar, em 1927,[40] o seu famoso **princípio da incerteza**:

É impossível obter exatamente os valores simultâneos de duas variáveis, a não ser dentro de um limite mínimo de exatidão.

A essas propostas de Born e de Heisenberg seguiu-se um formalismo matemático, a conhecida **Mecânica Quântica Ondulatória de Schrödinger (MQOS)**,[41] segundo a qual os valores médios de uma determinada grandeza física são calculados por intermédio de ψ. Em vista disso, a questão central dessa Mecânica seria relacionar essa função de onda com a medida do observável desejado. Assim, desenvolveu-se a famosa **teoria do colapso da função de onda**. [42]

As aplicações da relação de incerteza heisenbergiana e da teoria do colapso da função de onda discutidas acima foram (e ainda são!) motivo de muita discussão entre os físicos, principalmente pelos paradoxos que delas decorrem. Com efeito, a relação de incerteza heisenbergiana foi objeto de uma grande discussão entre os físicos, o germano-norte-americano Albert Einstein (1879-1955; PNF, 1921) e o dinamarquês Niels Henrik David Bohr (1885-1962; PNF, 1922), nos *Quinto* e *Sexto Congressos de Solvay*, de 1927 e 1930, respectivamente.[43] Essa discussão decorreu, basicamente, do fato de que Bohr aceitava a interpretação borniana da MQOS, conhecida como a famosa **interpretação de Copenhague**, e Einstein não a aceitava. Ou, em outras palavras: Bohr acreditava que ψ descrevia completamente a realidade física, enquanto Einstein não acreditava.

Essa discussão entre Bohr e Einstein foi retomada quando Einstein e os físicos, o russo Boris Podolsky (1896-1966) e o norte-americano Nathan Rosen (1909-1955) afirmaram, em 1935,[44] o hoje famoso **paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen** ou **paradoxo EPR**:

Se, sem perturbar um sistema físico, for possível predizer com certeza (isto é, com a probabilidade igual a um) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento da realidade física correspondente a essa quantidade física.

Esse paradoxo recebeu a imediata contestação de Bohr, primeiro por intermédio de uma carta que escreveu à Revista *Nature* dois meses depois da publicação do artigo dos três físicos, na qual dizia que não concordava com as conclusões desse artigo, prometendo escrever um outro mais detalhado, o que realmente ocorreu, ainda em 1935.[45]

Um outro aspecto desse paradoxo EPR foi apresentado, também em 1935,[46] por Schrödinger, assim enunciado:

Seja uma caixa contendo uma substância radioativa, um detector de radiação (um ***contador Geiger****, por exemplo), uma ampola de gás venenoso (gás cianídrico, por exemplo) e ainda um gato vivo. As coisas são dispostas de modo que haja cinqüenta por cento de probabilidade de o detector registrar uma desintegração (fixa-se uma duração para o ensaio). Se isso acontecer, a ampola quebra-se e o gato morre. Senão, continua vivo*.

Os paradoxos que acabamos de registrar questionam o conceito físico básico da interpretação indeterminista de Copenhague da MQOS, qual seja, o conceito da **inseparabilidade quântica** ou da **não-localidade**.[47] Aliás, essa interpretação já havia sido questionada pelo físico francês, o Príncipe Louis Victor Pierre Raymond de Broglie (1892-1987; PNF, 1929), em 1926-1927,[48] ao aventar a hipótese da existência de ``variáveis ocultas'' necessárias para evitar o indeterminismo da MQOS. A existência dessas ``variáveis'' proporcionaria uma relação entre as grandezas físicas calculadas por essa Mecânica e possíveis movimentos mais internos dos sistemas quânticos, de tal modo que as médias das quantidades físicas decorrentes desses movimentos e calculadas por intermédio daquelas ``variáveis'' reproduziriam os valores calculados quanticamente. Desse modo, tais ``variáveis'' reporiam o **determinismo** na Física.

A questão do determinismo em Física, iniciada por de Broglie, conforme vimos acima, foi retomada por Bohm, em 1952.[49] Nesses trabalhos, Bohm apresenta uma nova interpretação para a **equação de Schrödinger** para uma partícula sob a ação de um potencial $V(\vec{r})$. Vejamos de que maneira. Partindo da expressão (3.1) e ao aplicar-lhe a seguinte transformação (em notação atual):[50]

$$\psi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t)\exp\left[iS(\vec{r},t)\right], \qquad (3.2)$$

onde ϕ e S são reais, Bohm obteve os seguintes resultados:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}[\phi\nabla^2 S + 2\nabla\phi\cdot\nabla S], \qquad (3.3)$$

$$-\frac{\hbar}{m}\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\phi}\left[\nabla^2\phi - \phi(\nabla S)^2\right] + \frac{V}{m}. \qquad (3.4)$$

Em continuação, Bohm considerou que (ainda na linguagem atual):

$$\phi^2 = \rho\,, \qquad \vec{v}_{QB} = \frac{\hbar}{m}\nabla S\,, \qquad V_{QB} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\phi}{\phi}\,, \qquad (3.5\text{-}7)$$

onde ρ, $\vec{v}_{QB}$, V_{QB} e S representam, respectivamente, a **densidade de probabilidade**, a **velocidade quântica**, o **potencial quântico** e a **ação clássica**. Desse modo, substituindo-se as expressões (3.5-7) nas expressões (3.3-4), obteve:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}_{QB}) = 0 , \qquad (3.8)$$

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} + \left[\frac{1}{2} m \vec{v}_{QB}^2 + V + V_{QB} \right] = 0 , \qquad (3.9)$$

expressões essas que apresentam a mesma estrutura das equações básicas da Dinâmica dos Fluidos,[51]respectivamente: **equação da continuidade** e **equação de Euler**.[52]

Além do mais, ao aplicar o operador ∇ à expressão (3.4), seguido de uma manipulação algébrica, Bohm demonstrou que:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_{QB}) = -\nabla(V + V_{QB}) . \qquad (\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_{QB} \cdot \nabla) \qquad (3.10\text{-}11)$$

Assim, segundo Bohm, essa nova interpretação da **equação de Schrödinger** para uma partícula sob a ação de um potencial $V(\vec{r})$, traduzida pela expressão (3.10), indicava que, além desse potencial, a partícula estaria também sob a ação de um **potencial quântico** V_{QB}, responsável por ``possíveis movimentos mais internos dos sistemas quânticos''.[53] Essa idéia de um <u>novo potencial físico</u>, que aproximaria a MQNR da Física Clássica, foi desenvolvida por Bohm e colaboradores,[54] assim como por outros físicos, e se constitui no que hoje se denomina **Interpretação Causal da Mecânica Quântica** ou **Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm (MQBB)**.[55] É oportuno destacar que, nos trabalhos de 1952, Bohm conseguiu explicar o **paradoxo EPR** usando a idéia desse novo potencial. Em vista disso, um grande desafio que se apresentou (e ainda se apresenta) para os partidários da MQBB é o de encontrar uma interpretação física para o **potencial quântico de Bohm** V_{QB}**.**

Uma provável interpretação física de V_{QB} seria a de que é este potencial quem confere as propriedades quânticas ao movimento de uma partícula,[56] conforme ficou evidenciado em diversos trabalhos nos quais foram reproduzidas ``trajetórias quânticas''[57] de partículas. Por exemplo, C. Philippidis, C. Dewdney e Basil J. Hiley, em 1979,[58] reproduziram numericamente os experimentos de interferência de elétrons realizados por C. Jönsson, em 1961.[59] Mais tarde, em 1982,[60] Dewdney e Hiley também reproduziram numericamente as trajetórias seguidas pelos elétrons nos processos de tunelamento. Ainda em 1982,[61] Philippidis, Bohm e R. D. Kaye explicaram o **efeito Aharonov-Bohm** usando essa mesma interpretação. [Observe que a expressão (3.10) nos mostra que, mesmo quando $V = 0$, existe uma força resultante dependente de V_{QB}]. Essa interpretação também seria considerada por Dewdney, Peter R. Holland e A. Kyprianidis, em 1987,[62] para explicar correlações não locais em experimentos do tipo **Stern-Gerlach**.[63]

Para maiores detalhes sobre essa e outras possíveis interpretações de V_{QB} ver os textos indicados na Nota 55.

Na conclusão deste artigo, os autores registram que uma série de resultados teóricos obtidos com a MQBB[64] confirmam a interpretação física de V_{QB} referida acima. Para a obtenção desses resultados, foram estudados sistemas físicos, **conservativos** ou **não-conservativos** (sendo estes **dissipativos** ou **não-dissipativos**) representados pela **equação de Schrödinger**, em seus dois aspectos, linear [expressão (3.1.)] e não-linear.[65]

Dentre aqueles resultados, destacam-se: 1) os **invariantes de Ermakov-Lewis**; 2) a evolução do pacote de ondas associado à partícula livre (PL) e ao oscilador harmônico dependente do tempo (OHDT); 3) o espalhamento de uma partícula livre por uma barreira (poço) de potencial.

Em 1967,[66] H. R. Lewis demonstrou que uma quantidade conservada para o OHDT, caracterizado pela freqüência $\omega(t)$, é dada pela expressão:

$$I = \frac{1}{2}[(\dot{q}\alpha - \dot{\alpha}q)^2 + (\frac{q}{\alpha})^2], \qquad (3.12)$$

onde q e α satisfazem, respectivamente, as equações:

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0, \qquad \ddot{\alpha} + \omega^2(t)\alpha = \frac{1}{\alpha^3}. \qquad (3.13\text{-}14)$$

Por outro lado, como as expressões (3.12-14) também já haviam sido obtidas por V. P. Ermakov, em 1880,[67] o problema de determinar os invariantes de sistemas físicos dependentes do tempo passou então a ser conhecido como o problema do **invariante de Ermakov-Lewis (IE-L)**. Assim, se para um determinado sistema físico encontrarmos que:

$$\frac{dI}{dt} = 0, \qquad \frac{dI}{dt} \neq 0, \qquad (3.15\text{-}16)$$

afirmamos, respectivamente, que ele possui ou não um IE-L.

Usando-se a MQBB[64] para os diversos sistemas físicos representados por **equações de Schrödinger**, linear e não-linear,[65] o cálculo de I, usando-se as expressões (3.12-14), é realizado considerando-se os conceitos de **velocidade quântica** e de **potencial quântico** [vide expressões (3.6-7)]. Desse modo, demonstra-se que alguns daqueles sistemas apresentam IE-L, e outros não.[68]

A técnica que utilizamos para resolver o problema do IE-L referido é ainda considerada para estudar a evolução do pacote de onda associado a um sistema físico. Assim, para o caso da **partícula livre (PL)**, essa técnica permite demonstrar que:

$$a^2(t) = a_o^2\left[1 + \frac{2\zeta}{\tau}t + \frac{(1+\zeta^2)}{\tau^2}t^2\right], \qquad (3.17)$$

com:

$$\tau = \frac{2ma_o^2}{\hbar}, \qquad \frac{b_o}{a_o} = \frac{\zeta}{\tau}, \qquad a(0) = a_o, \qquad \dot{a}(0) = b_o, \qquad (3.18\text{-}21)$$

onde $a(t)$ representa a evolução temporal do **pacote de onda debroglieano** associado à PL e de largura inicial a_o. É oportuno registrar que a evolução temporal do **pacote de onda schrödingeriano** é dada pela expressão:[69]

$$a^2(t) = a_o^2\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right), \qquad (3.22)$$

que nada mais é do que um caso particular da expressão (3.17) quando se faz $\zeta = 0 \to b_o = 0$. Comparando-se as expressões (3.17,22) observa-se que o pacote de onda da PL, calculado pela MQOS, espraia mais lentamente do que quando calculado pela MQBB.[70]

Para o caso do OHDT, a evolução temporal de $a(t)$, calculada pela MQBB, é dada por:[64]

$$a^2(t) = a_o^2\alpha^2(t)\left[1 + \left(\frac{2\zeta}{\tau}\right)\left(\int \frac{dt'}{\alpha^2(t')}\right) + \left(\frac{1+\zeta^2}{\tau^2}\right)\left(\int \frac{dt'}{\alpha^2(t')}\right)^2\right], \qquad (3.23)$$

onde $\alpha(t)$ satisfaz a expressão:

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega^2(t)\alpha(t) = 0. \qquad (3.24)$$

Ao aplicarmos a expressão (3.23) para um caso particular de $\omega(t)$, considerado por A. Mostafazadeh,[71] J. Y. Ji, J. K. Kim e S. P. Kim,[72] C. F. Lo,[73] e G. S. Agarwal e S. A. Kumar, [74] verificamos que novos estados espremidos (``squeezed'')[75] generalizados podem ser encontrados. Também observamos que a MQBB descreve melhor a situação física considerada do que a MQOS, uma vez que com MQBB podemos estabelecer uma conexão direta entre as soluções clássica e quântica.

Por fim, vejamos o caso do espalhamento de uma partícula por uma barreira (poço) de potencial. No caso do tunelamento através de uma barreira numa região não-dissipativa $[V(x,t) = V, (0 < x < L), V(x,t) = 0, (x \neq 0, L)]$, verificamos que os tratamentos via MQOS e MQBB dão os mesmos resultados. Contudo, enquanto a MQOS considera a continuidade da função de onda $\psi(x,t)$ e de sua derivada espacial ($\frac{\partial\psi}{\partial x}$) nos limites da barreira, a MQBB considera condições de contorno gerais envolvendo a continuidade da massa, do momento linear e da energia. Essas grandezas físicas são escritas em termos das expressões (3.6-7).

Por outro lado, estudando o mesmo tunelamento através de uma barreira com borda aguçada (``sharp-edged'') numa região dissipativa, representada pela **equação de Kostin**, a MQBB nos mostra que o coeficiente de transmissão diminui.

Registre-se que o estudo do tunelamento por intermédio da MQBB apresenta uma grande vantagem, pois é possível deduzir expressões gerais para a probabilidade de transmissão, e compará-las com os resultados conhecidos da MQOS.[76]

No caso do espalhamento de uma partícula por um poço de potencial $[V(x,t) = -V, (0 < x < L), V(x,t) = 0, (x \neq 0, L)]$, a MQBB reproduz os mesmos resultados da MQOS e, mais ainda, permite estudar o **efeito Ramsauer-Townsend**,[77] em regiões dissipativas kostiananas.[64]

Do que vimos neste artigo, podemos concluir que existe bastante evidência teórica que leva a uma provável interpretação física dos potenciais maxwelliano (**vetor**: $\vec{A}$) e bohmiano (**quântico**: V_{QB}).

Notemos que a MQBB, assim como a MQOS, é ***incompleta*** e ***não-causal***.[78]

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. NEUMANN, F. E. 1847. *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, aus dem Jahre 1845, p. 1.
2. NEUMANN, F. E. 1849. *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, aus dem Jahre 1847, p. 1.
3. A **indução eletromagnética** foi descoberta, em trabalhos independentes, pelo físico e químico inglês Michael Faraday (1791-1867), em 1831, e pelo físico norte-americano Joseph Henry (1797-1878), em 1832.
4. Os primeiros estudos sobre a **força entre circuitos elétricos** foram realizados pelos físicos franceses Jean Baptiste Biot (1774-1862) e Félix Savart (1791-1841), em 1820, e André Marie Ampère (1775-1836), em 1826. Essa força, contudo, era considerada na direção da reta que une os elementos lineares considerados nos circuitos. Foi somente que em 1845 que o matemático alemão Hermann Günter Grassmann (1809-1877) demonstrou essa força era sempre perpendicular à direção da corrente no elemento que sofre a força.
5. JACKSON, J. D. and OKUN, L. B. 2000. *Lawrence Berkeley National Laboratory.* LBNL – 47066. (Agradeço ao físico Luís Carlos Bassalo Crispino, por chamar a minha atenção para esse artigo.)
6. WOODRUFF, A. E. *IN*: GILLISPIE, C. C. (Editor) 1981. ***Dictionary of Scientific Biography***. Charles Scribner's Sons.
7. Mais tarde, o físico escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) mostraria que essa constante c representaria $\sqrt{2}$ vezes a velocidade da luz no vácuo.
8. Em 1785, o físico francês Charles Augustin Coulomb (1736-1806) demonstrou que:

   A força de atração ou repulsão entre duas cargas elétricas é diretamente proporcional ao produto de suas quantidades de cargas elétricas, inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa seus centros, e se situa na mesma direção da reta que une seus centros.

9. Para um estudo moderno sobre a **Eletrodinâmica de Weber**, ver: ASSIS, A. K. T. 1994. **Weber's Electrodynamics**, Kluwer, Holanda (Traduzido pela UNICAMP, em 1995).
10. O conceito de ``fluido elétrico'' foi apresentado pelo eletricista inglês Stephen Gray (1696-1736), decorrente de experiências realizadas entre 1727 e 1729 sobre a ``virtude elétrica'' dos corpos. Por sua vez, o físico francês Charles François de Cisternay Du Fay (1698-1739) mostrou, em conseqüência de experiências realizadas entre 1733 e 1734, que esses ``fluidos'' eram de dois tipos: **vítreo** e **resinoso**. O primeiro deles ocorre, por exemplo, quando o vidro é atritado com um pedaço de seda, e o segundo, quando a resina friccionada com pele de gato. Por fim, o cientista e estadista norte-americano Benjamin

Franklin (1706-1790), devido a experiências realizadas entre 1747 e 1749, denominou esses dois ``fluidos'' simplesmente de **positivo** (+) e **negativo** (-).

11. WEBER, W. 1848. *Annalen der Physik und Chemie* **73**, p. 193.
12. KIRCHHOFF, G. R. 1857. *Annalen der Physik und Chemie* **102**, p. 529.
13. De janeiro a dezembro de 1825, o físico alemão Georg Simon Ohm (1787-1854) realizou uma série de experiências com circuitos ``galvânicos'' cuja fonte era uma bateria de ``pilhas voltaicas'', os resultados foram apresentados no livro intitulado **Die Galvanische Kette Mathematisch Bearbeitet** (``O Circuito Galvânico Matematicamente Analisado''), publicado em 1827.
14. Em 1838, o físico e químico inglês Michael Faraday (1791-1867) observou a figura formada por limalhas de ferro numa folha de papel ou lâmina de vidro, sob a qual colocava um ímã [figura que havia sido observada pelo erudito francês Petrus Peregrinus de Maricourt (c.1240- ?), em 1269]. Para explicar essa figura, Faraday passou a visualizar as forças magnéticas e elétricas como um espécie de ``tubos de borracha'' que se estendiam a partir dos fios condutores, ou de ímãs, ou de corpos eletrizados, tubos esses que receberam dele, em 1845, a denominação de **linhas de força**, sobre as quais ele tivera as primeiras idéias em 1821.
15. MAXWELL, J. C. 1865. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **155**, p. 459; *Philosophical Magazine* **29**, p. 152.
16. Em 1853, o matemático e físico irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) publicou seu famoso livro intitulado **Lectures on Quaternions**, no qual desenvolveu a teoria dos **quatérnios**, um ente matemático composto de quatro componentes, definido como a aplicação do operador diferencial *nabla* ($\nabla = \hat{I}\frac{d}{dx} + \hat{J}\frac{d}{dy} + \hat{K}\frac{d}{dz}$) a uma função de ponto vetorial $\vec{V}$, ou seja: $\nabla\vec{V} \equiv S\nabla\vec{V} + V\nabla\vec{V}$, onde o primeiro termo é a parte escalar e o segundo, a parte vetorial. Observe-se que, na linguagem moderna, a parte escalar representa a divergência de $\vec{V}$ com o sinal trocado ($S\nabla\vec{V} = -\nabla\cdot\vec{V}$) e a parte vetorial representa o rotacional de $\vec{V}$ ($V\nabla\vec{V} = \nabla\times\vec{V}$).
17. MAXWELL, J. C. 1873. **A Treatise on Electricity and Magnetism**. (Em 1954, a Dover Publications, Inc. New York, republicou a terceira edição desse livro a partir da edição preparada pela Clarendon Press, em 1891.)
18. LORENZ, L. V. 1863. *Annalen der Physik und Chemie* **18**, p. 111; *Philosophical Magazine* **26** (4), p. 81; 205.
19. Em 1816, o físico francês Augustin Jean Fresnel (1788-1827) apresentou à Academia Francesa de Ciências os seus primeiros trabalhos sobre os fenômenos ondulatórios. Nos anos subseqüentes, ele continuou a trabalhar nesse tema e, em 1821, apresentou a essa mesma Academia sua famosa teoria ondulatória da luz, cuja característica principal era o caráter **transversal** da onda luminosa. Além do mais, formulou a idéia de que o **éter luminífero cartesiano** como meio transmissor da luz deveria ser sólido para poder explicar as vibrações transversais luminosas através dele, e que, também, era parcialmente arrastado pela matéria. Destaque-se que, para contornar o problema de que a rigidez desse éter dificultaria o movimento dos planetas, o físico e matemático inglês Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) propôs, em 1845, que esse éter seria do tipo piche ou cera de sapateiro, que é resistente a uma força súbita, porém cede a forças lentas e persistentes, como ocorre com o movimento planetário.
20. LORENZ, L. V. 1867. *Annalen der Physik und Chemie* **131**, p. 243; *Philosophical Magazine* **34** (4), p. 287.
21. Lorenz escreveu a seguinte expressão:

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = -2\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right),$$

    onde $\bar{\Omega}$ representa o potencial escalar elétrico e α, β, γ são os componentes do potencial vetor. [Vide Referência (5).]

22. Quem primeiro apontou para esse erro foi A. O'RAHILLY no livro **Electromagnetics** (Longmans, Green and Cork University Press), editado em 1938. [Vide Referência (5).]

23. HELMHOLTZ, H. L. F. von 1870, 1873, 1874. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **72**, **75**, **78**, p. 57; 35; 273.
24. JACKSON, J. D. 1998. **Classical Electrodynamics**, 3rd ed., John Wiley, New York.
25. É oportuno esclarecer que, diferentemente do potencial vetor, o potencial elétrico apresenta uma interpretação física, pois:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d^3\vec{r}\,' = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-r'|}d^3\vec{r}\,'\right) \equiv -\nabla\Phi(\vec{r}),$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_A^B \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{\ell}\,'.$$

26. Na continuação de seu trabalho com a eletrodinâmica maxwelliana, Lorentz demonstrou, em 1880, a relação entre a **polarizabilidade elétrica** α e a **capacidade indutiva específica** κ dos dielétricos. Como, e ainda em 1880, Lorenz fez a mesma dedução, essa relação ficou conhecida como **equação de Lorentz-Lorenz**. Até a descoberta histórica dos trabalhos de Lorenz sobre aquela eletrodinâmica e referida acima, essa era a única relação entre esses dois físicos citada na maioria dos livros textos.
27. Muito embora Lorentz tenha estudado os trabalhos de Maxwell, seu ponto de partida para desenvolver essa tese foi a eletrodinâmica de Helmholtz. [McCORMMACH, R. 1981. **Gillispie's Dictionary of Scientific Biography**. Charles Scribner's Sons.]
28. LORENTZ, H. A. 1892. *Arch. Néerl. Scs.* **25**, p. 363.
29. LORENTZ, H. A. 1895. **Versuch einer Theorie der Electrischen und Optischen Erscheinungen in begwegten Körpen** (E. J. Brill, Leiden).
30. Esse teorema já havia sido demonstrado pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), em 1858, e por Lorenz, em 1861.
31. LORENTZ, H. A. 1904. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* **V14**, p. 145.
32. AHARONOV, Y. and BOHM, D. 1959. *Physical Review* **115**, p. 485.
33. SAKURAI, J. J. 1967. **Advanced Quantum Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company.
34. HOLLAND, P. R. 1993. **The Quantum Theory of Motion**. Cambridge University Press.
35. Em 1960, R. G. CHAMBERS realizou uma experiência e observou a existência do fenômeno de interferência indicado por Aharonov-Bohm. Esse resultado foi publicado na *Physical Review Letters* **5**, p. 3 (1960).
36. Para detalhes desse desenvolvimento, veja-se: MEHRA, J. and RECHENBERG, H. 1982. **The Historical Development of Quantum Theory**, Volumes 1 e 2. Springer-Verlag.
37. SCHRÖDINGER, E. 1926. *Annales de Physique Leipzig* **79**, p. 361, 489, 734, 747; **80**, p. 437.
38. SCHRÖDINGER, E. 1926. *Annales de Physique Leipzig* **81**, p. 136.
39. BORN, M. 1926. *Zeitschrift für Physik* **37**; **38**, p. 863; 803.
40. HEISENBERG, W. 1927. *Zeitschrift für Physik* **43**, p. 172.
41. Para estudar essa Mecânica existe uma série de textos. Por exemplo: SHIFF, L. I. 1955. **Quantum Mechanics**. McGraw-Hill Book Company; DAVYDOV, A. S. 1968. **Quantum Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.; SHANKAR, R. 1994. **Principles of Quantum Mechanics**. Plenum Press.
42. Segundo o formalismo da Mecânica Quântica Ondulatória de Schrödinger, o resultado da medida de um dado observável, representado por um operador hermitiano $\widehat{A}$, é um de seus autovalores a, correspondente ao auto-estado $|a\rangle$,ou seja: $\widehat{A}|a\rangle = a|a\rangle$. No entanto, nem sempre o estado $|\psi\rangle$ de um sistema físico é um auto-estado $|a\rangle$. Assim, surge a seguinte questão: como encontrar a medida do observável a correspondente àquele estado? Nesse caso, o estado do sistema físico considerado será uma superposição dos auto-estados $|a\rangle$, isto é: $|\psi\rangle = \sum_a |a\rangle\langle a|\psi\rangle$. Nessa expressão, $\langle a|\psi\rangle$

representa a **amplitude de probabilidade** de encontrar o sistema físico considerado no auto-estado $|a\rangle$. Este resultado traduz o **colapso da função de onda**, também conhecido como **redução da função (pacote) de onda**.

43. Veja essa discussão em: SCHILPP, P. A . (Editor) 1970. **Albert Einstein: Philosopher-Scientist**. Open Court; JAMMER, M. 1974. **The Philosophy of Quantum Mechanics**. John Wiley and Sons.
44. EINSTEIN, A., PODOLSKY, B. and ROSEN, N. 1935. *Physical Review* **47**, p. 777.
45. BOHR, N. 1935. *Nature* **136**, p. 65; *Physical Review* **48**, p. 696.
46. SCHRÖDINGER, E. 1935. *Naturwissenschaften* **23**, p. 807; 823; 844.
47. É oportuno ressaltar que a **inseparabilidade quântica** foi, durante quase trinta anos, apenas objeto de especulações acadêmicas, até o físico irlandês John S. Bell (1928-1990) demonstrar, em 1964 (*Physics* **1**, p. 195), um teorema – a famosa **desigualdade de Bell** – que permitia testar experimentalmente aquela inseparabilidade. Registre que, desde 1975, o físico francês Alain Aspect e colaboradores vêm realizando experiências sobre aquela inseparabilidade, com resultados favoráveis à interpretação de Copenhague da MQOS. Para uma análise sobre esses resultados, veja-se: GAMBOA-EASTMAN, S. 1994. *Physics Essays* **7**, p. 3. É oportuno acrescentar que o físico alemão Alfred Landé (1888-1975) em vários trabalhos publicados [*American Journal of Physics* **33**, p. 123 (1965); **34**, p. 1160 (1966); **37**, p. 541 (1969); **43**, p. 701 (1975)] sugeriu um caminho alternativo àquela interpretação. Para detalhes, veja-se: MOKROSS, B. J. 1999. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **21**, p. 136.
48. DE BROGLIE, L. V. 1926. *Comptes Rendues Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris* **183**, p. 24; 447; ----- 1927. *Comptes Rendues Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris* **184; 185**, p. 273; 380.
49. BOHM, D. 1952. *Physical Review* **85**, p. 166; 180.
50. Essa transformação havia sido usada pelo físico alemão Erwin Madelung (1881-1972), em 1926 (*Zeitschrift für Physik* **40**, p. 332). Por essa razão, ela é conhecida como **transformação de Madelung-Bohm**.
51. Essa é a razão pela qual essa interpretação causal da MQOS é também conhecida como **interpretação hidrodinâmica** dessa Mecânica.
52. Para entender essas equações, veja-se qualquer texto sobre Mecânica dos Fluidos, por exemplo: STREETER, V. L. and DEBLER, W. R. 1966. **Fluid Mechanics**, McGraw-Hill Book Company, Inc.; COIMBRA, A. L. 1967. **Mecânica dos Meios Contínuos**, Ao Livro Técnico S. A.; LANDAU, L. et LIFSHITZ, E. 1969. **Mécaniques des Fluides**, Éditions Mir; BASSALO, J. M. 1973. **Introdução à Mecânica dos Meios Contínuos**, EDUFPA; CATTANI, M. 1990. **Elementos de Mecânica dos Fluidos**, Editora Edgard Blücher.
53. Em 1954 (*Nuovo Cimento* **12**, p. 103), o físico brasileiro Mário Schenberg (1914-1990) atribuiu uma outra interpretação para esse potencial, qual seja, a de que ele seria devido às tensões internas do contínuo.
54. A saga de Bohm para reinterpretar a Mecânica Quântica tem sido objeto de estudos do físico e filósofo da Ciência brasileiro Olival Freire Junior (n. 1954) em uma série de artigos e, também, no livro: FREIRE JR., O. 1999. **David Bohm e a Controvérsia dos Quanta**. *Coleção CLE* **27** (UNICAMP). Ainda sobre essa saga, vejam-se os seguintes textos: HILEY, B. J. and PEAT, F. D. (Editors) 1988. **Quantum Implications: Essays in Honour of David Bohm**. Routledge and Kegan Paul, Londres; PESSOA JUNIOR, O. (Organizador) 2000. **Fundamentos da Física 1: Simpósio David Bohm**. Editora Livraria da Física, São Paulo.
55. Sobre a MQBB, vejam-se: HOLLAND (op. cit.) e MOKROSS, B. J. 1997. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **19**, p. 136.
56. MOKROSS, B. J. 2000. IN: PESSOA JUNIOR, op. cit.
57. A ``trajetória quântica'' resulta da integração da ``velocidade quântica'', obtida da expressão (3.6), e que apresenta a seguinte expressão:

$$v_{QB}(x,t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\left[x - X(t)\right] + \dot{X}(t),$$

onde $a(t)$ representa a largura do **pacote de onda debroglieano** e $X(t)$ o seu centro, conforme veremos mais adiante, ao tratarmos desse tipo de pacote.

58. PHILLIPIDIS, C., DEWNEY, C. e HILEY, B. J. 1979. *Nuovo Cimento* **B52**, p. 15.
59. JÓNSSON, C. 1961. *Zeitschrift für Physik* **161**, p. 454.
60. DEWNEY, C. and HILEY, B. J. 1982. *Foundations of Physics* **12**, p. 27.
61. PHILIPPIDIS, C. BOHM, D. and KAYE, R. D. 1982. *Nuovo Cimento* **B71**, p. 75.
62. DEWNEY, C. HOLLAND, P. R. and KYPRIANIDIS, A. 1987. *Journal of Physics* **A20**, p. 4717.
63. Em 1921 (*Zeitschrift für Physik* **8**, p. 110), os físicos alemães Walther Gerlach (1899-1979) e Otto Stern (1888-1969; PNF, 1943) realizaram uma experiência na qual confirmaram a **quantização espacial** dos planos das órbitas eletrônicas bohrianas. Essa quantização havia sido prevista pelo físico alemão Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951), em 1916.
64. BASSALO, J. M. F., ALENCAR, P. T. S., CATTANI, M. S. D. e NASSAR, A. B. 2002. **Tópicos em Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm.** DFUFPA (em preparação).
65. As **equações de Schrödinger não-lineares** consideradas foram as seguintes: **Equação de Bialynicki-Birula-Mycielski** (BIALYNICKI-BIRULA, I. and MYCIELSKI, J. 1976. *Annals of Physics (NY)* **100**, p. 62; ----- 1979. *Physica Scripta* **20**, p. 539.); **Equação de Bateman-Caldirola-Kanai** (BATEMAN, H. 1931. *Physical Review* **38**, p. 815; CALDIROLA, P. 1941. *Nuovo Cimento* **18**, p. 393; KANAI, E. 1948. *Progress in Theoretical Physics* **3**, p. 440.); **Equação de Kostin** (KOSTIN, M. D. 1972. *Journal of Chemical Physics* **57**, p. 3539.); **Equação de Schuch-Chung-Hartmann** (SCHUCH, D., CHUNG, K. M. and HARTMANN, H. 1983. *Journal of Mathematical Physics* **24**, p. 1652; ----- 1984. *Journal of Mathematical Physics* **25**, p. 3086.); **Equação de Süssmann-Hasse-Albrecht-Kostin-Nassar** (SÜSSMANN, D. 1973. *Seminar Talk at Los Alamos*; HASSE, R. W. 1975. *Journal of Mathematical Physics* **16**, p. 2005; ALBRECHT, K. 1975. *Physics Letters* **B56**, p. 127; KOSTIN, M. D. 1975. *Journal of Statistical Physics* **12**, p. 146; NASSAR, A. B. 1986. *Journal of Mathematical Physics* **27**, p. 2949.); **Equação de Diósi-Halliwell** (DIÓSI, L. and HALLIWELL, J. J. 1998. *Physical Review Letters* **81**, p. 2846.)
66. LEWIS, H. R. 1967. *Physical Review Letters* **18**, p. 510.
67. ERMAKOV, V. P. 1880. *Univ. Izv. Kiev* **20**, p. 1.
68. Os sistemas físicos que apresentam IE-L são os representados pelas seguintes equações: **Schrödinger, Bateman-Caldirola-Kanai, Schuch-Chung-Hartman, Hasse**. Os sistemas que não apresentam IE-L são os representados pela equações: **Bialynicki-Birula-Mycielski, Kostin, Albrecht-Kostin-Nassar, Diósi-Halliwell**.
69. A demonstração dessa expressão pode ser encontrada em qualquer texto de Mecânica Quântica, como os indicados na Nota 41.
70. Essa diferença talvez indique uma maneira experimental para comprovar a existência do **potencial quântico de Bohm** (V_{QB}) dado pela expressão (3.7).
71. MOSTAFAZADEH, A. 1997. *Physical Review* **A55**; p. 1653; 4084; ----- 1998. *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General* **31**, p. 6495.
72. JI, J. Y., KIM, J. K. and KIM, S. P. 1995. *Physical Review* **A51**, p. 4268.
73. LO, C. F. 1991. *Physical Review* **A43**, p. 404.
74. AGARWAL, G. S. and KUMAR, S. A. 1991. *Physical Review Letters* **67**, p. 3665.
75. Os estados ``espremidos'' são definidos por: $\left[\frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)}\right]^2 = \left[\frac{a(t)}{a(0)}\right]^2$. Vide Referência na Nota 64.
76. O estudo experimental do tunelamento através de sistemas dissipativos poderá, talvez, também comprovar a existência de V_{QB}.
77. O **efeito Ramsauer-Townsend** (RAMSAUER, C. W. 1921. *Annalen der Physik* **64, 66**, p. 513, 546; TOWNSEND, J. S. E. and BAILEY, 1922. *Philosophical Magazine* **43, 44**, p. 593, 1033) refere-se à transparência de alguns gases nobres em relação a elétrons com energia cinética crítica.

78. M.CATTANI**.** "Quantum Mechanics: Incomplete and Non-Local Theory." arXiv:1103.0420 (01out2010).