

# Configurações centrais planares do tipo pipa

(Kite planar central configurations)

Luis Fernando Mello<sup>1</sup>, Felipe Emanuel Chaves<sup>1</sup> e Antonio Carlos Fernandes<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil

<sup>2</sup>Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil

Recebido em 29/7/2008; Aceito em 24/9/2008; Publicado em 30/4/2009

Neste artigo estudamos configurações centrais planares do tipo pipa para o problema de quatro corpos. Mostramos a existência de tais configurações para as pipas côncavas, quando uma das massas está no interior do triângulo formado pelas outras três massas, e para as pipas convexas, quando uma das massas está no exterior do triângulo formado pelas outras três massas.

**Palavras-chave:** problema de  $n$ -corpos, configurações centrais planares do tipo pipa.

In this paper we study the kite planar central configurations for the 4-body problem. We show the existence of such configurations for the 4-body problem in two cases: kite concave and kite convex.

**Keywords:**  $n$ -body problem, kite planar central configurations.

## 1. Introdução

Considere  $n$  partículas de massas positivas  $m_i$  ocupando posições  $r_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Usualmente  $d = 2$  ou  $d = 3$ . O clássico problema de  $n$  corpos em mecânica celeste consiste no estudo da dinâmica dessas  $n$  massas interagindo de acordo com lei da gravitação universal proposta por Newton [1].

O centro de massa do sistema, dado por  $\sum_{j=1}^n m_j r_j / M$ , onde  $M = m_1 + \dots + m_n$  é a massa total, será considerado na origem de nosso referencial inercial, o qual é usualmente chamado *referencial inercial baricêntrico*.

Deste modo, as equações diferenciais que regem o problema de  $n$  corpos são dadas por

$$\ddot{r}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3}, \quad (1)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $r_{ij} = |r_i - r_j|$  é a distância Euclidiana entre  $m_i$  e  $m_j$ . Na Eq. (1) estamos adotando um referencial em relação ao qual a constante de gravitação universal tem 1 unidade.

Dizemos que as  $n$  massas formam uma *configuração central* se o vetor aceleração de cada partícula é proporcional ao seu vetor posição relativo ao centro de massa

do sistema, ou seja, se existir  $\lambda$  positivo tal que

$$\ddot{r}_i = \lambda r_i, \quad (2)$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Assim, da Eq. (1), as equações que regem o problema de  $n$  corpos numa configuração central são dadas por

$$\lambda r_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3}, \quad (3)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

As soluções colineares encontradas por Euler [2] para o problema de três corpos bem como as soluções triangulares equiláteras encontradas por Lagrange [3] para o problema de três corpos são exemplos clássicos de configurações centrais. Recomendamos os livros de Wintner [4] e Hagihara [5], bem como o artigo de Moeckel [6] e as referências lá citadas para um estudo abrangente das configurações centrais.

As configurações centrais permitem obter as únicas soluções explícitas do problema de  $n$  corpos conhecidas até hoje, que são as chamadas *soluções homográficas*, para as quais as razões das distâncias mútuas entre os corpos permanecem constantes. Além do mais, as configurações centrais estão relacionadas com algumas modificações topológicas dos conjuntos de nível de energia  $h$  e de momento angular  $c$  do problema de  $n$  corpos [7].

<sup>1</sup>E-mail: lfmelo@unifei.edu.br.

Pouco se sabe a respeito das configurações centrais para  $n$  arbitrário. Para o caso colinear, Moulton [8] mostrou que existem  $n!/2$  possíveis configurações centrais, uma para cada ordenação das massas, para qualquer escolha de massas positivas. Para o caso das configurações centrais *planares*, onde as partículas estão num mesmo plano ( $d = 2$ ), sabe-se, entre outras coisas, que  $n$  partículas de massas iguais sobre os vértices de um  $n$ -ângono regular formam uma configuração central, generalizando assim o resultado de Lagrange quando  $n = 3$  para massas iguais. Vale observar que uma configuração central planar dá origem a uma família de órbitas na qual cada partícula descreve uma cônica com um foco no centro de massa.

A importância dada ao estudo das configurações centrais pode ser exemplificada pelo sexto problema de uma lista proposta por Smale [9] como desafios matemáticos para o século XXI. Smale coloca uma questão levantada por Wintner para as configurações centrais planares: para um dado conjunto de  $n$  massas positivas, o número de configurações centrais planares não equivalentes (módulo rotações, translações e dilatações) é finito?

Para o caso de 3 corpos há somente 5 classes de equivalência de configurações centrais, sendo 3 de Euler e 2 de Lagrange. Recentemente, Hampton e Moeckel em [10] responderam afirmativamente a questão acima para  $n = 4$ , mostrando que, neste caso, o número de configurações centrais planares não equivalentes está entre 32 e 8472. A questão acima ainda está aberta para  $n > 4$ .

Neste artigo estudaremos configurações centrais planares não colineares do problema de 4-corpos que têm a forma de pipa, ou simplesmente *configurações centrais do tipo pipa*, as quais podem ser definidas como aquelas que têm um eixo de simetria passando por duas das massas. A configuração do tipo pipa é chamada *convexa* se nenhum dos corpos está localizado no interior do fecho convexo dos outros três (Fig. 1). Caso contrário, dizemos que a configuração do tipo pipa é *côncava* (Fig. 2). Para maiores detalhes, veja a Ref. [11].

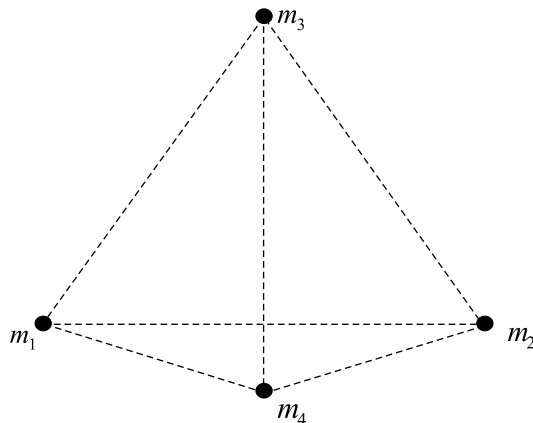


Figura 1 - Pipa convexa.

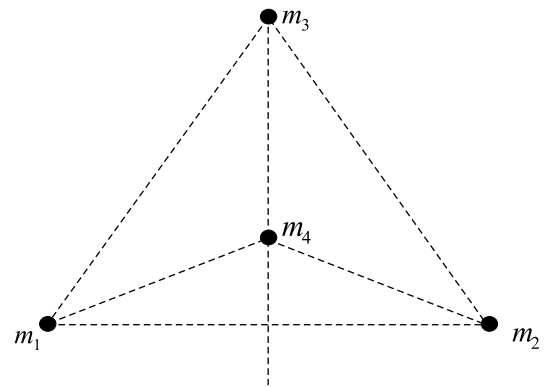


Figura 2 - Pipa côncava.

Neste artigo consideraremos que as massas  $m_3$  e  $m_4$  estarão sobre a reta de simetria das configurações do tipo pipa, sendo que a posição de  $m_3$  estará fixa, conforme a Fig. 3. O principal resultado deste artigo está colocado no teorema a seguir.

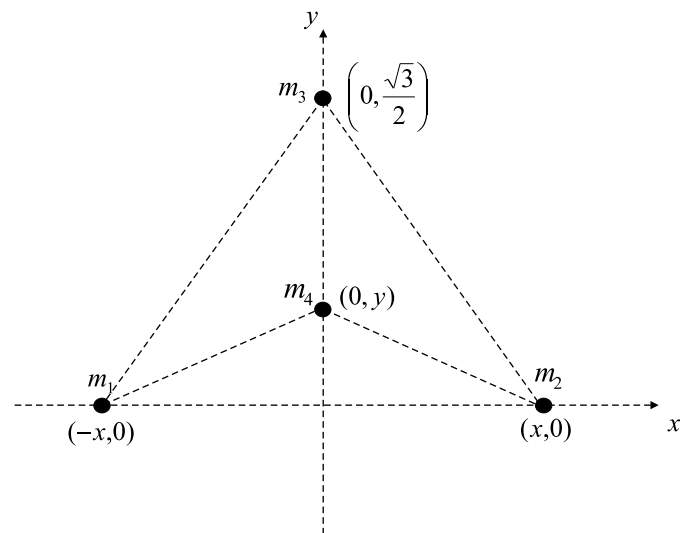


Figura 3 - Configuração do tipo pipa.

**Teorema 1** Considere quatro massas  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$  localizadas em  $(-x, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(0, \sqrt{3}/2)$  e  $(0, y)$ , com  $x > 0$  e  $y < \sqrt{3}/2$ , de acordo com a Fig. 3. Valem as seguintes afirmações:

1. Para cada

$$x_0 \in \left( \frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \frac{1}{2} \right) \cup \left( \frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \right),$$

existe um intervalo aberto não vazio  $I_{x_0}$  tal que, para cada  $y_0 \in I_{x_0}$ , existem massas positivas  $m_1 = m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$  de modo que os quatro corpos, como na Fig. 3, estão numa configuração central do tipo pipa;

2. Para  $x_0 = 1/2$  e  $y_0 = \sqrt{3}/6$ , existem massas positivas  $m_1 = m_2 = m_3$  e  $m_4$  de modo que os quatro

corpos, como na Fig. 3, estão numa configuração central do tipo pipa côncava;

3. Para  $x_0 = \sqrt{3}/2$  e  $y_0 = -\sqrt{3}/2$ , existem massas positivas  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$  de modo que os quatro corpos, como na Fig. 3, estão numa configuração central do tipo pipa convexa.

A prova deste teorema está colocada na seção 3. Na seção 2 enunciamos e demonstramos um importante resultado sobre as equações que regem as configurações centrais planares, conhecidas como equações de Dziobek. Aproveitamos ainda para ilustrar com dois exemplos as aplicações dessas equações. Na seção 4 apresentamos os comentários finais e colocamos alguns problemas abertos relativos às configurações centrais planares.

## 2. Equações de Dziobek

As Eqs. (3) formam um conjunto de  $2n$  equações para o caso de configurações planares. Alternativamente, vamos trabalhar aqui com um sistema equivalente de  $n(n-1)/2$  equações proposto por Dziobek (veja, por exemplo, a Ref. [5], p. 241)

$$f_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0, \quad (4)$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , onde  $R_{ij} = 1/r_{ij}^3$ ,  $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$ . Observe que na Eq. (4),  $\Delta_{ijk}$  é o dobro da área orientada do triângulo com vértices em  $r_i$ ,  $r_j$  e  $r_k$ , nesta ordem. Assim,  $\Delta_{ijk} = \Delta_{kij}$  e  $\Delta_{ijk} = -\Delta_{ikj}$ , para todo  $i, j, k$ . É claro que  $R_{ij} = R_{ji}$ , para todo  $i, j$ . De fato, temos a seguinte proposição.

**Proposição 2** *Considere  $n$  massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  num mesmo plano e não colineares, localizadas, respectivamente, em  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Então, o sistema da Eq. (3) é equivalente ao sistema da Eq. (4).*

**Prova.** Suponhamos que as  $n$  massas formem uma configuração central planar. Portanto, existe  $\lambda$  positivo tal que  $\ddot{r}_i = \lambda r_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Utilizando a Eq. (3), temos, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\lambda r_i = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n m_k R_{ik} (r_i - r_k).$$

Naturalmente, podemos retirar um termo da soma acima, para  $j \neq i$ , obtendo

$$\lambda r_i = - \sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{ik} (r_i - r_k) - m_j R_{ij} (r_i - r_j). \quad (5)$$

Analogamente, para  $r_j$  e para  $j \neq i$ , obtemos

$$\lambda r_j = - \sum_{k \neq j, i}^n m_k R_{jk} (r_j - r_k) - m_i R_{ji} (r_j - r_i). \quad (6)$$

Podemos, então, subtrair a Eq. (6) da Eq. (5), de modo a obter, para  $i \neq j$ ,

$$\lambda (r_i - r_j) = - \sum_{k \neq i, j}^n m_k [R_{ik} (r_i - r_k) - R_{jk} (r_j - r_k)] - [m_j R_{ij} - m_i R_{ji}] (r_i - r_j). \quad (7)$$

Tomando produto o vetorial por  $r_i - r_j$  em ambos os membros da Eq. (7), decorre

$$0 = - \sum_{k \neq i, j}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = -f_{ij}.$$

Portanto,  $f_{ij} = 0$ , para todo  $1 \leq i < j \leq n$ .

Reciprocamente, consideremos as equações de Dziobek

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = 0,$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , as quais podem ser escritas da forma

$$\sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{ik} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = \sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{jk} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k). \quad (8)$$

No membro esquerdo podemos incluir o termo em  $j$  sem alterar a igualdade. Da mesma forma, podemos inserir o termo em  $i$  no membro direito. Assim, temos

$$\sum_{k \neq i}^n m_k R_{ik} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k), \quad (9)$$

ou seja

$$(r_i - r_j) \wedge \sum_{k \neq i}^n m_k R_{ik} (r_i - r_k) = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + (r_j \wedge r_k)]. \quad (10)$$

Notemos que a igualdade acima pode ser escrita como

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + (r_j \wedge r_k)].$$

Podemos inserir à direita da igualdade o termo  $-r_j$  sem alterá-la, obtendo

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + r_j \wedge (-r_j + r_k)].$$

Disto, segue

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) - r_j \wedge (r_j - r_k)] = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [(r_i - r_j) \wedge (r_j - r_k)] = (r_i - r_j) \wedge \frac{F_j}{m_j},$$

de onde temos

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = (r_i - r_j) \wedge \frac{F_j}{m_j},$$

a qual implica que

$$(r_i - r_j) \wedge (m_j F_i - m_i F_j) = 0. \quad (11)$$

Efetuada o produto vetorial membro a membro, obtemos

$$r_i \wedge m_j F_i - r_i \wedge m_i F_j - r_j \wedge m_j F_i + r_j \wedge m_i F_j = 0,$$

de onde temos

$$m_j r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_j - m_j r_j \wedge F_i + m_i r_j \wedge F_j = 0.$$

Somando em  $j$  para  $j \neq i$ , temos

$$(M - m_i) r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge \sum_{j \neq i}^n F_j - \left( \sum_{j \neq k}^n m_j r_j \right) \wedge F_i + m_i \sum_{j \neq i}^n r_j \wedge F_j = 0, \quad (12)$$

onde  $M$  é a massa total. Como o centro de massa está na origem do referencial, temos

$$\sum_{j=1}^n m_j r_j = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n m_j r_j = -m_i r_i. \quad (13)$$

Visto que o espaço é homogêneo e isotrópico e o sistema é isolado, temos que as quantidades de momento linear e momento angular são conservadas. Então, respectivamente, temos

$$\sum_{j=1}^n F_j = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n F_j = -F_i \quad (14)$$

e

$$\sum_{j=1}^n (r_j \wedge F_j) = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n (r_j \wedge F_j) = (-r_i \wedge F_i). \quad (15)$$

Substituindo as Eqs. (13), (14) e (15) na Eq. (12), obtemos

$$M r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_i + m_i r_i \wedge F_i + m_i r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_i = 0.$$

Desta forma,  $M r_i \wedge F_i = 0$ , o que implica em  $r_i$  e  $F_i$  serem paralelos, ou seja,  $F_i = \lambda_i r_i$ , ou ainda  $\ddot{r}_i = (\lambda_i/m_i) r_i$ . Da Eq. (11), decorre

$$\left( \frac{\lambda_i}{m_i} r_i - \frac{\lambda_j}{m_j} r_j \right) \wedge (r_i - r_j) = 0.$$

Assim,

$$-\frac{\lambda_i}{m_i} r_i \wedge r_j - \frac{\lambda_j}{m_j} r_j \wedge r_i = 0,$$

o que implica em

$$\left( \frac{\lambda_i}{m_i} - \frac{\lambda_j}{m_j} \right) (r_j \wedge r_i) = 0.$$

Se  $r_j$  é paralelo a  $r_i$ , a igualdade acima se verifica facilmente. Se  $r_i$  e  $r_j$  são não colineares, temos que

$$\frac{\lambda_i}{m_i} = \frac{\lambda_j}{m_j} = \lambda,$$

para todo  $i, j$ . Portanto,

$$\ddot{r}_i = \lambda r_i,$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , como queríamos provar. ■

Faremos, a seguir, aplicações das Eqs. (4) nos exemplos de configurações centrais planares de Lagrange [3] e de Roberts [12]. Considere 3 corpos de massas positivas e não colineares. Das Eqs. (4), temos

$$\begin{aligned} f_{12} &= m_3 (R_{13} - R_{23}) \Delta_{123} = 0, \\ f_{13} &= m_2 (R_{12} - R_{23}) \Delta_{132} = 0, \\ f_{23} &= m_1 (R_{12} - R_{13}) \Delta_{123} = 0. \end{aligned}$$

Como  $m_i > 0$  e  $\Delta_{ijk} \neq 0$ , segue que  $R_{12} = R_{13} = R_{23}$ . Em outras palavras, as massas estão sobre os vértices de um triângulo equilátero.

Considere 5 corpos de massas  $m_1 = m_3 = 1$ ,  $m_2 = m_4 = m$  e  $m_5 = p$ , nas posições  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, k)$ ,  $(0, -k)$  e  $(0, 0)$ , respectivamente, de acordo com a Fig. 4.

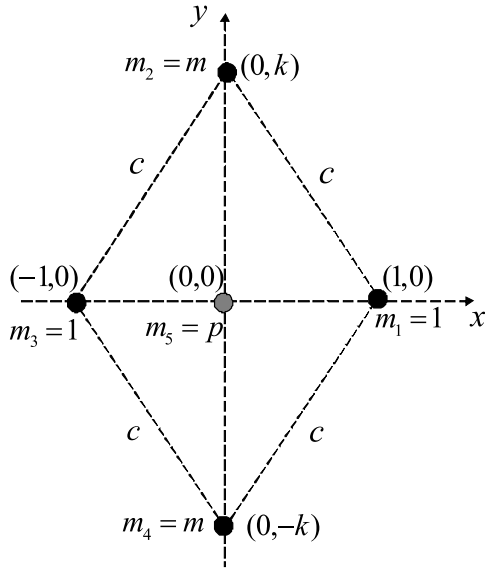


Figura 4 - Cinco corpos no plano. Exemplo de Roberts.

Queremos encontrar valores para  $m$ ,  $p$  e  $k$  de modo que os 5 corpos com as massas e as posições de acordo com a Fig. 4 estejam em configuração central. Para este caso, o conjunto de Eqs. (4) é um conjunto de 10 equações. No entanto, pelas simetrias envolvidas, resulta que  $f_{13} = 0$ ,  $f_{15} = 0$ ,  $f_{24} = 0$ ,  $f_{25} = 0$ ,  $f_{35} = 0$  e  $f_{45} = 0$  são trivialmente satisfeitas. As outras 4 equações,  $f_{12} = 0$ ,  $f_{14} = 0$ ,  $f_{23} = 0$  e  $f_{34} = 0$  são equivalentes a  $f_{12} = 0$ , a qual pode ser escrita como

$$(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} + m(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + p(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0,$$

ou, equivalentemente, como

$$m \left( \frac{2}{c^3} - \frac{1}{4k^3} \right) + p \left( 1 - \frac{1}{k^3} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{c^3} \right) = 0.$$

Para  $m = 1$  e  $p = -1/4$ , a equação acima é satisfeita, para todo  $k \in \mathbb{R}^+$ . Ou seja, há um contínuo de configurações centrais não equivalentes.

### 3. Demonstração do Teorema 1

Nesta seção faremos a prova do Teorema 1 utilizando as equações de Dziobek (4). Para o problema planar de 4-corpos (4) é um conjunto de 6 equações. As configurações do tipo pipa, como na Fig. 3, sem colisões, devem satisfazer, entre outras, as seguintes relações

$$r_{13} = r_{23}, \quad r_{14} = r_{24}, \quad \Delta_{143} = \Delta_{234}.$$

Consideremos as equações de Dziobek de nosso problema

$$f_{12} = m_3 (R_{13} - R_{23}) \Delta_{123} + m_4 (R_{14} - R_{24}) \Delta_{124} = 0, \quad (16)$$

$$f_{13} = m_2 (R_{12} - R_{32}) \Delta_{132} + m_4 (R_{14} - R_{34}) \Delta_{134} = 0, \quad (17)$$

$$f_{14} = m_2 (R_{12} - R_{42}) \Delta_{142} + m_3 (R_{13} - R_{43}) \Delta_{143} = 0, \quad (18)$$

$$f_{23} = m_1 (R_{21} - R_{31}) \Delta_{231} + m_4 (R_{24} - R_{34}) \Delta_{234} = 0, \quad (19)$$

$$f_{24} = m_1 (R_{21} - R_{41}) \Delta_{241} + m_3 (R_{23} - R_{43}) \Delta_{243} = 0, \quad (20)$$

$$f_{34} = m_1 (R_{31} - R_{41}) \Delta_{341} + m_2 (R_{32} - R_{42}) \Delta_{342} = 0. \quad (21)$$

Usando as relações acima, podemos reescrever a Eq. (21) da seguinte maneira

$$(m_1 - m_2) (R_{31} - R_{41}) \Delta_{341} = 0.$$

Nas hipóteses do Teorema 1, o termo  $\Delta_{134}$  nunca se anula, daí  $m_1 = m_2$  ou  $R_{13} = R_{14}$ . Se  $R_{13} = R_{14}$ , temos um quadrado, que é uma configuração central se, e somente se,  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$  (veja item 3 do Teorema 1). Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$m_1 = m_2 = 1.$$

A Eq. (16) é trivialmente satisfeita. Usando as relações de simetria acima, temos

$$f_{13} = 0 \Leftrightarrow f_{23} = 0$$

e

$$f_{14} = 0 \Leftrightarrow f_{24} = 0.$$

Portanto, é suficiente encontrar soluções para as Eqs. (17) e (18), com valores positivos para as massas  $m_3$  e  $m_4$ . Vamos reescrever estas equações de modo a obter  $m_3$  e  $m_4$  como funções das posições

$$m_3 = \frac{(R_{12} - R_{42}) \Delta_{142}}{(R_{43} - R_{13}) \Delta_{143}}, \quad (22)$$

$$m_4 = \frac{(R_{12} - R_{32}) \Delta_{132}}{(R_{34} - R_{14}) \Delta_{134}}. \quad (23)$$

Desejamos encontrar, se existirem, as regiões no semi-plano  $x > 0$  para as quais teremos valores positivos para ambas as massas. Devemos, então, estudar o sinal dos termos envolvidos nas expressões de  $m_3$  e  $m_4$  nas Eqs. (22) e (23), respectivamente.

Substituindo as coordenadas, conforme indicações da Fig. 3, temos

$$(R_{12} - R_{42}) < 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > 0, -\sqrt{3}x < y < \sqrt{3}x \right\},$$

$$(R_{34} - R_{14}) < 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > 0, y < -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\},$$

$$(R_{43} - R_{13}) < 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > 0, y < \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3 + 4x^2}}{2} \right\},$$

$$(R_{12} - R_{32}) < 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > \frac{1}{2}, y < \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Para o sinal das áreas orientadas consideremos primeiramente  $0 < y < \sqrt{3}/2$ . Neste caso, nas expressões (22) e (23) vale

$$\Delta_{142} < 0, \quad \Delta_{143} > 0, \quad \Delta_{132} < 0, \quad \Delta_{134} < 0.$$

Assim, comparando o sinal de cada um dos termos das Eqs. (22) e (23), teremos que se  $(x, y) \in A_1 \cup A_2$ , as massas  $m_3$  e  $m_4$  serão positivas, onde

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2\sqrt{3}-3}{2} < x < \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} < y < \sqrt{3}x \right\},$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 < y < -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}.$$

Consideremos agora  $y < 0$ . Neste caso, nas expressões (22) e (23), temos

$$\Delta_{142} > 0, \quad \Delta_{143} > 0, \quad \Delta_{132} < 0, \quad \Delta_{134} < 0.$$

Novamente, comparando o sinal de cada um dos termos das Eqs. (22) e (23), teremos que se  $(x, y) \in A_3 = B_1 \cup B_2$ , as massas  $m_3$  e  $m_4$  serão positivas, onde

$$B_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}, -\sqrt{3}x < y < \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3+4x^2}}{2} \right\},$$

$$B_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2} \leq x < \frac{2\sqrt{3}+3}{2}, -\sqrt{3}x < y < -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}.$$

O caso  $y = 0$  não precisa ser considerado, pois, não ocorre configuração central do tipo pipa, devido ao Teorema da Reta Perpendicular Bissetora, conforme [6].

Finalmente, concluímos que se  $(x_0, y_0) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , vide Fig. 5, então as massas

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = m_3(x_0, y_0), \quad m_4 = m_4(x_0, y_0),$$

com posições

$$r_1 = (-x_0, 0), \quad r_2 = (x_0, 0), \quad r_3 = \left( 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad r_4 = (0, y_0),$$

formam uma configuração central do tipo pipa, como mostrada na Fig. 3. O intervalo  $I_{x_0}$  do enunciado do teorema é obtido tomando a interseção da reta  $x = x_0$  com a região aberta  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Isso demonstra o item 1 do Teorema 1.

Para a prova do item 2, observemos que, neste caso, valem  $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 1$ ,  $r_{14} = r_{24}$  e  $\Delta_{143} = \Delta_{234}$ . Assim,  $f_{12} = 0$  é trivialmente satisfeita. De  $f_{13} = 0$  e de  $f_{23} = 0$  resultam, respectivamente,  $R_{14} = R_{34}$  e  $R_{24} = R_{34}$ . Portanto,  $R_{14} = R_{24} = R_{34}$ . Assim, de  $f_{24} = 0$  e  $f_{34} = 0$ , temos  $m_1 = m_3$  e  $m_1 = m_2$ , respectivamente. Logo,  $m_1 = m_2 = m_3$ . De posse dessas conclusões sobre as massas e sobre as distâncias, segue que  $f_{14} = 0$  também é trivialmente satisfeita. Isso conclui a prova do item 2 do Teorema 1.

Passemos agora à prova do item 3 do Teorema 1. Neste caso, os 4 corpos estão sobre os vértices de um quadrado, de modo que as seguintes igualdades são obtidas:  $r_{12} = r_{34}$ ,  $r_{13} = r_{23} = r_{14} = r_{24}$  e

$\Delta_{123} = \Delta_{143} = \Delta_{234} = \Delta_{142}$ . Substituindo essas informações nas equações de Dziobek resulta que  $f_{12} = 0$  e  $f_{34} = 0$  são trivialmente satisfeitas, enquanto que de  $f_{13} = 0$ ,  $f_{14} = 0$ ,  $f_{23} = 0$  e  $f_{24} = 0$  resultam  $m_2 = m_4$ ,  $m_2 = m_3$ ,  $m_1 = m_4$  e  $m_1 = m_3$ , respectivamente. Portanto,  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$  e o item 3 do Teorema 1 está demonstrado. ■

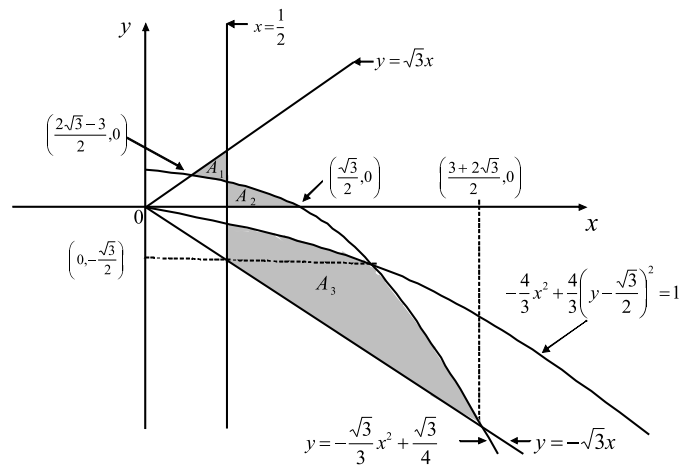


Figura 5 - Regiões de existência de configurações centrais do tipo pipa.

Baseados no Teorema 1, seguem os seguintes corolários.

**Corolário 3** Para cada  $1/2 < x_0 < \sqrt{3}/2$ , existem dois intervalos abertos disjuntos  $I_{x_0}^+$  e  $I_{x_0}^-$ , tal que para

cada  $y_0 \in I_{x_0}^+ \cup I_{x_0}^-$ , existem massas positivas  $m_1 = m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$ , de modo que os quatro corpos, como na Fig. 3, estejam numa configuração central do tipo pipa. Mais especificamente, se  $y_0 \in I_{x_0}^+$  a configuração central é do tipo pipa côncava e se  $y_0 \in I_{x_0}^-$  a configuração central é do tipo pipa convexa.

**Corolário 4** Considere  $0 < x < (2\sqrt{3} - 3)/2$ . Então, não existem  $y \in \mathbb{R}$  e massas positivas  $m_1, m_2, m_3$  e  $m_4$ , de modo que os quatro corpos, como na Fig. 3, estejam numa configuração central do tipo pipa.

**Corolário 5** Considere  $y < \sqrt{3}/2$ . Então, se  $x > (2\sqrt{3} + 3)/2$ , não existem massas positivas  $m_1, m_2, m_3$  e  $m_4$ , de modo que os quatro corpos, como na Fig. 3, estejam numa configuração central do tipo pipa.

#### 4. Observações finais

Neste artigo estudamos as configurações centrais planares do tipo pipa para o problema de 4-corpos. Outras classes de configurações centrais podem interessar ao leitor, tais como as configurações centrais planares encaixantes [13].

Deixamos ao leitor o estudo das configurações centrais planares do tipo pipa para o caso em que  $y > \sqrt{3}/2$ , completando assim os resultados do Teorema 1 (vide Fig. 3).

Como problemas abertos, podemos colocar os dois seguintes:

1. Dar um exemplo analítico de uma configuração central planar para o problema de 4-corpos que não apresente reta de simetria. Um exemplo numérico pode ser encontrado em [11];
2. Inspirado no exemplo de Roberts com uma massa negativa, prove a existência (ou não) de um

contínuo de configurações centrais planares não equivalentes para o problema de 4-corpos.

#### 5. Agradecimentos

O primeiro autor desenvolveu este trabalho com auxílio do CNPq, projeto 473747/2006-5. O segundo autor é bolsista da CAPES/REUNI. O terceiro autor é bolsista da FAPESP, projeto 2007/58037-6.

#### Referências

- [1] I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Royal Society, London, 1687).
- [2] L. Euler, *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* **11**, 144 (1767).
- [3] J.L. Lagrange, *Essai sur le Problème de Trois Corps* (Ouvres, Gauthier-Villars, 1873), v. 6.
- [4] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1941).
- [5] Y. Hagihara, *Celestial Mechanics* (MIT Press, Massachusetts, 1970), v. 1.
- [6] R. Moeckel, *Math. Z.* **205**, 499 (1990).
- [7] S. Smale, *Invent. Math.* **11**, 45 (1970).
- [8] F.R. Moulton, *Ann. of Math.* **12**, 1 (1910).
- [9] S. Smale, *Math. Intelligencer* **20**, 7 (1998).
- [10] M. Hampton and R. Moeckel, *Invent. Math.* **163**, 289 (2006).
- [11] J. Bernat, J. Llibre and E. Pérez-Chavela, On the planar central configurations of the 4-body problem with three equal masses, preprint.
- [12] G.E. Roberts, *Physica D* **127**, 141 (1999).
- [13] L.F. Mello e A.C. Fernandes, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 385 (2007).