Division du travail

Xavier Ragot*

Cet article présente une modélisation de la croissance fondée sur le lien entre division du travail et progrès technique. La division du travail donne lieu à des opportunités d'introduction de nouvelles machines qui viennent aider ou remplacer les travailleurs. Des tâches devenues obsolètes disparaissent, et de nouvelles tâches sont créées pour produire les nouvelles machines. Ce modèle permet d'étudier la dynamique conjointe des deux facteurs de production, travail et capital. On montre que la diversité des tâches croît moins vite lorsque le progrès technique s'accélère. On montre, par ailleurs, que cette modélisation de l'innovation produit un modèle de croissance sans effets de taille.

DIVISION OF LABOUR AND TECHNICAL CHANGE

We present a model of growth based on the link between technical change and division of labour. Division of labour generates opportunities of introduction of new capital goods, which can help or even replace workers. The tasks which become useless disapear and new tasks are created to produce the new capital goods. This model analyzes the joint dynamic of labour and of capital goods. We show that the diversity of labour decelerates when technical change accelerates. We show that this model yields a new kind of growth model without scale effects.

Classification *JEL* : O40, O31, L20

La croissance économique se déroule avec une différenciation des entreprises et des biens intermédiaires. En France, le nombre d'entreprises de l'industrie du commerce et des services a progressé, entre 1990 et 1996, à un taux voisin de celui de la population active, 3,6 % (Cordellier [2000]). Par ailleurs, un nombre important de demandes de nouveaux brevets est adressé chaque année par la France à l'Office européen des brevets : de 3 034 en 1985, ce nombre est passé à 4 845 en 1990 et à 5 880 en 1995 (CE [1997], Annexes, tableau A.6.2). Ces chiffres ne sont bien sûr que des représentations imparfaites du processus de différenciation pour lequel il n'existe pas de mesure naturelle (*cf.* Freeman [1994] et Young [1998] pour une critique théorique). Cependant, cette tendance à la fragmentation de l'appareil productif semble suffisamment avérée pour constituer un fait stylisé de la croissance économique. Plutôt qu'une conséquence de celle-ci, les modèles de

* DELTA, 48 boulevard Jourdan, 75014 Paris. E-mail : ragot@delta.ens.fr.

Je tiens à remercier Robert Boyer, Régis Breton et différents participants aux séminaires du CEPREMAP. Deux référés de la *Revue économique* ont largement contribué à l'amélioration de la qualité de l'article. Je reste bien sûr seul responsable des erreurs restantes.

Cet article a été réalisé lorsque j'étais au CEPREMAP.

Revue économique — vol. 54, N° 4, juillet 2003, p. 725-742

croissance endogène, en premier lieu celui de Romer [1990], ont présenté la fragmentation de l'appareil productif comme une cause de la croissance économique de long terme : l'activité de recherche et développement permet d'introduire de nouveaux outils, complémentaires à ceux existants, qui facilitent le travail et accroissent la productivité du capital. Cette conception de la croissance se trouve dans la filiation directe des travaux d'Allyn Young [1928] qui, reprenant les analyses d'Adam Smith, affirme que la différenciation des industries constitue, d'une part, la forme moderne la plus importante de la division du travail et permet, d'autre part, une croissance de long terme. L'objet de cet article est d'introduire explicitement la différenciation des tâches dans l'analyse de la croissance en articulant la diversité du travail et la diversité des biens intermédiaires. On s'attache tout d'abord à l'étude de l'évolution à long terme de la diversité des tâches : la diversité du travail est-elle un substitut ou un complément, comme l'affirme Adam Smith, à la diversité des biens intermédiaires ? Par ailleurs, on analyse les conséquences pour la théorie du changement technique des interdépendances entre la diversité des deux facteurs.

L'hypothèse centrale du modèle est la reprise des analyses d'Adam Smith du rôle de la division du travail dans la production de nouveaux outils. Celui-ci écrit : « C'est à la division du travail qu'est originairement due l'invention de toutes ces machines propres à abréger et à faciliter le travail. » (Smith [1776], une traduction dans Smith [1990], Boyer et Schmeder [1990].) Cet aspect de l'analyse de Smith a été particulièrement développé par Allyn Young [1928] pour qui la division du travail permet la simplification des tâches et crée des opportunités d'introduction de nouveaux outils qui se substituent aux travailleurs. Cette conception de la croissance comme mécanisation ou automatisation de la division du travail est aussi reprise par les historiens du changement technique. Hirschhorn [1984, chap. 1] écrit par exemple : « The history of industrialization is evoked by three terms: the division of labor, specialization, and mechanization. » Ce processus de mécanisation semble dominant pour la mécanisation du travail manuel, avec l'application des principes tayloristes et fordistes. Il semble aussi à l'œuvre pour le travail intellectuel, comme en témoigne la différenciation des outils intellectuels parmi lesquels nombre de logiciels. Cette conception de la croissance articule diversité du travail qui permet la création d'opportunités d'introduction de nouveaux outils et diversité des biens intermédiaires qui augmente la productivité du travail.

De manière plus précise, cette approche introduit deux causalités qui relient la diversité des deux facteurs. Tout d'abord, l'augmentation de la diversité des tâches permet d'introduire plus facilement de nouveaux biens intermédiaires et accroît le nombre d'opportunités d'innovation. En conséquence, la probabilité de découverte de nouveaux outils s'accroît avec la division du travail. En d'autres termes, l'augmentation de la diversité du facteur travail facilite l'accroissement de la diversité du facteur capital. Par ailleurs, l'augmentation du nombre de biens intermédiaires contribue à la fragmentation de l'appareil productif, ce qui tend à diminuer la production de chaque entreprise. Chacune d'elles réduit alors son emploi et sa division du travail, comme Stigler [1951] le notait déjà. Ainsi, l'accroissement de la diversité des biens intermédiaires tend à diminuer la division du travail au sein de chaque entreprise.

L'interaction de ces deux causalités donne deux résultats. Le premier concerne l'étude de l'évolution de la diversité du travail à long terme. Le modèle délivre un processus de substitution à court terme entre la division du travail

Revue économique — vol. 54, N° 4, juillet 2003, p. 725-742

interne et externe aux entreprises : la diversité des entreprises et des biens intermédiaires se substitue à la diversité des tâches réalisées dans l'économie. Cependant, l'effet de long terme, qui tient compte de l'augmentation de la population montre que la relation entre diversité des tâches et des biens intermédiaires est plus complexe. Alors que la diversité des biens intermédiaires croît continûment, la diversité du travail augmente si la découverte de nouveaux biens intermédiaires s'avère difficile. Si l'activité d'innovation devient de plus en plus facile du fait de l'augmentation de la diversité des biens intermédiaires, alors la diversité du travail tend à décroître à long terme. Dans tous les cas, le taux de croissance de la division du travail diminue lorsque le rythme du progrès technique augmente.

Le second résultat concerne la théorie du changement technique et de la croissance. Le modèle aboutit à des rendements croissants agrégés réalistes qui sont compatibles avec un accroissement de la population. En effet, comme le note Jones [1995], les premiers modèles de croissance endogène (Romer [1990], Grossman et Helpman [1991], Aghion et Howitt [1992] entre autres) aboutissent à une croissance de long terme positive si la population est constante, mais qui tend vers l'infini si la population croît, ce qui est évidemment réfuté par la croissance des pays développés. Ainsi, ces modèles engendrent trop de rendements croissants par rapport à la dynamique de l'innovation. Ce résultat contre-intuitif a été appelé problème des effets de taille et a donné lieu à une seconde génération de modèles qui formalise la croissance en produisant une mesure réaliste des rendements croissants au niveau de l'économie (Jones [1995], Kortum [1997], Segerstrom [1998], Young [1998], Eicher et Turnovsky [1999] entre autres). Ce modèle s'inscrit dans cette littérature en montrant que la prise en compte explicite de l'interrelation entre la diversité des deux facteurs aboutit à un processus de croissance semi-endogène (Jones [1995]) qui permet de faire disparaître les effets de taille.

Le modèle se présente en cinq parties. La première modélise les ménages. La seconde étudie la production et la division du travail au sein des entreprises. La troisième partie introduit le secteur de recherche et développement. La quatrième détermine le taux de croissance de l'économie ainsi que la stabilité du sentier de croissance. La cinquième calcule le programme optimal. La conclusion résume les résultats et présente des implications empiriques.

LES MÉNAGES

La taille de la population est $L_t = e^{ut}$ et croît donc à un taux u. Chaque ménage est modélisé par une famille dynastique qui maximise l'utilité de l'ensemble de sa descendance. L'économie est composée d'un continuum de biens de longueur N_t qui sont parfaitement substituables pour les ménages. À l'équilibre, le prix de chaque bien sera identique et normalisé à 1. Comme le montre Segerstrom [1998], si la fonction d'utilité est logarithmique, le programme des ménages peut se simplifier en un programme d'un ménage représentatif qui maximise

$$\max_{c_t} \int_0^{\infty} e^{-(\rho - u)t} \ln(c_t) \, \mathrm{d}t$$

Revue économique — vol. 54, N° 4, juillet 2003, p. 725-742

où ρ est le taux d'escompte subjectif de toutes les générations, où $c_t = \int_0^{N_t} c_{u,t} \mathrm{d}i$ est la consommation totale, somme de la consommation totale de chaque bien i, $c_{i,t}$, et sous la contrainte $\dot{b}_t = W_t + r_t b_t - c_t - u b_t$. Cette contrainte définit la dynamique du volume d'actifs financiers par personne b_t en fonction de l'ensemble des revenus du travail W_t et du taux d'intérêt instantané r_t. La solution de ce programme vérifie la traditionnelle relation :

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = r_t - \rho \tag{1}$$

LES ENTREPRISES

L'hypothèse centrale du modèle est que la fonction de production dépend non seulement de la quantité de capital et de travail utilisée, mais aussi de la diversité de ces deux facteurs. L'accroissement de la diversité des entreprises est le résultat de l'activité de recherche et développement qui produit de nouveaux brevets. Les différents biens, qui sont parfaitement substituables pour les ménages, le sont imparfaitement pour les entreprises qui les utilisent comme biens intermédiaires. Par conséquent, et comme dans Romer [1990], un accroissement de la diversité des biens entraîne une augmentation de la productivité des entreprises.

Lorsqu'une entreprise achète un brevet, elle a accès à une technologie qui lui permet de choisir le nombre de tâches exécutées par les travailleurs. Ce nombre de tâches est appelé division interne du travail et est notée d_t. On fait l'hypothèse que les tâches ne sont pas parfaitement substituables au sein de l'entreprise, et que l'élasticité de substitution entre les tâches est s avec $s \geqslant 1$. Avec cette hypothèse, une augmentation du nombre de tâches accroît la productivité horaire du travail, comme on le vérifie plus loin. De plus, chaque entreprise choisit le temps de travail alloué sur chaque tâche x_1 $(0 \leqslant l \leqslant d_t)$, de sorte que le nombre de tâches et le temps passé sur chaque tâche entrent dans la fonction de production par l'agrégat $\left(\int_0^{d_{i,t}} x_l^{\frac{s-1}{s}} \mathrm{d}l\right)^{\frac{s}{s-1}}$.

Par ailleurs, l'entreprise choisit la quantité de bien intermédiaire k_j, $(0 \leqslant j \leqslant N_t)$, qu'elle achète à chaque autre entreprise. Les différentes quantités de biens achetés aux autres entreprises interviennent dans la fonction de production par un agrégat $\left(\int_0^{N_t} k_j^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}j\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$ avec $\varepsilon > 1$, qui implique que l'élasticité de substitution entre les types de biens intermédiaires est ε et que la productivité du capital augmente lorsque la diversité N_t de ceux-ci augmente.

La fonction de production de chaque entreprise est :

$$Q_{i,t} = N_t^{\gamma - \frac{\eta}{\varepsilon - 1}} \left(\int_0^{N_t} k_j^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}j\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} - \eta} \left(\int_0^{d_{i,t}} x_l^{\frac{s-1}{s}} \mathrm{d}l\right)^{\frac{s}{s-1}\sigma} \tag{2}$$

avec $\gamma, \eta, \varepsilon, \sigma > 0$. Le terme $N_t^{\gamma - \frac{\eta}{\varepsilon - 1}}$ permet de représenter la contribution de la diversité des biens intermédiaires à la productivité totale des facteurs, comme le montre Benassy [1996]. En effet, si la firme utilise une quantité totale de travail L, et une quantité totale de bien intermédiaire K, si elle utilise ses stocks uniformément (ce qui maximise sa productivité), $x_l = L/d_{i,t}$ et $k_j = K/N_t$, la production est alors

$$Q_{i,t} = N_t^{\gamma} d_{i,t}^{\frac{\sigma}{s-1}} K^{\eta} L^{\sigma}$$

À volume de capital donné, la diversité des biens intermédiaires augmente la productivité totale des facteurs avec une élasticité γ. Les paramètres σ et η sont les élasticités de la production en fonction du stock de travail et du stock de capital. L'effet sur la productivité d'un accroissement du nombre de tâches exécutées dans l'entreprise est mesuré par le terme $d_{i,t}^{\frac{\sigma}{s-1}}$ et est d'autant plus grand que s est petit et que σ est grand.

La relation entre la division du travail au sein de l'entreprise et la productivité est au cœur des premiers chapitres de *La Richesse des nations*, notamment au travers l'exemple de la manufacture d'épingle. La division du travail entraîne cependant des coûts additionnels, qui sont des coûts d'organisation. Coase [1937], par exemple, écrit que la fonction d'entrepreneur possède des rendements décroissants. Plus la firme est grande, plus il est difficile de la gérer efficacement. Par ailleurs, Bolton et Dewatripont [1994] modélisent les coûts d'information au sein de la firme, et montrent qu'ils croissent avec la taille de l'entreprise. Enfin Becker et Murphy [1992] écrivent que le degré de division du travail est limité par les différents coûts de coordination des travailleurs. Nous faisons l'hypothèse que les coûts de coordination croissent avec la division interne du travail $d_{i,t}$, et possède la forme simple de $hd_{i,t}$ unité de travail. Une discussion plus longue de la fonction de production est menée dans Ragot [2000].

Les entreprises peuvent produire chaque bien de deux manières : soit elles achètent un brevet, qui donne accès à une technologie qui permet de diviser le travail, soit elles essaient de copier les firmes existantes. Dans ce dernier cas, les entreprises produisent avec du travail et avec des rendements constants. L'existence d'imitateurs potentiels oblige les firmes qui possèdent des brevets à fixer un prix limite, pour éviter l'envahissement de leur marché, comme dans Murphy, Shleifer et Vishny [1989]. L'hypothèse de l'existence d'un prix limite est introduite ici pour simplifier l'analyse. En effet, sans celle-ci, chaque entreprise tiendrait compte de son pouvoir de marché, mesuré par l'élasticité de la demande, ce qui compliquerait inutilement les calculs. Chaque firme fait face au même prix limite car les imitateurs ont des technologies à rendements constants avec la même productivité. Sans perte de généralité, on fait l'hypothèse que le prix limite est égal à 1.

Pour résumer, la firme i maximise ses profits

$$\max_{d_{i,t}, x_j, k_j} \pi_{i,t} = \max_{d_{i,t}, x_j, k_j} Q_{i,t} - \int_{j=0}^{N_t} k_j \, \mathrm{d}j - \left(\int_{l=0}^{\mathrm{d}_{i,t}} x_l \, \mathrm{d}l + h\mathrm{d}_{i,t} \right) w_t$$

La solution de ce programme est symétrique : les entreprises allouent la même quantité de temps x_t sur chaque tâche et chaque entreprise choisit la même division interne du travail et produit la même quantité de biens ; on peut ainsi faire disparaître les indexes *i* et *j*. Les conditions du premier ordre sont :

$$\eta \mathrm{Q}_t = \mathrm{N}_t k_t \tag{3}$$

$$\sigma \mathrm{Q}_t = w_t d_t x_t \tag{4}$$

$$\frac{s}{s-1}\sigma \mathrm{Q}_t = (d_t x_t + h d_t) w_t \tag{5}$$

Les conditions du second ordre impliquent $\sigma < 1$, $\eta < 1$, et $\frac{s}{s-1}\sigma < 1$. Les conditions du premier ordre déterminent la division interne du travail

$$h d_t = \frac{\sigma}{s-1}\frac{\mathrm{Q}_t}{w_t} \tag{6}$$

Cette expression de la division du travail permet de faire apparaître le rôle de la taille du marché. En effet, cette expression établit que la division du travail d_t est proportionnelle au rapport $\frac{\mathrm{Q}_t}{w_t}$ qui est le chiffre d'affaire Q_t, puisque les prix ont été normalisés à 1, divisé par le coût unitaire du travail, w_t. Ce ratio peut donc être interprété comme une mesure de la taille du marché normée par le coût du travail. Le profit π_t de chaque firme s'écrit :

$$\pi_t = m \mathrm{Q}_t \tag{7}$$

où $m = 1 - \eta - \sigma - \frac{\sigma}{s-1}$ est la part des profits dans la production de la firme. La condition de profits positifs s'écrit $m > 0$. Cette condition équivaut à une décroissance globale des rendements au sein de l'entreprise, lorsqu'on tient compte du choix de la division du travail. On peut noter que les profits ne viennent pas ici d'une hypothèse de concurrence imparfaite avec des technologies à rendements constants, mais des rendements décroissants liés à l'organisation du travail.

Avec l'équation (2) et les conditions du premier ordre, la production de chaque firme s'écrit :

$$\mathrm{Q}_t = \mathrm{E}\mathrm{N}_t^{\frac{\gamma}{1-\eta}} d_t^{\sigma \frac{s}{(s-1)(1-\eta)}} \tag{8}$$

Avec $\mathrm{E} = \left[\eta^\eta \sigma^\sigma \left(\frac{1}{h}\frac{\sigma}{s-1}\right)^{\frac{1}{1}\frac{\sigma}{s-1}}\right]^{\frac{1}{1-\eta}}$. Cette fonction de production réduite possède un aspect smithien, car elle ne dépend que de la diversité des facteur capital et travail. Tous les changements de paramètres qui accroissent E augmentent le niveau de la production. De manière intuitive, E dépend négativement des coûts de coordination *h*. E diminue lorsque l'effet de la division du travail sur la productivité décroît (*i.e.* *s* décroît). Enfin, E croît avec les élasticités de la production par rapport au capital η et au travail σ.

Chaque entreprise vend sa production aux autres entreprises et au ménage représentatif. Comme chaque entreprise vend au même prix, et comme les biens entrent de manière symétrique dans la fonction d'utilité du ménage représentatif, celui-ci consomme une quantité égale de chaque bien. De plus, la demande des autres entreprises à une entreprise particulière est le montant demandé par chaque entreprise k_t multiplié par leur nombre N_t. L'équilibre du marché des biens pour chaque entreprise est donc :

$$Q_t = \frac{c_t}{N_t} + N_t k_t$$

Avec (3), cette équation donne :

$$Q_t = \frac{1}{1-\eta}\frac{c_t}{N_t} \tag{9}$$

La production de chaque firme est égale à la consommation du ménage représentatif multipliée par une constante $\frac{1}{1-\eta} > 1$. Cette constante représente un effet multiplicateur : si le ménage représentatif consomme 1 unité en plus, les entreprises auront à produire cette unité supplémentaire et, en plus, à augmenter le volume de leurs inputs. La production totale augmente donc de plus d'une unité.

LE SECTEUR DE LA RECHERCHE

La concurrence sur le marché des brevets implique que la valeur de marché V_t d'un brevet à la date *t* est la somme actualisée des profits d'une firme produisant avec celui-ci :

$$V_t = \int_t^{\infty} e^{-R_t}\pi_\tau d\tau$$

Avec le taux d'intérêt $R_t = \int_t^{\tau} r_z dz$. En différenciant cette expression par rapport à *t*, on trouve : $r_t V_t = \dot{V}_t + \pi_t$, équation qui résume le fait que, comme les marchés financiers sont parfaits, le revenu que procure un brevet est son rendement sur les marchés financiers au taux d'intérêt instantané sans risque r_t, sachant que le revenu d'un brevet est égal à la somme des profits à la date *t* et de la variation de la valeur d'un brevet à la date *t*, $\dot{V}_t$. Cette équation se réécrit :

$$\frac{\dot{V}_t}{V_t} = r_t - \frac{\pi_t}{V_t} \tag{10}$$

Les nouveaux brevets sont découverts au sein d'un secteur de recherche et développement, qui embauche des travailleurs. La probabilité de découverte d'un nouveau brevet est proportionnelle à la quantité de travail allouée à la recherche n_t, multipliée par la probabilité de découverte par unité de temps, λ_t. Si n_t est la quantité de travail alloué à la recherche, le taux de croissance des brevets s'écrit donc :

$$\dot{N}_t = \lambda_t n_t \tag{11}$$

La seconde hypothèse centrale de ce modèle est que cette probabilité est une fonction du nombre d'opportunités d'innovation qui existent dans l'économie. Selon la conception du progrès technique d'Adam Smith et d'Allyn Young, cette probabilité dépend du nombre de tâches réalisées dans les entreprises, qui sont susceptibles d'être mécanisées ou automatisées. Pour une spécification générale, on fait dépendre la probabilité de découverte par unité de temps, λ_t du nombre de brevets déjà découverts et du nombre de tâches par entreprise : $\lambda_t = \lambda(d_t, N_t)$.

On fait l'hypothèse que les entreprises n'anticipent pas l'influence de leur division du travail sur la probabilité d'innovation et donc sur la croissance future, ce qui revient à supposer que les entreprises sont en trop grand nombre pour apprécier leur contribution au processus global d'innovation. Cette hypothèse se traduit par le fait que chaque entreprise est de mesure nulle et a une contribution marginale nulle à l'ensemble des opportunités d'innovation. La grandeur λ_t est donc considérée comme donnée pour chaque entreprise et constitue une externalité technologique. La détermination de d_t, lorsqu'est pris en compte l'effet sur les opportunités d'innovation, a lieu lors de la résolution du programme optimal.

Pour simplifier les calculs, on prend une fonction iso-élastique :

$$\lambda_t = d_t^a N_t^b \tag{12}$$

Le signe du paramètre *a* est positif : la probabilité d'innovation est une fonction croissante du nombre d'opportunités d'innovation. En revanche, on laisse le signe de *b* indéterminé, ce qui permet d'intégrer différentes conceptions du changement technique. En effet, deux types d'approche sont présentes dans la théorie du changement technique : certains postulent que plus l'économie a innové dans le passé, plus il est facile d'innover dans le futur. Cette conception est introduite par Romer [1990] et Jones [1995] et est défendue explicitement par Weitzman [1998]. D'autres auteurs considèrent que le processus d'innovation possède intrinsèquement des rendements négatifs : plus on a innové, plus il est difficile d'innover. L'intuition derrière cette conception est que les innovations les plus faciles sont découvertes en premier, de sorte qu'il est de plus en plus difficile de trouver une nouvelle idée. Cette hypothèse est notamment celle de Kortum [1997] et Segerstrom [1998].

Plus précisément, le modèle de Romer [1990] pose que la valeur du paramètre *b* est égal à 1. Cette spécification implique que le taux de croissance de la variété des biens intermédiaires est déterminé par la quantité de ressource allouée à la recherche : $\frac{\dot{N}_t}{N_t} = n_t$. Elle entraîne cependant des effets de taille, rappelés en introduction. Ceux-ci se traduisent par l'impossibilité d'introduire une croissance de la population avec cette spécification : le taux de croissance par tête tend alors vers l'infini. Ce résultat montre que le modèle de Romer entraîne trop de rendements croissants dans l'accumulation de la variété de biens. Jones [1995] fait disparaître les effets d'échelle en diminuant les rendements dans l'accumulation de nouveaux biens. Il pose $b < 1$. Enfin, Kortum [1997] et

Segerstrom [1998], dans un cadre différent, qui est celui de Aghion et Howitt [1992], poursuivent cette tentative d'endogénéisation de la probabilité de découverte en faisant encore décroître les rendements, ce que l'on peut représenter dans le cadre de ce modèle par la spécification $b < 0$. Comme tous ces modèles ne font pas intervenir le nombre d'opportunités d'innovation, ils postulent implicitement que $a = 0$. On ne spécifie pas le signe de b et ce modèle permet même d'envisager des effets très importants du nombre de découvertes passées, $b > 1$, sans obtenir d'effets de taille.

La condition de profit nul dans le secteur de la recherche implique l'égalité entre le salaire horaire et la productivité d'une unité de travail allouée à la recherche :

$$w_t = \lambda_t \mathrm{V}_t \tag{13}$$

LE SENTIER DE CROISSANCE ÉQUILIBRÉE

Un sentier de croissance concurrentiel est un sentier de croissance le long duquel les ménages maximisent leur utilité, les entreprises leurs profits, et où les marchés des biens financiers et le marché du travail sont équilibrés. Cette section étudie des sentiers particuliers, les sentiers de croissance équilibrée, définis comme un sentier concurrentiel le long duquel le nombre de brevets N_t croît à taux constant et où le partage de la population entre les activités de production, d'encadrement et de recherche est constant. On définit tout d'abord les propriétés de tels sentiers, puis la nature de la convergence vers ceux-ci.

Tout d'abord, l'équilibre du marché du travail s'écrit :

$$\mathrm{L}_t = \mathrm{N}_t \left(\int_{l=0}^{\mathrm{d}_t} x_l \mathrm{d}l + h\mathrm{d}_t \right) + n_t \tag{14}$$

Cette équation résume le fait que la population peut être employée soit dans les entreprises, soit dans le secteur de la recherche. Si elle est employée dans les entreprises, elle peut être employée soit à la production, soit à la coordination des tâches. L'hypothèse d'un marché concurrentiel implique que toute la population est employée au salaire horaire w_t.

Avant de présenter les résultats principaux, il peut être utile de simplifier le modèle pour mettre en lumière la cause de l'absence d'effet de taille. Si l'on suppose que le secteur de la recherche produit sans travail, l'équilibre du marché du travail s'écrit :

$$\mathrm{L}_t = \mathrm{N}_t \left(\int_{l=0}^{\mathrm{d}_t} x_l \mathrm{d}l + h\mathrm{d}_t \right) \tag{15}$$

Avec (4) et (6), l'équation précédente donne :

$$\mathrm{L}_t = shd_t\mathrm{N}_t \tag{16}$$

Cette expression montre que, lorsque la population est constante, la division du travail à l'intérieur des entreprises d_t décroît lorsque leur nombre N_t augmente. En effet, dans ce cas, chacune d'entre elles produit moins, ce qui entraîne une décroissance de la division interne du travail. On peut ainsi dire qu'il y a un effet de substitution entre la division interne du travail d_t et la division externe du travail entre les entreprises N_t. Comme la probabilité de découverte des brevets dépend de la division interne du travail, une décroissance de d_t implique qu'il devient de plus en plus difficile d'innover. Ainsi, si la population ne croît pas, il devient de plus en plus difficile d'innover, ce qui ralentit la croissance.

Le long d'un sentier de croissance équilibrée, le ratio de la part de l'encadrement sur l'emploi total $hd_t N_t / L_t$ est constant, d'où l'on déduit :

$$\frac{\dot{N}_t}{N_t} + \frac{\dot{d}_t}{d_t} - u = 0$$

Par ailleurs, le taux de croissance des brevets $\frac{\dot{N}_t}{N_t}$ est aussi constant. En utilisant l'équation (11) et (12), on déduit que $d_t^a N_t^{b-1} n_t$ est constant. Ce qui conduit à l'égalité suivante :

$$a\frac{\dot{d}_t}{d_t} + (b-1)\frac{\dot{N}_t}{N_t} + u = 0$$

Des deux équation précédentes, on peut déduire les taux de croissance de la diversité des facteurs :

$$\frac{\dot{N}_t}{N_t} = \frac{a+1}{a+1-b}u \tag{17}$$

$$\frac{\dot{d}_t}{d_t} = -\frac{b}{a+1-b}u \tag{18}$$

Ces deux taux de croissance permettent de présenter les principales causalités à l'œuvre. Tout d'abord, comme on exclut la possibilité que le nombre de brevets décroisse, on doit nécessairement avoir $b < a + 1$. Comme $a > 0$, la constante b peut être plus grande que 1 : l'accumulation de la diversité de biens intermédiaires peut engendrer des rendements croissants supérieurs à ceux du modèle initial de Romer [1990].

La dynamique de long terme de la division du travail dépend du signe de la constante b. En effet, si $b > 0$, l'accroissement du nombre d'innovations passées rend plus facile la découverte de nouveaux biens. Dans ce cas, le processus d'innovation est caractérisé par un cercle vertueux : plus on a innové dans le passé, plus il est facile d'innover à nouveau. Ainsi, le rythme d'innovation s'accroît lorsque la mesure de l'effet de ce cercle vertueux, b, augmente, ce que l'on peut vérifier dans l'expression de $\frac{\dot{N}_t}{N_t}$. Lorsque b est positif, ce cercle vertueux entretient un taux de croissance élevé du nombre d'entreprises, ce qui fait décroître la division interne du travail par l'effet de substitution entre la division du travail interne et externe aux entreprises présentée plus haut.

Lorsque $b < 0$, l'accroissement du nombre de nouveaux biens n'est pas un mécanisme auto-entretenu. Un accroissement du nombre d'opportunités d'innovation, mesuré par d_t est nécessaire pour rendre l'innovation possible, d'où l'augmentation à long terme de la division du travail.

L'évolution de la constante b n'est pas modélisée ici. On peut cependant s'appuyer sur une conception schumpétérienne de l'innovation pour indiquer l'évolution de b au cours d'une vague d'innovation (Aghion et Howitt [1998, chap. 8], Freeman [1994]). En effet, il semble probable que la probabilité d'innovation soit importante au début d'une vague d'innovation, au moment où une avancée scientifique fondamentale est appliquée à la production, pour ensuite décroître lorsque les opportunités d'innovation disparaissent. Cette évolution correspond dans le modèle à une décroissance de b pendant une vague d'innovation. Une implication directe du modèle est qu'au début d'une vague d'innovation le taux de croissance du nombre d'entreprises augmente rapidement puis décroît progressivement, alors que la division du travail reste faible au début d'une telle vague pour ensuite s'accroître jusqu'à la vague technologique suivante. Ce résultat peut être confronté à des périodes historiques particulières pour en mesurer la généralité. Une conclusion du modèle est qu'une accélération du progrès technique tend à diminuer la croissance de la division du travail. En effet, les diversités des facteurs sont substituables en taux de croissance : si le taux de croissance d'un facteur augmente, le taux de croissance de l'autre diminue. Ce résultat provient de l'égalité $\frac{\dot{N}_t}{N_t} + \frac{\dot{d}_t}{d_t} = u$ qui est vérifiée indépendamment des valeurs de a et b.

L'étude des propriétés dynamiques de l'économie décentralisée en dehors du sentier de croissance équilibrée nécessite la résolution explicite du modèle. Celle-ci est réalisée en annexe et aboutit à la proposition suivante.

Proposition 1. *Il existe un unique sentier qui converge vers le sentier de croissance équilibrée.*

Les taux de croissance donnés par (17) et (18) permettent de déterminer le taux de croissance de la production par tête de qui s'écrit $N_t Q_t / L_t$. Le taux de croissance est donc $g = \dot{N}_t/N_t + \dot{Q}_t/Q_t - u$. L'équation (8) permet de réécrire ce taux :

$$g = \left(\frac{\gamma}{1-\eta} + 1\right)\frac{\dot{N}_t}{N_t} + \frac{\sigma}{1-\eta}\,\frac{s}{s-1}\,\frac{\dot{d}_t}{d_t} - u$$

Le taux de croissance par tête dépend de trois termes. Le premier est la contribution de la diversité du facteur capital à la croissance, en tenant compte du multiplicateur $\frac{1}{1-\eta}$. Le second est la contribution de la diversité du facteur travail, et le troisième est le taux de croissance de la population. En utilisant les taux de croissance donnés plus haut, on obtient le taux de croissance :

$$g = \frac{1}{1-\eta}\,\frac{1}{a+1-b}\,[\gamma(1+a) + mb]u$$

où la constante m représente la part des profits dans la production d'une entreprise. Tout d'abord, ce taux montre que ce modèle appartient à la catégorie des modèles de croissance semi-endogène (comme Jones [1995], Kortum [1997] et Segerstrom [1998]), qui n'aboutissent à un taux de croissance par tête positif que si la population croît, *i.e.* $u \neq 0$. La croissance par tête demande un accroissement exogène du facteur non reproductible, le travail (voir Jones [1999] pour une discussion).

L'interprétation plus précise de ce taux de croissance est réalisée en plusieurs temps. On s'intéresse tout d'abord au cas où $b = 0$, que l'on appelle le cas smithien, car la probabilité d'innovation dépend seulement de la division du travail, et non du nombre d'innovations passées. Le taux de croissance par tête est alors :

$$g = \frac{\gamma}{1-\eta} u$$

Ce taux de croissance possède les propriétés essentielles relatives aux effets de taille. Comme dans le modèle de Romer [1990], le taux de croissance dépend seulement de la contribution de la diversité du facteur capital à la croissance, γ, ajustée ici du multiplicateur. Cependant, ce taux ne dépend pas de la taille de la population mais de son taux de croissance u. Ce résultat est d'autant plus intéressant que la division du travail ne montre pas de tendance à long terme, $\frac{\dot{d}_t}{d_t} = 0$. Ce cas limite montre que l'introduction du nombre d'opportunités d'innovation modifie substantiellement la dynamique de la croissance, même si la division du travail n'évolue pas à long terme. L'effet de substitution de la division du travail intra et extra-entreprise limite les effets de taille, même si la division du travail converge vers une valeur de long terme.

Le cas général peut s'analyser à partir du cas smithien. En effet, si $b \neq 0$, on peut noter que la dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{(m+\gamma)(1+a)}{(1+a-b)^2}$ est toujours positive. Comme le nombre d'innovations augmente, accroître la sensibilité de l'innovation au nombre d'idées déjà trouvées augmente la probabilité d'innovation et donc la croissance. Il n'en est pas de même pour la diversité du facteur travail. En effet la dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial a} = -\frac{m+\gamma}{(1+a-b)^2} b$ dépend du signe de b. En effet, si $b < 0$ alors la diversité d_t augmente, de sorte qu'une augmentation de la sensibilité de la probabilité d'innovation à cette forme de diversité, en d'autres termes une augmentation de a, augmente le nombre d'innovations et donc la croissance. Cependant, si $b > 0$, la diversité du facteur travail décroît à long terme, une augmentation de a tend maintenant à diminuer la probabilité d'innovation et donc la croissance. Le taux de croissance de l'économie est une fonction croissante de γ qui mesure l'élasticité de la productivité par rapport à la diversité des biens intermédiaires, et par rapport à m qui mesure la rémunération de la recherche, comme le montre l'équation (7).

Enfin, on peut noter que, lorsque a tend vers 0 et b tend vers 1, le modèle converge vers celui de Romer [1990], et le taux de croissance tend vers l'infini, ce qui est le signe de la présence d'effets de taille. De plus, ce modèle n'engendre pas d'effets de taille même si les rendements des innovations passées sont très importants. Ainsi, b peut être arbitrairement grand tant que $b < a + 1$.

Revue économique — vol. 54, N° 4, juillet 2003, p. 725-742

CROISSANCE OPTIMALE

L'étude du programme optimal permet résoudre le modèle lorsque la relation entre division du travail et opportunités d'innovation est internalisée. En effet, la seule différence entre le sentier concurrentiel et le sentier optimal est que, dans le premier cas, les entreprises considèrent les opportunités d'innovation comme une externalité. La comparaison du sentier de croissance décentralisé et du sentier optimal n'aboutit pas à la mise en évidence de distorsions systématiques : les nombres de chercheurs ou d'entreprises peuvent être trop grands ou trop petits. Cependant, la résolution du programme du planificateur central permet de vérifier que les taux de croissance des variables sont optimaux et que les distorsions apparaissent en niveau.

Le planificateur central maximise l'utilité de toutes les générations à venir. Les contraintes sont les fonctions de production des firmes, l'équilibre sur le marché des biens, l'équilibre sur le marché du travail et enfin la probabilité de découverte de nouveaux biens.

$$\max_{c(t),\, x_{l,t},\, k_{i,t},\, d_{i,t},\, n_t} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\rho-u)t} \ln c_t \mathrm{d}t$$

$$s.c. \begin{cases} \mathrm{Q}_{i,t} = \mathrm{N}_t^{\gamma - \frac{\eta}{\varepsilon-1}} \left(\int_0^{\mathrm{N}_t} k_{j,i}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}j \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\eta} \left(\int_0^{\mathrm{d}_{i,t}} x_{l,i}^{\frac{s-1}{s}} \mathrm{d}l \right)^{\frac{s}{s-1}\sigma} \\ c_t = \int_0^{\mathrm{N}_t} \mathrm{Q}_{i,t} \mathrm{d}i - \int_0^{\mathrm{N}_t} \left(\int_0^{\mathrm{N}_t} k_{j,i} \mathrm{d}j \right) \mathrm{d}i \\ \int_0^{\mathrm{N}_t} \left(\int_0^{\mathrm{d}_{i,t}} x_{l,i} \mathrm{d}l + h\mathrm{d}_{i,t} \right) \mathrm{d}i + n_t = \mathrm{L}_t \\ \dot{\mathrm{N}}_t = \lambda_t n_t \\ \lambda_t = d_t^a \mathrm{N}_t^b \end{cases}$$

Dans cette spécification, $d_{i,t}$ représente le nombre de tâches dans la firme i et d_t le nombre de tâches différentes réalisées dans l'économie. Par symétrie, toutes les entreprises choisissent le même nombre de tâches et l'on a donc $d_{i,t} = d_t$. Les résultats sont résumés par la proposition suivante.

> PROPOSITION 2. *Le long d'un sentier de croissance équilibrée, les taux de croissance optimaux du nombre de firmes* N_t*, de la division interne du travail* d_t*, et du revenu par tête sont les mêmes que les taux de croissance de l'équilibre décentralisé.*

La démonstration de la proposition est donnée en annexes. L'égalité du taux de croissance optimal et du taux de croissance décentralisé se retrouve dans d'autres modèles de croissance sans effets de taille comme Jones [1995] et Segerstrom [1998]. Dans les modèles avec effet de taille, les externalités qui engendrent les rendements croissants à l'échelle de l'économie, impliquent en même temps que les taux de croissance décentralisé et optimal diffèrent. Dans cette catégorie de modèles sans effets de taille, ces externalités entraînent des niveaux sous-optimaux pour le niveau des variables et non pour leur taux de croissance.

CONCLUSION

Ce modèle formalise une conception de la croissance fondée sur les analyses d'Adam Smith et d'Allyn Young. La croissance est vue comme une mécanisation progressive de la division du travail. Le changement technique est la découverte de nouveaux biens intermédiaires qui peuvent aider ou même remplacer les travailleurs accomplissant certaines tâches. Le nombre d'opportunités d'innovation est donc une fonction croissante du nombre de tâches qui peuvent être mécanisées. Le choix de la division du travail est modélisé comme un arbitrage entre les gains de productivité et les coûts d'organisation du travail qu'elle engendre. Le premier résultat est un modèle qui permet d'étudier la dynamique conjointe de la diversité des biens intermédiaires et de la diversité des tâches réalisées dans l'économie : la diversité des tâches peut croître ou décroître à long terme. Cependant, lorsque le rythme d'introduction des biens intermédiaires augmente, le taux de croissance de la diversité des tâches diminue. De plus, ce modèle ne possède pas d'effets de taille. Ce résultat a été obtenu en proposant une formalisation de la probabilité d'innovation qui tient compte du nombre d'opportunités d'innovation.

Ce modèle aboutit à deux types de résultats susceptibles d'être testés empiriquement. Le premier est la forme de la fonction de production donnée par (8), qui ne dépend que de la diversité des facteurs travail et capital. La particularité de ce modèle est de faire intervenir la diversité du facteur travail dans la fonction de production agrégée. Des études empiriques sur données américaines (Ades et Glaser [1999]) et sur donnés françaises (Ragot [2000]) utilisent la diversité des catégories socioprofessionnelles pour estimer l'évolution de la diversité du facteur travail. Avec une telle mesure, la diversité du facteur travail augmente continûment et est corrélée à une augmentation de la croissance (Ades et Glaeser [1999]). Le second résultat repose sur la dynamique de la division du travail à long terme et sur la substitution en taux de croissance entre la diversité des facteurs. L'étude empirique de la généralité de ce second résultat bute sur la difficulté de produire des indicateurs de diversité. En effet, la diversité ne correspond à aucun prix et demande une étude concrète des caractéristiques des produits ou des tâches. Par exemple, Young [1998] met en cause théoriquement la traditionnelle mesure de la diversité des biens intermédiaires par le nombre de brevets : deux brevets peuvent être deux manières différentes de produire le même bien, et ainsi n'être qu'une façon de partager des rentes de monopole entre deux producteurs. Ainsi, autant qu'une investigation statistique, des études de cas semblent prometteuses pour mettre en lumière les déterminants de la dynamique conjointe de la division du travail et du progrès technique. Les résultats de ce modèle indiquent que cette dynamique est importante pour la compréhension de la croissance.

Revue économique — vol. 54, N° 4, juillet 2003, p. 725-742

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ADES A. et GLAESER E. [1999], « Evidence on Growth, Increasing Returns, and the Extent of the Market », *Quarterly Journal of Economics*, août, p. 1025-1045.

AGHION P. et HOWITT P. [1998], *Endogenous Growth Theory*, Cambridge (Mass.), MIT Press.

AGHION P. et HOWITT P. [1992], « A Model of growth through Creative Destruction », *Econometrica*, 60 (2), 323-351.

BECKER G. et MURPHY K. [1992], « The Division of Labor, Coordination Costs, and Knowledge », *Quarterly Journal of Economics*, 107 (4).

BENASSY J.-P. [1996], « Taste for Variety and Optimum Production Patterns in Monopolistic Competition », *Economic letters*, 52 (1), juillet.

BOLTON P. et DEWATRIPONT M. [1994], « The Firm as a Communication Network », *Quarterly Journal of Economics*, 109 (4).

BOYER R. et SCHMEDER G. [1990], « Division du travail, changement technique et croissance. Un retour à Adam Smith », *Revue française d'économie*, 5, hiver.

CE [1997], *Deuxième rapport européen sur les indicateurs scientifiques et technologiques*, Rapport de la Commission européenne.

COASE R. [1937], « The Nature of the Firm », *Economica*, p. 386-405.

CORDELIER C. [2000], « Créations et cessations d'entreprises : sous la stabilité, le renouvellement », *INSEE Premières*, n° 740, octobre.

EICHER T.S. et TURNOVSKY S.J [1999], « Non-scale Models of Economic Growth », *The Economic Journal*, 109 (457).

FREEMAN C. [1994], « The Economics of Technical Change », *Cambridge Journal of Economics*, 18, p. 463-514.

GROSSMAN G.M. et HELPMAN E. [1991], *Innovation and Growth in the Global Economy*, Cambridge (Mass.), The MIT Press.

HIRSCHHORN L. [1984], *Beyond Mechanization : Work and Technology in a Post-Industrial Age*, Cambridge (Mass.), The MIT Press.

JONES C. [1995], « R&D-based Models of Economic Growth », *Journal of Political Economy*, 103, p. 759-784.

JONES C. [1999], « Growth : with or without Scale Effects », *American Economic Review (Papers & Proceedings)* 89, p. 139-44.

KORTUM S. [1997], « Research, Patenting and Technological Change », *Econometrica*, 97 (6), novembre.

MURPHY K. SHLEIFER A. et VISHNY R. [1989], « Income Distribution, Market Size, and Industrialization », *Quarterly Journal of Economics*, août.

RAGOT X. [2000], *Division du travail. Progrès technique et croissance*, thèse EHESS, non publiée.

ROMER P. [1990], « Endogenous Technical Change », *Journal of Political Economy*, 98 (5) pt. 2, S 71-S 102.

SEGERSTROM P. [1998], « Endogenous Growth Without Scale Effects », *American Economic Review*, 88 (5).

SMITH A. [1776], *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, Londres, W. Stahan & T. Cadell.

SMITH A. [1990], « De la division du travail », *Revue française d'économie*, 5, hiver. (traduction d'extraits de Smith [1990]).

STIGLER [1951], « The Division of Labor is Limited by the Extent of the Market », *Journal of Political Economy*, 59, p. 185-193.

WEITZMAN M. [1998], « Recombinant Growth », *Quarterly Journal Economics*, 113 (2), p. 331-360.

YANG X. et BORLAND J. [1991], « A Microeconomic Mechanism for Economic Growth », *Journal of Political Economy*, 34, p. 199-222.

YOUNG A. [1928], « Increasing Returns and Economic Progress », *Economic Journal*, 38, p. 527-542.

YOUNG A. [1998], « Growth without Scale Effects », *Journal of Political Economy*, 106, 1, p. 41-63.

ANNEXES

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1

En utilisant l'équilibre du marché des biens (9) et l'équilibre du marché du travail (14), on peut calculer deux équations différentielles, dont la solution est l'équilibre de long terme. Les équations (6), (7), (10), (13) et (14) donnent :

$$r_t - mh\frac{1}{\sigma}(s-1)d_t^{a+1}\mathrm{N}_t^b = \frac{\dot{w}_t}{w_t} - a\frac{\dot{d}_t}{d_t} - b\frac{\dot{\mathrm{N}}_t}{\mathrm{N}_t}$$

L'équilibre de marché (9) et le choix du consommateur (1) permettent d'écrire $r_t - \frac{\dot{\mathrm{Q}}_t}{\mathrm{Q}_t} = \frac{\dot{\mathrm{N}}_t}{\mathrm{N}_t} + \rho$. En utilisant cette expression dans l'équation précédente, avec l'équation (6), on trouve une première équation différentielle :

$$\rho - mh\frac{1}{\sigma}(s-1)d_t^{1+a}\mathrm{N}_t^b + (a+1)\frac{\dot{d}_t}{d_t} + (b+1)\frac{\dot{\mathrm{N}}_t}{\mathrm{N}_t} = 0 \qquad (19)$$

La seconde équation différentielle peut s'obtenir par l'équilibre du marché du travail qui s'écrit, avec (4), (11) et (14) :

$$\frac{\dot{\mathrm{N}}_t}{\mathrm{N}_t} = d_t^a\mathrm{N}_t^{b-1}\mathrm{L}_t - shd_t^{1+a}\mathrm{N}_t^b \qquad (20)$$

Le système dynamique défini par les équations (19) et (20) est plus simple à étudier après le changement de variable $x_t = hd_t^{1+a}\mathrm{N}_t^b$ et $y_t = d_t^a\mathrm{N}_t^{b-1}\mathrm{L}_t$. Après substitution et quelques calculs, le système se réécrit :

$$(a+1)\frac{\dot{y}_t}{y_t} = (a+1)u - a\rho - (1+2a-b)y_t + \left(s(1+2a-b) + am\frac{1}{\sigma}(s-1)\right)x_t$$

$$\frac{\dot{x}_t}{x_t} = \left(m\frac{1}{\sigma}(s-1) + s\right)x_t - \rho - y_t$$

La solution de ce système est :

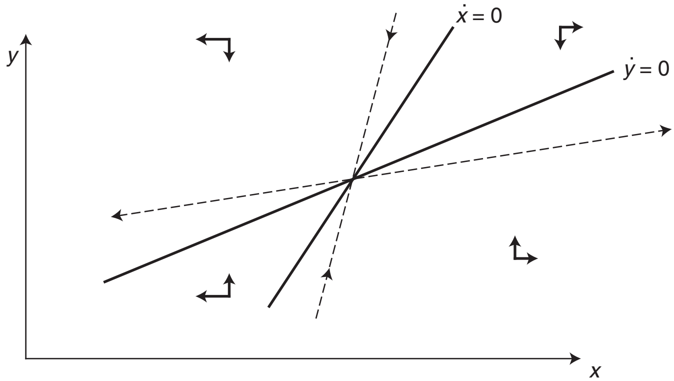
$$x^* = \frac{(a+1)u + (1+a-b)\rho}{(1+a-b)m\frac{1}{\sigma}(s-1)}$$

$$y^* = \left(1 + \frac{s\sigma}{m(s-1)}\right)\frac{a+1}{1+a-b}u + \frac{\sigma s}{m(s-1)}\rho$$

Comme $1+a-b > 0$, $m > 0$ et $s > 1$, la pente de la droite $\frac{\dot{y}_t}{y_t} = 0$ est toujours inférieure à la pente de la droite $\frac{\dot{x}_t}{x_t} = 0$. De plus, x^* et y^* sont toujours positifs.

Le diagramme de phase de la figure suivante résume les propriétés dynamiques du modèle : l'état stationnaire est globalement un équilibre de point-selle en fonction de *x* et *y*, et donc en fonction de *d* et N. Le sentier de croissance convergeant vers l'équilibre et le sentier instable sont tracés en pointillé.

Stabilité de l'équilibre



DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2

La solution du problème du planificateur se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, par symétrie, le temps de travail par tâche x_t est le même pour toutes les tâches, tout comme la quantité de chaque bien intermédiaire consommée par chaque entreprise, k_t. De même, le volume de production Q_t est le même pour chaque entreprise. Par ailleurs, en constatant que le choix de k_t est statique, on trouve :

$$\eta Q_t = N_t k_t$$

Le programme du planificateur central se réécrit alors, en utilisant les contraintes :

$$\max_{d_t, n_t} \int_0^{\infty} e^{-(\rho - n)t} \ln \left[(1-\eta) N_t \left(\eta^{\eta} N_t^{\gamma} d_t^{\frac{\sigma}{s-1}} \left(\frac{L_t - n_t}{N_t} - h d_t \right)^{\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\eta}} \right] dt$$

$$s.c. \ \{ \dot{N}_t = d_t^a N_t^b n_t$$

L'étude de ce système est très difficile en général, car il est, d'une part, non linéaire et comporte, d'autre part, une variable d'état et deux variables de contrôle. Cette étude se concentre sur les sentiers de croissance équilibrée. Ceux-ci sont définis par une constance du taux de croissance $\frac{\dot{N}_t}{N_t}$, et par un partage constant de la population entre les différentes activités. En conséquence, les taux de croissance de n_t / L_t et de $h N_t d_t / L_t$ sont constants. On en déduit facilement :

$$\left. \frac{\dot{d}_t}{d_t} \right|_{\text{optimal}} = \frac{-b}{a+1-b} u$$

$$\left. \frac{\dot{N}_t}{N_t} \right|_{\text{optimal}} = \frac{a+1}{a+1-b} u$$

La fonction de production montre que le taux de croissance par tête est le même que dans le cas décentralisé.