

**THESE présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Université de Toulouse,
délivré par l'INSA de Toulouse**

Spécialité : Automatique

par Monsieur Rabah FELLOUAH

**Contribution au Diagnostic de Pannes pour
les Systèmes Différentiellement Plats**

Décembre 2007

Jury

Félix MORA-CAMINO, ENAC, Directeur de thèse
Andrei DONCESCU, UPS, co-directeur de thèse
Houcine CHAFOUK, ESIGELEC - Rouen, rapporteur
Hui PENG, Central South University, Chine, rapporteur
Daniel CHOUKROUN, Université Ben Gourion, Israël, examinateur
Karim ACHAIBOU, INPT/LAAS, examinateur

ECOLE DOCTORALE : SYSTEMES

LABORATOIRE : LAAS du CNRS en collaboration avec le LARA/ENAC

Table des matières

Introduction générale	2
Chapitre 1 : Détection et Identification de pannes dans les systèmes dynamiques	
1.1. Introduction.....	7
1.2. Définitions.....	7
1.3. La redondance, la détection et le diagnostic.....	9
1.3.1 Redondance d'informations.....	9
1.3.2 Redondance physique.....	9
1.3.3 Redondance analytique	10
1.4. Autres modèles pour la détection et le diagnostic	10
1.4.1 Modèle de surface.....	11
1.4.2 Modèles qualitatifs et à base de règles.....	11
1.4.3 Modèles de type boîte noir.....	11
1.5. Conception d'un système de diagnostic.....	12
1.6. Critères de performance pour la détection et le diagnostic.....	15
1.7. Conclusion.....	16
Chapitre 2 : Détection et diagnostic à base de modèles	
2.1 Introduction et définitions.....	19
2.2 Estimation paramétrique et génération de résidus.....	20
2.3 Approche géométrique de la génération de résidus.....	23
2.4 Approche algébrique pour la génération de résidus.....	25
2.5 Estimation d'état et génération de résidus.....	27
2.6 La détection de fautes.....	29
2.7 La localisation.....	30
2.8 Conclusion.....	34

Chapitre 3 : Relations de redondance pour les systèmes différentiellement plats

3.1 Introduction.....	37
3.2 Platitude différentielle.....	37
3.2.1 Définition classique de la platitude.....	37
3.2.2 Platitude implicite ou explicite	38
3.2.3 Sorties plates minimales ou non minimales.....	39
3.3 Exemples de systèmes plats.....	41
3.3.1 Véhicule roulant dans le plan.....	41
3.3.2 Engin à décollage vertical.....	44
3.4 Redondance et systèmes différentiellement plats.....	48
3.4.1 Redondance analytique globale	48
3.4.2 Détection de pannes basée sur la platitude.....	50
3.5 Exemple d'application.....	52
3.6 Conclusion.....	55

Chapitre 4 : Détection et identification de pannes de structures différentiellement plates

4.1 Introduction.....	59
4.2 Platitude induite par des structures particulières.....	59
4.2.1 Platitude implicite des systèmes paramétrés.....	59
4.2.2 Platitude des systèmes série.....	60
4.2.3 Platitude des systèmes avec rebouclage d'état.....	62
4.2.4 Platitude des systèmes avec double tandem.....	62
4.3 Platitude de la dynamique de guidage des avions.....	63
4.4 Propriétés de platitude de la dynamique de guidage du vol.....	66
4.5 Relations de redondance associées à la dynamique de guidage.....	69
4.5.1 Relations de redondances associées aux composantes du vecteur d'état.....	69
4.5.2 Relation des entrées plates de guidage.....	70
4.6 Conclusion.....	72

Chapitre 5 : Estimation des dérivées des sorties d'un système différentiellement plat

5.1 Introduction	75
5.2 Eléments de calcul opérationnel	76
5.3 Relations de récurrence entre dérivées successives	77
5.4 Expression de l'estimateur des dérivées temporelles des sorties	80
5.5 Application à signal polynomial	82
5.6 Estimation des dérivées des sorties d'un système plat commandé	84
5.6.1 Position du problème	84
5.6.2 Evaluation des performances	86
5.6.3 Détection de pannes	88
5.6.4 Exemple d'application	90
5.7 Conclusion	92

Chapitre 6 : Exemples d'application : Surveillance des systèmes Chaotiques différentiellement plats

6.1 Introduction.....	95
6.2 Introduction aux systèmes chaotiques.....	95
6.3 Exemples de systèmes chaotiques différentiellement plats.....	98
6.3.1 Les systèmes chaotiques.....	98
6.3.2 Platitude des systèmes chaotiques considérés.....	102
6.3.2.1 Platitude de l'attracteur de Lorenz.....	104
6.3.2.2 Platitude de l'attracteur de Rossler.....	105
6.4 Détection de pannes dans un système chaotique plat.....	106
6.5 Détection de variations paramétriques dans un système chaotique plat.....	109
6.6 Conclusion.....	114
Conclusion générale.....	117
Bibliographie.....	121
Annexes.....	132

INTRODUCTION GENERALE

La détection et l'identification des pannes dans les systèmes dynamiques, c'est à dire leur diagnostic, a été un sujet important de recherche dès les débuts de l'Automatique moderne. En effet dans beaucoup d'applications il s'agira souvent, au delà de considérations purement économiques, d'assurer la sécurité des personnes et de préserver leur environnement. C'est notamment le cas pour beaucoup d'applications liées aux domaines de l'énergie, de l'eau, de l'air et des transports.

La diversité des approches qui ont été développées pour le diagnostic des systèmes dynamiques semblent être le résultat de contextes différents associés à la nature des applications visées et aux caractéristiques propres du cahier des charges qui en résulte. Ainsi, la nature des informations disponibles sur le système ou le type de défauts à détecter conduisent à la mise en œuvre de stratégies spécifiques.

Les méthodes de diagnostic à base de modèles occupent une place importante dans la littérature. Leur utilisation, notamment dans le cadre d'applications critiques (systèmes énergétiques, systèmes de transport, industrie lourde), s'est considérablement développée. Si une vaste littérature existe dans le cas des systèmes dynamiques linéaires, en ce qui concerne les systèmes dynamiques non linéaires, peu de travaux qui mettent à profit le caractère non linéaire du système, ont été réalisés à ce jour.

Depuis un peu plus de dix ans, les automaticiens ont été amenés, dans le cadre de la commande des systèmes mécaniques articulés à caractère fortement non linéaire et plus précisément dans le cadre du suivi de trajectoires, à distinguer une nouvelle classe de systèmes, les systèmes différentiellement plats, qui finalement sont rencontrés de façon fréquente dans beaucoup de cas d'application. Ceci a conduit à la conception de nouvelles méthodes de synthèse de lois de commande non linéaires qui permettent de conférer aux sorties de tels systèmes un comportement standard au voisinage de trajectoires de référence.

Il est clair que l'apparition d'une défaillance au sein d'un système différentiellement plat commandé ou au niveau de ses chaînes de mesure ou de ses chaînes de commande, doit résulter en une modification de ce comportement. Une fois cette modification détectée, celle-ci devrait

pouvoir être mise à profit en tenant compte notamment de la propriété de platitude différentielle pour en réaliser le diagnostic. C'est là l'objet de cette thèse.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante :

Dans le chapitre 1, un état de l'art concernant les principales méthodes de diagnostic des systèmes dynamiques est présenté en mettant l'accent sur la mise à profit de redondances de diverses natures afin de réaliser ce diagnostic.

Dans le chapitre 2, les méthodes à base de modèles sont plus précisément développées. On constate que les principaux développements théoriques et méthodologiques restent limités au cas linéaire ce qui en réduit considérablement la portée puisque la plupart des systèmes dynamiques présentent un comportement non linéaire lorsqu'ils évoluent de façon notable dans leur domaine de fonctionnement.

Ainsi, dans le chapitre 3 on s'intéresse à une classe de systèmes non linéaire particulière, les systèmes différentiellement plats, pour lesquels existent déjà des techniques analytiques de synthèse de lois de commande. Après avoir introduit et illustrée la notion de platitude différentielle, les relations de redondance sur laquelle elle se base sont mises en avant pour leur utilisation dans le cadre du diagnostic. Un premier exemple élémentaire de mise en œuvre est présenté.

Dans le chapitre suivant, le chapitre 4, on étudie diverses structures plates de complexité croissante afin d'identifier pour un système complexe plat les éléments structuraux qui contribuent à sa platitude globale. Les relations de redondances ainsi délimitées ouvrent une voie vers la conception de nouvelles méthodes de diagnostic pour les systèmes non linéaires complexes. On considère alors la platitude différentielle de la dynamique de guidage d'un aéronef qui est de nature implicite et on montre comment l'absence de modèle analytique peut être surmontée dans la mise en œuvre du diagnostic par l'introduction de réseaux de neurones inversant la dynamique de guidage.

Le chapitre 5 s'intéresse à une question pratique associée à la conception de systèmes de diagnostic pour les systèmes différentiellement plats : la génération en ligne de bonnes estimées des sorties et de leur dérivées temporelles jusqu'à un ordre suffisant. Pour cela, les travaux récents de Fleiss et de Sira-Ramirez dans ce domaine sont réexaminés en montrant en particulier leurs limitations théoriques et pratiques. Finalement une structure de diagnostic et commande intégrant l'estimateur étudié est proposée et illustrée par une application.

Le chapitre 6 s'intéresse finalement à la détection des pannes dans les systèmes chaotiques différentiellement plats. Ces systèmes sont réputés présenter un comportement difficilement prévisible compte tenu des changements importants qui peuvent être associés à des variations paramétriques infinitésimales. Ainsi, a priori, la détection de comportements anormaux pour ce type de système semble être une question loin d'être évidente. On montre comment la propriété de platitude peut être mise à profit pour détecter des variations paramétriques au sein d'un tel type de système chaotique.

Finalement, la conclusion récapitule le travail développé, commente les résultats trouvés et indique les perspectives de recherche ouvertes par cette étude.

CHAPITRE 1

DETECTION ET IDENTIFICATION DES PANNES DANS

LES SYSTEMES DYNAMIQUES :

ETAT DE L'ART

1. INTRODUCTION

La détection et l'identification des pannes dans les systèmes dynamiques, c'est à dire leur diagnostic, a été un sujet important de recherche dès les débuts de l'Automatique moderne basée sur le calcul numérique. Ainsi de nombreuses approches ont été développées. Les différentes approches du diagnostic des systèmes dynamiques semblent être souvent le résultat de contextes différents notamment en ce qui concerne les applications visées et le cahier des charges qui en résulte. Ainsi, la nature des informations disponibles sur le système ou le type de défauts à détecter conduisent à la mise en œuvre de stratégies spécifiques. Par exemple, si seules des données entrée / sortie sont disponibles sur le système, une méthode par apprentissage semblera naturellement adaptée, par contre si un modèle mathématique est disponible, les méthodes analytiques pourront être privilégiées.

Une stratégie de diagnostic doit apporter des réponses aux questions suivantes en ce qui concerne ses objectifs, ses principes de mises en œuvre et ses critères d'évaluation:

Objectifs : que veut-on surveiller ? Quels types de défauts doit-on détecter ?

Principes : Quel est le principe de diagnostic à mettre en œuvre ?

Critères : quelles sont les performances attendues ? Quels sont les indices d'évaluation de ces performances ?

La conception d'une stratégie de diagnostic doit prendre en compte des aspects tels que la rapidité des réponses, la sensibilité aux erreurs de mesure et de modélisation, le taux de fausses alarmes ou de non-détection... mais aussi des contraintes d'ordre économique et de mise en œuvre pratique.

Dans ce chapitre, il ne s'agit pas d'établir un état de l'art exhaustif des méthodes de diagnostic mais de présenter les caractéristiques des principales méthodes de diagnostic existantes.

2. DEFINITIONS

Par mesure de simplicité on emploie dans ce mémoire de façon équivalente les termes de défaillance, défaut ou panne. Néanmoins, le vocabulaire usuel de la sûreté de fonctionnement distingue ces notions [Cassar et al. 1996] [Isermann et al. 1997] [Ripoll 1999] :

- *défaillance* : modification suffisante et permanente des caractéristiques physiques d'un système ou d'un composant pour qu'une fonction ne puisse plus être assurée dans les conditions prévues.
- *défaut* : imperfection physique liée à la conception ou à la mise en œuvre du dispositif. Le défaut peut donner lieu à une défaillance.
- *panne* : introduit la notion d'arrêt accidentel du fonctionnement.

La première question que l'on se pose lorsque l'on conçoit un système de diagnostic, est de savoir ce que l'on veut détecter, c'est à dire de définir le type de dysfonctionnement que l'on veut diagnostiquer et donc les défauts susceptibles d'altérer le bon fonctionnement du système. Ainsi on pourra être amené à détecter des biais, des dérives et/ou des valeurs aberrantes.

Qu'il s'agisse de défauts inhérents aux organes de mesure (capteurs), aux organes de commande (actionneurs) ou aux composants du processus, ils se manifestent par une altération des signaux associés.

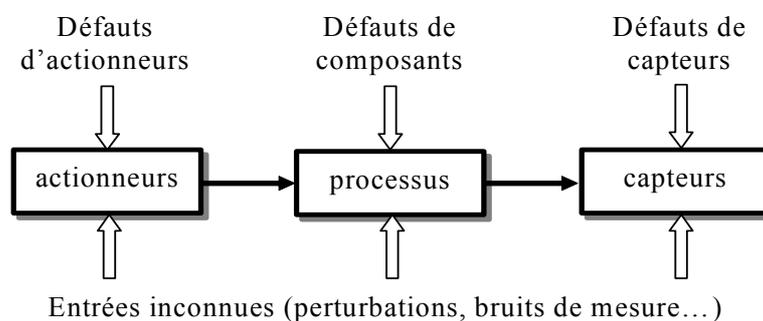


Figure 1.1 : Défauts d'un processus physique

Dans une vision multi niveaux d'un processus complexe, il sera possible de définir au niveau des interfaces des sous processus de nouveaux éléments d'action ou de mesure et donc de définir plus finement les défaillances.

Un biais correspond à un saut brutal du signal alors qu'une dérive se manifeste par une évolution anormale lente et continue du signal, et donc un éloignement progressif de sa valeur nominale.

Les phénomènes de dérive sont plus long à détecter du fait de leur faible amplitude à l'origine et de leur lente évolution. Les *valeurs aberrantes* sont des défauts dits fugitifs : elles affectent le système de manière instantanée. Leur cause est souvent due à un parasite, par exemple une perturbation électromagnétique, elles correspondent à un écart important et sporadique par rapport à la valeur nominale du signal.

3. LA REDONDANCE, LA DETECTION ET LE DIAGNOSTIC

On distingue ici trois types principaux de redondance : La redondance d'information, la redondance physique et la redondance analytique.

3.1 Redondance d'information

Le concept de base des systèmes de diagnostic est la vérification de la cohérence des diverses informations disponibles sur le système. Ceci n'est possible que s'il existe un certain degré de redondance entre ces informations. Cette redondance peut être obtenue par la multiplication des actionneurs et des capteurs et l'utilisation de modèles du processus par des techniques telles que la redondance analytique.

3.2 Redondance physique

Le moyen le plus direct pour obtenir une information fiable sur une même variable est de disposer de plusieurs capteurs la mesurant simultanément. Une redondance à trois permettra notamment d'isoler un capteur défaillant. La redondance physique souffre d'un désavantage majeur : doubler ou tripler le nombre de capteurs revient à augmenter considérablement son coût et à affronter des problèmes d'encombrement liées à l'installation et à la maintenance de ces capteurs.

L'ajout de capteurs supplémentaires permettra aussi d'avoir des informations additionnelles à mettre à profit dans le cadre de la redondance analytique.

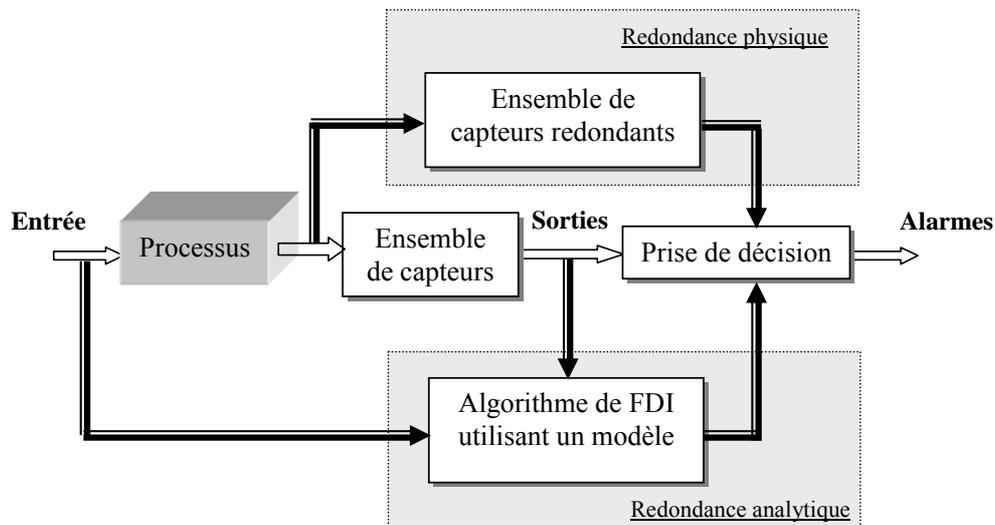


Figure 1.2 : Architecture de redondance physique et analytique

3.3 Redondance analytique

Cette redondance fait appel à des modèles analytiques représentatifs des relations de causalité et aux autres contraintes existantes entre les signaux présents dans le système. Les mesures obtenues des différents capteurs occultant le système peuvent alors être reliées par ces modèles.

Les modèles analytiques étant une représentation mathématique des lois d'évolution des variables physiques du système, le système y est décrit par un ensemble d'équations issues des lois de la physique. Les procédés ainsi modélisés ne suivent pas toujours une telle représentation idéale ceci est dû à la présence d'incertitudes sur les paramètres du modèle, des modifications structurelles du système, des non-linéarités et finalement l'effet des perturbations et des bruits de mesure.

4. AUTRES MODELES POUR LA DETECTION ET LE DIAGNOSTIC

Un modèle consiste en une reproduction formelle du système étudié en fonctionnement nominal ou non. Les modèles peuvent être de nature quantitative ou qualitative.

4.1 Modèle de surface

Les modèles de surface sont ceux qui mettent en œuvre la connaissance de la plage d'évolution de la variable d'intérêt et qui est observée. Dans le cadre de consignes de sécurité, une même variable devra évoluer dans un intervalle prédéfini. Ainsi pour un signal scalaire, deux seuils y_{min} et y_{max} caractériseront un comportement nominal, la variable $y(t)$ vérifiant alors la contrainte :

$$y_{min} \leq y(t) \leq y_{max} \quad (1.1)$$

4.2 Modèles qualitatifs et à base de règles

Lorsqu'il n'est pas possible de synthétiser la dynamique d'un système à l'aide d'un modèle analytique du fait de sa complexité ou d'un manque de données quantitatives, des modèles qualitatifs tels que les systèmes experts peuvent être mis en œuvre. Les connaissances que l'on a du système s'expriment sous la forme d'un ensemble de règles qui sont souvent du type "SI *prémisse* ALORS *conclusion*". Prémises et conclusions sont des conditions et des résultats qui ont été observés de façon simultanée et systématique. Le système expert est alors composé d'une base de connaissances qui regroupe ces règles et d'un moteur d'inférence qui inculque au système expert sa capacité de raisonnement. A partir de faits constatés, il active certaines règles de la base de connaissance de façon à, par agrégation, dégager une conséquence logique. Ces systèmes ont connu un fort développement au début des années 80 mais ces modèles souffrent de problèmes de validation de l'expertise (inconsistance de la base de connaissance) et supportent difficilement les contraintes temps réel.

4.3 Modèles de type boîte noire

Lorsque les seules informations disponibles sur le système proviennent des signaux d'entrée et de sortie du système, le traitement numérique des données entrée/sortie conduit à la construction de modèles de type « boîte noire ». qui ont pour principale caractéristique d'utiliser

"en aveugle" les données sans autre considération physique. Les modèles économétriques, les réseaux de neurones artificiels et les réseaux d'ondelettes sont des exemples de tels modèles.

Les réseaux de neurones artificiels fonctionnent de façon analogue à un réseau de neurones biologiques et sont caractérisés par leur capacité d'apprentissage qui va dépendre du processus d'acquisition et de la couverture des données.

Un exemple de méthode d'apprentissage est la reconnaissance de formes qui s'applique dès lors que l'ensemble d'apprentissage couvre plusieurs modes de fonctionnement bien répertoriés du procédé. Une forme représente un ensemble de n paramètres vu comme un point de l'espace de dimension n . La reconnaissance de formes consistera à associer à une forme donnée une forme - type connue. Compte tenu des perturbations liées à l'observation d'une forme, une zone dans l'espace de représentation peut être attribuée à chaque forme-type : c'est la notion de classe. Le principe de la reconnaissance est donc d'associer chaque nouvelle forme observée à une classe connue. Des classes pourront être associées à des causes de défaillance du système.

Les méthodes de traitement du signal génèrent également des systèmes de diagnostic. Le principe de ces systèmes est d'utiliser les propriétés statistiques des mesures effectuées sur le processus comme indicateurs de défauts, le modèle du système se réduit alors à la connaissance de valeurs de référence pour ces paramètres statistiques.

5. CONCEPTION D'UN SYSTEME DE DIAGNOSTIC

Nous venons de voir que le concept de la redondance analytique utilise des modèles dans le but de fournir des estimées des variables. Ces informations redondantes sont ensuite exploitées avec les mesures prélevées sur le système afin de remplir la fonction diagnostic, qui, si l'on cite Benchimol, se définit comme « *l'établissement d'une corrélation entre des caractéristiques ou symptômes et des situations types* » [Benchimol, 1986].

Cette définition a pour intérêt de mettre en évidence que pour établir un diagnostic, il faut être capable de décrire une situation, de l'analyser puis de l'interpréter. Cette problématique se décompose donc en trois parties :

– définir les caractéristiques ou symptômes du procédé. D'une manière générale, la description d'une situation consiste en l'acquisition d'informations renseignant sur l'état du système. Il s'agit d'étudier un ensemble de données caractéristiques du procédé répondant à une situation connue. Ces informations pertinentes du système correspondent à des données d'acquisition de capteurs dans le cas de systèmes complexes instrumentés ou de la description formelle d'un expert dans le cas empirique.

– décrire les situations types. Il s'agit de décrire les états que peut prendre un système. Là encore, le type de système étudié conditionne le type de descripteurs utilisés. Par exemple, pour un système complexe, on parlera de :

- modes normaux si le système évolue dans un état nominal ou prédit,
- modes anormaux si le système évolue dans un état interdit ou défaillant,
- modes évolutifs correspondant à un transitoire dans lequel le système passe d'un mode à un autre.

– établir le lien symptômes - situations types. Il convient d'établir une relation entre un ensemble de valeurs caractéristiques prélevées à un instant donné sur le procédé et les situations types connues a priori. Pour un système expert, il s'agira de déclencher les règles de la base de connaissance à l'aide des faits observés. Pour un système à base de modèle, cette étude portera sur l'analyse d'indicateurs de défauts donnés par la différence entre une mesure et son estimée.

Plus généralement, Dubuisson définit le diagnostic comme une exploitation de toute la connaissance accessible existant sur le système [Dubuisson,1988]. Pour Dubuisson, la *connaissance* se décline en deux facettes :

– une connaissance "globale" : c'est l'ensemble des modes de fonctionnement sous lesquels un système peut exister. De la modélisation de ces modes de fonctionnement dépendra la stratégie de diagnostic. Pour un système décrit par un grand nombre de données entrée / sortie issues de mesures de capteurs, on préférera un réseau de neurones. Pour un système dont le fonctionnement peut être décrit par un expert à l'aide symboles linguistiques, on choisira un système à base de règles.

– une connaissance "instantanée" : c'est l'ensemble des éléments dont on dispose à un instant donné pour prendre une décision. Les mesures de capteurs ainsi que le jugement d'un expert font partie d'une telle connaissance.

Des deux définitions précédentes du diagnostic, il ressort la notion de base de l'observation du système dans un but de surveillance. Il s'agit de vérifier un contrôle de cohérence entre les informations recueillies sur le système par observation et celles prédites par un modèle. Le diagnostic sera ainsi abordé par les deux notions fondamentales que sont l'observation et le test de la cohérence.

L'exploitation de la connaissance au sens de Dubuisson s'articule autour de trois activités principales :

- la *détection* : elle permet de détecter un dysfonctionnement dans le système [Gertler, 1988]. Si l'on dispose d'un modèle nominal, un dysfonctionnement se caractérisera par l'éloignement des paramètres du procédé de ceux du modèle de bon fonctionnement. En présence d'un modèle de dysfonctionnement, la détection identifie clairement le défaut connu a priori,
- la *localisation* : elle permet de remonter à l'origine du défaut lorsqu'une panne a été détectée [Frank, 1991]. En effet, il n'est pas rare de constater que la propagation d'un défaut dans le système physique génère à son tour de nouveaux défauts. Ces pannes en cascade masquent la cause réelle de la panne empêchant toute action de maintenance,
- l'*identification* : elle détermine l'instant d'apparition du défaut, sa durée ainsi que son amplitude. La connaissance de l'amplitude de la défaillance permet de concevoir un système tolérant aux défauts ou auto-adaptatif.

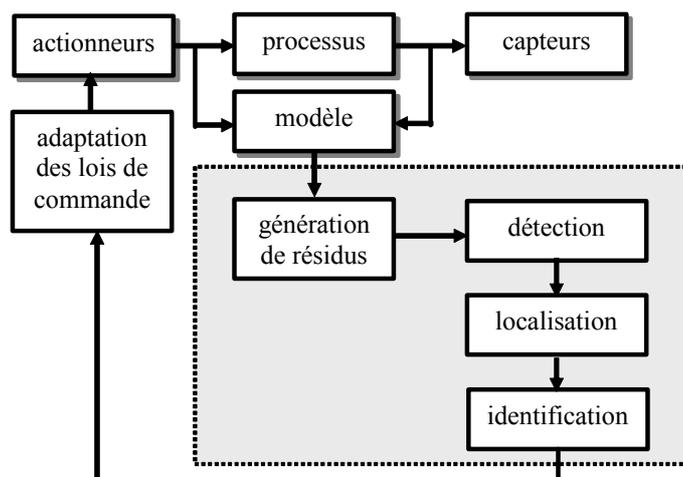


Figure 1.3 : étapes du diagnostic à base de modèle

6. CRITERES DE PERFORMANCE POUR LA DETECTION ET LE DIAGNOSTIC

IL s'agit ici de présenter les principaux critères permettant d'évaluer les performances d'un système de diagnostic. De manière générale, on relève : la détectabilité, l'isolabilité, la sensibilité, la robustesse, le coût économique et la durée de développement.

- La détectabilité est l'aptitude du système de diagnostic à pouvoir déceler la présence d'une défaillance sur le processus. Elle est fortement liée à la notion d'indicateurs de défauts (résidus) : le générateur de résidu doit, d'une certaine manière, être sensible à la défaillance que l'on souhaite détecter. Il faudra en fait se fixer un compromis entre le taux de fausses alarmes et celui de non-détection.

- L'isolabilité est la capacité du système de diagnostic à remonter directement à l'origine du défaut. Une défaillance engendre souvent une cascade d'alarmes et il peut être difficile de remonter à l'organe défaillant. Le degré d'isolabilité des défaillances est lié à la structure des résidus rendus disponibles et à la procédure de détection mise en œuvre.

- La sensibilité caractérise l'aptitude du système de diagnostic à détecter des défauts d'une certaine amplitude, elle dépend non seulement de la structure des résidus mais aussi du rapport entre le bruit de mesure et le défaut.

- La robustesse détermine la capacité du système à détecter des défauts indépendamment des erreurs de modélisation (sensibilité du résidu aux défauts et insensibilité vis-à-vis des perturbations).

D'autres critères sont à prendre en considération : Les aspects temps réel sont par exemple prépondérants pour un système de diagnostic embarqué. De même, les coûts économiques vont conditionner la stratégie de diagnostic : le système nécessite-t-il des composants trop chers pour sa conception, le temps de développement est-il trop important ? Autant de points à vérifier afin de satisfaire le cahier des charges.

7. CONCLUSION

Il est ainsi clair que la diversité apparente des méthodes proposées dans la littérature pour réaliser le diagnostic des systèmes dynamiques présentent des points incontournables : toutes sont basées d'une part sur la connaissance générale du système étudié, sur son auscultation serrée au moyens de chaînes de mesures et de capteurs et finalement sur le croisement d'information à l'aide de redondances, que celles-ci soient physiques ou analytiques. Il s'agira donc , afin de répondre aux contraintes économiques et de sécurité, de faire une exploitation optimale d'une information redondante minimale. L'une des approches du diagnostic qui obéit très précisément à ce soucis est celle basée sur l'utilisations de modèles du système dynamique. Cette approche est détaillée au chapitre suivant.

CHAPITRE 2

DETECTION ET DIAGNOSTIC A BASE DE MODELES

I. INTRODUCTION ET DEFINITIONS

Comme on l'a vu au chapitre précédent, les méthodes de diagnostic à base de modèles occupent une place importante dans la littérature. Leur utilisation, notamment dans le cadre d'applications critiques (systèmes énergétiques, systèmes de transport, industrie lourde), s'est considérablement développée. L'objet de ce chapitre est donc de faire un état de l'art sur les méthodes de diagnostic à base de modèle.

Le diagnostic à base de modèle est largement présent dans la littérature et a été développé dès les années soixante-dix. On peut citer par exemple sur le plan méthodologique [Clark et al. 1989], [Willisky 1976] [Isermann 1984] [Chow 1984] [Patton 1989], [Frank 1990] [Isermann 1997] [Maquin 1997] [Gertler 1998] [Patton 1999], alors que [Isermann, 1996] a fait le point sur les applications industrielles de cette approche.

Cette approche est connue sous le nom de *FDI* (Fault Detection and Isolation), qui, comme on l'a vu au chapitre précédent, fait intervenir les techniques de génération de résidus, de détection et de localisation. Cette approche est schématisée sur la figure (2.1) :

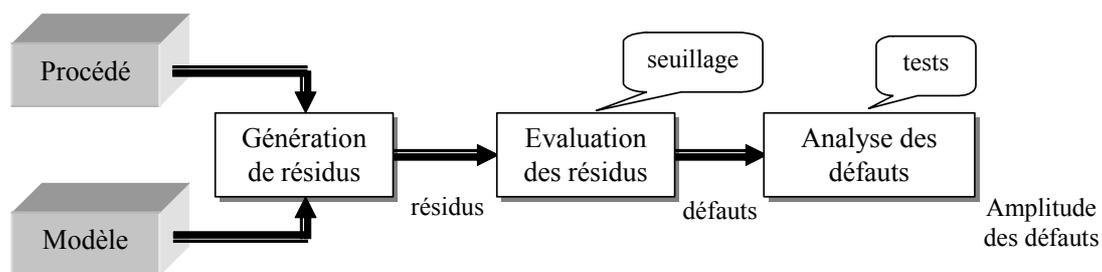


Figure 2.1 : La démarche FDI

La première démarche dans la mise en œuvre d'un système de diagnostic à base de modèle consiste à générer des indicateurs de défauts. Ils contiennent des informations sur les anomalies ou dysfonctionnements du système à surveiller. Le principe est de mesurer l'écart entre les

mesures des signaux du procédé, capteurs ou actionneurs, et la valeur théorique fournie par le modèle dans des conditions de fonctionnement nominal. La qualité de la génération de résidus est un élément essentiel pour garantir les performances d'un système de diagnostic. En effet, de la structure (composition et précision) du système de résidus engendré dépendra la robustesse de la détection et de la localisation.

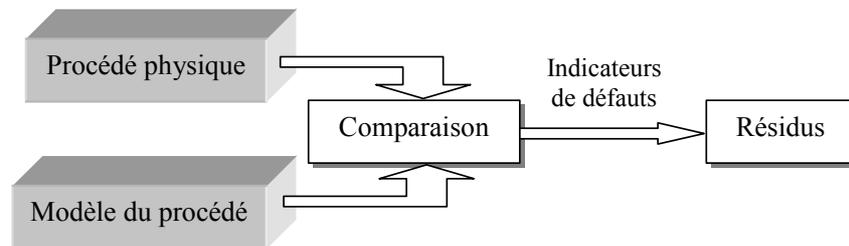


Figure 2.2 : La génération de résidus

Frank [FRANK 98] a distingué trois approches pour la génération de résidus:

- Les approches par l'estimation de paramètres,
- Les approches par les espaces de parité,
- Les approches à base d'observateurs d'états.

En ce qui concerne les méthodes basées sur l'espace de parité pour générer des résidus, on distinguera ici une approche géométrique et une approche algébriques.

2. ESTIMATION PARAMETRIQUE ET GENERATION DE RESIDUS

Ces méthodes ont pour principe d'estimer la valeur de certains paramètres du modèle et d'en détecter les écarts par rapport à des valeurs nominales. On entend par *paramètre* certaines constantes physiques du système (masse, coefficient de viscosité,...) ou une agrégation de plusieurs paramètres physiques. Dans ce deuxième cas, une correspondance unique doit exister entre les paramètres du modèle et les paramètres du système.

Les premières mises en œuvre de cette approche sont l'œuvre d'Isermann [Isermann, 1991] [Iserman, 1993] qui a défini cinq étapes dans la détection des défaillances [Isermann, 1984] :

- modélisation mathématique du système selon des équations du type :

$$\underline{y}(t) = f(\underline{u}(t), \underline{\theta}) \quad (2.1)$$

dans lesquelles $\underline{u}(t)$ représente les commandes du système et $\underline{\theta}$ les paramètres du modèle.

- description des relations entre les constantes physiques \underline{p} supposées connues et les paramètres du modèle $\underline{\theta}$:

$$\underline{\theta} = g(\underline{p}) \quad (2.2)$$

- estimation $\hat{\underline{\theta}}$ des paramètres du modèle à partir de l'équation (1) et des mesures des entrées et des sorties du système :

$$\hat{\underline{\theta}} = h(\underline{y}(1), \dots, \underline{y}(t), \underline{u}(1), \dots, \underline{u}(t)) \quad (2.3)$$

- estimation $\hat{\underline{p}}$ des paramètres du système par inversion exacte ou approchée (moindres carrés, pseudo inverse) de l'équation (2) :

$$\hat{\underline{p}} = g^{-1}(\hat{\underline{\theta}}(t)) \quad (2.4)$$

Le vecteur des résidus est obtenu en faisant la différence entre les paramètres estimés et les valeurs nominales, soit à partir des paramètres physiques, soit à partir des paramètres du modèle :

$$\underline{r}(t) = \tilde{\underline{\theta}} - \hat{\underline{\theta}}(t) \quad (2.5)$$

ou

$$\underline{r}(t) = \underline{\tilde{p}} - \underline{\hat{p}}(t)$$

où $\underline{\tilde{\theta}}$ et $\underline{\tilde{p}}$ sont des valeurs nominales.

Lorsque les valeurs nominales ne sont pas connues, une approche possible consiste à construire le vecteur résidu à partir des différences entre les estimations des paramètres à des instants successifs. On aura par exemple :

$$\underline{r}(t) = \underline{\hat{\theta}}(t) - \underline{\hat{\theta}}(t - k)$$

ou

$$\underline{r}(t) = \underline{\hat{p}}(t) - \underline{\hat{p}}(t - k)$$

(2.6)

Ce dernier cas suppose que les paramètres restent constants dans des conditions de fonctionnement nominales.

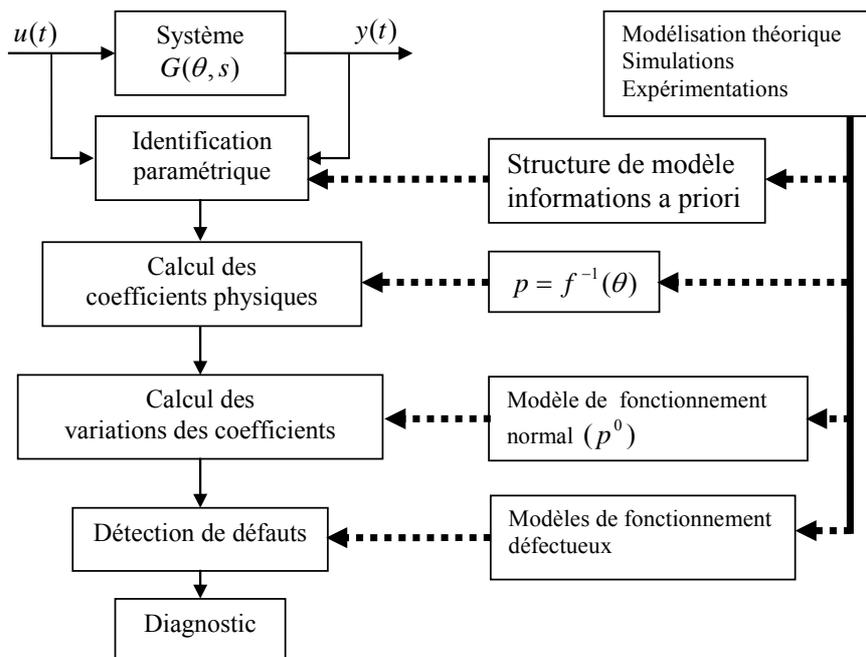


Figure 2.3: diagnostic de défauts par modélisation et identification paramétrique

On dispose de nombreuses méthodes d'estimation des valeurs de paramètres : estimation par projection orthogonale, par estimation Bayésienne, estimation au sens du maximum de vraisemblance et estimation au sens des moindres carrés par exemple.

3. APPROCHE GEOMETRIQUE DE LA GENERATION DE RESIDUS

Les équations constituant le modèle du processus sont projetées dans un espace particulier appelé espace de parité de façon à éliminer certaines inconnues présentes dans plusieurs de ces équations. On s'arrange pour que les équations projetées ne fassent plus intervenir que des variables mesurables (les entrées et les sorties du système). Ces équations projetées constituent des relations de redondance analytique (RRA). L'idée [Kabbaj 2004] est alors de vérifier la cohérence entre les valeurs mesurées et les valeurs de leurs estimées données par le modèle (on parle de consistance des mesures, de parité).

Les premiers travaux relatifs à cette approche par Chow [Chow, 1980] ne considéraient que des systèmes linéaires. Des extensions aux systèmes à représentation d'état affine, dont les systèmes bilinéaires, ont été proposées en introduisant un calcul progressif de la matrice d'observabilité [Yu et al., 1995] ou en utilisant l'algèbre linéaire sur des corps différentiels [Comtet-Varga, 1997]. Deux types de méthodes ont été proposées pour le calcul des RRA : celles basées sur le calcul des déterminants caractéristiques et celles basées sur l'élimination de Gauss. L'approche géométrique a été aussi étendue au cas des systèmes non-linéaires linéarisables [Christophe, 2001]. Cette classe comprend notamment les systèmes linéaires à coefficients variant dans le temps. Pour illustrer simplement le principe de projection, nous ne présentons l'approche géométrique que dans le cas linéaire. Considérons alors le modèle linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t) + B_d \underline{d}(t) + B_\phi \underline{\phi}(t) \\ \underline{y}(t) = C \underline{x}(t) + D \underline{u}(t) + D_d \underline{d}(t) + D_\phi \underline{\phi}(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

où $\underline{d}(t)$ et $\underline{\phi}(t)$ représentent respectivement les perturbations et les fautes affectant cette dynamique.

Les dérivées temporelles successives peuvent être regroupées de la façon suivante :

$$\underline{y}^{(s)} = H_0 \underline{x} + H_1 \underline{u}^{(s)} + H_2 \underline{d}^{(s)} + H_3 \underline{\phi}^{(s)} \quad (2.8)$$

H_0 est la matrice d'observabilité et H_1 est une matrice triangulaire inférieure de Toeplitz décrivant la propagation de l'entrée \underline{u} dans le système. De même, les matrices H_2 et H_3 décrivent respectivement la propagation des perturbations \underline{d} et des fautes $\underline{\phi}$. leurs expressions sont données par :

$$H_0 = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^s \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}B & \cdots & CB & D \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} D_d & 0 & \cdots & 0 \\ CB_d & D_d & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}B_d & \cdots & CB_d & D_d \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} D_f & 0 & \cdots & 0 \\ CB_f & D_f & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}B_f & \cdots & CB_f & D_f \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Afin d'éliminer les variables non mesurées, l'équation (2.8) est projetée dans un espace dit « espace de parité ». Cette projection est telle que :

$$W^T H_0 = 0 \quad (2.11)$$

Une condition nécessaire d'existence de W est que la matrice H_0 ne soit pas de rang plein. Le vecteur de résidus est alors donné par :

$$\underline{r} = W^T (\underline{y}^{(s)} - H_1 \underline{u}^{(s)}) \quad (2.10)$$

En utilisant l'expression (2.8), le résidu peut être exprimé en fonction du vecteur d'état, des entrées inconnues $\underline{d}(t)$ et des fautes $\underline{\phi}(t)$.

$$\underline{r} = W^T (H_0 \underline{x} + H_2 \underline{d}^{(s)} + H_3 \underline{\phi}^{(s)}) \quad (2.11)$$

Pour que le résidu soit robuste vis-à-vis des entrées inconnues et sensibles seulement aux fautes, il faut satisfaire les conditions suivantes :

$$W^T H_2 = 0 \quad \text{et} \quad W^T H_3 \neq 0 \quad (2.12)$$

Cependant, ces contraintes sont en général très restrictives et il n'est possible de trouver une solution W que dans un cas idéal. Pour cette raison, des approximations doivent être effectuées. Il s'agit donc de calculer un vecteur de parité W qui minimise le critère suivant [Frank, 1990] :

$$J = \frac{\|W^T H_2\|}{\|W^T H_3\|} \quad (2.13)$$

L'approche géométrique de l'espace de parité a été largement développée dans la littérature pour les systèmes linéaires. Dans [Kabbaj et al. 2003a], la méthode a été appliquée pour la détection de défauts de capteurs et d'actionneurs où un modèle linéaire identifié en ligne est utilisé pour la génération de résidus. L'approche géométrique peut être étendue aux systèmes bilinéaires [Yu et al., 1995 ; Comtet-Varga, 1997]. Dans le cas non-linéaire, le problème se pose dans les mêmes termes que dans le cas linéaire et bilinéaire : Eliminer les variables inconnues d'un système correspond également à projeter l'ensemble de ses solutions dans un sous espace de dimension inférieure. Toutefois, la définition de cette projection n'est pas aussi simple que dans le cas linéaire. En général, cette approche de projection trouve ses limites quand elle est appliquée aux systèmes non-linéaires.

4. APPROCHE ALGEBRIQUE POUR LA GENERATION DE RESIDUS

Le principe de cette approche consiste à calculer les relations de redondances analytiques (RRA) en utilisant la théorie de l'élimination. C'est une approche formelle et non numérique. Il s'agit d'obtenir l'expression formelle des résidus issus du système en éliminant les variables inconnues. En pratique, la théorie de l'élimination se limite au cas des systèmes polynomiaux, pour lesquels des outils informatiques sont disponibles. Cette limitation n'est pas aussi restrictive qu'elle peut paraître, en effet, tout système analytique peut être décomposé en un système polynomial en utilisant la décomposition en série de Taylor. Bien entendu, cette approche s'applique non seulement aux systèmes polynomiaux, mais aussi aux systèmes linéaires et bilinéaires qui sont des systèmes polynomiaux particuliers.

Considérons un système dynamique décrit par les équations différentielles non-linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}, \underline{d}, \underline{\phi}) \\ \underline{y} = h(\underline{x}, \underline{u}, \underline{d}, \underline{\phi}) \end{cases} \quad (2.14)$$

Avec $\underline{x} \in \mathfrak{R}^n$ le vecteur d'état, $\underline{y} \in \mathfrak{R}^p$ le vecteur de sorties, $\underline{u} \in \mathfrak{R}^{m_u}$ le vecteur des entrées connues, $\underline{d} \in \mathfrak{R}^{m_d}$ le vecteur des entrées inconnues et $\underline{\phi} \in \mathfrak{R}^{m_f}$ le vecteur des fautes agissant sur le système. Les deux fonctions $f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont supposées analytiques. Un ordre de dérivation s_i est associé à chaque sortie y_i , $i = 1, \dots, p$. La dérivée d'ordre s_i de la sortie y_i est une fonction lisse pouvant s'écrire sous la forme [Comtet-Varga, 1997] :

$$y_i^{(s_i)} = \gamma_{i,s_i}(\underline{x}, \underline{u}^{(s_i)}, \underline{d}^{(s_i)}, \underline{\phi}^{(s_i)}) \quad (2.15)$$

où les dérivées temporelles successives de toutes les sorties sont regroupées sous la forme compacte :

$$y_i^{(s)} = \Gamma_s(\underline{x}, \underline{u}^{(s)}, \underline{d}^{(s)}, \underline{\phi}^{(s)}) \quad (2.16)$$

$$\bar{y}^{(s)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1^{(s_1)} \\ \vdots \\ y_p \\ \vdots \\ y_p^{(s_p)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_s = \begin{pmatrix} \gamma_{1,0}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{d}, \underline{\phi}) \\ \vdots \\ \gamma_{1,s_1}(\underline{x}, \underline{u}^{(s_1)}, \underline{d}^{(s_1)}, \underline{\phi}^{(s_1)}) \\ \vdots \\ \gamma_{p,0}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{d}, \underline{\phi}) \\ \vdots \\ \gamma_{p,s_p}(\underline{x}, \underline{u}^{(s_p)}, \underline{d}^{(s_p)}, \underline{\phi}^{(s_p)}) \end{pmatrix}$$

Supposons que l'on peut mettre ce système sous la forme polynomiale suivante :

$$g_i(\underline{y}^{(s)}, \underline{u}^{(s)}, \underline{d}^{(s)}, \underline{\phi}^{(s)}, \underline{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, n_g, \quad n_g = \sum_{i=1}^p s_i + p \quad (2.17)$$

Ceci est acceptable puisque tout système analytique peut être décomposé en un système polynomial en utilisant la décomposition en série de Taylor. Beaucoup de systèmes analytiques admettent une représentation polynomiale après une éventuelle transformation et un changement de variables [Conte et al., 1988 ; Fliess, 1990].

L'objectif de cette approche est de calculer les relations de redondance analytique (RRA) en éliminant dans (2.17) les variables d'état x_i , les perturbations $d_j^{(s)}$ et éventuellement des composantes du vecteur de fautes. Le problème ainsi posé est un problème d'élimination de variables d'un système d'équations polynomiales. La théorie de l'élimination [Cox et *al.*, 1996], proposée dans l'algèbre des anneaux polynomiaux permet alors de résoudre ce problème.

5. ESTIMATION D'ETAT ET GENERATION DE RESIDUS

Les méthodes basées sur l'estimation d'état ont pour principe de reconstruire l'état du système à partir des mesures de ses entrées et de ses sorties. Ce sont des méthodes de génération de résidus indirectes en ce sens qu'elles calculent l'erreur d'estimation de la sortie. L'estimation de l'état peut être effectuée à l'aide d'observateurs [Luenberger, 1971] [Adjallah, 1993] dans le cas déterministe ou de filtres dans le cas stochastique (filtre de Kalman [Willsky, 1976] ou de filtres détecteurs de défauts [Massoumnia, 1986]). Les deux méthodes présentent des analogies dans leur formulation et peuvent être synthétisées par la figure (II.4), la différence provenant du mode de calcul des paramètres de l'estimateur en fonction du contexte retenu (cas continu ou discret, déterministe ou stochastique).

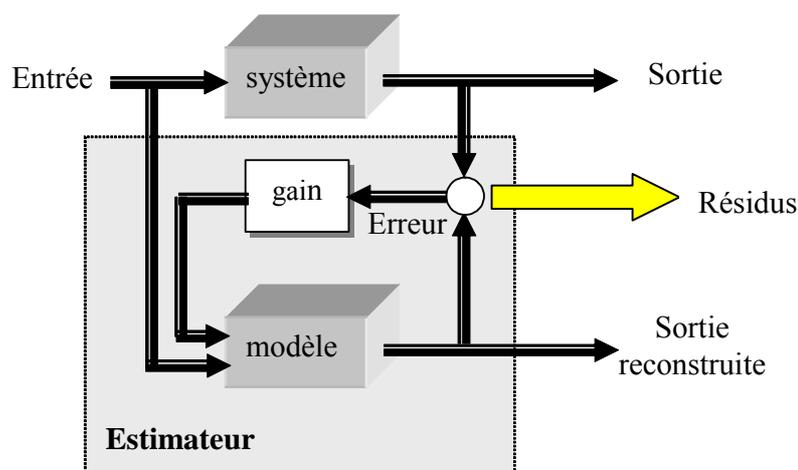


Figure 2.4 : Principe général d'un estimateur de sortie

La théorie des observateurs est utilisée pour des systèmes linéaires ou non linéaires [Garcia, 1997] d'ordre plein s'ils estiment l'intégralité du vecteur d'état (le système doit être complètement observable), d'ordre réduit dans le cas contraire, dans le domaine fréquentiel (observateurs généralisés) ou temporel (observateurs de Luenberger). Frank et Wünnenberg ont défini une classe d'observateurs dit observateurs à entrées inconnues tels que les sorties du système sont indépendantes des incertitudes structurées auxquelles il est soumis [Frank, 1989]. Les travaux de Ding [Ding, 1994] ont permis de proposer une approche unifiée de ces méthodes à base d'observateurs.

Les différentes méthodes de génération basées sur les observateurs conduisent à la génération de deux types de résidus [Patton, 1994] [Gertler, 1995a] : les résidus structurés [Gertler, 1992a] [Chen, 1995] et les résidus directionnels [Gertler, 1993]. Pour le premier type de résidus, la propagation d'un défaut affecte seulement une partie des composantes du vecteur de résidus tandis que pour le second type de résidus, la présence d'un défaut entraîne l'ensemble du vecteur résidu dans une direction préfixée.

Les méthodes à base d'observateurs présentent des analogies de formulation. Il en est de même pour les méthodes de génération de résidus. Les travaux de Frank et Wünnenberg ont permis de montrer que la génération de résidus par l'approche d'espace de parité correspond en fait à la mise en œuvre d'une certaine classe d'observateurs [Frank, 1989]. Les relations entre méthodes de résidus par espace de parité et par observateurs ont été étudiées [Ding, 1999] [Cocquempot, 1993] [Gertler, 1991] [Patton, 1991b] [Staroswiecki 1991a] [Staroswiecki, 1991b].

De même, il existe des relations de dualité entre les méthodes de calcul des résidus par l'approche basée sur les espaces de parité et par les méthodes à base d'estimation paramétrique. Staroswiecki et al. ont démontré que, sous certaines hypothèses, les résidus obtenus par une approche d'estimation paramétrique peuvent être vus comme une transformation non linéaire des résidus dans l'espace de parité [Staroswiecki, 1993] [Delmaire, 1994] [Delmaire, 1995]. Par la suite, Gertler a généralisé ces travaux [Gertler, 1995b].

Le choix de la méthode de génération de résidus va dépendre du type de modèle disponible pour représenter le processus mais aussi du type de défauts que l'on veut détecter (défauts additifs ou multiplicatifs, défauts multiples ou non). Isermann [Isermann, 1994] a présenté une analyse comparative des avantages et des conditions d'application des différentes méthodes citées ici.

6. LA DETECTION DE FAUTES

Deuxième étape de la fonction de diagnostic, la détection permet de déterminer la présence ou non d'un défaut sur le procédé. Elle est aussi appelée alarme globale. Nous nous intéresserons aux méthodes de détection à base de résidus.

Les résidus ont une valeur théorique nulle pour un système idéal en l'absence de défaut (pas d'incertitude modèle, ni de bruits de mesure), et non nul dans le cas contraire. La principale difficulté de la détection réside dans le calcul du seuil des résidus. Un seuil trop grand risque d'engendrer une non-détection. Au contraire, un seuil trop petit entraînera des fausses alarmes. La problématique est donc de trouver un seuil optimal qui constituera le compromis idéal entre un taux de fausse alarme et un taux de non-détection minimums.

L'évaluation des résidus consiste donc à optimiser le problème de seuillage des résidus. L'approche classique consiste à établir des fonctions de décision selon la nature des résidus :

- Si l'on cherche à déterminer la présence de bruits, on choisira l'analyse par tests statistiques.
- Si l'on considère la sensibilité des résidus aux défauts, l'évaluation des résidus r deviendra un problème de seuillage, i.e. déterminer un vecteur de seuils $\underline{\varepsilon}$ tel que :

$\exists i : r_i(t) \geq \varepsilon_i$ pour un système en défaut,

$\forall i : r_i(t) < \varepsilon_i$ pour un système sans défaut.

Concernant les tests statistiques, on peut citer :

- le test du maximum de vraisemblance ou test GLR (de l'anglais Generalized Likelihood Ratio) introduit par Willsky et Jones [Willsky, 1976b] qui prend en compte les perturbations stochastiques (test de blancheur de bruit),
- le test de Page-Hinkley qui teste la valeur moyenne du résidu sur une fenêtre de détection par rapport à un seuil prédéfini,
- le filtre de décorrélation afin de supprimer l'influence des incertitudes de modèle sur le résidu [Borne, 1990].

Concernant les problèmes de seuillage, les premiers travaux ont porté sur l'élaboration de seuils fixes, indépendants du temps et des entrées du système. Par exemple, Walker et Gai [Walker, 1979] l'ont défini à l'aide de la théorie de Markov.

Remarquons que l'effet de perturbations extérieures peut rendre inadapté la détection par rapport à un seuil de valeur constante prédéfinie. De même, une incertitude sur la mesure peut entraîner un résidu au-delà de la valeur limite fixée et donc déclencher une fausse alarme.

Ainsi, Emami-Naeni et al. [Emami-Naeni, 1988] ont défini la notion de seuil adaptatif, robuste contre les incertitudes de modèle. De même, Clark a proposé d'adapter les seuils de décision en utilisant des fonctions déterministes : il a défini un seuil de détection adaptatif en fonction des entrées du système [Patton, 1989]. L'idée consiste à définir des bornes inférieures et supérieures pour le résidu en fonction des bornes des incertitudes des paramètres et des bruits de mesure. Les seuils sont ainsi fonction des modes opératoires. Il existe de nombreuses contributions dans ce domaine [Ding, 1991] , [Weiss, 1988] [Sauter, 1996].

7. LA LOCALISATION

La troisième étape de la fonction de diagnostic est celle de la localisation. Elle a pour but de remonter à l'origine du défaut détecté. Les méthodes de génération de résidus sont nombreuses et leur application aux systèmes de surveillance dépend du type de modèle considéré (temporel, fréquentiel, linéaire ou non linéaire, dynamique ou statique...) et des informations disponibles sur

le système. Néanmoins, quelle que soit la méthode utilisée (estimation paramétrique ou d'état, espace de parité...), les résidus générés sont généralement associés à des propriétés structurelles différentes. La localisation s'appuyant sur la structure et la connectivité du système étudié, c'est à partir de cette considération que l'on peut aborder la problématique de la localisation. Ceci conduit à introduire les notions de matrice d'incidence et de signatures de défauts.

La signature de la panne est associée à la structure du système de résidus par l'intermédiaire de la matrice d'incidence. Soit R un ensemble des relations de redondance et E l'ensemble des variables mesurées du procédé étudié, la matrice d'incidence M représente la relation suivante :

$$M : R \times E \rightarrow \{0,1\}^{n \times m}$$

$$(r_i, e_j) \rightarrow M(i, j)$$

avec :

$$M(i,j)=1 \text{ si } e_j \text{ apparaît dans la relation de redondance analytique } r_i,$$

$$M(i,j)=0 \text{ sinon.}$$

La matrice d'incidence est donc binaire, chaque colonne correspondant à une variable et chaque ligne correspondant à une composante du vecteur de résidu :

- un 1 pour une position donnée signifie que le résidu associé est directement influencé par la variable connue associée à ce un ,
- un 0 signifie au contraire que la variable donnée n'entre pas dans le calcul du résidu.

Ainsi, pour des conditions idéales (pas de dispersion des valeurs des paramètres ou de modification de la structure du système...), chaque colonne de la matrice d'incidence correspondra à une signature d'une défaillance particulière. Afin de rendre chaque défaut détectable, toutes les colonnes doivent contenir au moins un 1. Afin de rendre chaque défaut unique, les signatures associées doivent être uniques. La figure II.5 montre un exemple de deux structures de matrices d'incidence pour un système à trois variables connues e_j ($j = 1,2,3$) et à trois résidus r_i ($i=1,2,3$).

	e1	e2	e3
r1	1	0	0
r2	0	1	0
r3	0	0	1

	e1	e2	e3
r1	0	1	1
r2	1	0	1
r3	1	1	0

Figure 2.5 : Exemple de matrices d'incidence

Lorsque le problème de modélisation s'apparente à une estimation d'état, on a vu que les résidus pouvaient être soit structurés, soit directionnels. Afin d'améliorer la localisation des défauts, on peut utiliser des sous-ensembles de résidus. Chaque sous-ensemble sera sensible à un défaut ou un ensemble de défauts et insensible aux autres défauts. Clark [Clark, 1978] a proposé deux schémas de localisation :

- le schéma *SOS* (Simplified Observer Scheme), détectant parfaitement des défauts simultanés mais ne permet pas la localisation de chacun des défauts,
- le schéma *DOS* (Dedicated Observer Scheme). Sa structure permet la détection de défauts simultanés mais la localisation n'est effective que pour des défauts non simultanés.

Frank [Frank, 1987] a proposé un schéma de détection et de localisation de défauts simultanés : le schéma *GOS* (Generalized Observer Scheme). Ces schémas ont par la suite été complétés par la prise en compte d'un résidu supplémentaire découplant parfaitement les incertitudes structurées. On parlera alors de structures *DOS* ou *GOS augmentées* dont les différentes aptitudes sont discutées dans les travaux de Courtine [Courtine, 1997]. Van Schrick [Van Schrick, 1993] a élaboré une comparaison des différentes structures en indiquant leurs conditions de mise en œuvre.

Néanmoins, les différents schémas cités plus haut ne peuvent pas être élaborés dans tous les cas et notamment lorsqu'on n'aborde pas le diagnostic par le biais de l'estimation d'état. Les dimensions de la matrice d'incidence sont déterminées à partir du nombre de capteurs et du nombre de résidus engendrés par la méthode choisie. Elle est donc imposée par le système et ses

instruments d'observation. Pour reprendre les termes utilisés par Gertler, on qualifie la matrice de :

- non localisante *si deux signatures de pannes sont identiques*,
- *déterministiquement localisante* (traduction littérale de l'anglais *deterministically isolable*) si toutes les signatures de pannes sont différentes, mais lorsqu'on modifie une signature en changeant un 1 par un 0, on retrouve une autre signature déjà existante,
- *statistiquement localisante* (traduction littérale de l'anglais *statistically isolable*) si toutes les signatures sont différentes et ne peuvent être identiques même en changeant un 1 par un 0.

Pour reprendre l'exemple développé dans [Gertler, 1992b], figure II.6, la structure A est *non localisante* car les deux premières signatures, i.e. les deux premières colonnes, sont identiques. Dans cet exemple, un vecteur résidu $R=[1 \ 1]$ correspondra à la signature des défauts des variables e_1 et e_2 . La détection est donc impossible. La structure B est *déterministiquement localisante* car toutes les colonnes sont différentes et la deuxième signature peut être obtenue en modifiant le 1 (troisième composante) en 0 de la première signature. Enfin, la structure C est *statistiquement localisante* car toutes les signatures sont différentes et aucune d'elle ne peut être déduite des autres en modifiant un 1 par un 0.

	e1	e2	e3	e4
r1	1	1	1	0
r2	1	1	0	1

Structure A

	e1	e2	e3	e4
r1	1	1	1	0
r2	1	1	0	1
r3	1	0	1	1

Structure B

	e1	e2	e3	e4
r1	1	1	1	0
r2	1	1	0	1
r3	1	0	1	1
r4	0	1	1	1

Structure C

Figure 2.6: structure DOS et GOS

Dans la littérature, on parlera également d'*isolation faible* dans le cas de structures déterministiquement localisantes. En effet, la présence de perturbations pouvant fausser l'étape de détection, l'algorithme de localisation devient plus robuste pour des signatures de défauts différentes, même lorsque ces dernières sont dégradées (modification d'un 1 par un 0). Dans le cas de structures statistiquement localisante, on parlera d'*isolation forte*.

Il est à noter que certains auteurs se sont penchés sur l'étude du positionnement de capteurs dans le but d'optimiser la structure de la matrice d'incidence, i.e. de tendre vers une structure statistiquement localisante. Des exemples d'algorithmes peuvent être trouvés grâce aux travaux de Ragot et al. [Ragot, 1992] et par Carpentier et Litwak [Carpentier, 1996].

8. CONCLUSION

Comme nous venons de le voir les méthodes à base de modèles sont très diverses mais les principaux développements théoriques et méthodologiques restent souvent limités au cas linéaire ce qui en réduit considérablement la portée puisque la plupart des systèmes dynamiques présentent un comportement non linéaire lorsqu'ils évoluent de façon notable dans leur domaine de fonctionnement. Depuis quelques années, dans le domaine de la commande automatique des progrès notables ont été réalisés en ce qui concerne la commande à base de modèles non linéaire présentant des structures particulières. On peut donc se demander s'il ne serait pas possible, dans le domaine du diagnostic, de suivre une démarche équivalente afin d'aborder avec plus de réalisme et donc de succès le diagnostic des systèmes dynamiques.

CHAPITRE 3

RELATIONS DE REDONDANCE POUR LES SYSTEMES DIFFERENTIELLEMENT PLATS

1. INTRODUCTION

Depuis un peu plus de dix ans, les automaticiens ont été amenés, dans le cadre de la commande des systèmes mécaniques articulés à caractère fortement non linéaire [Martin, 1992], et plus précisément dans le cadre du suivi de trajectoires, à définir une nouvelle classe de systèmes, les systèmes différentiellement plats. Certains automaticiens théoriques ont étudié à l'aide de la géométrie différentielle les principales propriétés de ces systèmes. [Levine, 1995].

Dans ce chapitre, on rappelle tout d'abord la notion de platitude différentielle que l'on illustre par plusieurs exemples. Puis on s'intéresse à l'exploitation spécifique qui peut être faite des sorties plates d'un tel type de système en vue de la réalisation d'un diagnostic de bon fonctionnement de celui-ci. On y étudie plus particulièrement l'utilisation qui peut être faite dans le cadre du diagnostic des redondances d'informations présentes dans l'ensemble de ces différentes sorties plates.

2. PLATITUDE DIFFERENTIELLE

2.1 Définition classique de la platitude différentielle

Définition [Lu, 2005] : soit un système dont la dynamique est représentée par les équations d'état générales suivantes :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad \underline{x} \in R^n, \underline{u} \in R^m \quad (3.1)$$

Une sortie de ce système $\underline{y}, \underline{y} \in R^m$ est dite différentiellement plate si elle est telle que :

- 1) Le vecteur des sorties plates peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$\text{avec } \underline{y}_i = h_i \left(\underline{x}, u_1, \dots, u_m^{(\delta_1)}, u_2, \dots, u_2^{(\delta_2)}, u_m, \dots, u_m^{(\delta_m)} \right) \quad i = 1 \text{ à } m \quad (3.2)$$

où les δ_i , $i = 1 \text{ à } m$, sont des entiers naturels.

- 2) Les composantes de \underline{y} sont analytiquement indépendantes,
- 3) Les composantes de l'état \underline{x} et de l'entrée \underline{u} s'expriment en fonction des composantes de la sortie plate \underline{y} et d'un nombre fini de leurs dérivées :

$$\begin{cases} x_i = \Phi_i(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\mu_{i,1})}, y_2, \dots, y_2^{(\mu_{i,2})}, \dots, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\mu_{i,m})}) & i = 1 \text{ à } n \\ u_j = \Psi_j(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\nu_{j,1})}, y_2, \dots, y_2^{(\nu_{j,2})}, \dots, y_m, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\nu_{j,m})}) & j = 1 \text{ à } m \end{cases} \quad (3.3)$$

où les $\mu_{i,j}$ et les $\nu_{i,j}$ sont des entiers naturels.

- 4) les fonctions $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ satisfont identiquement à l'équation:

$$\underline{\dot{\Phi}} = f(\underline{\Phi}, \underline{\Psi}) \quad (3.4)$$

On dit alors que pour les sorties plates \underline{y} , le système est Lie-Bäcklund équivalent au système trivial :

$$y_k^{(\delta_k)} = v_k \quad k = 1 \text{ à } m \quad , \delta_k = \max\{\nu_{jk}, j = 1 \text{ à } m\} \quad (3.5)$$

où les v_k sont des entrées indépendantes pour chaque chaîne d'intégration.

2.2 Platitude implicite ou explicite:

Dans le cas où la condition (3.3) n'est pas satisfaite, mais où les composantes du vecteur d'état, du vecteur de commande, du vecteur des sorties et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre fini satisfont à une relation telle que :

$$F(\underline{x}, \underline{u}, \underline{y}, \underline{\dot{y}}, \dots, \underline{y}^{(\delta)}) = 0 \quad (3.6)$$

où F est à valeurs sur \mathbb{R}^{n+m} et est localement inversible sur un domaine D , on dit que le vecteur des sorties \underline{y} est implicitement plat pour ce système sur D .

Dans le premier cas, les conditions (3.3) étant satisfaites, on dira aussi que \underline{y} est explicitement plat pour ce système. La solution du système d'équations (3.6) conduira à une platitude de nature numérique qui néanmoins n'est pas sans intérêt, bien au contraire, dans la perspective d'applications pratiques.

Suivant la nature de ces équations, diverses méthodes de résolution pourront être envisagées, depuis la résolution directe de celui-ci par des méthodes de type Newton, par le passage à la minimisation d'une fonction quadratique des premiers membres de ces équations, par des méthodes d'apprentissage et la constitution d'un réseau de neurones inverseur. C'est cette dernière approche qui sera reprise au chapitre 5.

Certains systèmes auront des sorties plates (dans ce cas ils en auront une infinité), d'autres n'en auront pas. Si sur le plan des Mathématiques il est intéressant d'étudier des propriétés garantissant l'existence de sorties plates pour un système, sur le plan de l'Automatique, la question qui se pose est de savoir si les sorties que l'on se propose de gouverner sont plates ou non et si elles sont observables ou non directement (mesurables) à l'aide de capteurs spécifiques.

Dans bien des cas, il ne sera pas possible de trouver une interprétation physique des sorties plates d'un système, la platitude restant alors une propriété purement mathématique du système différentiel constitué par le modèle du système physique. Les sorties plates d'un système différentiellement plat n'étant pas uniques, il sera toujours intéressant, notamment dans le cadre de la détection de pannes, de choisir lorsque c'est possible des sorties plates ayant une interprétation physiques et donc à vocation à être mesurées.

2.3 Sorties plates minimales ou non minimales

Comme on l'a souligné au cours des chapitres 1 et 2, la détection et le diagnostic de pannes sont basés en grande partie sur le recoupement entre informations redondantes sur le comportement effectif du système surveillé. Ceci conduit alors, dans ce cadre, à étendre la notion de platitude afin d'intégrer les redondances induites par différentes sorties mesurées.

On parlera de système dynamique plat d'ordre p :

Un système tel que (3.1) est dit différentiellement plat d'ordre p , s'il existe un vecteur de sorties \underline{y} , $\underline{y} \in R^p$, $p \geq m$, dit vecteur de sorties plates d'ordre p , tel que :

- 1) Le vecteur des sorties plates d'ordre p peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p)$$

$$\text{avec } \underline{y}_i = h_i(\underline{x}, u_1, \dots, u_1^{(\delta_1)}, u_2, \dots, u_2^{(\delta_2)}, u_m, \dots, u_m^{(\delta_m)}) \quad i = 1 \text{ à } p \quad (3.7)$$

où les δ_i , $i = 1 \text{ à } m$, sont des entiers naturels.

- 2) Les composantes de l'état \underline{x} et de l'entrée \underline{u} s'expriment en fonction des composantes de la sortie plate \underline{y} et d'un nombre fini de leurs dérivées :

$$\begin{cases} x_i = \Phi_i(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\mu_{i,1})}, y_2, \dots, y_2^{(\mu_{i,2})}, \dots, y_p^{(1)}, \dots, y_p^{(\mu_{i,m})}) & i = 1 \text{ à } n \\ u_j = \Psi_j(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\nu_{j,1})}, y_2, \dots, y_2^{(\nu_{j,2})}, \dots, y_p, y_p^{(1)}, \dots, y_p^{(\nu_{j,m})}) & j = 1 \text{ à } m \end{cases} \quad (3.8)$$

où les $\mu_{i,j}$ et les $\nu_{i,j}$ sont des entiers naturels.

- 3) les fonctions Φ et Ψ satisfont identiquement à l'équation (3.4).

Dans le cas où le système admet une sortie plate d'ordre $p = m$ on dira qu'il est *strictement plat* et cette sortie plate sera dite *d'ordre minimal strict*. Toute autre sortie plate d'ordre q strictement supérieur à $p = m$ de ce système sera dite *strictement non minimale*.

Dans le cas où le système n'est pas strictement plat mais admet une sortie plate d'ordre minimum p strictement supérieur à m , on dira qu'il est *faiblement plat* et la sortie plate correspondante sera dite *d'ordre minimal*. Toute autre sortie plate d'ordre q strictement supérieur à p sera alors dite *non strictement non minimale*.

Le *degré additionnel de redondance* de la représentation par des sorties plates d'un système dynamique sera alors donné par $r_a = q - p$.

Aux $n+m$ relations (3.8), on pourra rajouter r_a relations reliant les sorties plates non minimales et leurs dérivées :

$$\Omega_i(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\lambda_{i,1})}, y_2, \dots, y_2^{(\lambda_{i,2})}, \dots, y_p^{(1)}, \dots, y_p^{(\lambda_{i,m})}) = 0 \quad i = 1 \text{ à } r_a \quad (3.9)$$

3. EXEMPLES DE SYSTEMES PLATS

On considère le cas d'un véhicule sensé rouler sans glisser sur un plan horizontal.

3.1 Véhicule roulant dans le plan :

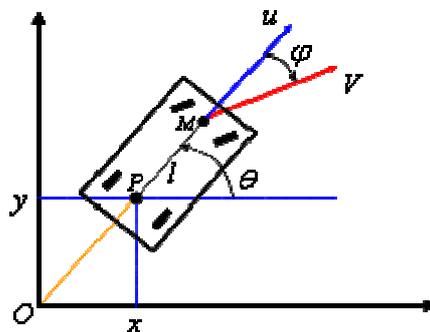


Figure 3.1 : Véhicule roulant sans glisser

L'évolution du véhicule représenté sur la figure 3.1 roulant sans glisser sur un plan horizontal est représentée par les équations :

$$\dot{x} = u \cos \theta, \quad \dot{y} = u \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{u}{l} \tan \varphi \quad (3.10)$$

Cas 1) : Prenons $\underline{X}' = (x, y, \theta)'$ comme vecteur d'état et $U = (\varphi)$ comme entrée.

On vérifie aisément que ce système n'est pas strictement plat d'ordre 1. Considérant alors les sorties $\underline{Y} = (x, y)'$, on peut écrire :

$$\theta = \arctg(\dot{x} / \dot{y}) \quad (3.11)$$

et

$$\operatorname{tg} \varphi = (\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}) / (\dot{y}(\dot{x} + \dot{y})\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}) \quad (3.12)$$

La sortie $\underline{Y} = (x, y)'$ est donc d'ordre minimal pour ce système qui lui est donc faiblement plat.

Considérant la sortie $\underline{Y} = (x, y, \theta)'$, celle-ci sera non strictement minimale et le degré de redondance additionnel associé à cette sortie sera égal à 1.

Cas 2) Prenons $\underline{X}' = (x, y, u, \theta)'$ comme vecteur d'état et $\underline{U} = (a, \operatorname{tg} \varphi)'$ comme entrées ($a = \dot{u}$: est l'accélération de roulement et φ est l'angle de braquage des roues avant).

Il est alors facile de vérifier que l'on a affaire à un système strictement plat de sortie plate strictement minimale $\underline{Y} = (x, y)'$ puisque, adoptant la représentation d'état affine:

$$\underline{\dot{X}} = \begin{pmatrix} X_3 \cos(X_4) \\ X_3 \sin(X_4) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ X_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{tg} \varphi \\ a \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

on peut écrire :

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \sqrt{\dot{Y}_1^2 + \dot{Y}_2^2} \\ \text{arctg}(\dot{Y}_1 / \dot{Y}_2) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

et

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \text{tg}(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} ((\ddot{x} + \ddot{y})\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}) / (\dot{x} + \dot{y}) \\ (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) / (\dot{y}(\dot{x} + \dot{y})\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Aussi, ce système est pour les sorties plates x et y , d'après Lie-Bäcklund équivalent au système trivial :

$$\begin{cases} \ddot{x} = v_1 \\ \ddot{y} = v_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Remarquons que s'il n'existe pas de sorties plate de dimension 1 pour ce système qui admet deux entrées, il en existe une infinité d'ordre 3, donc non minimales.

Cas 3) Avec $\underline{Y} = (x \ y \ \theta)'$ pour $\underline{X}' = (x, y, u, \theta)$ et $\underline{U} = (a, \text{tg} \varphi)'$:

Les composantes de ce vecteur de sortie représentent des grandeurs physiques aisément mesurables. On a alors :

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \sqrt{\dot{Y}_1^2 + \dot{Y}_2^2} \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

et

$$\begin{cases} a = (\ddot{x} + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sin \theta \cdot \dot{\theta}) / \cos \theta \\ \operatorname{tg} \varphi = l \dot{\theta} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{cases} \quad (3.19)$$

ou

$$\begin{cases} a = (\ddot{y} - \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cos \theta \cdot \dot{\theta}) / \sin \theta \\ \operatorname{tg} \varphi = l \dot{\theta} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{cases} \quad (3.20)$$

soit encore :

$$\begin{cases} a = (\ddot{x} + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sin \theta \cdot \dot{\theta}) / \cos \theta \\ \operatorname{tg} \varphi = l \dot{\theta} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ (\ddot{y} - \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cos \theta \cdot \dot{\theta}) / \sin \theta - (\ddot{x} + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sin \theta \cdot \dot{\theta}) / \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Ici, $\underline{Y} = (x \ y \ \theta)'$ est une sortie plate strictement non minimale et son degré de redondance additionnelle vaut $r_a = 1$.

3.2 Engin à décollage vertical :

On considère la dynamique d'un engin rigide représenté sur la figure (3.2). Celui-ci est soumis à deux forces F_1 et F_2 , d'intensités variables mais de directions fixes dans le repère embarqué X - Z , créant aussi un moment de roulis.

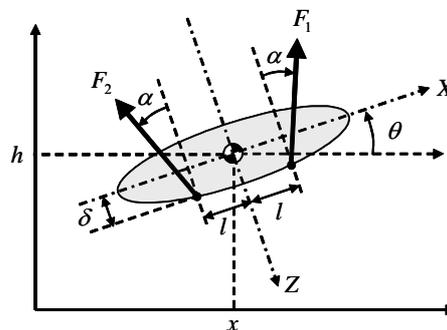


Figure 3.2 : Engin à décollage vertical

Si l'on utilise l'approche de Lagrange pour établir les équations de la dynamique de cet engin, les énergies cinétique T et potentielle V peuvent être exprimées en fonction des coordonnées généralisées x , h et θ par :

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{h}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \\ V = mgh \end{cases} \quad (3.22)$$

L'énergie totale L est alors donnée par :

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{h}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgh \quad (3.23)$$

Les dérivées partielles de l'énergie totale par rapport à ses coordonnées et à leurs dérivées s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} & \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial h} = -mg \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = m\dot{h} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta} \end{cases} \quad (3.24)$$

d'où les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} = -(F_1 + F_2)(\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial L}{\partial h} = m\ddot{h} = (F_1 + F_2)(\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) - mg \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = J\ddot{\theta} = (F_1 - F_2)(l \cos \alpha + \delta \sin \alpha) \end{cases} \quad (3.25)$$

Après simplification, ces relations s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{X} = -\sin(\theta)u_1 + \rho \cos(\theta)u_2 \\ \ddot{H} = \cos(\theta)u_1 + \rho \sin(\theta)u_2 - 1 \\ \ddot{\theta} = u_2 \end{cases} \quad (3.26)$$

où

$$\begin{cases} X = x/g \\ H = h/g \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 = (F_1 + F_2)\cos(\alpha)/(m g) \\ u_2 = (F_1 - F_2)\sin(\alpha)/(\rho m g) \end{cases} \quad (3.27)$$

avec

$$\rho = J \sin(\alpha)/(mg (l \cos(\alpha) + \delta \sin(\alpha))) \quad (3.28)$$

où m est la masse de l'engin, J est son moment d'inertie suivant l'axe de roulis, g est l'accélération de la pesanteur, α , δ et l sont des paramètres géométriques définis sur la figure (3.2).

Adoptant comme sorties X et H et comme vecteur d'état $(X, \dot{X}, H, \dot{H}, \theta, \dot{\theta})$, on obtient immédiatement une forme normale affine où θ est une variable interne.

On peut montrer que le vecteur $(a, b) = (X - \rho \sin(\theta), H + \rho \cos(\theta))$ est une sortie plate pour ce système, on a en effet les relations:

$$\begin{cases} X = a + \rho \sin(\theta) \\ H = b - \rho \cos(\theta) \\ \theta = -\arctg(\ddot{a}/(\ddot{b} + 1)) \end{cases} \quad (3.29)$$

et

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{\ddot{a}^2 + (\ddot{b} + 1)^2} + \rho \dot{\theta}^2 \\ u_2 = \ddot{\theta} \end{cases} \quad (3.30)$$

Ainsi, pour ces sorties plates, le système est Lie-Bäcklund équivalent au système trivial :

$$\begin{cases} \ddot{a} = v_1 \\ \ddot{b} = v_2 \end{cases} \quad (3.31)$$

Le point de coordonnées (a, b) , en position fixe par rapport à l'engin (voir figure 3.3) est appelé centre de poussée.

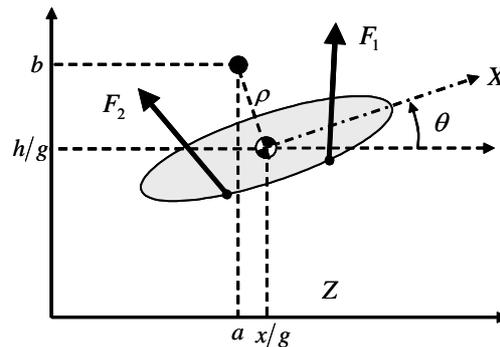
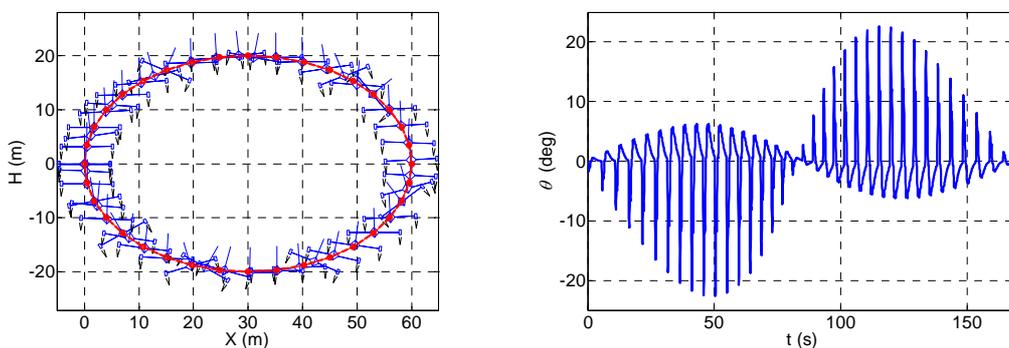


Figure 3.3 : Position du centre de poussée

Ainsi dans ce deuxième exemple, les sorties plates ont encore, bien que plus difficilement, une interprétation physique. D'ailleurs, l'application de la commande plate [Lu, 2005] au suivi de trajectoire, ici une ellipse, conduit à des résultats, voir figure (3.4), qui mettent en évidence la dynamique interne du système.



Figures 3.4 : Suivi de trajectoire elliptique par un engin à décollage vertical.

On constate, que l'évolution de l'attitude de l'engin est inacceptable, alors que la trajectoire suivie par les sorties plates est elle, satisfaisante.

Revenant sur la modélisation de la dynamique de ce système, distinguant les angles α_1 et α_2 , une situation de défaillance pouvant provenir de la non symétrie de l'ensemble propulsif, et donc les efforts F_1 et F_2 , les équations de la dynamique s'écrivent ici :

$$\begin{cases} \ddot{X} = -(F_1(\cos \alpha_1 \sin \theta + \sin \alpha_1 \cos \theta) + F_2(\cos \alpha_2 \sin \theta + \sin \alpha_2 \cos \theta)) / (mg) \\ \ddot{H} + 1 = (F_1(\cos \alpha_1 \cos \theta + \sin \alpha_1 \sin \theta) + F_2(\cos \alpha_2 \cos \theta + \sin \alpha_2 \sin \theta)) \\ J\ddot{\theta} = (F_1(l \cos \alpha_1 + \delta \sin \alpha_1) - F_2(l \cos \alpha_2 + \delta \sin \alpha_2)) \end{cases} \quad (3.32)$$

Une sortie plate strictement non minimale sera par exemple $\underline{Y}' = (X, H, \theta)'$.

4. REDONDANCES ET SYSTEMES DIFFERENTIELLEMENT PLATS

Nous considérons ici deux niveaux d'analyse pour un système complexe différentiellement plat:

- Un niveau global où sont concernées les entrées indépendantes du système, contrôlées ou non, et ses sorties définitives.
- Un niveau intermédiaire où sont considérés les sous systèmes différentiellement plats constituant le système global.

4.1 Redondance analytique globale

Dans ce cas, comme vu au paragraphe 2 le système dynamique différentiellement plat décrit par la représentation d'état:

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad \underline{x} \in R^n, \quad \underline{u} \in R^m \quad (3.33)$$

présente des sorties plates globales non nécessairement minimales \underline{y} , $\underline{y} \in R^p$, $p \geq m$, telles que :

$$y_i = h_i(\underline{x}, u_1, \dots, u_m^{(\delta_1)}, u_2, \dots, u_2^{(\delta_2)}, u_m, \dots, u_m^{(\delta_m)}) \quad i = 1 \text{ à } p, \delta_i \in \mathbb{N} \quad (3.34)$$

qui satisfont théoriquement aux relations inverses :

$$x_i = \Phi_i(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\mu_{i,1})}, y_2, \dots, y_2^{(\mu_{i,2})}, \dots, y_p, y_p^{(1)}, \dots, y_p^{(\mu_p)}) \quad i = 1 \text{ à } n \quad (3.35)$$

$$u_j = \Psi_j(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\nu_{j,1})}, y_2, \dots, y_2^{(\nu_{j,2})}, \dots, y_p, y_p^{(1)}, \dots, y_p^{(\nu_{j,p})}) \quad j = 1 \text{ à } m \quad (3.36)$$

et aux relations additionnelles :

$$\Omega_i(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\lambda_{i,1})}, y_2, \dots, y_2^{(\lambda_{i,2})}, \dots, y_p^{(1)}, \dots, y_p^{(\lambda_{i,m})}) = 0 \quad i = 1 \text{ à } r_a \quad (3.37)$$

où les $\mu_{i,j}$, $\lambda_{i,j}$ et les $\nu_{i,j}$ sont des entiers naturels.

Dans le cas où les composantes du vecteur d'état sont mesurables, ses entrées sont connues et ses sorties et leurs dérivées jusqu'à l'ordre ρ_j , $j = 1$ à p , sont mesurables ou calculables, avec :

$$\rho_j = \max \left\{ \max_{i=1 \text{ à } n} \mu_{ij}, \max_{k=1 \text{ à } m} \nu_{kj} \right\} \quad j = 1 \text{ à } p \quad (3.38)$$

on obtient $m+n$ relations indépendantes (3.35) et (3.36) qui relient les grandeurs d'entrée et de sortie du système.

On peut ici faire quelques remarques :

- **Remarque 1** : Si la relation (3.34) qui est une relation de définition théorique des sorties plates peut faire intervenir les dérivées des entrées, les relations (3.35) et (3.36) ne le font pas. Ainsi, si ses sorties sont directement mesurables, car ayant un sens physique, la mise en œuvre de ces redondances analytiques ne nécessitera pas la manipulation des dérivées des entrées.

-**Remarque 2** : Souvent le système considéré admet une représentation affine par rapport aux entrées telle que :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})\underline{u} \quad (3.39)$$

avec des sorties plates telles que :

$$\underline{y} = h(\underline{x}) \quad (3.40)$$

avec des degrés relatifs d_j tels que :

$$d_j \geq \rho_j \quad j=1 \text{ à } p \quad (3.41)$$

alors la mesure des composantes du vecteur d'état sera suffisante pour estimer les valeurs des sorties et de leurs dérivées à chaque instant.

- **Remarque 3** : Il pourra être nécessaire de mettre en œuvre un estimateur d'état (Estimateur de Luenberger étendu dans le cas où les mesures sont considérées parfaites, de Kalman étendu dans le cas où on considère ces mesures corrompues par des bruits de statistiques connues) lorsque toutes les composantes du vecteur d'état ne sont pas mesurées mais que le système est localement observable en tout point de fonctionnement nominal.

4.2 Détection de pannes basée sur la platitude

Compte tenu de la dynamique du système étudié et des diverses échelles de temps mises en œuvre par celle-ci, on peut définir une période d'échantillonnage pour la détection des pannes.

Cette période d'échantillonnage ne pourra être inférieure aux périodes d'échantillonnage utilisées par les diverses chaînes de mesure mais elle devra être suffisamment petite pour permettre la détection de pannes avec un délai de détection réduit.

Ainsi, à l'instant d'échantillonnage t_k , on vérifiera si :

$$\left| \hat{x}_i - \Phi_i(\hat{y}_1, \hat{y}_1^{(1)}, \dots, \hat{y}_1^{(\mu_{i,1})}, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_2^{(\mu_{i,2})}, \dots, \hat{y}_p, \hat{y}_p^{(1)}, \dots, \hat{y}_p^{(\mu_{i,p})}) \right| \leq \varepsilon_{x_i} \quad i = 1 \text{ à } n \quad (3.42)$$

$$\left| u_j - \Psi_j(\hat{y}_1, \hat{y}_1^{(1)}, \dots, \hat{y}_1^{(\nu_{j,1})}, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_2^{(\nu_{j,2})}, \dots, \hat{y}_p, \hat{y}_p^{(1)}, \dots, \hat{y}_p^{(\nu_{j,p})}) \right| \leq \varepsilon_{u_j} \quad j = 1 \text{ à } m \quad (3.43)$$

$$\left| \Omega_k(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\lambda_{k,1})}, y_2, \dots, y_2^{(\lambda_{k,2})}, \dots, y_p^{(1)}, \dots, y_p^{(\lambda_{k,m})}) \right| \leq \varepsilon_{y_k} \quad k = 1 \text{ à } r_a \quad (3.44)$$

où les $\varepsilon_{x_i}, i = 1 \text{ à } n$, $\varepsilon_{y_k}, k = 1 \text{ à } r_a$ et $\varepsilon_{u_j}, j = 1 \text{ à } p$, sont des constantes réelles positives suffisamment petites pour détecter les différences entre les deux membres des relations de redondance mais suffisamment grandes pour intégrer les erreurs de mesure ou d'estimation des variables mises en jeu par ces relations.

Ainsi, si l'on dispose de bornes sur les erreurs de mesure ou d'estimation pour chacune des variables mises en jeu par ces relations, il sera possible de fixer les valeurs de ces constantes. On pourrait prendre par exemple pour ε_{x_i} la valeur suivante :

$$\varepsilon_{x_i} = \max_{\hat{x}_i, \hat{y}_1, \dots, \delta \hat{x}_i, \delta \hat{y}_1, \dots} \left\{ \hat{x}_i + \delta \hat{x}_i - \Phi_i(\hat{y}_1 + \delta \hat{y}_1, \hat{y}_1^{(1)} + \delta \hat{y}_1^{(1)}, \dots, \hat{y}_1^{(\mu_{i,1})} + \delta \hat{y}_1^{(\mu_{i,1})}, \hat{y}_2 + \delta \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_m^{(\mu_{i,m})} + \delta \hat{y}_m^{(\mu_{i,m})}) \right\} \quad (3.45)$$

sous les contraintes :

$$-\delta \hat{x}_{i \max} \leq \delta \hat{x}_i \leq \delta \hat{x}_{i \max}, \quad -\delta \hat{y}_{1 \max} \leq \delta \hat{y}_1 \leq \delta \hat{y}_{1 \max}, \dots, \quad -\delta \hat{y}_m^{(\mu_{i,m}) \max} \leq \delta \hat{y}_m^{(\mu_{i,m})} \leq \delta \hat{y}_m^{(\mu_{i,m}) \max} \quad (3.46)$$

$$\text{et} \quad \hat{x}_i \in X_i, \quad \hat{y}_1 \in Y_1, \quad \dots \quad \hat{y}_m^{(\mu_{i,m})} \in Y_m^{(\mu_{i,m})} \quad (3.47)$$

où les $X_i, Y_1, \dots, Y_m^{(\mu_{i,m})}$ sont des domaines de variations de chacune des variables et de leurs dérivées.

Dans le cas où le système est amené à opérer le long de trajectoires de référence telles que :

$$\Theta_k(\underline{x}, \underline{y}, \dots, y_m^{(\mu_{i,m})}, t) \quad t \in [0, t_{fk}] \quad k = 1 \text{ à } K_t \quad (3.48)$$

où K_t est le nombre total de trajectoires considérées, on peut reformuler le problème d'optimisation sous la forme :

$$\varepsilon_{x_i} = \max_{k \in \{1, \dots, K_t\}} \left\{ \max_{\hat{x}_i, \hat{y}_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \hat{\delta}_1, \dots} \left\{ \left| \hat{x}_i + \hat{\alpha}_i - \Phi_i(\hat{y}_1 + \hat{\delta}_1, \hat{y}_1^{(1)} + \hat{\delta}_1^{(1)}, \dots, \hat{y}_1^{(\mu_{i,1})} + \hat{\delta}_1^{(\mu_{i,1})}, \hat{y}_2 + \hat{\delta}_2, \dots, \hat{y}_m^{(\mu_{i,m})} + \hat{\delta}_m^{(\mu_{i,m})}) \right| \right\} \right\} \quad (3.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sous les contraintes} \\ (3.46) \text{ et } \{ x_i, y_1, \dots, y_m^{(\mu_{i,m})} \} \in \Theta_k \end{array} \right. \quad (3.50)$$

5. EXEMPLE D'APPLICATION

L'exemple retenu ici, celui d'un véhicule roulant sur un plan horizontal, a été choisi par sa simplicité de façon à pouvoir exposer clairement le rôle dévolu aux sorties plates et aux relations associées dans le cadre de la détection et du diagnostic de pannes.

Lorsque les roues avant dérapent, la vitesse du point M n'est pas parallèle au plan de roulement des roues avant et on n'a plus la relation :

$$l \dot{\theta} \cos \varphi = u \sin \varphi \quad (3.51)$$

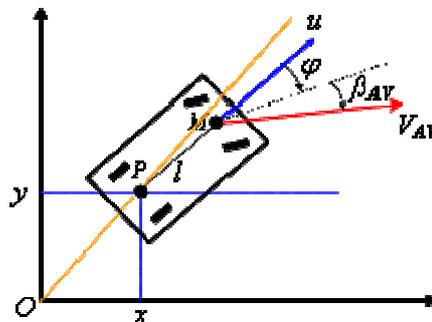


Figure 3.5 : Véhicule roulant avec roues avant dérapant

ce qui se traduit au niveau des relations entrée/sorties plates par :

$$\operatorname{tg} \varphi \neq (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y) / (\dot{y}(\dot{x} + \dot{y})\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}) \quad (3.52)$$

mais aussi par :

$$a \neq (\ddot{x} + \ddot{y})\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} / (\dot{x} + \dot{y}) \quad (3.53)$$

Lorsque les roues arrière dérapent, la vitesse du point P n'est pas parallèle à l'axe longitudinal du véhicule et on a les relations :

$$\begin{cases} \dot{x} = (u + v \cos \beta) \cos \theta \\ \dot{y} = (u + v \sin \beta) \sin \theta \end{cases} \quad (3.54)$$

ce qui se traduit au niveau des sorties plates par (3.53) mais aussi par (3.52).

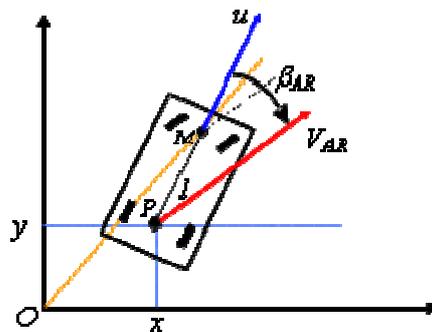


Figure 3.6 : Véhicule roulant avec roues arrière dérapant

Evidemment, lorsque les roues avant et arrière dérapent simultanément, on aura à la fois les relations (3.52) et (3.53).

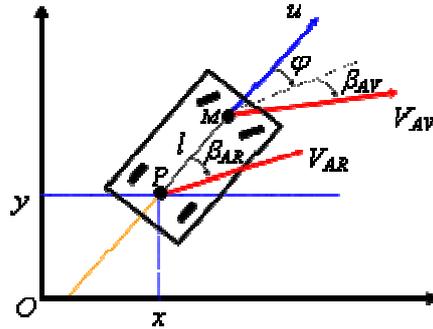


Figure 3.7 : Véhicule dérapant des quatre roues

Ainsi la sortie plate minimale $(x, y)'$ permet de détecter le dérapage mais ne permet pas de déterminer quel attelage est en train de déraper.

Considérons maintenant la sortie plate non minimale $(x, y, \theta)'$, on a dans le premier cas (dérapage des roues avant) :

$$\operatorname{tg} \varphi \neq (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y) / (\dot{y}(\dot{x} + \dot{y})\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}) \quad (3.55)$$

et

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cos \theta \\ \dot{y} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sin \theta \end{cases} \quad (3.56)$$

Dans le cas où les roues arrière dérapent et pas les roues avant, on a :

$$l \dot{\theta} \cos \varphi = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sin \varphi \quad (3.57)$$

avec les relations (3.52) et (3.53).

Finalement dans le cas où toutes les roues dérapent on a :

$$l \dot{\theta} \cos \varphi \neq \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sin \varphi \quad (3.58)$$

avec les relations (3.52) et (3.53).

6. CONCLUSION

Ce chapitre montre que les propriétés de platitude différentielle d'un système, qui sont des propriétés structurelles, peuvent être mises à profit pour développer des systèmes spécifiques de diagnostic de pannes. Dans ce chapitre, ceci a été illustré dans le cadre d'une application extrêmement simple, le chariot roulant/dérapant sur un plan horizontal. Reste à démontrer que cette démarche peut être mise à profit dans le cas de systèmes beaucoup plus complexes. Ceci est justement l'objet du chapitre suivant avec notamment l'étude du cas de la dynamique de guidage d'un aéronef.

CHAPITRE 4

DETECTION ET IDENTIFICATION DES PANNES DE STRUCTURES DIFFERENTIELLEMENT PLATES

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre on étudie tout d'abord diverses structures plates de complexité croissante. Ceci permet de déceler dans un système complexe plat les éléments structuraux qui contribuent à sa platitude globale et à en identifier les relations de redondances associées aux sous systèmes plats et à leurs interactions. Ainsi est ouverte une voie vers la conception de systèmes de diagnostic pour les systèmes non linéaires complexes. On s'intéresse alors à la platitude différentielle de la dynamique de guidage d'un aéronef. Ceci conduit à proposer plusieurs schémas de détection et identification de pannes. Comme dans beaucoup d'applications la propriété de platitude différentielle n'est qu'implicite, on montre comment l'absence de modèle analytique peut être surmontée dans la mise en œuvre du diagnostic par l'introduction de réseaux de neurones.

2. PLATITUDE INDUITE PAR DES STRUCTURES PARTICULIERES

2.1 Platitude implicite des systèmes paramétrés

Etant donné un système non linéaire paramétré, où \underline{p} est le vecteur de paramètres, tel que:

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}, \underline{p}), \quad \underline{x} \in R^n, \quad \underline{u} \in R^m, \quad \text{et } \underline{p} \in R^v \quad (4.1)$$

Définition : \underline{z} sera dite sortie plate de ce système sur $D_p \subseteq R^{n+m}$ si ce vecteur est de dimension m , s'écrit sous la forme :

$$\underline{z} = Z(\underline{x}, \underline{u}, \dots, \underline{u}^{(s)}, \underline{p}), \quad \underline{z} \in R^m \quad (4.2)$$

et est tel qu'il existe une relation avec \underline{x} et \underline{u} telle que :

$$\Gamma(\underline{x}, \underline{u}, \underline{z}, \dots, \underline{z}^{(k)}, \underline{p}) = 0 \quad (4.3)$$

où Γ est localement inversible sur D_p par rapport à \underline{x} et \underline{u} .

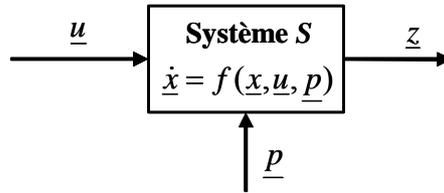


Figure 4.1 : Système plat paramétrique

2.2 Platitude des systèmes en série :

Etant donnée un système S composé de deux sous-systèmes montés en série S_1 et S_2 qui présentent de façon implicite les sorties plates \underline{z}_1 et \underline{z}_2 telles que:

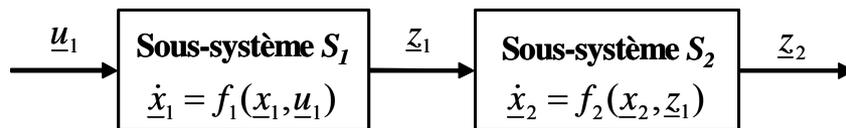


Figure 4.2 : Sorties plates en série

Les sorties plates des sous-systèmes s'écrivent :

$$S_2 : \underline{z}_2 = Z_{21}(\underline{x}_2, \underline{z}_1, \dot{\underline{z}}_1, \dots, \underline{z}_1^{(p_2)}) \tag{4.4}$$

$$S_1 : \underline{z}_1 = Z_{11}(\underline{x}_1, \underline{u}_1, \dot{\underline{u}}_1, \dots, \underline{u}_1^{(p_1)}) \tag{4.5}$$

La sortie plate du système S_2 peut se réécrire:

$$\underline{z}_2 = Z(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{u}_1, \dot{\underline{u}}_1, \dots, \underline{u}_1^{(p_2)}) \quad (4.6)$$

On a par ailleurs :

$$\Gamma_1(\underline{x}_1, \underline{u}_1, \underline{z}_1, \dot{\underline{z}}_1, \dots, \underline{z}_1^{(\gamma_1)}) = 0 \quad (4.7)$$

$$\Gamma_2(\underline{x}_2, \underline{z}_1, \underline{z}_2, \dot{\underline{z}}_2, \dots, \underline{z}_2^{(\gamma_2)}) = 0 \quad (4.8)$$

où Γ_1 est localement inversible par rapport à \underline{x}_1 et \underline{z}_1 et Γ_2 est localement inversible par rapport à \underline{x}_2 et \underline{z}_2 . On peut donc écrire :

$$\underline{z}_1 = \Gamma_{2z_1}^{-1}(\underline{z}_2, \dot{\underline{z}}_2, \dots, \underline{z}_2^{(\gamma_2)}) \quad (4.9)$$

$$\Gamma_{2x_2}(\underline{x}_2, \Gamma_{2z_1}^{-1}(\underline{z}_2, \dot{\underline{z}}_2, \dots, \underline{z}_2^{(\gamma_2)}), \underline{z}_2, \dot{\underline{z}}_2, \dots, \underline{z}_2^{(\gamma_2)}) = 0 \quad (4.10)$$

où Γ_{2x_2} est inversible par rapport à \underline{x}_2 . Finalement, il existe une fonction Γ de la forme :

$$\Gamma(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{u}_1, \underline{z}_2, \dot{\underline{z}}_2^{(1)}, \dots, \underline{z}_2^{(\gamma_1+\gamma_2)}) = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{1x_1}(\underline{x}_1, \underline{u}_1, \Gamma_{2z_1}^{-1}(\underline{z}_2, \dot{\underline{z}}_2^{(1)}, \dots, \underline{z}_2^{(\gamma_2)}), \dots) \\ \Gamma_{1u_1}(\underline{x}_1, \underline{u}_1, \Gamma_{2z_1}^{-1}(\underline{z}_2, \dot{\underline{z}}_2^{(1)}, \dots, \underline{z}_2^{(\gamma_2)}), \dots) \\ \Gamma_{2x_2}(\underline{x}_2, \Gamma_{2z_1}^{-1}(\underline{z}_2, \dot{\underline{z}}_2^{(1)}, \dots, \underline{z}_2^{(\gamma_2)}), \underline{z}_2, \dot{\underline{z}}_2^{(1)}, \dots, \underline{z}_2^{(\gamma_2)}) \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

qui est localement inversible par rapport à \underline{x}_1 , \underline{x}_2 et \underline{u}_1 .

On en déduit que : Si S_1 admet implicitement la sortie plate \underline{z}_1 et si S_2 admet implicitement la sortie plate \underline{z}_2 , alors le système S formé par S_1 et S_2 montés en série admet implicitement la sortie plate \underline{z}_2 .

Cette propriété pourra être notamment mise à profit lorsqu'on considère la platitude des sorties d'un système composé d'un processus dynamique précédé de ses actionneurs ou suivi de ses capteurs.

2.3 Platitude des systèmes avec rebouclage d'état

Si l'on considère le système S représenté sur la figure (4.3) où \underline{z}_1 est une sortie plate de S_1 , \underline{z}_2 est une sortie plate de S_2 , la dynamique du sous-système S_2 étant lente par rapport à celle du sous-système S_1 , le sous système S_1 peut être vu comme paramétré par l'état \underline{x}_2 du sous système S_2 .

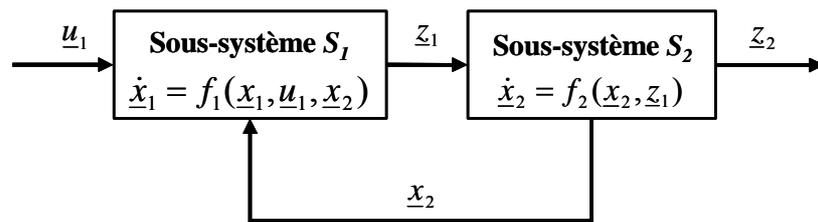


Figure 4.3 : Systèmes plats en série avec rebouclage d'état

On obtient ici le résultat : Si le sous-système S_1 paramétré par \underline{x}_2 admet implicitement la sortie plate \underline{z}_1 et si S_2 admet implicitement la sortie plate \underline{z}_2 , alors l'ensemble du système S admet implicitement la sortie plate \underline{z}_2 .

2.4 Platitude des systèmes en double tandem :

Considérons la structure représentée sur la figure 4.4 ci-dessous:

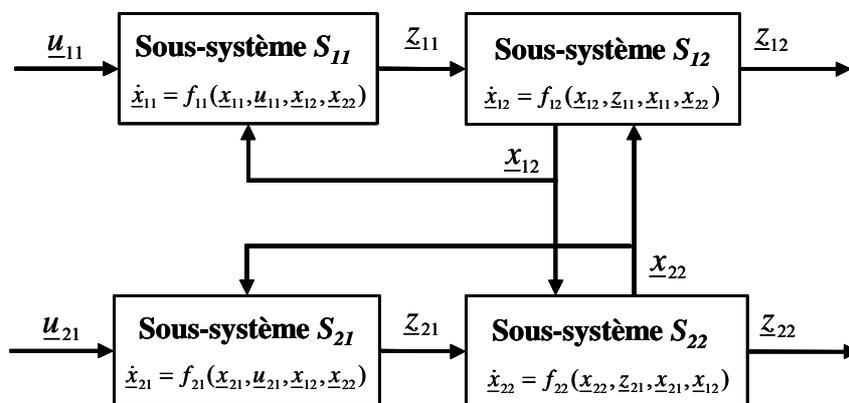


Figure 4.4 : Structure en double tandem

Les résultats antérieurs permettent de conclure que : Si le sous système $S_{11}(S_{21})$ est un système paramétrique de paramètres $\underline{x}_{12}(\underline{x}_{22})$ et admettant implicitement la sortie plate $\underline{z}_{11}(\underline{z}_{21})$, et que le sous système $S_{12}(S_{22})$ est un système admettant implicitement la sortie plate $\underline{z}_{12}(\underline{z}_{22})$, alors l'ensemble du système admet implicitement les sorties plates \underline{z}_{12} et \underline{z}_{22} .

Cette structure double tandem pourra être rencontrée par exemple lorsque l'on étudie simultanément les dynamiques longitudinale et latérale d'un avion.

3. PLATITUDE DE LA DYNAMIQUE DE GUIDAGE DES AVIONS

Dans ce paragraphe, on s'intéresse uniquement à la dynamique de guidage d'un avion de transport. Les figures 4.5 et 4.6 permettent de repérer l'attitude de l'avion par rapport à la Terre et par rapport à l'air.

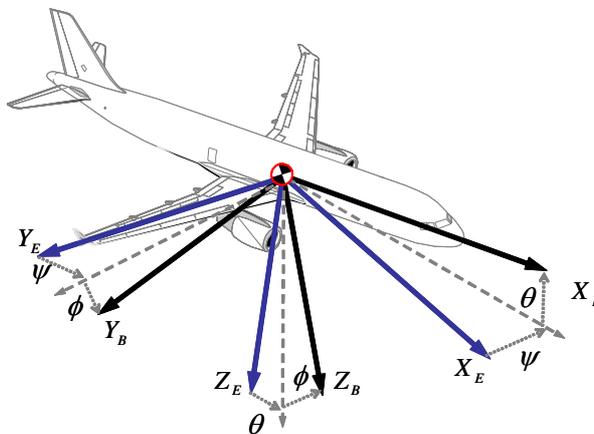


Figure 4.5 : Le trièdre terrestre local (E) et le trièdre avion (B)

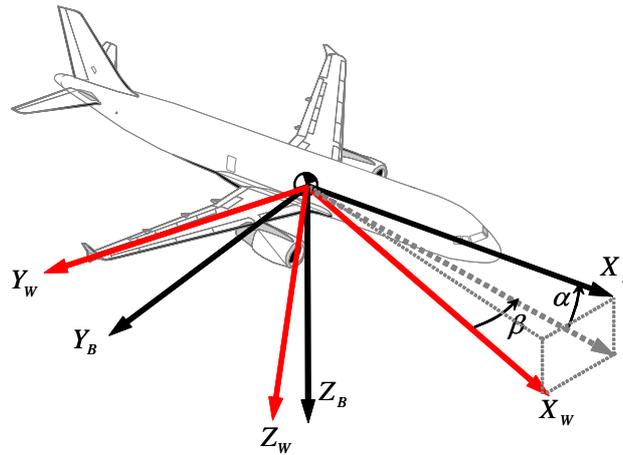


Figure 4.6 : Le trièdre aérodynamique (W) et le trièdre avion (B)

On considère que l'avion est muni d'un système de pilotage qui contrôle de façon efficace l'attitude de l'avion (représentée par son assiette longitudinale θ , son assiette latérale ϕ et l'angle de dérapage aérodynamique β) et la poussée des moteurs représentée soit par N_1 qui est la vitesse de rotation des soufflantes des turboréacteurs, soit par Ω , qui est la vitesse de rotation des hélices d'un turbopropulseur. On suppose aussi que la commande de lacet de l'avion permet de réaliser des virages parfaitement stabilisés, ainsi l'angle de dérapage β reste très petit. Ici les variables de vol θ , ϕ et N_1 sont adoptées à la fois comme sorties de la dynamique rapide de l'avion autour de ses axes, et comme entrées de la dynamique de guidage . La Figure 4.9 présente la structure globale qui en découle pour l'avion associé à son système de pilotage. Ainsi dans des conditions de vent uniforme, la dynamique de guidage du vol peut être exprimée dans le repère aérodynamique par :

$$\begin{cases} \dot{x} = V_a \cos \psi \cos \gamma + w_x \\ \dot{y} = V_a \sin \psi \cos \gamma + w_y \\ \dot{z} = -V_a \sin \gamma + w_z \end{cases} \quad (4.12a)$$

avec
$$V_a = \sqrt{(\dot{x} - w_x)^2 + (\dot{y} - w_y)^2 + (\dot{z} - w_z)^2} \quad (4.12b)$$

et
$$\dot{V}_a = \frac{-D + T \cos \alpha - mg(-\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \phi \cos \theta)}{m} \quad (4.13a)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{L \cos \phi + T \sin \alpha - mg(\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \phi \cos \theta)}{mV_a} \quad (4.13b)$$

Ici, x , y et z sont les coordonnées du centre de gravité de l'avion, w_x , w_y et w_z sont les composantes du vecteur vitesse du vent, V_a est la vitesse air, γ est la pente, ψ est le cap, m est la masse de l'avion, T est sa poussée, L est la portance aérodynamique et D est la traînée aérodynamique.

Dans le cas d'un virage stabilisé, le taux de virage ($\dot{\psi}$) est relié à l'inclinaison latérale ϕ par la relation:

$$\dot{\psi} = \left(\frac{g}{V} \right) \tan \phi \quad (4.13c)$$

L'avion est soumis aux forces et moments associés à l'aérodynamique, la propulsion et au poids.

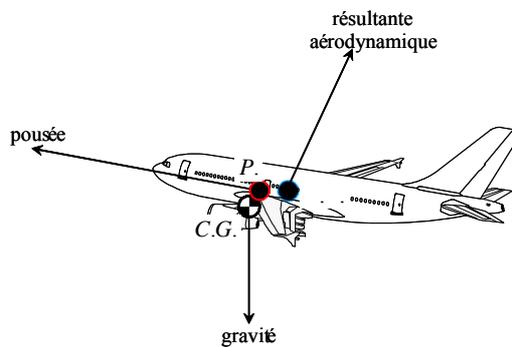


Figure 4.7 : Les forces appliquées à l'avion

On considère ici que les forces de traînée D et de portance L sont des fonctions uniquement de l'altitude z assimilée à un niveau de vol, de la vitesse air V_a et de l'angle d'incidence α . La poussée T est supposée dépendre de l'altitude z , de la vitesse air V_a et du régime moteur pour les avions (N_1 pour un jet et Ω pour un avion à hélice). On a donc :

$$D = D(z, V_a, \alpha), \quad L = L(z, V_a, \alpha), \quad T = T(z, V_a, N_1) \quad (4.14)$$

Lorsque l'on considère le guidage à court terme de l'avion, l'angle de pente γ est généralement adopté comme paramètre d'entrée. Puisque l'angle d'incidence α peut s'exprimer théoriquement en fonction de θ , ϕ , et γ , celui-ci peut être éliminé des équations de guidage. On peut par exemple adopter, lorsque l'angle ϕ est faible, la relation suivante:

$$\alpha = \theta - \gamma \tag{4.15}$$

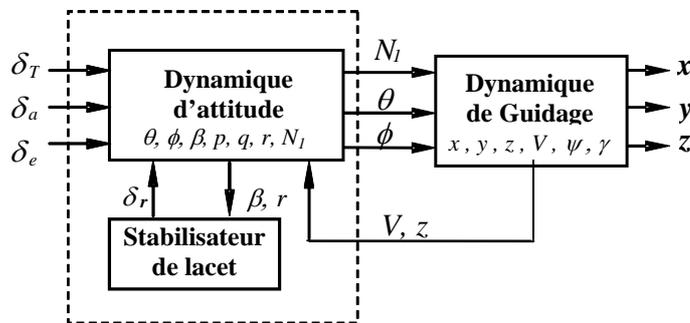


Figure 4.9 : Structure dynamique du vol d'un avion

4. PROPRIETES DE PLATITUDE DE LA DYNAMIQUE DE GUIDAGE DU VOL

A partir de la connaissance de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, il est possible d'exprimer successivement toutes les variables de guidage comme fonctions de celles-ci et de leurs dérivées respectives.

Après transformation, les équations cinématiques (12.a) permettent d'exprimer γ et ψ en fonction des dérivées des coordonnées du centre de gravité de l'avion :

$$\gamma = -\sin^{-1}(\dot{z}/V), \quad \psi = \tan^{-1}(\dot{y}/\dot{x}) \tag{4.16}$$

Compte tenu des relations précédentes, on peut alors tracer le schéma causal de la figure (4.10) :

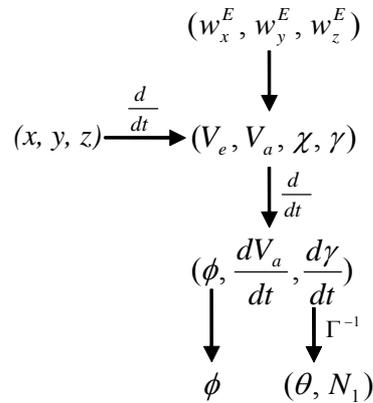


Figure 4.10: Diagramme d'effets pour la dynamique de guidage

Adoptant les notations :

$$\underline{Z} = (x, y, z)^T \text{ et } \underline{U} = (\theta, \phi, N_1) \tag{4.17}$$

les équations (13.a), (13.b) et (13.c) se réécrivent sous la forme globale symbolique (car implicite) suivante :

$$G_{N_1}(\underline{Z}, \dot{\underline{Z}}, \ddot{\underline{Z}}, \underline{U}) = 0, \quad G_{\theta}(\underline{Z}, \dot{\underline{Z}}, \ddot{\underline{Z}}, \underline{U}) = 0, \quad G_{\phi}(\underline{Z}, \dot{\underline{Z}}, \ddot{\underline{Z}}, \underline{U}) = 0 \tag{4.18}$$

Ces fonctions implicites sont localement inversibles par rapport au vecteur d'entrée, puisque, pour dans conditions normales de vol [Lu, 2005], le déterminant du Jacobien associé est différent de zéro. On en conclut que le vecteur $\underline{Z} = (x, y, z)^T$ correspondant aux coordonnées du centre de gravité de l'avion, est un vecteur de sortie plates pour la dynamique de guidage de l'avion.

L'évolution temporelle de ces sorties plates représente la trajectoire suivie par le centre de gravité de l'avion. Selon la théorie développée précédemment, il en découle qu'à partir de la connaissance des trajectoires suivies par le centre de gravité, il sera possible de retrouver les entrées nécessaires correspondantes.

Comme conséquence de cette propriété de platitude, et étant donné que la trajectoire courante des sorties plates est:

$$\underline{Z}_c(\tau) = (x_c(\tau), y_c(\tau), z_c(\tau))^T, \tau \in [t_0, t] \quad (4.19)$$

les valeurs nominales des entrées correspondantes à l'instant t , $U_c(t) = (\phi_c(t), \theta_c(t), N_{1c}(t))^T$, sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} G_{N_1}(\underline{Z}_c(t), \dot{\underline{Z}}_c(t), \ddot{\underline{Z}}_c(t), \underline{U}_c(t)) = 0 \\ G_{\theta}(\underline{Z}_c(t), \dot{\underline{Z}}_c(t), \ddot{\underline{Z}}_c(t), \underline{U}_c(t)) = 0 \\ G_{\phi}(\underline{Z}_c(t), \dot{\underline{Z}}_c(t), \ddot{\underline{Z}}_c(t), \underline{U}_c(t)) = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Compte tenu de la complexité des effets aérodynamiques et propulsifs mis en jeu par le vol atmosphérique, la platitude considérée est de nature implicite. Sa mise en œuvre dans le cadre de la commande plate ou de la détection et de l'identification de pannes passe par la construction d'un outil destiné à réaliser numériquement cette inversion.

Les réseaux de neurones artificiels [Haykin, 1998] sont utilisés pour résoudre de nombreux types de problèmes pour lesquels on dispose de données expérimentales. Ce sont par exemple des problèmes de reconnaissance de tendances, de classification, d'approximation de fonctions, de prédiction, d'optimisation et de commande adaptative. L'une de leur caractéristique essentielle est leur capacité, similaire à celle des systèmes biologiques, d'apprendre par accumulation d'exemples à résoudre un problème. Les réseaux de neurones peuvent être appréhendés ici comme des opérateurs non linéaires entrées-sorties capables de reproduire, après apprentissage, la relation de dépendance pouvant exister entre les données d'entrée et les données de sortie. Dans le cas qui nous intéresse ici, cette dépendance existe, c'est la relation causale existant entre les entrées de pilotage et les sorties plates de cette dynamique, les coordonnées de la trajectoire de l'avion. Il semble donc naturel d'envisager l'utilisation de réseaux de neurones pour essayer de reproduire celle-ci comme représenté sur la figure (4.11).



Figure 4.11 : Générateur d’entrée de référence neuronale du pilote automatique

En annexe A, l’apprentissage par réseaux de neurones de la dynamique (inverse) de guidage d’un avion léger est présentée. Les résultats obtenus montrent que cette démarche semble viable sur le plan numérique.

5. RELATIONS DE REDONDANCE ASSOCIEES A LA DYNAMIQUE DE GUIDAGE

5.1 Relations de redondances associées aux composantes du vecteur d’état

Les relations des états plats d’intérêt sont données par les équations (4.12.a) qui représentent les composantes d’accélération, la vitesse de l’air, les angles α, θ, ϕ et ψ qui peuvent être mesurées.

Les équations précédentes peuvent être résolues par rapport à w_x, w_y et w_z , mais dans ce cas les erreurs de mesure ne sont pas pris en compte. En utilisant des montages redondants au niveau des chaînes de mesure, on peut les réduire fortement. Dans ce cas on obtient une estimation telle que:

$$\tilde{w}_x = \dot{x}_m - V_{am} \cos\psi_m \cos\gamma_m \tag{4.21}$$

- Un simple filtre de Kalman peut être introduit quand les équations (4.12.a) sont considérées comme des équations d’observation où les erreurs sont assimilées à des bruits blancs Gaussiens. Dans ce cas, l’estimée des composantes de la vitesse du vent $i, i \in \{x, y, z\}$ est donnée par :

$$\dot{\hat{w}}_i = K_i (\tilde{w}_i - \hat{w}_i) \quad i \in \{x, y, z\} \quad (4.22)$$

où K_i est un gain approprié pour le filtre de Kalman simplifié.

- Le filtre de Kalman peut être plus élaboré quand un modèle linéaire d'un processus générateur aléatoire de vent (tel que le modèle de Dryden) et les erreurs des mesures sont disponibles.
- Une approche adaptative peut être adoptée quand certains paramètres du modèle du processus du vent et les erreurs de mesures doivent être estimés en ligne.

5.2. Cas2 : Relation des entrées plates de guidage

Dans ce cas, l'inversion neuronale des relations (4.13-a), (4.13-b), (4.13-c) fournit des valeurs nominales de θ , ϕ et N_1 : $\tilde{\theta}$, $\tilde{\phi}$ et \tilde{N}_1 .

Considérant que la mise en œuvre du pilote automatique dans des conditions nominales de fonctionnement conduit pour les paramètres de pilotage à des dynamiques du premier ordre telles que :

$$\begin{cases} \tau_\theta \dot{\theta} + \theta = \theta_c \\ \tau_\phi \dot{\phi} + \phi = \phi_c \\ \tau_{N_1} \dot{N}_1 + N_1 = N_{1c} \end{cases} \quad (4.23)$$

il est alors possible de proposer un ensemble de huit tests pour détecter toute anomalie par rapport aux dynamiques nominales de guidage au cours du vol:

$$\ll \text{ si } \left| \theta_c - \tilde{\theta} - \tau_\theta \dot{\tilde{\theta}} \right| \leq \sigma_\theta \text{ et } \left| \phi_c - \tilde{\phi} - \tau_\phi \dot{\tilde{\phi}} \right| \leq \sigma_\phi \text{ et } \left| N_{1c} - \tilde{N}_1 - \tau_{N_1} \dot{\tilde{N}}_1 \right| \leq \sigma_{N_1}$$

alors la dynamique du vol est déclarée nominale »,

$$\ll \text{ si } \left| \theta_c - \tilde{\theta} - \tau_\theta \dot{\tilde{\theta}} \right| \geq \sigma_\theta \text{ et } \left| \phi_c - \tilde{\phi} - \tau_\phi \dot{\tilde{\phi}} \right| \leq \sigma_\phi \text{ et } \left| N_{1c} - \tilde{N}_1 - \tau_{N_1} \dot{\tilde{N}}_1 \right| \leq \sigma_{N_1}$$

alors la dynamique de l'assiette longitudinale est déclarée endommagée »,

$$\ll \text{ si } \left| \theta_c - \tilde{\theta} - \tau_\theta \dot{\tilde{\theta}} \right| \leq \sigma_\theta \text{ et } \left| \phi_c - \tilde{\phi} - \tau_\phi \dot{\tilde{\phi}} \right| \geq \sigma_\phi \text{ et } \left| N_{1c} - \tilde{N}_1 - \tau_{N_1} \dot{\tilde{N}}_1 \right| \leq \sigma_{N_1}$$

alors la dynamique de l'assiette latérale est déclarée endommagée »,

$$\ll \text{ si } \left| \theta_c - \tilde{\theta} - \tau_\theta \dot{\tilde{\theta}} \right| \leq \sigma_\theta \text{ et } \left| \phi_c - \tilde{\phi} - \tau_\phi \dot{\tilde{\phi}} \right| \leq \sigma_\phi \text{ et } \left| N_{1c} - \tilde{N}_1 - \tau_{N_1} \dot{\tilde{N}}_1 \right| \geq \sigma_{N_1}$$

alors la poussée est déclarée endommagée »,

(4.24)

$$\ll \text{ si } \left| \theta_c - \tilde{\theta} - \tau_\theta \dot{\tilde{\theta}} \right| \geq \sigma_\theta \text{ et } \left| \phi_c - \tilde{\phi} - \tau_\phi \dot{\tilde{\phi}} \right| \geq \sigma_\phi \text{ et } \left| N_{1c} - \tilde{N}_1 - \tau_{N_1} \dot{\tilde{N}}_1 \right| \leq \sigma_{N_1}$$

alors les dynamiques des assiettes longitudinale et latérale sont endommagées »,

$$\ll \text{ si } \left| \theta_c - \tilde{\theta} - \tau_\theta \dot{\tilde{\theta}} \right| \geq \sigma_\theta \text{ et } \left| \phi_c - \tilde{\phi} - \tau_\phi \dot{\tilde{\phi}} \right| \leq \sigma_\phi \text{ et } \left| N_{1c} - \tilde{N}_1 - \tau_{N_1} \dot{\tilde{N}}_1 \right| \geq \sigma_{N_1}$$

alors la dynamique longitudinale est endommagée »,

$$\ll \text{ si } \left| \theta_c - \tilde{\theta} - \tau_\theta \dot{\tilde{\theta}} \right| \leq \sigma_\theta \text{ et } \left| \phi_c - \tilde{\phi} - \tau_\phi \dot{\tilde{\phi}} \right| \geq \sigma_\phi \text{ et } \left| N_{1c} - \tilde{N}_1 - \tau_{N_1} \dot{\tilde{N}}_1 \right| \geq \sigma_{N_1}$$

alors les dynamiques de l'assiette latérale et de la poussée sont endommagées »,

$$\ll \text{ si } \left| \theta_c - \tilde{\theta} - \tau_\theta \dot{\tilde{\theta}} \right| \geq \sigma_\theta \text{ et } \left| \phi_c - \tilde{\phi} - \tau_\phi \dot{\tilde{\phi}} \right| \geq \sigma_\phi \text{ et } \left| N_{1c} - \tilde{N}_1 - \tau_{N_1} \dot{\tilde{N}}_1 \right| \geq \sigma_{N_1}$$

alors la dynamique globale du vol est endommagée ».

Les estimées des dérivées temporelles de θ , ϕ et ψ n'étant pas fournies par le réseau de neurones, responsable de l'inversion de la dynamique de guidage, celles-ci peuvent être obtenues à l'aide des équations ci dessous qui reprenant les relations angulaires d'Euler utilisent à la fois les

estimées $\tilde{\theta}$, $\tilde{\phi}$, $\tilde{\psi}$ et les mesures des vitesses de rotation suivant les axes de roulis p , de tangage q et de lacet r qui sont aisément mesurables:

$$\begin{cases} \tilde{\dot{\theta}} = -r \sin \tilde{\phi} + q \cos \tilde{\phi} \\ \tilde{\dot{\psi}} = \frac{q \sin \tilde{\phi} + r \cos \tilde{\phi}}{\cos \tilde{\theta}} \\ \tilde{\dot{\phi}} = p + \operatorname{tg} \tilde{\theta} (q \sin \tilde{\phi} + r \cos \tilde{\phi}) \end{cases} \quad (4.25)$$

L'accélération angulaire du moteur, \dot{N}_1 , peut être obtenue par mesure directe.

6. CONCLUSION

Dans ce chapitre il a été montré comment les propriétés structurelles associées à la platitude différentielle d'un système complexe peuvent être utilisées pour mettre à profit les relations de redondance internes dans le cadre de la détection de pannes.

Le cas de la dynamique du vol des avions a été plus particulièrement considéré dans ce chapitre. Cependant la nature implicite des propriétés de platitude différentielle entre les paramètres de trajectoire et les variables de pilotage du vol conduisent à la construction de réseaux de neurones pour appréhender numériquement ces relations implicites. On dispose alors d'un élément de référence pour le développement de systèmes de détection de pannes affectant les chaînes de commande et la dynamique du vol d'un avion.

CHAPITRE 5

ESTIMATION DES DERIVEES DES SORTIES D'UN SYSTEME DIFFERENTIELLEMENT PLAT

1. INTRODUCTION

On a vu dans tout ce qui précède que, en ce qui concerne le diagnostic des systèmes différentiellement plats (c'est aussi le cas pour la commande plate), il est nécessaire de disposer de bonnes estimées des sorties et de leur dérivées temporelles jusqu'à un ordre qui, suivant sa taille, peut être assez élevé. Dans ce chapitre, on s'intéresse donc à l'estimation des sorties plates et de leur dérivées en temps réel. On reprend ici les travaux récents de Fleiss et al. [Reger 2005] dans ce domaine en montrant, en particulier, leurs limitations théoriques et pratiques.

Ainsi, on considère un système physique général dont l'évolution dans le temps peut être représentée par les équations d'état continues:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \\ \underline{y}(t) = h(\underline{x}(t)) \end{cases} \quad (5.1)$$

avec les conditions initiales :

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (5.2)$$

f et h sont des fonctions vectorielles de classe C^∞ , t représente ici aussi le temps référencé dans R .

2. ELEMENTS DE CALCUL OPERATIONNEL

On rappelle que le calcul opérationnel fait intervenir une transformation L qui à une fonction vectorielle de t réel positif, de classe C^∞ et bornée, $\underline{y}(t)$, fait correspondre une nouvelle fonction vectorielle de la variable p réelle positive, $\underline{Y}(p)$, telle que :

$$\underline{Y}(p) = L[\underline{y}(t)] = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-pt} \underline{y}(t) dt \quad \text{pour } p > 0 \quad (5.3)$$

On montre que cette transformation linéaire est telle que l'on a :

$$L\left[\frac{d^q}{dt^q} \underline{y}(t)\right] = p^q \underline{Y}(p) - \sum_{j=1}^q p^{q-j} \underline{y}^{(j-1)}(0) \quad (5.4)$$

où q est un entier naturel et

$$L\left[\int_0^t \underline{y}(\tau) d\tau\right] = p^{-1} \underline{Y}(p) \quad (5.5)$$

On montre alors que l'on a :

$$L\left[\frac{d^q}{dt^q} ((-t)^i \underline{y}(t))\right] = p^q \frac{d^i}{dp^i} \underline{Y}(p) \quad \text{si } q \geq 0 \quad (6.6)$$

et

$$L\left[\int_{(0)}^{(-q)} (-t)^i \underline{y}(t) dt^{(-q)}\right] = p^q \frac{d^i}{dp^i} \underline{Y}(p) \quad \text{si } q < 0 \quad (5.7)$$

où on adopte la notation résumée pour un entier positif s et une fonction intégrable $g(t)$:

$$\int_{(0)}^{(s)} \underline{g}(t) dt^{(s)} = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{s-1}} \underline{g}(\tau_s) d\tau_s d\tau_{s-1} \dots d\tau_1 \quad (5.8)$$

On a de même, si \underline{y} est donné par $\underline{y}(t) = \int_0^t k(\tau) \underline{x}(t-\tau) d\tau$ où $k(t)$ est une fonction scalaire à valeurs réelles :

$$L(\underline{y}(t)) = L(k(t)) \cdot L(\underline{x}(t)) = K(p) \cdot \underline{X}(p) \quad (5.9)$$

Ainsi, par exemple, considérant l'équation:

$$\dot{x} + A x + \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau = e(t) \quad (5.10)$$

où A est un réel et $e(t)$ est donné, $x(t)$ sera tel que :

$$X(p) = L(\underline{x}(t)) = \frac{p(E(p) + x(0))}{p^2 + Ap + K(p)} \quad (5.11)$$

3. RELATIONS DE RECURRENCE ENTRE DERIVEES SUCCESSIVES

On s'intéresse maintenant à l'estimation, à partir des seules mesures des sorties d'un système, des dérivées à l'ordre d de celles-ci. Pour cela, on suppose que le signal $\underline{y}(t)$ peut être approché pour $t > 0$ par une série de Taylor tronquée à l'ordre k ($k > d$):

$$\underline{\tilde{y}}(t) = \sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \underline{y}^{(j-1)}(0) \quad (5.12)$$

On peut alors écrire pour $\underline{\tilde{y}}(t)$:

$$L\left[\frac{d^k}{dt^k} \underline{\tilde{y}}(t)\right] = \underline{0} \quad \text{et} \quad \frac{d^k}{dp^k} \left(\sum_{j=1}^k p^{k-j} \underline{\tilde{y}}^{(j-1)}(0)\right) = \underline{0} \quad (5.13)$$

d'où les égalités suivantes pour $k > h$:

$$\frac{d^k}{dp^k}(p^k \underline{\tilde{Y}}(p)) = \underline{0} \quad \text{et} \quad p^{-j} \left(\frac{d^k}{dp^k}(p^k \underline{\tilde{Y}}(p)) \right) = \underline{0} \quad j = k-1, k-2, \dots, k-h \quad (5.14)$$

La formule de Leibnitz permet d'écrire¹ :

$$\frac{d^k}{dp^k}(p^k \underline{\tilde{Y}}(p)) = \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{d^{k-i}}{dp^{k-i}}(p^k) \frac{d^i}{dp^i}(\underline{\tilde{Y}}(p)) = \sum_{i=0}^k (C_k^i)^2 (k-i)! p^i \frac{d^i}{dp^i}(\underline{\tilde{Y}}(p)) \quad (5.15)$$

On peut donc réécrire la relation (5.15) sous la forme :

$$\sum_{i=0}^k (C_k^i)^2 (k-i)! p^{i-j} \frac{d^i}{dp^i}(\underline{\tilde{Y}}(p)) = \underline{0} \quad j = k-1, k-2, \dots, k-h \quad (5.16)$$

La relation (5.16) se réécrit alors :

$$\sum_{i=0}^{j-1} (C_k^i)^2 (k-i)! p^{i-j} \frac{d^i}{dp^i}(\underline{\tilde{Y}}(p)) + \sum_{i=j}^k (C_k^i)^2 (k-i)! p^{i-j} \frac{d^i}{dp^i}(\underline{\tilde{Y}}(p)) = \underline{0} \quad j = k-1, k-2, \dots, k-h \quad (5.17)$$

On en déduit que :

$$\sum_{i=0}^{j-1} (C_k^i)^2 (k-i)! \int_{(0)}^{(j-i)} (-t)^i y(t) dt^{(j-i)} + \sum_{i=j}^k (C_k^i)^2 (k-i)! \frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}}((-t)^i \underline{\tilde{y}}(t)) = \underline{0} \quad j = k-1, k-2, \dots, k-h \quad (5.18)$$

La formule de Leibnitz permet aussi d'écrire :

$$\frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}}((-t)^i \underline{\tilde{y}}(t)) = (-1)^i \sum_{l=0}^{i-j} C_{i-j}^l \frac{i!}{(j+1)!} t^{j+l} \underline{\tilde{y}}^{(l)}(t) \quad (5.19)$$

¹ C_k^i représente le nombre de combinaisons différentes de i éléments pris parmi k .

On a finalement, entre les dérivées de $\underline{\tilde{y}}(t)$, les h relations :

$$\sum_{m=1}^{k-r} (-1)^{k-r-m} (C_k^{m+r})^2 (m+r)! \int_{(0)}^{(m)} t^{k-m-r} \underline{\tilde{y}}(t) dt^{(m)} + \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^n (-1)^{n+k-r} C_k^{r-n} C_n^l \frac{k!}{(k+l-r)!} t^{k+l-r} \underline{\tilde{y}}^{(l)}(t) \quad (5.20)$$

pour $r = 1, 2, \dots, h$, avec $r = k - j$, $n = i + r - k$ et $m = k - r - i$

On en déduit la formule récursive :

$$\underline{\tilde{y}}^{(r)}(t) = \sum_{l=0}^{r-1} \alpha(k, r, l) \frac{1}{t^{r-l}} \underline{\tilde{y}}^{(l)}(t) + \sum_{m=1}^{k-r} \beta(k, r, m) \frac{1}{t^k} \int_{(0)}^{(m)} t^{k-m-r} \underline{\tilde{y}}(t) dt^{(m)} \quad r = 1, 2, \dots, d \quad (5.21)$$

avec :

$$\alpha(k, r, l) = (-1)^{l-r+1} C_k^{r-l} \frac{(k-l-1)!}{(k-r-1)!} \quad \text{et} \quad \beta(k, r, m) = (-1)^{1-m-r} (C_k^{m+r})^2 (m+r)! \quad (5.22)$$

Introduisant des variables auxiliaires $\underline{z}_i^k(t)$ données par :

$$\underline{z}_i^k(t) = \sum_{m=1}^{k-i} \beta(k, i, m) \int_{(0)}^{(m)} t^{k-m-i} \underline{\tilde{y}}(t) dt^{(m)} \quad i = 1 \text{ à } d \quad (5.23)$$

La relation récursive précédente se réécrit sous la forme :

$$\underline{\tilde{y}}^{(i)}(t) = \frac{(k+i-1)!}{i! (k-i-1)!} \frac{1}{t^r} \underline{\tilde{y}}(t) + \sum_{j=1}^i C_{k+i-j-1}^{i-j} \frac{(k-j-1)!}{(k-i-1)!} \frac{1}{t^{k+i-j}} \underline{z}_j^k(t) \quad i = 1 \text{ à } d \quad (5.24)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \dot{\underline{z}}_i^k(t) = \beta(k, i, 1) t^{k-i-1} \underline{\tilde{y}}(t) + \underline{z}_{i+1}^k(t) & i = 1 \text{ à } k-2 \\ \dot{\underline{z}}_{k-1}^k(t) = \beta(k, k-1, 1) \underline{\tilde{y}}(t) \\ \underline{z}_i^k(0) = 0 & i = 1 \text{ à } k-1 \end{cases} \quad (5.25)$$

4. EXPRESSION DE L'ESTIMATEUR DES DERIVEES TEMPORELLES DES SORTIES

Finalement, remplaçant dans les formules ci-dessus l'estimée de $\underline{y}(t)$, $\underline{\tilde{y}}(t)$, par sa mesure $\underline{y}^m(t)$, on obtient pour une approximation à l'ordre k les estimées suivantes des dérivées à l'ordre d (< k) des sorties:

$$\underline{\tilde{y}}_k^{(i)}(t) = \frac{(k+i-1)!}{i! (k-i-1)!} \frac{1}{t^i} \underline{y}^m(t) + \sum_{j=1}^i C_{k+i-j-1}^{i-j} \frac{(k-j-1)!}{(k-i-1)!} \frac{1}{t^{k+i-j}} \underline{z}_j^k(t) \quad i = 1 \text{ à } d \quad (5.26)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \dot{\underline{z}}_i^k(t) = \beta(k, i, 1) t^{k-i-1} \underline{y}^m(t) + \underline{z}_{i+1}^k(t) & i = 1 \text{ à } k-2 \\ \dot{\underline{z}}_{k-1}^k(t) = \beta(k, k-1, 1) \underline{y}^m(t) \\ \underline{z}_i^k(0) = 0 & i = 1 \text{ à } k-1 \end{cases} \quad (5.27)$$

Donnons ici l'expression de l'estimateur dans différents cas :

Cas : k=3, d = 2

$$\begin{cases} \underline{\tilde{y}}_3^{(1)} = \frac{6}{t} \underline{y}^m(t) + \frac{1}{t^3} \underline{z}_1^3(t) \\ \underline{\tilde{y}}_3^{(2)} = \frac{12}{t} \underline{y}^m(t) + \frac{3}{t^4} \underline{z}_1^3(t) + \frac{1}{t^3} \underline{z}_2^3(t) \end{cases} \quad (5.28.a)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \dot{\underline{z}}_1^3(t) = -18 t \underline{y}^m(t) + \underline{z}_2^3(t) \\ \dot{\underline{z}}_2^3(t) = 6 \underline{y}^m(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underline{z}_1^3(0) = \underline{0} \\ \underline{z}_2^3(0) = \underline{0} \end{cases} \quad (5.28.b)$$

Cas : k = 4, d = 3

$$\begin{cases} \tilde{y}_4^{(1)}(t) = \frac{12}{t} y^m(t) + \frac{1}{t^4} z_1^4(t) \\ \tilde{y}_4^{(2)}(t) = \frac{60}{t^2} y^m(t) + \frac{8}{t^5} z_1^4(t) + \frac{1}{t^4} z_2^4(t) \\ \tilde{y}_5^{(3)}(t) = \frac{120}{t^3} y^m(t) + \frac{10}{t^6} z_1^4(t) + \frac{4}{t^5} z_2^4(t) + \frac{1}{t^4} z_3^4(t) \end{cases} \quad (5.29.a)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \dot{z}_1^4(t) = -72 t^2 y^m(t) + z_2^4(t) \\ \dot{z}_2^4(t) = 96 t y^m(t) + z_3^4(t) \\ \dot{z}_3^4(t) = -24 y^m(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z_1^4(0) = 0 \\ z_2^4(0) = 0 \\ z_3^4(0) = 0 \end{cases} \quad (5.29.b)$$

Cas : $k = 5, d = 3$

$$\begin{cases} \tilde{y}_5^{(1)}(t) = \frac{20}{t} y^m(t) + \frac{1}{t^5} z_1^5(t) \\ \tilde{y}_5^{(2)}(t) = \frac{180}{t^2} y^m(t) + \frac{15}{t^6} z_1^5(t) + \frac{1}{t^5} z_2^5(t) \\ \tilde{y}_5^{(3)}(t) = \frac{840}{t^3} y^m(t) + \frac{90}{t^7} z_1^5(t) + \frac{10}{t^6} z_2^5(t) + \frac{1}{t^5} z_3^5(t) \end{cases} \quad (5.30.a)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \dot{z}_1^5(t) = -200 t^3 y^m(t) + z_2^5(t) \\ \dot{z}_2^5(t) = 600 t^2 y^m(t) + z_3^5(t) \\ \dot{z}_3^5(t) = -600 t y^m(t) + z_4^5(t) \\ \dot{z}_4^5(t) = 120 y^m(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z_1^5(0) = 0 \\ z_2^5(0) = 0 \\ z_3^5(0) = 0 \\ z_4^5(0) = 0 \end{cases} \quad (5.30.b)$$

Cas : $k = 6, d = 3$

$$\begin{cases} \tilde{y}_6^{(1)}(t) = \frac{30}{t} y^m(t) + \frac{1}{t^6} z_1^6(t) \\ \tilde{y}_6^{(2)}(t) = \frac{420}{t^2} y^m(t) + \frac{24}{t^7} z_1^6(t) + \frac{1}{t^6} z_2^6(t) \\ \tilde{y}_6^{(3)}(t) = \frac{3360}{t^3} y^m(t) + \frac{252}{t^8} z_1^6(t) + \frac{18}{t^7} z_2^6(t) + \frac{1}{t^6} z_3^6(t) \end{cases} \quad (5.31.a)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \dot{z}_1^6(t) = -450 t^4 y^m(t) + z_2^6(t) \\ \dot{z}_2^6(t) = 2400 t^3 y^m(t) + z_3^6(t) \\ \dot{z}_3^6(t) = -5400 t^2 y^m(t) + z_4^6(t) \\ \dot{z}_4^6(t) = 4320 t y^m(t) + z_5^6(t) \\ \dot{z}_5^6(t) = -720 y^m(t) \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} z_1^6(0) = 0 \\ z_2^6(0) = 0 \\ z_3^6(0) = 0 \\ z_4^6(0) = 0 \\ z_5^6(0) = 0 \end{cases} \quad (5.31.b)$$

Cas : $k = 7, d = 3$

$$\begin{cases} \tilde{y}_7^{(1)}(t) = \frac{42}{t} y^m(t) + \frac{1}{t^7} z_1^7(t) \\ \tilde{y}_7^{(2)}(t) = \frac{840}{t^2} y^m(t) + \frac{35}{t^8} z_1^7(t) + \frac{1}{t^7} z_2^7(t) \\ \tilde{y}_7^{(3)}(t) = \frac{10080}{t^3} y^m(t) + \frac{560}{t^9} z_1^7(t) + \frac{28}{t^8} z_2^7(t) + \frac{1}{t^7} z_3^7(t) \end{cases} \quad (5.32.a)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \dot{z}_1^7(t) = -882 t^5 y^m(t) + z_2^7(t) \\ \dot{z}_2^7(t) = 7350 t^4 y^m(t) + z_3^7(t) \\ \dot{z}_3^7(t) = -29400 t^3 y^m(t) + z_4^7(t) \\ \dot{z}_4^7(t) = 52920 t^2 y^m(t) + z_5^7(t) \\ \dot{z}_5^7(t) = -35280 t y^m(t) + z_6^7(t) \\ \dot{z}_6^7(t) = 5040 y^m(t) \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} z_1^7(0) = 0 \\ z_2^7(0) = 0 \\ z_3^7(0) = 0 \\ z_4^7(0) = 0 \\ z_5^7(0) = 0 \\ z_6^7(0) = 0 \end{cases} \quad (5.32.b)$$

5. APPLICATION A UN SIGNAL POLYNOMIAL

L'application qui à $y(t)$ fait correspondre une estimée de sa dérivée d'ordre i est linéaire. Considérons d'abord un signal scalaire de type monôme. On a alors pour la dérivée de premier ordre:

$$y(t) = t^n \text{ pour } t > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{y}_k^{(1)} = ((k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \frac{(C_k^{i+1})^2}{C_{k+n}^{m+1}}) t^{n-1} \quad (5.33)$$

Si l'on considère un signal polynomial de degré 4, on a :

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{y}(0)t^2 + \frac{1}{6}\dddot{y}(0)t^3 + \frac{1}{24}y^{(4)}(0)t^4 \quad (5.34)$$

L'application du filtre d'ordre 3 donne pour l'estimée de la dérivée de la sortie :

$$\tilde{y}_3^{(1)}(t) = \dot{y}(0) + \ddot{y}(0)t + \frac{9}{20}\dddot{y}(0)t^2 + \frac{2}{15}y^{(4)}(0)t^3 \quad (5.35)$$

d'où une erreur égale à :

$$\frac{1}{20}\dddot{y}(0)t^2 + \frac{1}{30}y^{(4)}(0)t^3 \quad (5.36)$$

L'application du filtre d'ordre 4 donne pour l'estimée de la dérivée de la sortie :

$$\tilde{y}_4^{(1)}(t) = \dot{y}(0) + \ddot{y}(0)t + \frac{1}{2}\dddot{y}(0)t^2 + \frac{34}{210}y^{(4)}(0)t^3 \quad (5.37)$$

d'où une erreur égale à :

$$\frac{1}{210}y^{(4)}(0)t^3 \quad (5.38)$$

L'application du filtre d'ordre 5 donne pour l'estimée de la dérivée de la sortie :

$$\tilde{y}_5^{(1)}(t) = \dot{y}(0) + \ddot{y}(0)t + \frac{1}{2}\dddot{y}(0)t^2 + \frac{1}{6}y^{(4)}(0)t^3 \quad (5.39)$$

Cette dernière expression de la dérivée première de $y(t)$ est exacte et il en sera de même pour des filtres d'ordre supérieur à 5.

Revenant au cas du filtre d'ordre 4, et supposant que $y^{(4)}(0)$ est de l'ordre de $10^{-\delta}$ alors que l'on souhaite une erreur sur l'estimée de la dérivée première de $y(t)$ inférieure à $\varepsilon_{max} = 10^{-K}$, où δ et K

sont des entiers positifs. L'erreur restera inférieure à ε_{max} si $t \leq \sqrt[3]{210} 10^{(\delta-K)/3}$. Dans le cas où $\delta = K$, on a : $t < 6 s$.

6. ESTIMATION DES DERIVEES DES SORTIES D'UN SYSTEME PLAT COMMANDE

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'utilisation dans le cadre de la commande plate et de la détection de pannes des dérivées des sorties plates d'un système différentiellement plat estimées à partir de filtres dérivateurs.

6.1 Position du problème

Dans ce cas, par définition, on peut exprimer le vecteur de commande en fonction des sorties plates et de leurs dérivées :

$$u_j = \Psi_j(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\nu_{j,1})}, y_2, \dots, y_2^{(\mu_{i,2})}, \dots, y_m, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\nu_{j,m})}) \quad j = 1 \text{ à } m \quad (5.40)$$

et on dit alors, supposant que ces sorties plates et leurs dérivées sont parfaitement accessibles, que le système est, d'après Lie-Bäcklund, équivalent au système trivial :

$$y_k^{(\delta_k)} = e_k \quad k = 1 \text{ à } m, \quad \delta_k = \max\{\nu_{jk}, j = 1 \text{ à } m\} \quad (5.41)$$

où les e_k sont des entrées indépendantes pour chaque chaîne d'intégration.

Afin de limiter la complexité de l'analyse, on ne considèrera par la suite de ce paragraphe que des systèmes différentiellement plats de type SISO :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, u) & \underline{x} \in R^n, u \in R \\ y = h(\underline{x}) & y \in R \end{cases} \quad (5.42)$$

On supposera que l'objectif de commande est de linéariser la dynamique de cette sortie, d'améliorer sa dynamique et de l'amener vers une valeur de référence y_c . Les relations (5.40) et (5.41) s'écrivent ici pour un système d'ordre n :

$$u = \Psi(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \quad (5.43)$$

$$y^{(n)} = e \quad (5.44)$$

On choisira alors une loi de commande telle que :

$$u = \Psi(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}, -\sum_{i=1}^{v-1} a_i y^{(i)} - a_0 (y - y_c)) \quad (5.45)$$

de façon à conférer à la sortie plate une dynamique linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre telle que :

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{v-1} a_i y^{(i)} + a_0 (y - y_c) = 0 \quad (5.46)$$

où le polynôme $P(s)$, donné par (5.47) est supposé être asymptotiquement stable

$$P(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \quad (5.47)$$

La loi de commande mise en œuvre sera donc :

$$\tilde{u} = \Psi(\tilde{y}, \tilde{y}^{(1)}, \dots, \tilde{y}^{(n-1)}, -\sum_{i=1}^{n-1} a_i \tilde{y}^{(i)} - a_0 (\tilde{y} - y_c)) \quad (5.48)$$

où les $\tilde{y}^{(i)}$, $i = 0$ à $n - 1$, sont les estimées disponibles à l'ordre i de la sortie plate, ceci à chaque instant courant. Ceci correspond à la structure de commande suivante:

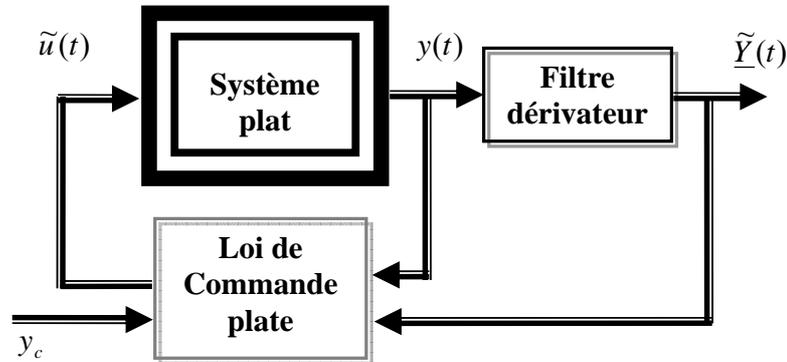


Figure 5.1 : Mise en œuvre de la commande plate

6.2 Evaluation des performances

Considérons alors la représentation d'état qui prend $\underline{X} = (y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)})'$ comme vecteur d'état. On peut écrire :

$$\underline{x} = T(\underline{X}) \quad (5.49)$$

où T est un difféomorphisme, on a alors :

$$\dot{\underline{X}} = A \underline{X} + B a_0 y_c + (\partial T / \partial X)^{-1} (f(T(\underline{X}), u(\underline{X}, y_c)) - f(T(X), u(\underline{X}, y_c))) \quad (5.50)$$

où A est la forme compagne de commande associée au polynôme caractéristique $P(s)$ et B est donnée par :

$$B = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]' \quad (5.51)$$

Une approximation au premier ordre de cette dynamique est donnée par :

$$\dot{\underline{X}} = A \underline{X} + \underline{B} a_0 y_c + \underline{w} \quad (5.52)$$

ou encore en considérant que :

$$\underline{w} \approx (\partial T / \partial X)^{-1} (\partial f / \partial u) (\partial u / \partial X) (\tilde{\underline{X}} - \underline{X}) \quad (5.53)$$

$$\dot{\underline{X}} = (A - M_u) \underline{X} + \underline{B} a_0 y_c + M_u \tilde{\underline{X}} \quad (5.54)$$

avec

$$M_u = (\partial T / \partial X)^{-1} (\partial f / \partial u) (\partial u / \partial X) \quad (5.55)$$

On supposera aussi ici que, à l'état initial le système est parfaitement au repos, ce qui donne :

$$\underline{X} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)' \quad (5.56)$$

Considérant les estimées à l'ordre k des dérivées de la sortie y , on peut écrire en tenant compte des relations (5.26) et (5.27) :

$$\tilde{\underline{X}} = C^k(t) \underline{X}(t) + D^k(t) \underline{Z}(t) \quad (5.57)$$

avec

$$\dot{\underline{Z}} = E \underline{Z} + F(t) \underline{X} \quad \text{et} \quad \underline{Z}(0) = \underline{0} \quad (5.58)$$

On a donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{X}} \\ \dot{\underline{Z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + M_u (C^k(t) - I) & M_u D^k(t) \\ F^k(t) & E^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{0} \end{bmatrix} a_0 y_c \quad (5.59)$$

Lorsque t devient très grand, il est possible de trouver, si $y(t)$ est C^∞ , un ordre d'estimateur tel que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D^k(t) \underline{Z}(t) = \underline{0} \quad (5.60)$$

La dynamique devient de la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{X}} \\ \dot{\underline{Z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - M_u & 0 \\ F^k(t) & E^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{0} \end{bmatrix} a_0 y_c \quad (5.61)$$

et celle de l'erreur sur l'état \underline{e} est telle que :

$$\dot{\underline{e}} = A \underline{e} - M_u \underline{X} \quad (5.62)$$

On voit donc que l'erreur sur la sortie ne tendra pas en général vers zéro.

Adoptons maintenant une loi de commande, où on rajoute un terme intégral, telle que :

$$\tilde{u} = \Psi(\tilde{y}, \tilde{y}^{(1)}, \dots, \tilde{y}^{(n-1)}, -\sum_{i=1}^{n-1} a_i \tilde{y}^{(i)} - a_0 (\tilde{y} - y_c) - a_{-1} \int_0^t (y(\tau) - y_c) d\tau) \quad (5.63)$$

et une représentation d'état telle que :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{X}} \\ \dot{\underline{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \underline{X} + \underline{B} (a_0 y_c - a_{-1} \underline{Y}) + \underline{w} \\ \underline{C}' \underline{X} - y_c \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

on vérifie en passant en représentation de Laplace que :

$$\lim_{p \rightarrow 0} p^2 w(p) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_c \quad (5.65)$$

6.3 Détection de pannes

On considère maintenant le montage de la figure (5.2) :

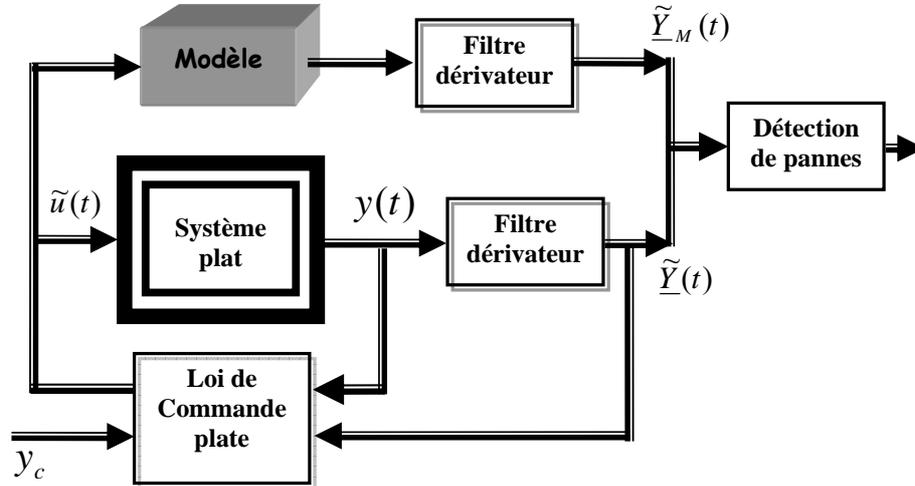


Figure 5.2 : Commande et détection de pannes

La mise en parallèle du filtre dérivateur à la sortie du système et à la sortie du modèle de celui-ci se justifie par les distorsions éventuelles dans les estimations des dérivées des sorties que s'il n'y a pas de pannes, doivent être du même ordre dans les deux cas et donc être compensables.

Afin de réaliser la détection d'une anomalie, les relations :

$$| \hat{x}_i - \Phi_i(\hat{y}, \hat{y}^{(1)}, \dots, \hat{y}^{(\mu_i)}) | \leq \varepsilon_{x_i} \quad i = 1 \text{ à } n \quad (5.66)$$

$$| u - \Psi(\hat{y}, \hat{y}^{(1)}, \dots, \hat{y}^{(v_j)}) | \leq \varepsilon_u \quad (5.67)$$

$$| \Omega_i(y, y^{(1)}, \dots, y^{(\lambda_i)}) | \leq \varepsilon_{y_k} \quad k = 1 \text{ à } r_a \quad (5.68)$$

où les $\varepsilon_{x_i}, i = 1 \text{ à } n$, ε_u , $\varepsilon_{y_k}, k = 1 \text{ à } r_a$, sont des constantes réelles positives, peuvent être remplacées par :

$$\left| \sum_{j=0}^{\mu_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y^{(j)}} \Big|_{\underline{y}_{M^{(t_k)}}} (\tilde{y}^{(j)}(t_k) - y_M^{(j)}(t_k)) \right| \leq \varepsilon_{x_i} \quad i=1 \text{ à } n \quad (5.69)$$

$$\left| \sum_{j=0}^{\nu_u} \frac{\partial \Psi}{\partial y^{(j)}} \Big|_{\underline{y}_{M^{(t_k)}}} (\tilde{y}^{(j)}(t_k) - y_M^{(j)}(t_k)) \right| \leq \varepsilon_u \quad (5.70)$$

$$\left| \sum_{j=0}^{\lambda_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial y^{(j)}} (\tilde{y}^{(j)}(t_k) - y_M^{(j)}(t_k)) \right| \leq \varepsilon_{y_k} \quad k=1 \text{ à } r_a \quad (5.71)$$

6.4 Exemple d'application

Considérons le cas d'un pendule simple auquel est appliqué un moment extérieur (figure 5.3) et qui obéit à l'équation :

$$m l^2 \ddot{\theta} = -m g l \sin \theta - c_x l^3 \dot{\theta}^2 + mgl u \quad (5.72)$$

où c_x est un coefficient de frottement dans l'air et u est le moment réduit de commande.

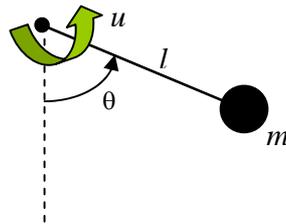


Figure 5.3 : Pendule simple actionné

On cherche à établir une commande qui ramène sa dynamique à celle d'un deuxième ordre d'équation :

$$\ddot{\theta} = -2 z \omega_n \dot{\theta} - \omega_n^2 (\theta - \theta_c) \quad (5.73)$$

où z est un coefficient d'amortissement, ω_n est une pulsation naturelle et θ_c est une valeur de consigne pour l'inclinaison du pendule.

Il est clair que ce système est différentiellement plat, admettant pour sortie plate θ . La loi de commande plate linéarisante est donnée ici par :

$$u = -2 z \omega_n (l/g) \dot{\theta} - \omega_n^2 (l/g) (\theta - \theta_c) + \sin \theta + c_x (l^2 / (mg)) \dot{\theta}^2 \quad (5.74)$$

Sa réalisation est donnée par :

$$\tilde{u} = -2 z \omega_n (l/g) \tilde{\dot{\theta}} - \omega_n^2 (l/g) (\theta - \theta_c) + \sin \theta + c_x (l^2 / (mg)) \tilde{\dot{\theta}}^2 \quad (5.75)$$

On obtient alors la dynamique suivante :

$$\ddot{\theta} = -2 z \omega_n \dot{\theta} - \omega_n^2 (\theta - \tilde{\theta}_c) \quad (5.76)$$

avec

$$\tilde{\theta}_c = \theta_c - (2 z / \omega_n) (\tilde{\dot{\theta}} - \dot{\theta}) + (c_x l / (m \omega_n^2)) \tilde{\dot{\theta}}^2 \quad (5.77)$$

De (5.72), on déduit que :

$$\theta(p) = \frac{-2 z \omega_n \tilde{\dot{\theta}}(p) + (c_x l / m) \tilde{\dot{\theta}}^2(p) + \omega_n^2 \theta_c / p}{p^2 + \omega_n^2} \quad (5.78)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \theta_c - \lim_{p \rightarrow 0} ((2 z / \omega_n) p \tilde{\dot{\theta}}(p) - (c_x l / m) p \tilde{\dot{\theta}}^2(p)) \quad (5.79)$$

La relation de consistance issue de la platitude s'écrit ici :

$$u = (l/g) \ddot{\theta} + \sin \theta + (c_x l^2 / mg) \dot{\theta}^2 \quad (5.80)$$

On peut lui associer une relation de la forme :

$$\left| (\tilde{\theta}(t_k) - \ddot{\theta}_M(t_k)) + (c_x l / m) [(\tilde{\theta}(t_k))^2 - (\dot{\theta}_M(t_k))^2] \right| \leq \varepsilon_u \quad (5.81)$$

Dans le cas du pendule simple, on peut introduire différents types de pannes, ici on considèrera le cas où le coefficient c_x double sa valeur.

7. CONCLUSION

Le diagnostic des systèmes différentiellement plats est basé sur l'utilisation des estimées précises et à jour des sorties du système et de leur dérivées temporelles. Dans ce chapitre, on a montré comment le calcul opérationnel peut conduire à la définition d'un filtre dérivateur générant en ligne les dérivées des sorties plates. Dans le cas général ce type de filtre présente des erreurs, on s'est donc attaché à évaluer leurs conséquences aussi bien lors de la mise en œuvre d'une commande plate que lors de la mise en œuvre d'algorithmes de détection de pannes. On s'est alors intéressé au cas du pendule simple qui est un système de faible complexité et de comportement régulier. Dans le chapitre suivant, on s'intéresse à la détection de pannes pour des systèmes ayant un comportement en général très irrégulier, les systèmes chaotiques continus.

CHAPITRE 6

EXEMPLES D'APPLICATION : SYSTEMES CHAOTIQUES

1. INTRODUCTION

La notion de chaos déterministe, qui trouve ses fondements dans l'article de Lorenz [Lorenz, 1963], a connu un développement mathématique dans les années 1970 [Ruelle et al., 1971] suivi d'un véritable essor scientifique et populaire dans les années 1980. Le chaos marque un profond bouleversement dans la manière d'envisager les systèmes dynamiques. Le développement de l'informatique n'est pas étranger au succès qu'il rencontre, de par la facilité des simulations et la beauté de certains résultats graphiques obtenus.

Ces systèmes sont réputés présenter un comportement difficilement prévisible compte tenu des changements importants qui peuvent être associés à des variations paramétriques (conditions initiales et paramètres du modèle) infinitésimales. Ainsi, a priori, la détection de comportements anormaux pour ce type de système semble être une question loin d'être évidente.

Il apparaît aussi que beaucoup de systèmes chaotiques continus sont des systèmes différentiellement plats, il semble donc opportun d'essayer d'en utiliser les méthodes de détection de pannes.

2. INTRODUCTION AUX SYSTEMES CHAOTIQUES

Donnons ici quelques définitions et éléments qui permettent de caractériser les systèmes chaotiques.

Système non chaotique : Dans un système déterministe non chaotique, des conditions initiales voisines conduisent à des évolutions voisines.

Système chaotique : Un système chaotique est un système déterministe soumis à une loi d'évolution qui peut être extrêmement simple et régulière, mais dont l'évolution est extrêmement compliquée et parfaitement irrégulière. Ceci lui confère un comportement apparemment imprévisible sur le moyen-long terme. Par ailleurs, ces systèmes présentent une très grande sensibilité aux conditions initiales.

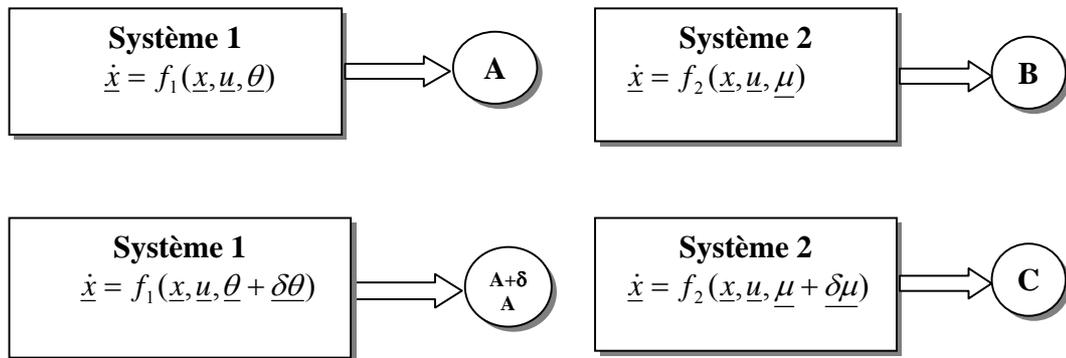


Figure 6.1: Représentation de la différence de comportement entre systèmes chaotiques et non chaotiques ($A \approx A + \delta A$ et $B \neq C$)

- A gauche, le système déterministe non chaotique placé dans des conditions initiales voisines aura au cours du temps des évolutions très proches.
- A droite, le système chaotique, peut, bien qu'étant placé dans des conditions initiales très voisines, présenter des évolutions très différenciées.

Les principales propriétés d'un système chaotiques sont les suivantes :

La non-linéarité : Un système linéaire admet toujours des solutions simples, les effets en sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont engendrés. On peut le décomposer en sous-ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il perde ses propriétés. Un système non-linéaire, n'est en général pas soluble facilement, plus on tente de le décomposer, plus la complexité interne se révèle.

La sensibilité aux conditions initiales : Une variation infinitésimale des conditions initiales conduit à un comportement radicalement différent du système. Bien connu des météorologues sous le nom d'effet-papillon, cette propriété assure l'imprévisibilité pratique des phénomènes observés. Compte tenu des erreurs de modélisation, aussi infimes soient-elles, le comportement chaotique conduira à une divergence croissante entre la prévision et la réalité. La croissance de l'erreur entre prévision et réalité peut être exponentielle pour les systèmes fortement chaotiques.

Cette amplification des erreurs rend rapidement totalement inopérant le pouvoir prédictif des modèles mathématiques qui découle de l'unicité de leur solution.

La structure fractale : Le comportement d'un système chaotique peut présenter une structure fractale qui se reproduit de manière auto-similaire à des échelles différentes. Plus on le regarde de près, plus on découvre de nouveaux détails comparables à ceux qu'on observait aux échelles supérieures.

Les attracteurs : Un attracteur est la limite asymptotique des solutions partant de toute condition initiale située dans une certaine zone appelée « un bassin d'attraction ». Lorsque les coordonnées d'un système physique restent comprises au cours du temps dans un domaine restreint de l'espace alors l'évolution du système a deux comportements possibles :

- Soit le système est fortement chaotique, et l'évolution de ses coordonnées se fera dans l'anarchie la plus totale (comportement apparemment aléatoire).
- Soit il est faiblement chaotique et possède un attracteur.

On distingue trois types d'attracteurs. D'une part, le *point fixe* et le *cercle limite* qui se caractérisent par des mouvements atteignant un état stationnaire ou qui se reproduisent indéfiniment. D'autre part l'*attracteur étrange* (expression utilisée pour la première fois en 1971 par Ruelle et Takens). L'attracteur étrange désigne une figure dans l'espace des phases représentant le comportement d'un système dynamique. Il est représentatif d'un système multi-périodique si le système possède au moins deux fréquences d'oscillation indépendantes. Si plusieurs attracteurs existent au sein de l'espace d'états, chaque attracteur a son propre « bassin d'attraction », qui est un ensemble de conditions initiales qui conduisent la trajectoire vers cet attracteur.

3. EXEMPLES DE SYSTEMES CHAOTIQUES DIFFERENTIELLEMENT PLATS

Parmi les nombreux systèmes chaotiques continus différentiellement plats, on peut citer plus particulièrement de Chen, celui de Lorenz et celui de Rossler.

3.1 Les systèmes chaotiques

L'oscillateur chaotique de *Chen* est donné par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = (c - a)x_1 + c x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3 + u \end{cases} \quad \text{avec } y = x_1 \quad (6.3)$$

où a , b et c sont des paramètres réels positifs et où u est une entrée indépendante normalement nulle.

On reconnaît ici une représentation d'état affine non linéaire de la forme :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + \underline{g} u \quad (6.4)$$

Prenant $a = 35$, $b = 3$ et $c = 28$, à partir d'un état initial $x_{01} = -100$, $x_{02} = 0$, $x_{03} = 10$ et finalement $u(t) = 0$ pour $t \geq 0$, on obtient l'évolution de la figure (6.2) qui représente son évolution sur une période de 4 secondes.

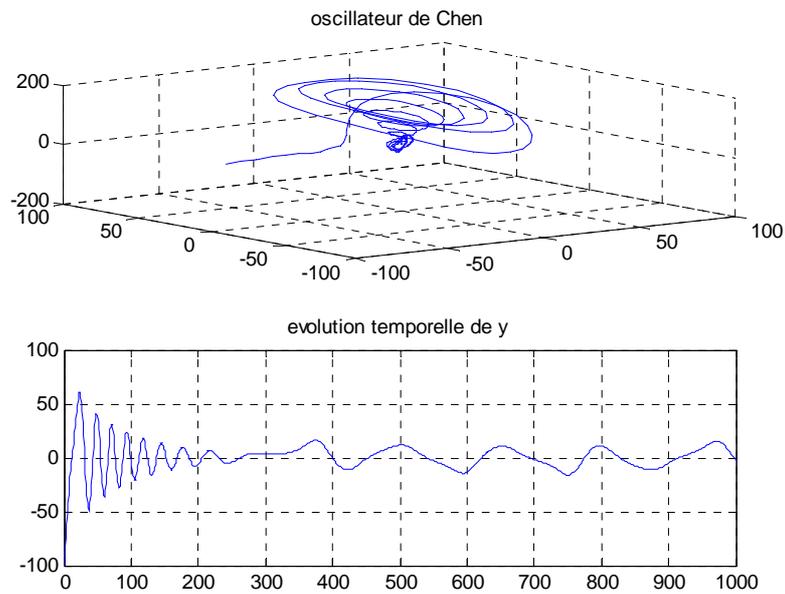


Figure 6.2 : Exemple d'évolution de l'oscillateur chaotique de *Chen*

A partir d'un état initial : $x_{01} = -100$, $x_{02} = 0$, $x_{03} = 20$ et $u(t) = 0$ pour $t \geq 0$, on obtient l'évolution de la figure (6.3) pour une période de temps de durée 4 secondes.

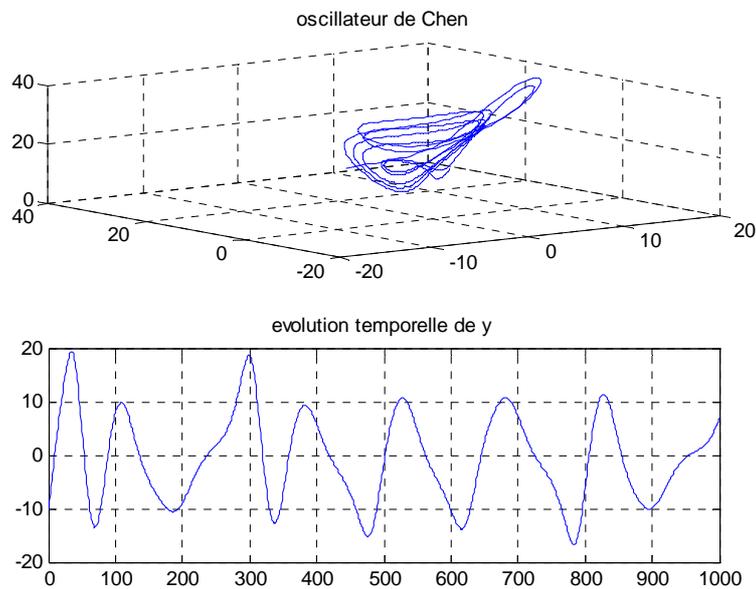


Figure 6.3 : Autre exemple d'évolution de l'oscillateur chaotique de *Chen*

L'attracteur de Lorenz est donné par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 + r x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - b x_3 \end{cases} \quad \sigma=10, r=28 \text{ et } b=8/3 \quad (6.5)$$

L'attracteur de Rossler est obtenue par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + a x_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c) \end{cases} \quad a=b=0.2 \text{ et } c=5.7 \quad (6.6)$$

Les figures suivantes donnent quelques exemples d'évolution des attracteurs de Lorenz et de Rossler.

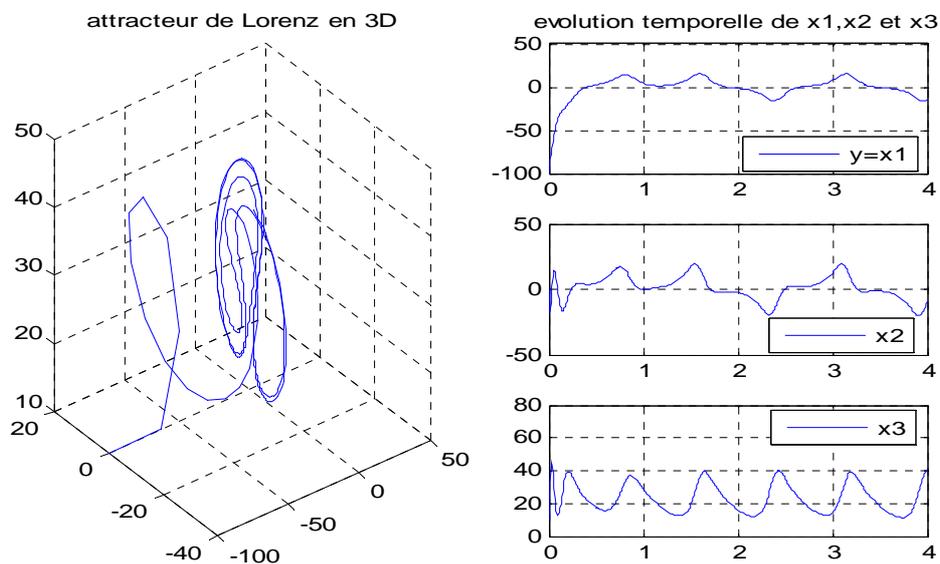


Figure 6.4: Attracteur de Lorenz : $t=4$, ts (pas)=0.01, $x_{01}=-100$, $x_{02}=0$, $x_{03}=10$

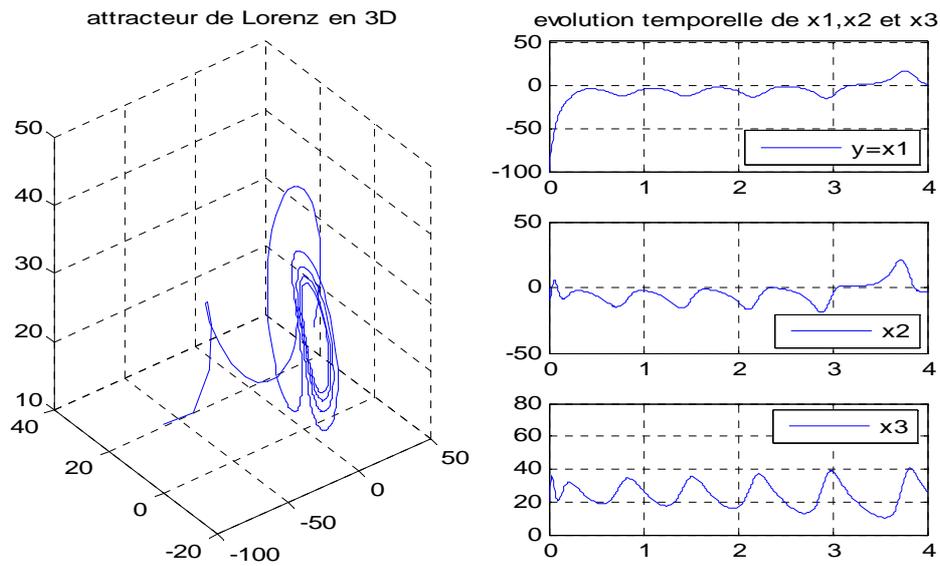


Figure 6.5: Attracteur de Lorenz : $t=4$, ts (pas)=0.01, $x_{01} = -100$, $x_{02}=0$, $x_{03}=20$

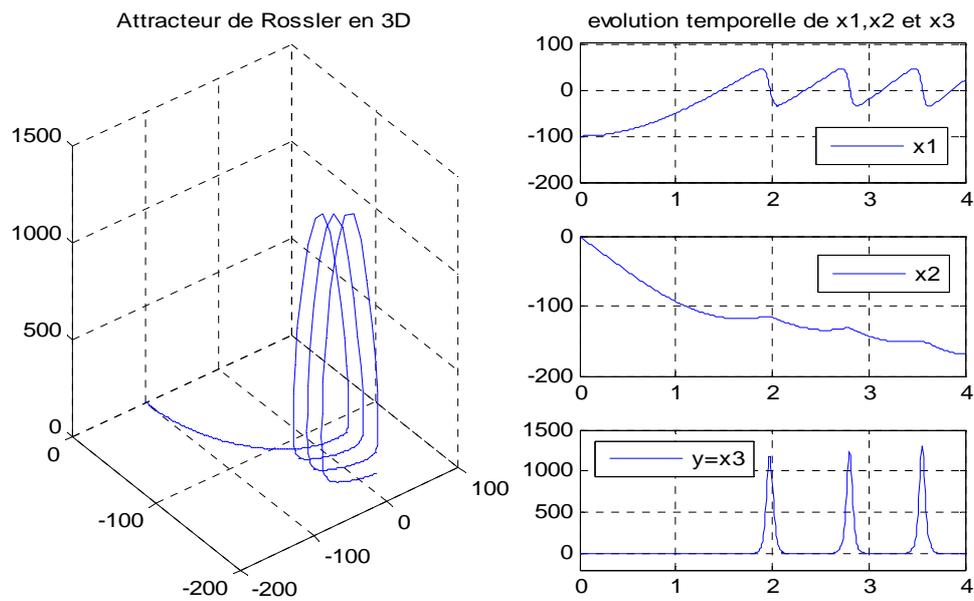


Figure 6.6: Attracteur de Rossler : $t=4$, ts (pas)=0.01, $x_{01} = -100$, $x_{02}=0$, $x_{03}=10$

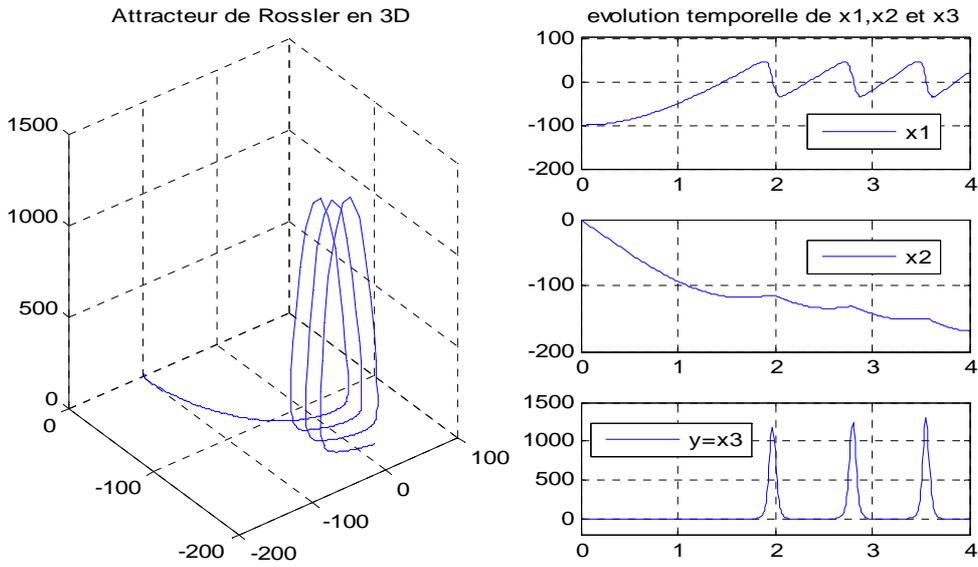


Figure 6.7: Attracteur de Rossler : $t=4$, ts (pas)=0.01, $x_{01}= -100$, $x_{02}=0$, $x_{03}=20$

On constate là aussi un comportement de type chaotique.

3.2 Platitude des systèmes chaotiques considérés

Le système chaotique de *Chen* est différentiellement plat, en effet on peut écrire :
d'une part :

$$y = x_1 \tag{6.7}$$

d'autre part :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \frac{1}{a} \dot{y} + y \\ x_3 = -\frac{1}{y} \left(\frac{1}{a} \ddot{y} + \left(1 - \frac{c}{a}\right) \dot{y} + (a - 2c)y \right) \end{cases} \tag{6.8}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
u = & -y^2 - \frac{1}{a} y \dot{y} - \frac{b}{y} \left(\frac{1}{a} \ddot{y} + \left(1 - \frac{c}{a}\right) \dot{y} + (a - 2c)y \right) \\
& + \frac{\dot{y}}{y^2} \left(\frac{1}{a} \ddot{y} + \left(1 - \frac{c}{a}\right) \dot{y} + (a - 2c)y \right) - \frac{1}{y} \left(\frac{1}{a} \ddot{y} + \left(1 - \frac{c}{a}\right) \dot{y} + (a - 2c)y \right)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

On voit donc qu'une nouvelle représentation de la dynamique de ce système peut être adoptée :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = X_3 \\ \dot{X}_3 = F(X_1, X_2, X_3) + G(X_1) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X_1 = y \\ X_2 = \dot{y} \\ X_3 = \ddot{y} \end{cases} \tag{6.10}$$

et

$$\begin{aligned}
F(X_1, X_2, X_3) = & -a \left(\left(1 - \frac{c}{a}\right) X_3 + (a - 2c) X_2 \right) - a X_1 \left(-X_1^2 - \frac{1}{a} X_1 X_2 - \frac{b}{X_1} \left(\frac{1}{a} X_3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(1 - \frac{c}{a}\right) X_2 + (a - 2c) X_1 \right) + \frac{X_2}{X_1^2} \left(\frac{1}{a} X_3 + \left(1 - \frac{c}{a}\right) X_2 + (a - 2c) X_1 \right) \right)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$G(X_1) = -a X_1 \tag{6.12}$$

Les valeurs de X_1 , X_2 et X_3 étant calculées à partir des relations (6.3).

La figure (6.8) représente l'évolution de la sortie de l'oscillateur de *Chen* lorsque la commande $u(t)$ force celle-ci à suivre à partir du premier jeu de conditions initiales, une dynamique linéaire du troisième ordre donnée par l'équation :

$$\ddot{y} + 22 \dot{y} + 140 y = -100 \tag{6.13}$$

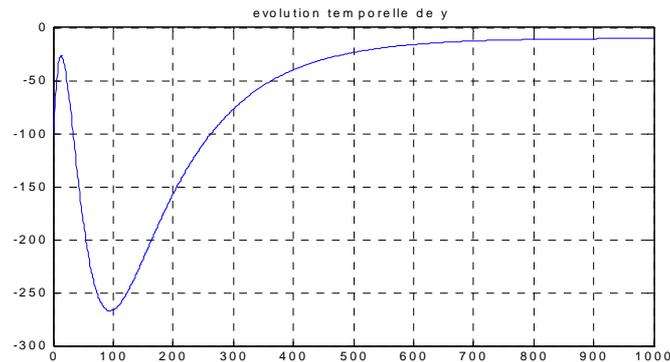


Figure 6.8 : Stabilisation de la sortie de l'oscillateur de *Chen*

L'expression de la commande $u(t)$ correspondante est donnée par :

$$u = ((-22\ddot{y} - 140\dot{y} - 200(y + 5)) - F(y, \dot{y}, \ddot{y})) / G(y) \quad (6.14)$$

On vérifie qu'après un transitoire où $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $u(t)$ restent bornés, ces signaux tendent lorsque t devient supérieur à environ 3 secondes vers des valeurs limites telles que:

$$x_1(t) \rightarrow -5, \quad x_2(t) \rightarrow -5, \quad x_3(t) \rightarrow -21, \quad u(t) \rightarrow 38 \quad (6.15)$$

On peut dire ici que l'oscillateur de *Chen* n'oscille plus, le chaos a été maîtrisé.

3.2.1 Platitudo de l'attracteur de Lorenz

Adoptant x_1 comme sortie de référence, on vérifie ici à partir des relations (6.2) que :

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_1 / \sigma \quad (6.16)$$

et

$$x_3 = (r+1) - (1+1/\sigma) \frac{\dot{x}_1}{x_1} - \frac{\ddot{x}_1}{\sigma x_1} \quad (6.17)$$

De la dernière équation d'état, on déduit aussi l'invariant :

$$\frac{x_1^2 + x_1 \dot{x}_1 / \sigma + ((1+1/\sigma)(x_1 \ddot{x}_1 - \dot{x}_1) + (1/\sigma)(x_1 \ddot{x}_1 - \dot{x}_1 \ddot{x}_1)) / x_1^2}{(r+1) - ((1+1/\sigma)\dot{x}_1 - \ddot{x}_1 / \sigma) / x_1} = b \quad (6.18)$$

x_1 est donc une sortie plate par rapport à l'entrée b . On vérifie que x_1 est l'unique sortie plate atomique de ce système.

3.2.2 Platitude de l'attracteur de Rossler

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + a x_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c) \end{cases} \quad (6.19)$$

Adoptant x_3 comme sortie de référence, on vérifie ici à partir des relations (6.3) que :

$$\begin{aligned} x_1 &= c + (\dot{x}_3 - b) / x_3 \\ x_2 &= -x_3 - \ddot{x}_3 / x_3 + (\dot{x}_3^2 - b \dot{x}_3) / x_3^2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Ici aussi on a un invariant tel que :

$$\frac{x_3(\dot{x}_3 - b + \ddot{x}_3 - \dot{x}_3 \ddot{x}_3) - 2\dot{x}_3 \ddot{x}_3 + b \ddot{x}_3 + 2(\dot{x}_3^2 - b \dot{x}_3) \dot{x}_3 / x_3 + x_3^2(\dot{x}_3 + c)}{x_3 - \dot{x}_3^2 + b \dot{x}_3 + x_3^3} = a \quad (6.21)$$

x_3 est donc une sortie plate par rapport à l'entrée a . On vérifie aussi que c'est la seule sortie plate atomique de ce système.

4. DETECTION DE PANNES DANS UN SYSTEME CHAOTIQUE PLAT

La détection de pannes sera ici basée sur les relations de platitude établies au paragraphe précédent.

Dans le cas de l'oscillateur de Chen, en appliquant l'approche proposée au chapitre 4 on aura :

$$\begin{cases} |x_2 - (\frac{1}{a}\dot{y}_1 + y_1)| \leq \varepsilon_{x_2} \\ |x_3 + \frac{1}{y}(\frac{1}{a}\ddot{y} + (1 - \frac{c}{a})\dot{y} + (a - 2c)y)| \leq \varepsilon_{x_3} \end{cases} \quad (6.22)$$

et

$$\begin{aligned} & |b(\frac{1}{a}\ddot{y} + (1 - \frac{c}{a})\dot{y} + (a - 2c)y) - (-u - y^2 - \frac{1}{a}y\dot{y} + \frac{\dot{y}}{y^2}(\frac{1}{a}\ddot{y} + (1 - \frac{c}{a})\dot{y} + (a - 2c)y) \\ & - \frac{1}{y}(\frac{1}{a}\ddot{y} + (1 - \frac{c}{a})\dot{y} + (a - 2c)y))y| \leq \varepsilon_u \end{aligned} \quad (6.23)$$

En fait on peut remarquer que chacune de ces conditions met en œuvre de façon incrémentale les dérivées de la sortie. Il paraît alors intéressant de transformer chacune des conditions de platitude par une condition exprimant chacune des dérivées successives de la sortie en fonction des entrées/sorties et de ses dérivées d'ordre inférieur. On vérifie que ceci est aussi possible avec les oscillateurs de Lorenz et de Rossler.

On a donc ici:

$$\begin{cases} \dot{y} = a(x_2 - y) \\ \ddot{y} = -a(x_3 + (a - 2c)y) + (c - a)\dot{y} \\ \ddot{\ddot{y}} = -(auy + y^3 + y^2\dot{y} + b(\ddot{y} + (a - c)\dot{y} + a(a - 2c)y) + \frac{\dot{y}}{y}(\ddot{y} + (a - c)\dot{y} + a(a - 2c)y) - (a - c)\ddot{y} + a(a - 2c)\dot{y}) \end{cases} \quad (6.24)$$

On peut donc écrire ici:

$$\begin{cases} y = h_0(\underline{x}) \\ \dot{y} = h_1(\underline{x}) \\ \ddot{y} = h_2(\underline{x}) \\ \dddot{y} = h_3(\underline{x}, u) \end{cases} \quad (6.25)$$

avec:

$$h_0(\underline{x}) = x_1, \quad h_1(\underline{x}) = a(x_2 - x_1), \quad h_2(\underline{x}) = -a(x_3 + (a - 2c))x_1 + (c - a)a(x_2 - x_1) \quad (6.26)$$

et

$$h_3(\underline{x}, u) = A(\underline{x}) + B(\underline{x})u \quad (6.27)$$

Avec

$$\begin{aligned} A(\underline{x}) = & -((h_0(\underline{x}))^2(h_0(\underline{x}) + h_1(\underline{x})) + b(h_2(\underline{x}) + (a - c)h_1(\underline{x}) + a(a - 2c)h_0(\underline{x}))) \\ & + \frac{h_1(\underline{x})}{h_0(\underline{x})}(h_2(\underline{x}) + (a - c)h_1(\underline{x}) + a(a - 2c)h_0(\underline{x})) - (a - c)h_2(\underline{x}) + a(a - 2c)h_1(\underline{x}) \end{aligned} \quad (6.28)$$

et

$$B(\underline{x}) = -a h_0(\underline{x}) \quad (6.29)$$

On peut alors approcher la valeur de la sortie y à l'instant $t + \tau$ par :

$$y(t + \tau) \approx h_0(\underline{x}(t)) + \tau h_1(\underline{x}(t)) + (\tau^2 / 2) h_2(\underline{x}(t)) + (\tau^3 / 6) h_3(\underline{x}(t), u(t)) \quad (6.30)$$

ou

$$y(t + \tau) \approx g(\underline{x}(t), u(t), \tau) \quad (6.31)$$

alors que sa valeur réelle sera telle que :

$$y(t + \tau) = g(\underline{x}(t), u(t), \tau) + \Delta y(t, \tau) \quad (6.32)$$

avec :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (\Delta y(t, \tau) / \tau^3) = 0 \quad \forall t \quad (6.33)$$

A l'instant $t + \tau$ on dira que l'on a détecté une panne de niveau ε_y depuis l'instant $t + \delta$, $\delta < \tau$, si :

$$| y(t + \sigma) - g(\underline{x}(t), u(t), \sigma) | \geq \varepsilon_y \quad \forall \sigma \in]\delta, \tau] \quad (6.34)$$

et

$$| y(t + \sigma) - g(\underline{x}(t), u(t), \sigma) | < \varepsilon_y \quad \forall \sigma \in]0, \delta] \quad (6.35)$$

Le paramètre τ doit être choisi tel que :

$$| h_0(\underline{x}(\tau)) - g(\underline{x}, u, \tau) | \leq \varepsilon_\tau \quad \forall \underline{x}(0) \in X, \forall u(\theta) \in U, \theta \in [0, \tau] \quad (6.36)$$

avec

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + \underline{g} u \quad (6.37)$$

et

$$\varepsilon_\tau < \varepsilon_y$$

Pour cela, on aura en général :

$$\tau \ll 1$$

Il n'est plus nécessaire d'estimer les dérivées de la sortie, par contre on doit disposer de mesures précises des composantes du vecteur d'état et de l'entrée.

5. DETECTION DE VARIATIONS PARAMETRIQUES DANS UN SYSTEME CHAOTIQUE PLAT

Si on suppose que les défaillances du système chaotique se manifestent par une variation des valeurs de leurs paramètres, dans le cas de l'oscillateur de Chen, compte tenu des relations de platitude (6.8) et (6.9), on peut écrire successivement:

$$a = \dot{x}_1 / (x_2 - x_1) \quad (6.38)$$

$$c = \frac{\ddot{x}_1 / a + \dot{x}_1 + a x_1 + x_1 x_3}{\dot{x}_1 / a + 2x_1} \quad (6.39)$$

et

$$b = \frac{(-u - x_1^2 - \frac{1}{a} x_1 \dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_1}{x_1^2} (\frac{1}{a} \ddot{x}_1 + (1 - \frac{c}{a}) \dot{x}_1 + (a - 2c)x_1) - \frac{1}{x_1} (\frac{1}{a} \ddot{x}_1 + (1 - \frac{c}{a}) \dot{x}_1 + (a - 2c)x_1))}{(\frac{1}{a} \ddot{x}_1 + (1 - \frac{c}{a}) \dot{x}_1 + (a - 2c)x_1)} x_1 \quad (6.40)$$

Ainsi, les mesures de la sortie plate x_1 et de l'entrée u et les estimées des dérivées de x_1 à l'ordre 3 permettraient de détecter une variation paramétrique mais ne permettent pas de l'identifier. Les mesures de x_1 et de x_2 et l'estimée de la dérivée première de x_1 permettent de détecter un changement de la valeur de a . La mesure de x_3 et les estimées à l'ordre 3 des dérivées de x_1 permettent alors d'identifier un changement de a de b et de c .

On retrouve donc la difficulté d'estimer en ligne les dérivées de différentes variables. Il est possible de contourner celle-ci en considérant une échelle plus fine du temps et en observant que les expressions obtenues pour les dérivées successives de la sortie plate y dépendent en cascade de ces paramètres : $h_1(\underline{x})$ dépend de a , $h_2(\underline{x})$ dépend de a et c et $h_3(\underline{x})$ dépend de a , c et b .

$$h_0(\underline{x}) = x_1, \quad h_1(\underline{x}) = a(x_2 - x_1), \quad h_2(\underline{x}) = -a(x_3 + (a - 2c))x_1 + (c - a)a(x_2 - x_1) \quad (6.41)$$

et

$$h_3(\underline{x}, u) = A(\underline{x}) + B(\underline{x}) u \quad (6.42)$$

avec

$$\begin{aligned} A(\underline{x}) = & -((h_0(\underline{x}))^2 (h_0(\underline{x}) + h_1(\underline{x})) + b(h_2(\underline{x}) + (a-c)h_1(\underline{x}) + a(a-2c)h_0(\underline{x})) \\ & + \frac{h_1(\underline{x})}{h_0(\underline{x})} (h_2(\underline{x}) + (a-c)h_1(\underline{x}) + a(a-2c)h_0(\underline{x})) - (a-c)h_2(\underline{x}) + a(a-2c)h_1(\underline{x})) \end{aligned} \quad (6.43)$$

et

$$B(\underline{x}) = -a h_0(\underline{x}) \quad (6.44)$$

On a donc :

$$\frac{\partial h_1}{\partial a} = x_2 - x_1, \quad \frac{\partial h_1}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial b} = 0 \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial a} = -x_3 - ax_2 + c(x_1 + x_2), \quad \frac{\partial h_2}{\partial c} = a(x_1 + x_2), \quad \frac{\partial h_2}{\partial b} = 0 \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial a} = -x_1^2(x_2 - x_1) + (bc - a + c - 1 - u)x_1 - a(b+1)x_2 - bx_3, \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial c} = -ba(x_1 + x_2) + (1 - 2a)x_1, \quad \frac{\partial h_3}{\partial b} = (ac - a + c)x_1 - a(c - a)x_2 + ax_3 \quad (6.48)$$

Considérant une période égale à 3θ avec $3\theta \ll 1$, on peut écrire :

$$\begin{cases} y(t + \theta) \approx (h_0(\underline{x}(t)) + \theta h_1(\underline{x}(t)) + (\theta^2 / 2) h_2(\underline{x}(t)) + (\theta^3 / 6) h_3(\underline{x}(t))) \\ y(t + 2\theta) \approx (h_0(\underline{x}(t)) + 2\theta h_1(\underline{x}(t)) + (2\theta^2) h_2(\underline{x}(t)) + (4/3 \theta^3) h_3(\underline{x}(t))) \\ y(t + 3\theta) \approx (h_0(\underline{x}(t)) + 3\theta h_1(\underline{x}(t)) + (9/2 \theta^2) h_2(\underline{x}(t)) + (9/2 \theta^3) h_3(\underline{x}(t))) \end{cases} \quad (6.49)$$

avec

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/6 \\ 2 & 2 & 4/3 \\ 3 & 9/2 & 9/2 \end{pmatrix} = 1 \quad (6.50)$$

ou encore à l'instant courant t :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{h}_1(t) = (-7/6 y(t) + 3 y(t + \theta) - 3/2 y(t + 2\theta) - 1/3 y(t + 3\theta)) / \theta \\ \hat{h}_2(t) = (11/6 y(t) - 5y(t + \theta) + 4y(t + 2\theta) - 5/6 y(t + 3\theta)) / \theta^2 \\ \hat{h}_3(t) = (-y(t) + 3y(t + \theta) - 3y(t + 2\theta) + y(t + 3\theta)) / \theta^3 \end{array} \right. \quad (6.51)$$

$$\hat{h}_2(t) = (11/6 y(t) - 5y(t + \theta) + 4y(t + 2\theta) - 5/6 y(t + 3\theta)) / \theta^2 \quad (6.52)$$

$$\hat{h}_3(t) = (-y(t) + 3y(t + \theta) - 3y(t + 2\theta) + y(t + 3\theta)) / \theta^3 \quad (6.53)$$

Compte tenu des dépendances entre a , c et b et $h_1(t)$, $h_2(t)$ et $h_3(t)$, relations (6.51), (6.52) et (6.53), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ si } \hat{h}_1(t) = h_1(t) \text{ et } \hat{h}_2(t) = h_2(t) \text{ et } \hat{h}_3(t) \neq h_3(t) \Rightarrow b \neq \bar{b} \\ 2) \text{ si } \hat{h}_1(t) = h_1(t) \text{ et } \hat{h}_2(t) \neq h_2(t) \text{ et } \hat{h}_3(t) \neq h_3(t) \Rightarrow c \neq \bar{c} \\ 3) \text{ si } \hat{h}_1(t) \neq h_1(t) \text{ et } \hat{h}_2(t) \neq h_2(t) \text{ et } \hat{h}_3(t) \neq h_3(t) \Rightarrow a \neq \bar{a} \end{array} \right. \quad (6.54)$$

où \bar{a} , \bar{c} et \bar{b} sont les valeurs nominales de a , c et b .

Remarquons que :

- Le retard de détection du changement paramétrique est par construction égal à 3θ .
- Si $x_1(t) = x_2(t)$ le cas 3 se ramène au cas 2 et on ne peut détecter pour ce moment là une variation paramétrique de a . Cette situation perdurera dans le cas où :

$$x_1(0) = x_2(0) = \sqrt{2bc - ab}, \quad x_3(0) = 2c - a \quad \text{avec } u(t) = 0 \quad (6.55)$$

- Si $x_1(t) = -x_2(t)$ le cas 2 se ramène au cas 1 et on ne peut détecter à ce moment là une variation paramétrique de c . Cette situation perdurera dans le cas où :

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-2at} = -x_2(t), \quad x_3(t) = a, \quad u(t) = 0 \quad (6.56)$$

- Si $x_1(t)=0$, il n'est pas possible de détecter une variation paramétrique de c à l'instant t . Cette situation perdure dans le cas où $x_1(0) = x_2(0) = 0$, la dynamique du système chaotique se ramène à celle d'un système du premier ordre de dynamique donnée par :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dot{x}_3 = b x_3 + u \quad (6.57)$$

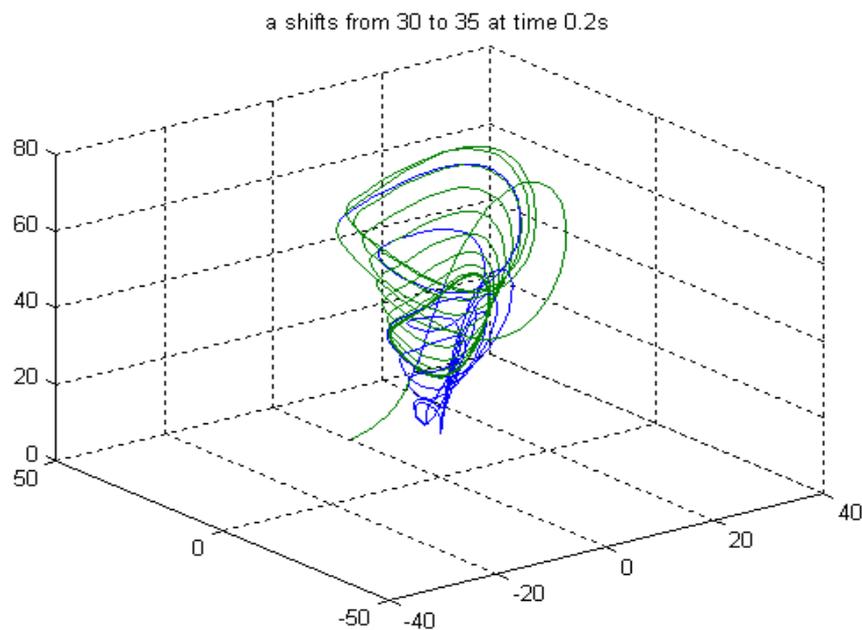


Figure 6.9 : Changement paramétrique (a) de l'oscillateur de Chen

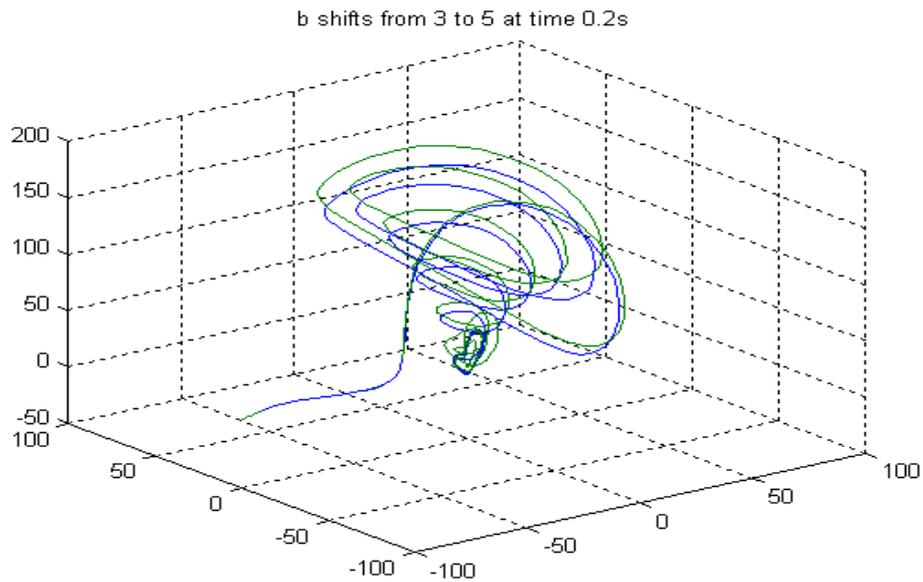


Figure 6.10 : Changement paramétrique (b) de l'oscillateur de Chen

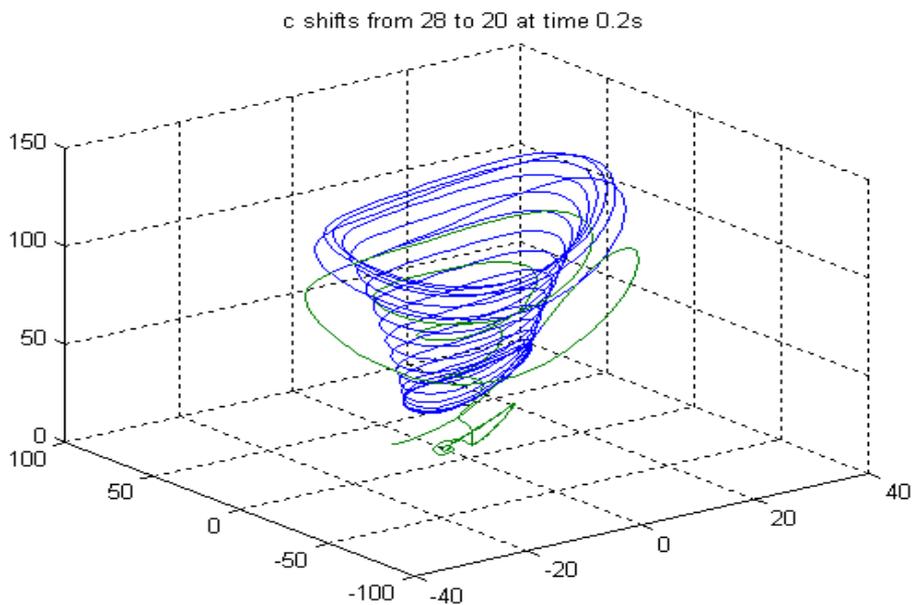


Figure 6.11 : Changement paramétrique (c) de l'oscillateur de Chen

On notera sur ces figures l'absence de changement qualitatif dans le comportement du système, d'où la difficulté apparente d'en détecter les changements paramétriques.

6. CONCLUSION

La détection des pannes dans les systèmes chaotiques, de par leurs caractéristiques, semble une entreprise particulièrement difficile. Dans ce chapitre, après avoir introduit les systèmes stochastiques continus, on a montré que si le système chaotique est différentiellement plat, il est possible de détecter, compte tenu des relations de redondances qui découlent de cette propriété, des comportements anormaux. Dans le cas où l'erreur se manifeste par un changement paramétrique, il est alors possible d'estimer en ligne ces paramètres et d'en déduire théoriquement tout comportement anormal. Finalement, dans le cas particulier où la structure paramétrique du système chaotique est triangulaire, l'estimation paramétrique conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires. On constate donc combien la propriété de platitude différentielle est d'intérêt pour mener à bien le diagnostic de tels systèmes.

CONCLUSION GENERALE

L'un des plus importants progrès théoriques de ces dernières années en Automatique concerne l'analyse et la commande des systèmes différentiellement plats. En effet, depuis un peu plus de dix ans, les automaticiens ont été amenés, dans le cadre de la commande des systèmes mécaniques articulés à caractère fortement non linéaire et plus précisément dans le cadre du suivi de trajectoires, à distinguer cette nouvelle classe de systèmes et effectivement, nombre de systèmes présentent cette propriété. Ceci a conduit à la conception de nouvelles méthodes de synthèse de lois de commande non linéaires qui permettent de conférer aux sorties de tels systèmes un comportement standard au voisinage de trajectoires de référence. Ceci correspond donc à une avancée significative pour la commande des systèmes non linéaires.

L'apparition d'une défaillance au sein d'un système différentiellement plat commandé (défaillance au sein du process proprement dit, ou au niveau de ses chaînes de mesure ou de ses chaînes de commande), résulte en une modification de son comportement. La propriété de platitude implique l'existence de redondances analytiques qui, une fois identifiées, semblent pouvoir être mises à profit pour détecter ces défaillances. Ceci semblait d'autant plus intéressant que la plupart des techniques de diagnostic disponibles aujourd'hui sont de nature linéaire ou résultent d'une extrapolation de celles-ci, ce qui ne permet pas en général de traiter correctement le problème du diagnostic de panne de systèmes dynamiques franchement non linéaires.

Cette thèse a donc porté sur le développement de techniques de détection et d'identification des pannes pour les systèmes différentiellement plats.

Ainsi, après avoir introduit et illustré la notion de platitude différentielle, les relations de redondance sur laquelle elles se basent ont été mises en avant pour leur utilisation dans le cadre du diagnostic basé sur des redondances analytiques. Un premier exemple élémentaire concernant un chariot susceptible de glisser sur un plan a été présenté. Dans le cadre d'un système complexe différentiellement plat, celui-ci étant forcément composé de sous systèmes différentiellement plats. Il semble alors intéressant d'appliquer cette approche du diagnostic au niveau des sous systèmes de façon à mieux identifier les composants défaillants du système. Par ailleurs, très souvent la propriété de platitude différentielle est de type implicite. Que faire dans ces cas là ? Une réponse a été apportée dans le cadre d'une application particulière : on a considéré la platitude différentielle de la dynamique de guidage d'un aéronef qui est de nature implicite. On a

alors montré comment un réseau de neurones inversant numériquement cette dynamique permet de mener à bien son diagnostic. Une expérience numérique a été développée dans ce sens.

La réalisation d'un diagnostic basé sur les relations de platitude nécessite la génération en ligne de bonnes estimées des sorties et de leurs dérivées temporelles jusqu'à un ordre suffisant. Adoptant les travaux récents de Fleiss et de Sira-Ramirez, une structure de diagnostic et de commande intégrant cet estimateur a été proposée et évaluée sur le plan théorique. Ici aussi cette approche a été illustrée par une application au cas d'un pendule non linéaire.

Finalement, on s'est intéressé à des systèmes réputés présenter un comportement difficilement prévisible, les systèmes stochastiques. On a alors montré dans le cas de systèmes chaotiques plats particuliers comment la propriété de platitude peut être mise à profit pour détecter des variations paramétriques au sein d'un tel type de système.

Sur le plan conceptuel et méthodologique, les apports de cette thèse sont les suivants :

- Les notions de minimalité pour les sorties plates, de platitude stricte et de degré additionnel de redondance ont été introduites et illustrées. Ceci a conduit à la proposition d'une méthode globale de détection de pannes basée sur la platitude.
- La proposition d'une approche structurée du diagnostic des systèmes différentiellement plats partant de la constatation que les systèmes différentiellement plats de complexité élevée sont souvent constitués de sous-systèmes eux-même différentiellement plats. Ainsi, il a été proposé de mettre en œuvre l'approche de détection de pannes précédente au sein de cette structure de façon à en identifier les sous systèmes défaillants.
- Le cas des systèmes présentant une platitude implicite a été considéré et on a montré dans le cadre d'une application aéronautique comment les réseaux de neurones permettent de constituer une solution numérique au problème de détection de pannes.
- Les performances d'un filtre dérivateur associé à un système lui même soumis à une commande plate, ont été étudiées et ceci a conduit à proposer des corrections dans la loi de commande plate de façon à effacer l'effet des erreurs d'estimation.
- Finalement, on a démontré la platitude différentielle de plusieurs systèmes chaotiques classiques et on a montré comment la propriété de platitude peut être mise à profit pour détecter et identifier des variations paramétriques au sein de tels systèmes.

Ce travail de recherche constitue une première approche pour le développement de méthodes de diagnostic spécifiques aux systèmes dynamiques différentiellement plats qui, souvent, sont non

linéaires. Beaucoup reste à faire dans ce domaine et parmi les nombreuses voies de recherche susceptibles d'améliorer l'applicabilité et l'efficacité de cette approche de diagnostic basée sur la propriété de platitude du système contrôlé, on citera:

- La prise en compte des informations disponibles sur les erreurs de mesure des sorties .
- La robustesse de l'approche par rapport à des erreurs de modèle et la différentiation entre évolutions paramétriques normales et celles dues à une panne.
- Le suivi de la propagation des pannes dans une structure complexe différentiellement plate.
- La synthèse de lois de commande plates susceptibles de contribuer à l'identification de pannes lors de leur détection.

Ainsi on peut s'attendre à ce que le vaste champ de recherche ouvert par cette thèse donnera lieu dans le proche futur à de nombreux développements pour cette importante classe de systèmes non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

Références

- [1] Aguilar-Ibañez C., “Algebraic approach for the reconstruction of Rössler system from the x3 variable”, *Revista Mexicana de Fisica*, Vol.52, pp.64-69, 2006.
- [2] Azam M., Pattipati K., Patterson-Hine A., “Optimal Sensor Allocation for Fault Detection and Isolation”, *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*.
- [3] Adjallah K.H., “Contribution au diagnostic de systèmes par observateurs d'états”, *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine*, France, 1997.
- [4] Ananthasayanam M.R., Sarkar A.K., Bhattacharya A., Tiwari P.K., Prashant, “Nonlinear Observer State Estimation From Seeker Measurements and Seeker-Radar Measurement Fusion” *AIAA, Guidance Navigation and Control Conference*, San Francisco, California, 15-18 août 2005.
- [5] Benchimol G., P. Lévine, J.C. Pomerol, “Systèmes experts dans l'entreprise”, *Hermès éditions*, 1986.
- [6] Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J.P., Rotella F., Zambettakis I., “Automatique: commande et optimisation des processus”, Editions Technip, Méthodes et Techniques de l'Ingénieur, 1990.
- [7] Bergman N., Larsson M., “Fault Detection and Isolation in the Water Tank World”, Linköping University, Sweden.
- [8] Barron R., “Universal approximation bounds for superposition of a sigmoidal function” *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 39, No. 3, 1993, pp. 930–945.
- [9] Bernieri A., Betta G., Sansone C., “A Neural Network Approach to Instrument Fault Detection and Isolation”, *IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement*, Vol. 44, No. 3, June 1995.
- [10] Belcastro C. M., “Application of failure Detection, Identification, and Accommodation Methods for Improved Aircraft Safety”, *Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, VA June 25-27, 2001.
- [11] Brunet J., Jaume D., Labarrère M., Rault A., Vergé M., « Détection et diagnostic de pannes : Approche par Modélisation », *Hermès Sciences publication*, 1990.
- [12] Betta G., Pietrosanto A., “Instrument Fault Detection and Isolation: State of the Art and New Research Trends”. *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, St. Paul, Minnesota, USA, May 18-21, 1998.
- [13] Biswas G., Cordier M-O., Lunze J., Travé-Massuyès L., Staroswiecki M., “Diagnosis of Complex Systems: Bridging the Methodologies of the FDI and DX Communities”, *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 34, No. 5, October 2004.
- [14] Brunet J., “détection et Diagnostic de panes: Approche par modélisation”, Hermès Ed., Paris, 1990.
- [15] Chen G., Dong X., “From chaos to order: perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical systems”, *J. of Bifurcation Theory*, V.3, 1993, pp.1363-1409.
- [16] Chen J., Patton R.J., Zhang H.Y., “Design of robust structured and directional residuals for fault isolation via unknown input observers”, *Proc. of 3rd European Control Conf.*, vol. 1, pp. 348-353, 1995

- [17] Campbell S. L., Terrell W. J., "Determining Flatness for Complex Nonlinear Systems", IEEE, 0-7803-2642-3/95, 1995.
- [18] Cordier M-O., Dague P., Lévy F., Montmain J., Staroswiecki M., Travé-Massuyès L., "Conflicts Versus Analytical Redundancy Relations: A Comparative Analysis of the Model Based Diagnosis Approach From the Artificial Intelligence and Automatic Control Perspectives", *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 34, No. 5, October 2004 .
- [19] Capriglione D., Consolatina Liguori, "Analytical Redundancy for Sensor Fault Isolation and Accommodation in Public Transportation Vehicles" *IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement*, Vol. 53, No. 4, August 2004.
- [20] Clark R.N., "Instrument fault detection", *IEEE Trans., Aerospace and Electronic System*, EAS-14, pp. 558-563, 1975.
- [21] Cassar J-P., Staroswiecki M., "vers une approche unifiée de la surveillance », école d'été d'Automatique de Grenoble, 1996.
- [22] Carpentier T., Litwak R., "Une approche structurelle pour le positionnement de capteurs en vue de la surveillance", AIG'96, *Automatique, Génie Informatique Image*, Tours, pp. 103-107, 1996.
- [23] Carmen E., Quiroga R., « Représentation Neuronale de la Dynamique de Vol d'un Aéronef », DEA Rapport Technique du LAAS-CNRS, 2005.
- [24] Chafouk H, Langlois N., "Fault Diagnosis Method Using a Neural Approach", CSS'01, International Conference on Communication, Signals and Systems, AMSE, vol.1, pp.194-199, Morocco, 19-21 March 2001.
- [25] Chafouk H., Aitouche A., « Détection de défauts de capteurs par réseaux de neurones », Conférence MCEA'98 : Medeterranian Conference on Electronic and Automatic, Marrakech, Maroc, September 17-19, 1998
- [26] Chafouk H., Aitouche A., «Détection de capteurs défaillants des systèmes bilinéaires par la méthode du maximum de vraisemblance généralisé », International AMSE Conference CSS'95 : Comm, Signal & Systems, Rabat, Maroc 7 – 9 Octobre. 1995.
- [27] Chow E. Y., "Failure detection system design methodology", *Thesis, Lab. Information and Decision system*, M.I.T, Cambridge, 1980.
- [28] Chow E. Y., Willsky A. S., "Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 29, n°7, pp. 603-614, July 1984.
- [29] Choukroun D., Weiss H., Bar-Itzhack I.Y., Oshman Y., "Quaternion Estimation from Vector Observations Using a Matrix Kalman Filter", *AIAA, Guidance Navigation and Control Conference*, San Francisco, California, 15-18 août 2005.
- [30] Courtine S., "Détection et localisation de défauts dans les entraînements électriques", Thèse de l'Institut Polytechnique de Grenoble, 1997.
- [31] Cocquemot V., "Surveillance des processus industriels complexes : Génération et optimisation des relations de redondance analytiques", Thèse des Sciences et Technologiques de Lille, 1997
- [32] Conte G., Moog C.H., Perdon A., «Un théorème sur la représentation entrée/sortie d'un système non linéaire. Acad. Sci. Paris I(307), pp. 363-366. 1988.
- [33] Cox D., Little J., O'Shea D., "Ideals, Varieties and Algorithms" Second ed. Springer, New York. 1996.

- [34] Comtet-Varga G. “Surveillance des systèmes non linéaires: Application aux machines asynchrones”, Thèse de doctorat, université des sciences et technologies de Lille, France, 1997.
- [35] Cybenko G., “Approximation by superpositions of a sigmoidal function”, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, Vol. 2, No. 4, 1989, pp. 303–314.
- [36] Ding X.S., Ding E.L., Jeinsch T., “An approach to analysis and design of observer and parity relation based FDI systems” *Proc. Of the IFAC World Congress*, Beijing, China, vol. P, n° 7^e-41, pp. 37-42, 1999.
- [37] Ding X., Frank P.M., “Frequency domain approach and threshold selector for robust model-base fault detection and isolation”, *Proc. of IFAC Symp. SAFEPROCESS’91*, Baden Baden, Germany, vol. 1, pp.307-312, 1991.
- [38] Ding X., Frank P.M., “Comparison of observer-based fault detection approaches”, *SAFEPROCESS’94*, IFAC Symposium on fault Diagnostic, Supervision and Safety for Technical Processes, Espoo, Finland, vol. 2, pp.556-561, 1994.
- [39] Delaire G., Cassar J.P., Staroswiecki M., “Comparison of identification and parity space approach for failure detection in single-input single output systems”, *IEEE Conf. On Control Applications*, Glasgow, Grande-Bretagne, pp. 865-870, 1994.
- [40] Delaire G., Cassar J.P., Staroswiecki M., “Comparison of generalized least square identification and parity space techniques for FDI purpose in SISO systems”, *Proc. of the 3rd European control Conf.*, Rome, Italy, vol. 3, pp. 2011-2116, 1995.
- [41] Dubuisson B., “Eléments de réflexion sur le diagnostic des systèmes”, *Recueil Greco Diagnostic*, CNRS, 1988.
- [42] de Persis C., Isidori A., “A Differential Geometric Approach to Fault detection and Isolation for Nonlinear Systems” Department of Systems Science and Mathematics, Washington University, St. Louis, MO 63130 USA, May 31, 2000.
- [43] Etkin B., “*Dynamics of Atmospheric Flight*”, John Wiley & Sons Inc, 1972.
- [44] Elgersma M., Glavaski S., “Reconfigurable Control for Active Management of Aircraft System Failures”, *Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, VA June 25-27, 2001.
- [45] Emami-Naeini A. E. A., “Effect of model uncertainty of failure detection: The threshold selector”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-33, pp. 1106-1115, 1988.
- [46] Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P., “Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 315, série I : 619-624., 1992.
- [47] Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P., “Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples”, *INT. J. CONTROL*, Vol.61, No. 6, 1327-1361, 1995.
- [48] Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P., “A Lie-Bäcklund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 5, 1999.
- [49] Fliess M., Sira-Ramirez H., “An algebraic framework for linear identification”, *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, vol.9, 2003, pp. 151-168.
- [50] Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P., “A Lie-Bäcklund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 44, No. 5, 1999, pp. 922–937.

- [51] Funahashi K., "On the approximate realization of continuous mappings by neural networks", *Neural Networks*, Vol. 2, 1989, pp. 183–192.
- [52] Fernandez V., Penin L. F., Araujo J., Caramagno A., "Modelling and FDI specification of a RLV Re-entry for Robust Estimation of Sensor and Actuator Faults", AIAA, *Guidance Navigation and Control Conference*, San Francisco, California, 15-18 août 2005.
- [53] Fossard A.J., Normand-Cyrot D., « Système non linéaire, Tome 1: modélisation-estimation ». Masson, Paris, 1993.
- [54] Frank P.M., "Fault diagnosis in dynamic systems via state estimation- a survey, In Tzafestas S., Singh M., Schmidt G. (Eds.) *Systems fault diagnostics, reliability and related knowledge-based approaches*, 1, pp. 35-98, 1987.
- [55] Frank P.M., Wunnenberg J., "Robust diagnosis using unknown input observer schemes, In *fault diagnosis in dynamic systems: theory and application*, Patton R.J., Frank P.M., Clark R., Prentice Hall, Englewood, Cliffs, pp. 47-98, 1989.
- [56] Frank P.M., "The Application of Fuzzy logic to fault diagnosis and supervision" LFA, pp.59-87, 1998.
- [57] Frank P.M., "Enhancement of robustness in observer based fault detection" IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for technical Industrial Processes, SAFEPROCESS'91, Baden Baden, Germany, vol. 1, pp.275-287, 1991.
- [58] Fussel D., Isermann R., "Model-based fault detection and diagnosis methods, Part A : methods", International Conference on Probabilistic Safety Assessment and Management, PSAM 4, New York, USA, 1998.
- [59] Garcia E.A., Frank P.M., "Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis: a survey", *Control Eng. Practice*, vol. 5, pp. 663-670, 1997.
- [60] Gentil S., "Filtrage d'alarmes en temps réel", Rapport de recherche, convention DRET, 1997.
- [61] Gertler J.J., "Structured residuals for fault isolation, disturbance decoupling and modelling error robustness, Proc. Of the IFAC Symp. On-line fault detection and Supervision in the chemical Process Industries, pp. 111-119, Newark, Delaware, 1992.
- [62] Gertler J.J., Monajemy R., "Generation of direction residuals with dynamic parity equations", Proc. Of the 12th World Congress of IFAC, Sydney, Australia, pp. 505-510, 1993.
- [63] Gertler J.J., Kunwer M.M., "Optimal residual decoupling for robust fault diagnosis", *Int. J. Control*, 61(2), pp. 395-421, 1995.
- [64] Gertler J.J., "Diagnosing parametric faults: from parameter estimation to parity relations", *American Control Conference*, Seattle, WA, USA, 1995.
- [65] Gertler J.J., "Survey of model based-based failure detection and isolation in complex plants". *IEEE. Control System Magazine*, pp. 3-11, 1988.
- [66] Gertler J.J., "Analytical redundancy methods in fault detection and isolation-survey and synthesis", *Proc. Of the IFAC Symposium, SAFEPROCESS'91*, Baden-Baden, Germany, pp. 9-21, 1991.
- [67] Gertler J.J., "On-line fault detection in uncertain non linear system using diagnostic observers". *A survey. Int. J. Systems SCI.*, 25(12), 2129-2154, 1988.
- [68] Gertler J.J., "Fault Detecting and Diagnosis in Engineering Systems". Marcel Dekker,

- 1998.
- [69] Ghetie M., Saif M., "On-Line Fault Detection and Isolation Using Unbalanced Residuals", *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona USA*, December 1999.
- [70] Ganguli S., Papageorgiou G., Glavaski S., Elgersma M., "Piloted Simulation of Fault Detection, Isolation and Reconfiguration Algorithms for a Civil Transport Aircraft", *AIAA, Guidance Navigation and Control Conference*, San Francisco, California, 15-18 août 2005.
- [71] Glavaski S., Elgersma M., "Diagnostic for Active Management of Aircraft System Failures", *IEEE, Honeywell Laboratories*, 2001.
- [72] Glavaski S., Elgersma M., "Active Aircraft Fault Detection and Isolation" *IEEE, Honeywell International*, 2001.
- [73] Geiger G., "Fault identification of a motor-pump system using parameter estimation and pattern classification", *In Proc. Of the 9th IFAC World Congress*, pp.184-189, Budapest, Hungary, 1984.
- [74] Geodecke W., "fault detection in a tubular heat exchanger based on modelling and parameter estimation", *In IFAC Identification and System Parameter Estimation*, pp 1095-1100, York, UK, 1985.
- [75] Ghosh R., Tomlin C., "Nonlinear Inverse Dynamic Control for Model-based Flight", *Proceeding of AIAA*, 2000.
- [76] Hornik K., "Approximation capabilities of multilayer feedforward networks", *Neural Networks*, Vol. 4, No. 2, 1991, pp. 251-257.
- [77] Han Yong H., ZengQi S., "Fault Detection and Isolation of Flight Based on Robust Observer" *Proceedings of the 5th Word Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, P.R. China, June 15-19, 2004.
- [78] Halder P., Chaudhuri S. K., Mukhopadhyay S., "On Line Sensor Fault Detection, Isolation and Accommodation in Tactical Aerospace Vehicle", *IEEE*, pp. 684-686, 2004.
- [79] Hermann R., Krener A.J., "Nonlinear Controllability and Observability", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-22, No. 5, October 1977.
- [80] Haykin S., "*Neural Networks: A Comprehensive Foundation*", Prentice Hall, 2nd Ed., 1998.
- [81] Isermann R., "Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods – Advanced methods and applications". *Proc. Of the IMEKO word congress, New Measurements – Challenges and Visions*, Tampere, Finland, vol. 1 pp 1-28, 1997.
- [82] Isermann R., "Process fault detection based on modelling and estimation methods", *Automatica*, 20(4), 387-404. 1984.
- [83] Isermann R., "Integration of fault detection and diagnosis methods", *Proc. Of the IFAC Symposium on fault detection, Supervision and Safety for Technical Industrial Processes, SAFPROCESS'94*, Helsinki, Finland, pp. 597-612, 1994.
- [84] Isermann R., "Fault diagnosis on machines via parameter estimation and knowledge processing", *Automatica*, vol. 29, pp.815-836, 1993.
- [85] Isermann R., "Process fault diagnosis based on process model knowledge, parts I (Principles for fault diagnosis with parameter estimation) and Parts II (Case study experiments)",

- ASME J., Dynamic Systems, Measurement Control*, pp. 620-626, pp. 627-633, 1991.
- [86] Isermann R., Ballé P., "Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes". *Proc. Of the IFAC, 13th Triennial World Congress*, San Francisco, USA, vol. 7, pp. 1-12, 1996.
- [87] Isermann R., "Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods an introduction". *Control Engineering Practice*, tome 5(5), 387-404. 1997.
- [88] Isermann R., "Estimation of physical parameters for dynamic processes with application to an industrial robot", *In American Control Conference*, San Diego USA, 1990
- [89] Isermann R., ed., *Proceedings IFAC/IMACS-symposium on Fault detection, Supervision and Safety for Technical Process- SAFEPROCESS'91*, September 10-13, Baden-Baden, Germany, 1991.
- [90] Ingvalson R., Rotstein H. P., Keviczky T., Balas G. J., "Fault Detection Design for Uninhabited Aerial Vehicles", *AIAA, Guidance Navigation and Control Conference*, San Francisco, California, 15-18 août 2005.
- [91] Isidori A., "*Nonlinear Control Systems*", Springer-Verlag, 2nd Ed., 1989.
- [92] Jategaonkar R. J., "Aircraft parameter estimation using recurrent neural networks- A critical appraisal", *Proceedings de AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, Baltimore, MD, Août 1995.
- [93] Kalman R.E., Betram J.E., "Control system analysis and design via the second method of Lyapunov –I: Continuous-time system", *ASME journal of Basic Engineering*, Vol. 82, pp. 371-393, 1960.
- [94] Kabbaj N., Polit M., "Adaptive Observers based Fault Detection and Isolation for an Alcoholic Fermentation Process", *IEEE, 0-7803-7241*, 7 January 2001.
- [95] Kabbaj N., "Développement d'algorithmes de détection et d'isolation de défauts pour la supervision des bioprocédés ", Thèse de doctorat, Université de Perpignan, France, Décembre 2004.
- [96] Kim K. H., Lee J. G., Park C. G., "Extension of Parity Space Approach for Two-Fault Detection and Isolation", *AIAA, Guidance Navigation and Control Conference*, San Francisco, 15-18 août 2005.
- [97] Lévine L., "Analyse et Commande des Systèmes Non-linéaires" Polycopié de cours à l'ENPC, Paris, 1999.
- [98] Lardon L., Bernard O., Steyer J. P., "Application du modèle des croyances transférables pour le diagnostic d'un réseau de capteurs et d'observateurs: Application a un procédé de traitement des eaux".
- [99] Lavigne L., Cazaurang F., Bergeon B., "Modelling of Longitudinal Disturbed Aircraft Model by Flatness Approach", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Texas Austin, USA*, 2003.
- [100] Laprie J-C., Kaaniche M., Guillermain H., Fabre J-C., "Guide de la sûreté de fonctionnement", Cepadué Editions, 1996.
- [101] Lavigne L., Cazaurang F., Bergeon B., "Modeling a Disturbed Simplified Aircraft Model with Flatness Property", *Proceeding of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Texas, Austin, Août 2003.

- [102] Lévine J., "On Flatness Necessary and Sufficient Conditions", Proceedings of 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, NOLCOS 2004, Stuttgart, 2004.
- [103] Lévine J., «Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires», polycopié de cours à l'ENPC, Paris, 2004.
- [104] Lu W., Mora-Camino F., K. Achaibou, "A Flatness Based Flight Guidance Control Using Neural Networks". *IEEE, 0-7803-9307-4/05*. 2005.
- [105] Lu W., Mora-Camino F., M. de Coligny, Achaibou K., "Flight Mechanics and Differential Flatness", *DINCON 2004, Ilha Solteira, Brasil, pp. 830-839*, 2004.
- [106] Lu W., Mora-Camino F., « Systèmes plats et la Dynamique du vol », *EDSYS Congres Doctorant*, Toulouse, France, 2004.
- [107] Lu W., Mora-Camino F., Achaibou K., "Differential Flatness and Flight Guidance: A Neural Adaptive Approach", *AIAA, Guidance Navigation and Control Conference*, San Francisco, 15-18 août 2005
- [108] Lu W., « Contribution au Suivi Automatique de Trajectoire par un avion : Commande Plate et Réseaux de Neurones », *Thèse doctorale, Université Toulouse II*, Toulouse, décembre 2005.
- [109] Luenberger D.G., "An introduction to observers", *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol. 16, n° 6, pp. 596-602, 1971.
- [110] Luenberger D.G., "Observing the state of a linear system", *IEEE Trans. Mil. Electron.*, ME-8, pp. 74, 1964.
- [111] Lou X.C., Willsky A.S., Verghese G.C., "Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems", *Automatica*, vol.22, n°3, pp. 333-344, 1996.
- [112] Magani L., Scattolini R., Rossi C., "A Fault Detection and Isolation Method for Complex Industrial Systems", *IEEE Trans. On systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, Vol. 30, No. 6*, November 2000.
- [113] Martin Ph., "Contribution à l'étude des systèmes Différentiellement plats", *Thèse de doctorat*, Ecole des Mines de Paris, 1992.
- [114] Martin Ph. Devasia S., Paden B., "A Different Look at Output Tracking Control of a VTOL Aircraft" *Automatica*, vol. 32, n° 1, pp. 101-107, 1999.
- [115] Maquin D., Ragot J., "Diagnostic de fonctionnement des systèmes à partir de modèles", *4^{ème} Conférence Internationale de Génie des Systèmes Industriels*, GSI, France, 1992.
- [116] Maquin D., Cocquempot V., Cassar J.P., Staroswiecki M., Ragot J., "Generation of analytical redundancy relations for FDI purposes", *IEE Int. Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives, SDEMPED'97*, Carry-le Rouet, France, pp. 270-276, September 1-3rd, 1997.
- [117] McLean D., Aslam-Mir S., Benkhedda H., "Fault Detection and Control Reconfiguration in Flight Control", *Departement of Aeronautics and Astronautics, University of Southampton*
- [118] Mattone R., Alessandro De Luca, "Conditions for Detecting and Isolating Sets of Faults in Nonlinear Systems", *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*, Seville, Spain, December 12-15, 2005.
- [119] Massoumnia M.A., "A geometric approach to the synthesis of failure detection filters", *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol. 31, no 9, 1986.

- [120] Marcos A., Balas G. J., Bokor J., "Integrated FDI and Control for Transport Aircraft", *AIAA, Guidance Navigation and Control Conference*, San Francisco, California, 15-18 août 2005.
- [121] Marcos A., Ganguli S., Balas G. J., "An application of H_∞ fault detection and isolation to a transport aircraft", *Control Engineering Practice*, 13 (2005) 105-119.
- [122] Miller R. H., Larsen M. L., "Optimal Fault Detection and Isolation Filters for Flight Vehicle Performance Monitoring", *IEEEAC*, Vol. 7, pp. 3197-3203.
- [123] Martin Ph., «*Contribution à L'étude des Systèmes Différentiellement Plats* », Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1992.
- [124] Miquel T., «*Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs* », Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 2004.
- [125] Newmann M.M., "Specific optimal control of the linear regulator using a dynamical controller based on the minimal-order observer", *International Journal of Control*, Vol. 12, pp. 33-48, 1970.
- [126] Nelson R.C., "*Flight Stability and Automatic Control*", McGraw-Hill, 1st Ed., 1989.
- [127] Niemann H., Saberi A., "Exact, Almost and Delayed Fault Detection An Observer Based Approach", *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, California, June 1999.
- [128] Ostroff A.J., Bacon B.J., "Force and Moment Approach for Achievable Dynamics using Nonlinear Dynamic Inversion", *Proceeding of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 1999.
- [129] Patton R.J., Chen J., "A review of parity space approaches to fault diagnosis", *Proc. Of IFAC/IMACS symposium SAFEPROCESS'91*, Baden-Baden, Germany, Vo. 1, pp. 238-255, 1991.
- [130] Patton R.J., Chen J., "A re-examination of the relationship between parity space and observers-based approaches in fault diagnosis", *Revue Européenne Diagnostic et sûreté de Fonctionnement*, Vol. 1, pp. 183-200, 1991.
- [131] Patton R.J., "Robust model-based fault diagnosis: the state of the art", *Proc. On IFAC Symp. On Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, SAFEPROCESS'94*, Espoo, Finland, pp. 1-24, 1994.
- [132] Patton R.J., Chen J., "Observer-based Fault Detection and Isolation: Robustness and Applications", *Control Engineering Practice*, 5(5): 671-682, 1997.
- [133] Patton R.J., Frank P.M., Clarck R.N., "Fault diagnosis in dynamics systems: theory and applications", *Prentice Hall*, 1989.
- [134] Park J., Rizzoni G., "A new interpretation of the fault detection filter part 1: Closed-form algorithm", *International Journal of Control*, 60(5): 767-787, 1994
- [135] Ragot J., Maquin D., «*Techniques récentes de diagnostic de systèmes et rôle de l'instrumentation* », Congrès de la société de l'industrie Minérale 1996, Montpellier, France, 1-4 octobre 1996.
- [136] Ragot J., Maquin D., «*Techniques récentes de diagnostic de systèmes et rôle de l'instrumentation* », Séminaire de l'Ecole Doctorale PROMEN : Quelle métrologie pour le XXIème siècle Nancy, France, 12-13 mai 1997. In *Récents Progrès en Génie des Procédés*, vol. 12, no 60, pp.35-52, 1998.
- [137] Ragot J. Maquin D., Bloch G., "Positionnement de capteurs pour des systèmes décrits par des équations bilinéaires", *Revue Européenne Diagnostic et Sûreté de Fonctionnement*, vol. 2,

- pp.115-121, 1992.
- [138] Rudolph J., «Commande par Platitude de Modèles à Paramètres Répartis pour Echangeurs de Chaleur », BUSTL et Ecole centrale Lille. 2001.
- [139] Rieb T., Wanke P., Isermann R., “Model based fault diagnosis of a flexible milling center”, In Preprints of 11th IFAC World Congress, Tallinn, Estonia, USSR, 1990.
- [140] Raymond T.S., “Observer steady-state errors induced by errors in realization”, IEEE Trans. On Automatic Control, pp. 280-281, 1976.
- [141] Ripoll P., “Conception d’un système de diagnostic flou appliqué au moteur automobile” *Thèse de doctorat*, université de Savoie, France, Décembre 1999
- [142] Roskam J., “Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls”, DAR Corporation, 2003.
- [143] Quiroga Rodríguez C.E., «Représentation Neuronale de la Dynamique de Vol d’un Aéronef », Rapport DEA du LAAS, 2005.
- [144] Reger J., Sira-Ramirez H., Fliess M., “On non-asymptotic observation of nonlinear systems”, in Proc. CDC-ECC 05. 2005.
- [145] Sauter D., Hamelin F., Ghetie M.A., Fonte C., “Adaptive residual evaluation of model uncertainties: some methods and results”, *Engineering Simulation*, vol. 13, pp. 773-788, 1996.
- [146] Shang Y., Wah B.W., “Global optimization for neural network training”, *IEEE Computer*, Vol. 29, 1996, pp. 45–54.
- [147] Sastry S., “Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control” Springer-Verlag, 1999.
- [148] Sira-Ramirez H., «Sur la Commande des Systèmes Non Différentiellement Plats », BUSTL et Ecole centrale Lille. 2001.
- [149] Sira-Ramirez H., Fliess M., “An algebraic state estimation approach for the recovery of chaotically encrypted messages”, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 16, 2 (2006) 295-309.
- [150] Shen T.J., « *Les Réseaux Neurones Affines et Leur Application à la Commande Automatique du Vol* », Thèse de doctorat, Institut Nationale Polytechnique de Toulouse, 1995.
- [151] Sepulcre R., Janković M., Kokotović P., “*Constructive Nonlinear Control*”, Springer-Verlag, 1997.
- [152] Staroswiecki M., Cocquempot V., Cassa J.P., « Equivalence des résidus générés par la méthode de l’espace de parité et les méthodes utilisant les observateurs », *GRECO automatique, groupe diagnostic*, CNRS, 1991.
- [153] Staroswiecki M., Cocquempot V., Cassa J.P., “Observer based and parity space approaches for failure detection and identification” *Proc. Of the IMACS/IFAC Symposium on Modelling and Control of Technological Systems*, Lille, France, vol. 25, pp. 536-541, 1991.
- [154] Staroswiecki M., Cassa J.P., Cocquempot V., “Generation of optimal structured residuals in the parity space”, *Pro. IFAC 12th World Congress*, Sydney, Australia, vol. 5, pp. 535-542, 1993.
- [155] Schrick D. V., “A. Comparison of IFD Schemes, A Decision Aid for Designers”, 0-7803-1872, February 1994.
- [156] Stoorvogel A.A., Niemann H., Saberi A., “Delays in Fault Detection and Isolation”, *Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, VA June 25-27, 2001.

- [157] Staroswiecki M., Declerk P., "Analytical redundancy in non linear interconnected systems by means of structural analysis", *IFAC/IMACS/IFORS/AIPAC*, Nancy, France.
- [158] Sreedhar R., Fernandez B., Masada G. Y., "Robust Fault Detection in Nonlinear Systems Using Sliding Mode Observers", *Second IEEE Conference on Control Applications, Vancouver, B.C.*, September 13-16, 1993.
- [159] Van Nieuwstadt M., Rathinam M., Murray R.M., "Differential Flatness and Absolute Equivalence of Nonlinear Control Systems", *SIAM Journal Control and Optimization*, 1994.
- [160] Villemeur A., "sûreté de fonctionnement des systèmes industriels, Eyrolles Editions, 1988.
- [161] Van Schrik D., "estimator schemes for instrument fault detection and isolation", *IEEE, International Conf. On System, Man and Cybernetic*, pp. 406-411, 1996.
- [162] Villemeur A., "sûreté de fonctionnement des systèmes industriels", Eyrolles Editions, 1988.
- [163] Walker B.K., Gai E., "Fault detection threshold determination techniques using Markov theory", *Int. J Guidance, Control and Dynamics*, vol. 2, n°4, pp. 313-319, 1979.
- [164] Weiss J.L., "Threshold computations for detection of failures in SISO systems with transfer function errors", *Proc. of the American Control Conf.*, pp. 2213-2218, 1988.
- [165] Willsky A. S., Jones H.L. "A generalized likelihood ration approach to the detection and estimation of jumps in linear systems", *IEEE, Trans. On Automatic Control*, pp. 108-112, 1976.
- [166] Willsky A. S., "A survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamics Systems", *Automatica*, 12: 601-611, 1976.
- [167] Wilson E., Sutter D.W., Berkovitz D., Betts B.J., Del Mundo R., Kong E., Larges C.R., Mah C.R., Papasin R., "Motion-based System Identification and Fault Detection and Isolation Technologies for Thruster Controlled Spacecraft" *Published in Proceedings of the JANNAF 3rd Modelling and Simulation Joint Subcommittee Meeting*, Colorado Springs, CO, 1-5 December 2003.
- [168] Xiong Y., Saif M., "Robust Fault Isolation Observer Design", *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, California, June 1999.
- [169] Zhu G., Saydy L., "An Extended Luenberger-Like Observer and its Application to Target Tracking", *AIAA, Guidance Navigation and Control Conference*, San Francisco, 15-18 août 2005.
- [170] Zhou K., Phalguna K. Rachinayani, Nike Liu, Zhang R., Jorge A., "Fault Diagnosis and Reconfiguration Control for Flight Control Systems with Actuator Failures", *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 14-17, 2004
- [171] Zhang Q., Basseville M., Benvenise, "Fault detection and isolation in nonlinear dynamic: A combined input-output and local approach", *Automatica, Special Issue*, tome 34(11), 1359-1373.

ANNEXE A

**APPRENTISSAGE NEURONAL DE LA DYNAMIQUE
DE GUIDAGE**

Dans cette annexe sont présentés des résultats concernant l'apprentissage neuronal de la dynamique inverse de guidage d'un avion léger. Le modèle de simulation de l'avion adopté est celui d'un avion léger équipé d'un moteur à propulsion et d'un simple régulateur de type PID pour l'acquisition et le maintien de l'altitude et de la vitesse de l'avion comme le montre la figure (A.1).

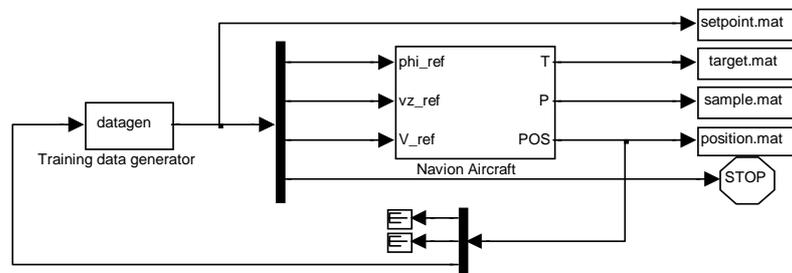


Figure A.1 : simulateur générant les données de trajectoires pour l'apprentissage du réseau de neurones

Les premiers résultats de simulation ont été obtenus dans le cas de manœuvres dans le plan vertical. Dans cette étude, le réseau de neurones retenu est de type séquentiel avec une unique couche cachée. D'autres structures de réseaux de neurones [Quiroga Rodriguez, 2005] ont été étudiées.

La structure du réseau de neurones retenue dans cette étude, comporte sept neurones en entrée, environ quatre vingt dix (90) neurones dans la couche cachée ayant une fonction d'activation de type tangente hyperbolique et trois neurones de sortie présentant une fonction de transfert linéaire. Les sept entrées retenues sont l'altitude, les trois composantes de la vitesse et les trois composantes de l'accélération. Les trois sorties sont composées de l'assiette longitudinale θ , de l'assiette latérale ϕ et du signal d'entrée Ω des moteurs. Les figures (A.5), (A.6) et (A.7) montrent les données d'apprentissage utilisées sous un échantillon de 3000 point de données,

aussi bien que les erreurs d'apprentissage correspondant. La figure (A.2) montre une trajectoire d'apprentissage simulée à l'aide du montage représenté à la figure (A.1).

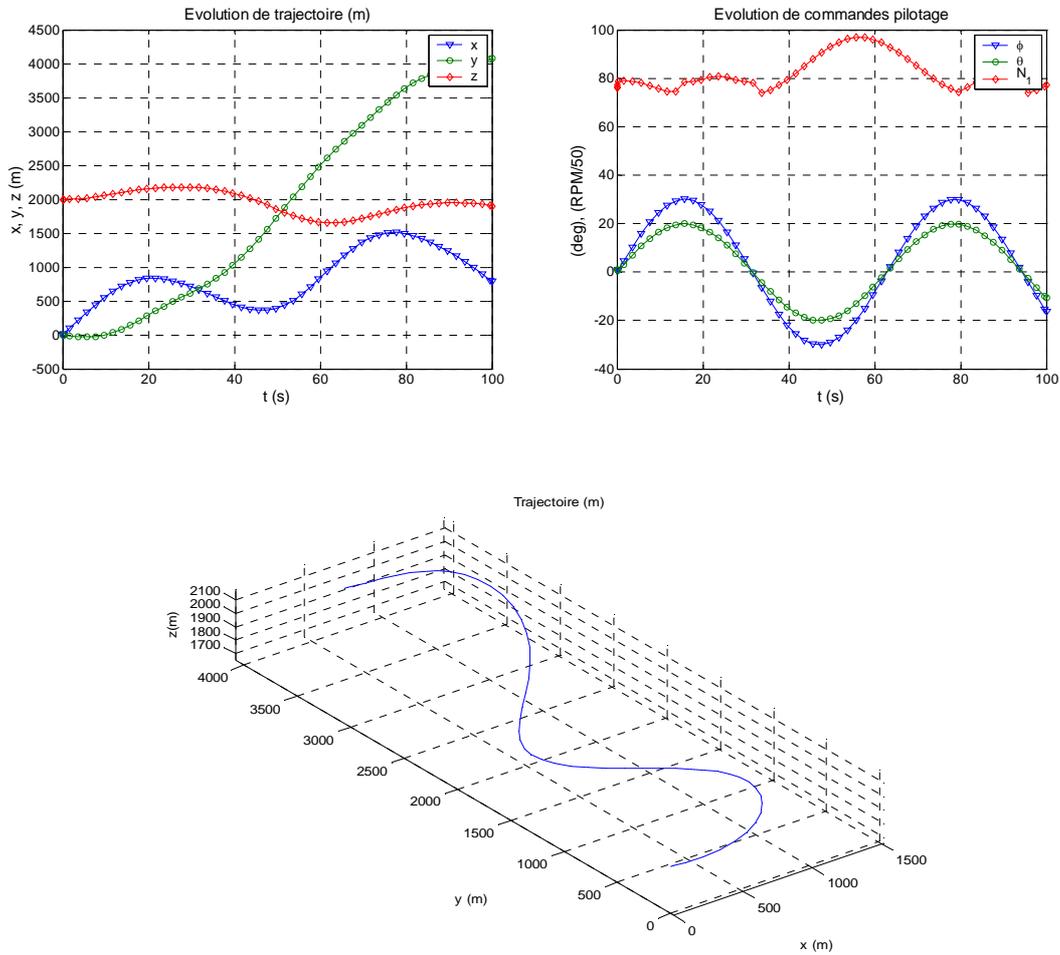


Figure A.2 : Exemple de trajectoire d'apprentissage

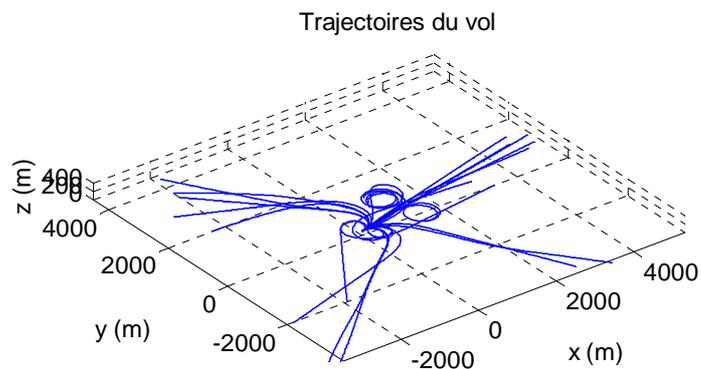


Figure A.3 : Exemples de trajectoires d'apprentissage

Les figures (A.4), (A.5) et (A.6) représentent des données de validation de l'apprentissage neuronal.

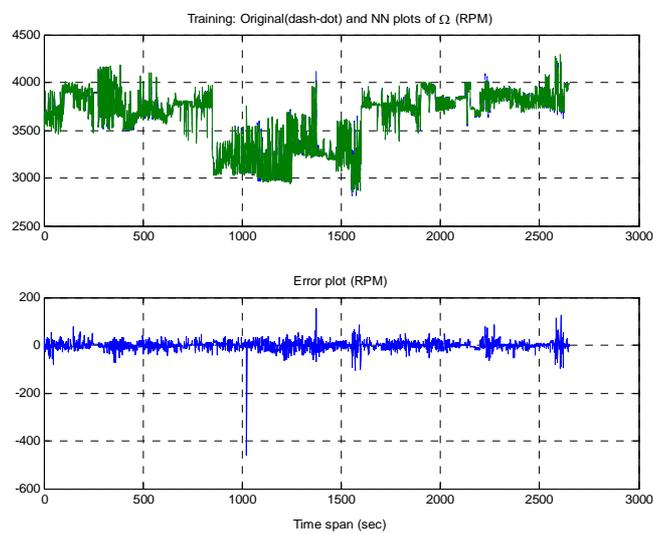


Figure A.4 : Données d'apprentissage pour le régime du moteur Ω

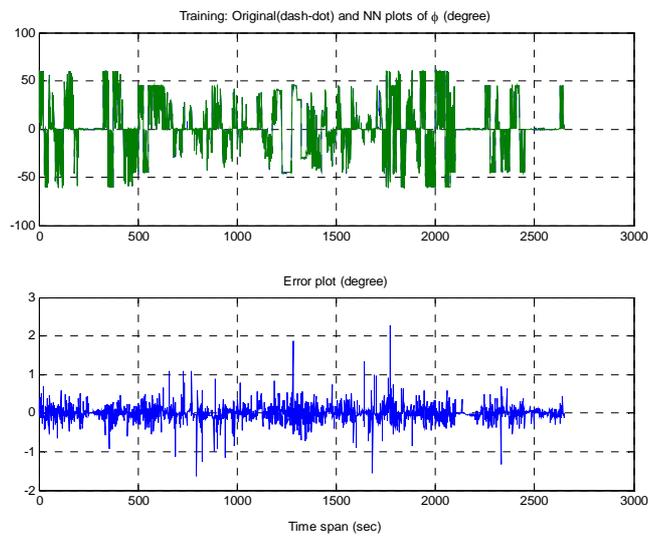


Figure A.5 : Données d'apprentissage pour l'angle ϕ

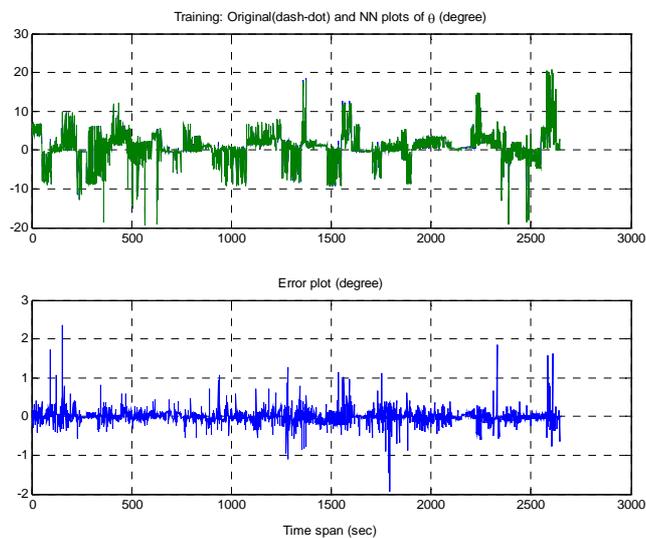


Figure A.6 : Données d'apprentissage pour l'angle θ

La figure (A.7) présente différentes expériences d'apprentissage correspondant à différents nombres de neurones dans la couche cachée.

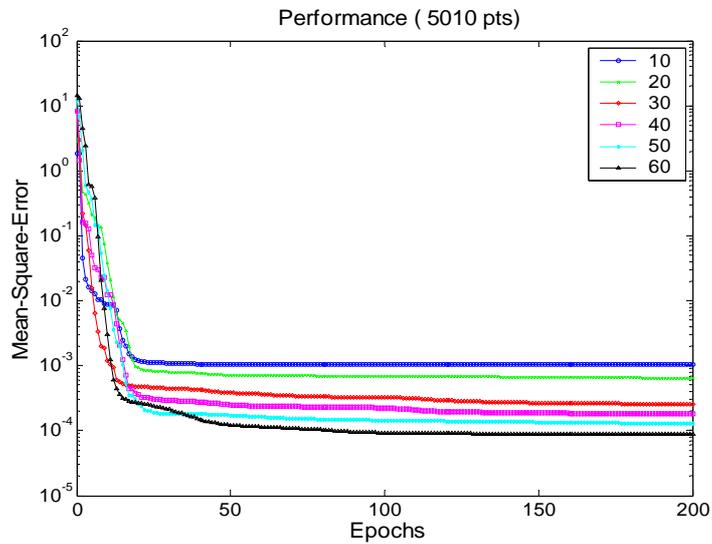


Figure A.7 : Evolution de l'erreur d'apprentissage pour différents nombres de neurones dans la couche cachée

Les figure (A.8) à (A.10) présentent des résultats de validation de l'apprentissage en ce qui concerne la génération des entrées de guidage θ , ϕ et Ω .

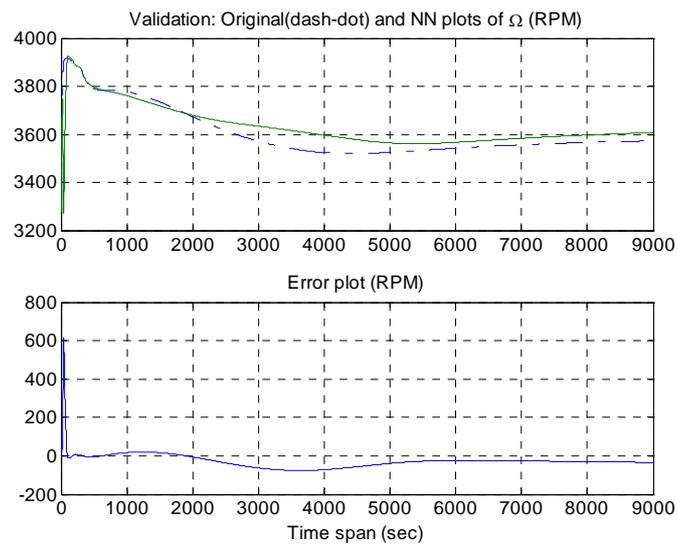
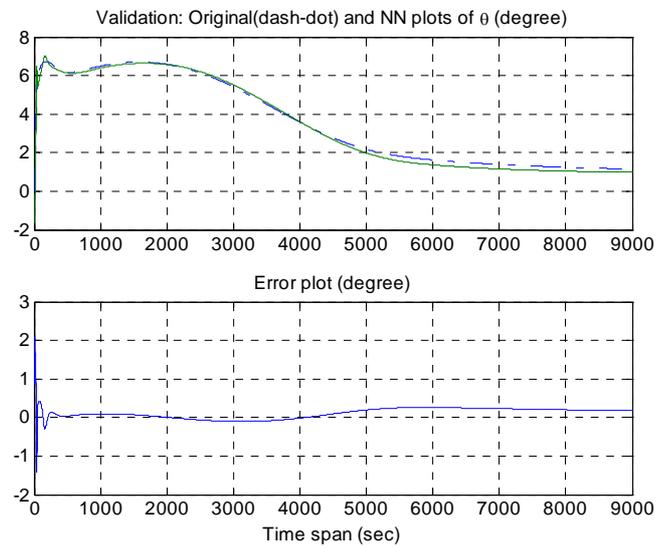
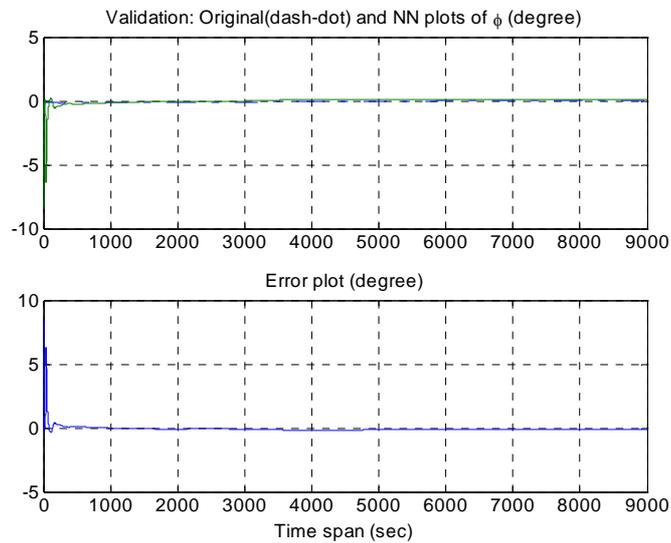


Figure A.8 : Validation de l'apprentissage pour le régime Ω du moteur

**Figure A.9:** Validation de l'apprentissage pour l'angle ϕ **Figure A.10:** Validation de l'apprentissage pour l'angle θ