Murakami, S.
Osaka J. Math.
2 (1965), 291-307

SUR LA CLASSIFICATION DES ALGÈBRES DE LIE RÉELLES ET SIMPLES

SHINGO MURAKAMI

(Reçu le 13 Septembre, 1965)

Le but de cette note est de donner une nouvelle méthode de classification des algèbres de Lie réelles et simples. Comme on sait, la classification de ces algèbres de Lie a été faite pour la première fois en 1914 par Élie Cartan [3]. En 1929, Cartan [4] lui-mème a découvert une méthode plus simple de la classification; il a établi en effet un théorème d'après lequel le problème de classification revient à la détermination des classes d'équivalence d'automorphismes involutifs d'une algèbre de Lie simple et compacte $\mathfrak{g}$, deux automorphismes de $\mathfrak{g}$ étant mis dans une classe d'équivalence s'il sont conjugués dans le group des automorphismes de $\mathfrak{g}$. Cartan n'appliquait ce théorème qu'aux cas où $\mathfrak{g}$ est de type classique, et F. Gantmacher [5] [6] a poursuivi la méthode de Cartan et a donné de nouveau la classification des algèbres de Lie réelles et simples. D'autre part, on sait qu'une algèbre de Lie complexe et simple est déterminée par un système de racines simples Π associé à cette algèbre. Étant donnée une algèbre de Lie réelle et simple $\mathfrak{g}_0$ dont la complexifiée $\mathfrak{g}^C$ est encore simple, I. Satake [10] a fait correspondre à $\mathfrak{g}_0$ une involution du système Π associé à $\mathfrak{g}^C$. Au moyen de la classification des involutions de Π qui correspondent ainsi aux sous-algèbres réelles de $\mathfrak{g}^C$, S. Araki [1] a récemment obtenu une nouvelle méthode de classification des algèbres de Lie réelles et simples.

La méthode de classification qu'on donne ici repose aussi sur le théorème de Cartan cité plus haut. Elle donnera en même temps la détermination des sous-algèbres caractéristiques de toute algèbre de Lie réelle et simple. Ces sous-algèbres correspondent aux sous-groupes compacts maximaux dans le groupe adjoint de l'algèbre de Lie, et jouent un rôle remarquable dans la théorie des espaces symétriques riemanniens. Comme on le rappelera au §1, la structure des sous-algèbres caractéristiques d'une algèbre de Lie réelle et simple $\mathfrak{g}_0$ est uniquement déterminée par $\mathfrak{g}_0$; de plus, d'après A. Borel et J. de Siebenthal [2] cette structure est déjà étudiée de manière systématique dans le cas où $\mathfrak{g}_0$ est de certain type qu'on appelle type intérieur. On suivra en effet le travail de Borel-de Siebenthal pour la classfication des algèbres de Lie de type intérieur, et on s'intéresse ici particulièrement à la classification des algèbres de Lie de type extérieur. Comme Cartan l'a remarqué dans [4], en réalité il ne reste, comme détermination difficile, que celle des algèbres de Lie réelles et simples de type extérieur dont la complexifiée est de type E_6; la méthode qu'on donne ici permettra de traiter ces algèbres de Lie avec leurs sous-algèbres caractéristiques.

1. Préliminaires.

On notera $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie réelle et simple. Soit $\mathfrak{g}^C$ la complexifiée de $\mathfrak{g}_0$, c'est-à-dire, l'algèbre de Lie complexe obtenue de $\mathfrak{g}_0$ par extension des scalaires ; $\mathfrak{g}^C = \mathfrak{g}_0 \underset{R}{\otimes} \boldsymbol{C}$. Pour que $\mathfrak{g}^C$ ne soit pas simple, il faut et il suffit que $\mathfrak{g}_0$ soit l'algèbre de Lie réelle qui résulte d'une algèbre de Lie complexe et simple par restriction des scalaires. Les algèbres de Lie complexes et simples sont aussi simples sur les réels et deux telles algèbres sont isomorphes sur les complexes dès qu'elles le sont sur les réels. Ainsi la classification des algèbres de Lie réelles et simples dont la complexifiée n'est pas simple revient à celle des algèbres de Lie complexes et simples. Pour cette raison, on considèrera dans la suite la classification des algèbres de Lie réelles et simples dont la complexifiée est aussi simple comme algèbre de Lie complexe. En d'autres termes, on s'occupera de la classification des formes réelles d'une algèbre de Lie complexe et simple.

On désigne maintenant par $\mathfrak{g}^C$ une algèbre de Lie complexe et semi-simple. On sait que $\mathfrak{g}^C$ admet une forme réelle compacte $\mathfrak{g}$. Soit $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$; $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ se munit d'une structure de groupe de Lie compact dont l'algèbre de Lie peut s'identifier canoniquement à l'algèbre $\mathfrak{g}$. La composante connexe de l'élément neutre de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, qui se notera $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, est le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$. D'autre part, soit θ une involution de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire, un automorphisme d'ordre 2 de $\mathfrak{g}$. Alors, l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ est la somme directe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m} \tag{1}$$

où $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, \theta(X) = X\}$ et $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, \theta(X) = -X\}$. Le sous-espace réel $\mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}^C$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}^C$.

Théorème de Cartan [4]. *Les notations étant comme ci-dessus, toute forme réelle $\mathfrak{g}_0$ d'une algèbre de Lie complexe et semi-simple $\mathfrak{g}^C$ se transforme, par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}^C$, en la forme réelle $\mathfrak{g}_\theta$ définie* *par une involution θ de* $\mathfrak{g}$. *Pour que les formes réelles* $\mathfrak{g}_\theta$ *et* $\mathfrak{g}_{\theta'}$ *de* $\mathfrak{g}^C$ *définies par des involutions θ et θ' soient isomorphes, il faut et il suffit que θ et θ' soient des élements conjugués dans le groupe* Aut($\mathfrak{g}$).

Appliquant ce théorème au cas où $\mathfrak{g}^C$ est simple, on voit que la classification des algébres de Lie réelles et simples revient à celle des classes d'éléments conjugués du groupe Aut($\mathfrak{g}$) qui contiennent une involution de $\mathfrak{g}$. D'autre part, le théorème nous permet de donner la définition suivante.

DÉFINITION. Une algèbre de Lie réelle et simple $\mathfrak{g}_0$ dont la complexifiée $\mathfrak{g}^C$ est simple est dite *de type intérieur* (resp. *de type extérieur*) si $\mathfrak{g}_0$ est isomorphe à une forme réelle $\mathfrak{g}_\theta$ de $\mathfrak{g}^C$ définie par un automorphisme intérieur (resp. extérieur) θ de $\mathfrak{g}$.

Une décomposition d'une algèbre de Lie réelle et semi-simple $\mathfrak{g}_0$ en somme directe $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ est *une décomposition de Cartan*, si cette décomposition est celle qui est définie par une involution de $\mathfrak{g}_0$ de la même manière que (1) et si la forme de Killing de $\mathfrak{g}_0$ est définie-négative sur $\mathfrak{k}$ et définie-positive sur $\mathfrak{p}$. Cette décomposition se détermine par la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ qui s'appelle *la sous-algèbre caractéristique* de cette décomposition. L'existence d'une décomposition de Cartan est assurée par le théorème de Cartan ; en effet, $\mathfrak{g}_\theta=\mathfrak{k}+\sqrt{-1}\,\mathfrak{m}$ déduite de (1) est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_\theta$ dont $\mathfrak{k}$ est la sous-algèbre caractéristique. On sait qu'une sous-algèbre caractéristique correspond à un sous-groupe compact maximal du groupe Aut($\mathfrak{g}$) [8a]. D'autre part, Cartan [4] a montré que deux sous-algèbres caractéristiques de $\mathfrak{g}_0$ se transforment l'une en l'autre par un automorphisme de $\mathfrak{g}_0$, de sorte que la structure des sous-algèbres caractéristiques est bien déterminée par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. Ce fait sera utilisé au cours de la classification qu'on va donner.

Proposition. *Pour qu'une algèbre de Lie réelle et simple* $\mathfrak{g}_0$ *soit de type intérieur, il est nécessaire et suffisant que le rang de* $\mathfrak{g}_0$ *soit égal au rang des sous-algèbres caractéristiques de* $\mathfrak{g}_0$. *Autrement dit, pour que la forme réelle* $\mathfrak{g}_\theta$ *de* $\mathfrak{g}^C$ *définie par une involution θ d'une algèbre de Lie simple et compacte* $\mathfrak{g}$ *soit de type intérieur, il faut et il suffit que la sous-algèbre* $\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\theta(X)=X\}$ *est une sous-algèbre de rang maximal de* $\mathfrak{g}$.

Pour la démonstration, voir [7, Theorem 9.3.2] ou [10].

2. Classification des algèbres de Lie réelles et simple de type intérieur.

D'après ce qu'on a rappelé au § 1, la classification des algèbres de

Lie de type intérieur revient au problème suivant. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple et compacte, et soient Aut$(\mathfrak{g})$ et Int$(\mathfrak{g})$ les groupes introduits pour $\mathfrak{g}$ au §1. Le problème est alors de trouver toutes les classes de conjugaison du groupe Aut$(\mathfrak{g})$ qui sont représentables par des éléments d'ordre 2 du sous-groupe Int$(\mathfrak{g})$. On donnera une réponse à ce problème en construisant un systeme des représentants de ces classes. La classe constituée par l'élément neutre sera exclue dans la considération suivante, car cette classe détermine l'algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{g}$.

Soient maintemant $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et compacte de rang l, et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a $\dim \mathfrak{h}=l$. Désignant toujours par $\mathfrak{g}^C$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$, le sous-espace $\mathfrak{h}^C$ de $\mathfrak{g}^C$ engendré par $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^C$. Posons $\mathfrak{h}_0=\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}$; c'est un sous-espace réel de $\mathfrak{g}^C$ de dimension l qu'on appelle la partie réelle de $\mathfrak{h}^C$. La forme de Killing de $\mathfrak{g}^C$ définit un produit scalaire $(\ ,\ )$ dans $\mathfrak{h}_0$. Soit Δ le système des racines de $\mathfrak{g}^C$ par rapport à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}^C$. Toute racine $\alpha\in\Delta$ définit un vecteur de $\mathfrak{h}_0$ et un seul, noté encore α, tel que $\alpha(h)=(\alpha, h)$ quel que soit $h\in\mathfrak{h}_0$. On introduit maintenant un ordre linéaire dans le dual $\mathfrak{h}_0^*$ de l'espace réel $\mathfrak{h}_0$. On sait que le système Π des racines simples par rapport à cet ordre est un système de l racines $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ linéairement indépendantes et que toute racine positive α peut s'écrire sous la forme $m_1\alpha_1+\cdots+m_l\alpha_l$ avec l entiers non-négatifs $m_1, \cdots, m_l$.

Puisque tout automorphisme de $\mathfrak{g}$ se prolonge d'une manière unique en un automorphisme de $\mathfrak{g}^C$, le groupe Aut$(\mathfrak{g})$ peut être identifié à un sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}^C$. Soit $N(\mathfrak{h})$ le sous-groupe de Aut$(\mathfrak{g})$ formé par les automorphismes qui conservent la sous-algèbre $\mathfrak{h}$. On a un homomorphisme canonique du groupe $N(\mathfrak{h})$ dans le groupe des transformations linéaires de $\mathfrak{h}_0$. On désigne par R l'image de cet homomorphisme et les éléments de R sont dits *rotations* de $\mathfrak{h}_0$. Une rotation de $\mathfrak{h}_0$ est une transformation orthogonale de $\mathfrak{h}_0$ qui définit une permutation du système de vecteurs Δ dans $\mathfrak{h}_0$, et la réciproque est aussi vraie. Soit W le sous-groupe de R formé par les rotations qui sont définies par des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$; W n'est autre que le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ opérant sur $\mathfrak{h}_0$. Soit d'autre part P le sous-groupe de R formé par les rotations qui conservent le système des racines simples Π. D'après le lémme ci-dessous, le groupe P est canoniquement isomorphe au groupe des automorphismes de Π, un automorphisme de Π étant une permutation ρ de $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ telle que $(\rho(\alpha_i), \rho(\alpha_j))=(\alpha_i, \alpha_j)$ $(i, j=1, \cdots, l)$. Un élément de P sera dit *rotation particulière* de $\mathfrak{h}_0$ (par rapport au système Π). On sait que

$$R = PW,\ P\cap W = \{1\}\,,$$

où 1 est la rotation identique de $\mathfrak{h}_0$. (Pour tout cela, cf. [5] [8a] [12]).

Lemme 1. *Soit* $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ *est un système de racines simples* $\mathfrak{g}^C$. *Supposons donné un système de* l *racines* $\Pi'=\{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_l\}$ *tel que* $(\alpha'_i, \alpha'_j) =(\alpha_i, \alpha_j)$ $(i, j=1, \cdots, l)$. *Alors, la transformation linéaire* r *de* $\mathfrak{h}_0$ *definie par* $r(\alpha_i)=\alpha'_i$ $(i=1, \cdots, l)$ *est une rotation de* $\mathfrak{h}_0$ *et* Π' *est un système de racines simples par rapport à un ordre linéaire dans le dual de* $\mathfrak{h}_0$.

Démonstration. D'après l'hypothèse, r est une transformation orthogonale de $\mathfrak{h}_0$. Pour tout $i=1, \cdots, l$, soit σ_i (resp. σ'_i) la réflexion de $\mathfrak{h}_0$ par rapport à l'hyperplan orthogonal à α_i (resp. α'_i). Comme $r(\alpha_i)= \alpha'_i$, $\sigma'_i=r\sigma_i r^{-1}$. On sait que σ_i, σ'_i sont des éléments du groupe de Weyl W et que $\sigma_1, \cdots, \sigma_l$ engendrent W. Par conséquent, $rwr^{-1}\in W$ pour tout $w\in W$. On sait d'autre part que toute racine $\alpha\in\Delta$ s'écrit sous la forme $\alpha=w(\alpha_i)$ avec $w\in W$ et $\alpha_i\in\Pi$. On a alors $r(\alpha)=(rwr^{-1})(\alpha'_i)\in\Delta$. L'ensemble Δ étant fini, cela démontre que r définit une permutation de Δ, et ainsi r est une rotation de $\mathfrak{h}_0$. La dernière assertion en résulte immédiatement.

Soit maintenant μ la racine maximale et posons $\alpha_0=-\mu$. Soient $\Omega=\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ et Q le groupe des rotations qui conservent Ω. On a $P\subset Q$. Il résulte du lemme 1 que le groupe Q est isomorphe au groupe des automorphismes de Ω, groupe des permutations du système Ω qui conservent les produits scalaires entre les éléments de Ω.

Considérons le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Suivant l'identification canonique de l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ avec $\mathfrak{g}$, le sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ qui correspond à $X\in\mathfrak{g}$ peut s'écrire $\exp t\,\mathrm{ad}(X)$. Le sous-groupe analytique de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ qui correspond à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un tore maximal T de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (et en fait de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$). L'application $h\rightarrow\exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}(h)$ de $\mathfrak{h}_0$ dans T est un homomorphisme surjectif dont le noyau Γ est un sous-groupe discret de $\mathfrak{h}_0$ de rang maximal; Γ est l'ensemble des éléments $h\in\mathfrak{h}_0$ tels que $(\alpha, h)\equiv 0$ mod. 1 pour toute $\alpha\in\Delta$.

Ces notations étant établies, on peut énoncer le théorème suivant, dû éssentiellement à Borel et de Siebenthal [2].

Théorème 1. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple et compacte et* $\mathfrak{g}^C$ *la complexifiée de* $\mathfrak{g}$. *Soit* Δ *le système des racines par rapport à la sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}^C$ *complexifiée d'une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$. *Posons* $\mathfrak{h}_0=\sqrt{-1}\ \mathfrak{h}$. *Soient* $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ *le système des racines simples et* μ *la racine maximale* (*par rapport à un ordre linéaire dans le dual de* $\mathfrak{h}_0$). *Soient* $m_1, \cdots, m_l$ *les entiers positifs tels que*

$$\mu = m_1\alpha_1+ \cdots +m_l\alpha_l .$$

Pour tout i tel que $m_i=1$ ou 2, posons

$$\theta_i = \exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}\,(h_i),$$

où h_i est l'élément de $\mathfrak{h}_0$ défini par $\alpha_j(h_i)=\delta_{ij}/2$ ($j=1, \cdots, l$).

Alors tout élement d'ordre 2, différent de l'élément neutre, dans $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ *est conjugué à l'un des θ_i dans le groupe* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (*et par suite dans* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$). *De plus, pour que θ_i et θ_j soient conjugués dans* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *il faut et il suffit que l'un des deux cas suivants soit arrivé*:

1) *$m_i=m_j=1$ et il existe un automorphisme ρ de Π tel que $\rho(\alpha_i)=\alpha_j$.*

2) *$m_i=m_j=2$ et il existe un automorphisme ω de $\Omega=\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ ($\alpha_0=-\mu$) tel que $\omega(\alpha_i)=\alpha_j$.*

Soit $\mathfrak{g}_i$ la forme réelle de $\mathfrak{g}^C$ définie par $\mathfrak{g}$ et θ_i. La structure d'une sous-algèbre caractéristique $\mathfrak{k}_i$ de $\mathfrak{g}_i$ est comme suit:

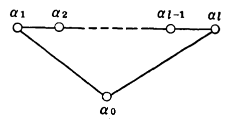
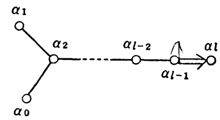
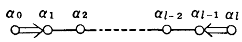
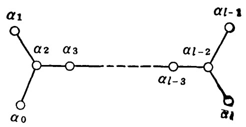
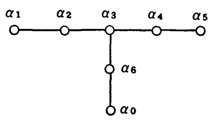
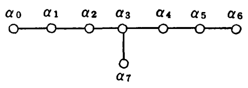
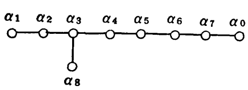
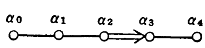
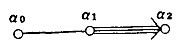
1) *Si $m_i=1$, $\mathfrak{k}_i$ est le produit direct d'une algèbre de Lie semi-simple compacte $\mathfrak{k}'_i$ et du centre de dimension 1; $\mathfrak{k}'_i$ a le rang $l-1$ et un système de racines simples de $\mathfrak{k}'_i$ est isomorphe au système $\Pi-\{\alpha_i\}$.*

2) *Si $m_i=2$, $\mathfrak{k}_i$ est une algèbre de Lie semi-simple compacte de rang l, dont un système de racines simples est isomorphe au système $\Omega-\{\alpha_i\}$.*

Ici, dire que deux systèmes de racines sont isomorphes signifie qu'il existe une bijection entre eux qui conservent, à une multiplication d'une constante près, les produits scalaires entre les éléments correspondants.

La plupart de l'énoncé de ce théorème est contenue, comme cas particulier, dans les résultats de Borel-de Siebenthal [2]. La seule partie à laquelle on doit donner une démonstration est celle qui concerne la condition nécessaire et suffisante pour que deux θ_i soient conjugués dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Comme cette partie ne sera pas utilisée dans le paragraphe suivant, j'en donne ici seulement l'idée de démonstration. Soit $\hat{\Gamma}$ le groupe de translations de $\mathfrak{h}_0$ définies par les éléments de Γ et soit U le groupe de transformations de $\mathfrak{h}_0$ engendré par $\hat{\Gamma}$ et le groupe des rotations R. Le groupe U est le produit semi-direct de R et de $\hat{\Gamma}$, et $\hat{\Gamma}$ est un sous-groupe invariant de U; en particulier, tout élément de U s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\hat{\gamma}r$, où $r\in R$ et $\hat{\gamma}$ est la translation définie par $\gamma\in\Gamma$. Posons $S=\{h\in\mathfrak{h}_0;\ \alpha_i(h)\geqq 0(i=1, \cdots, l),\ \mu(h)\leqq 1\}$; S est le simplex fondamental de $\mathfrak{g}$. Soit U_S le sous-groupe de U constitué par les éléments qui appliquent S sur lui-même. On peut alors montrer que l'homomorphisme de U sur R de noyau $\hat{\Gamma}$ définit un isomorphisme de U_S sur le groupe Q ; de plus, lorsque l'on écrit un élément de U_S sous la forme $\hat{\gamma}\omega$ avec $\omega\in Q$, si $\omega(\alpha_0)=\alpha_0$ on a $\gamma=0$ et $\omega\in P$; si $\omega(\alpha_0)=\alpha_i$ avec $i>0$, on a $\gamma=2h_i$ et $m_i=1$. D'autre part, pour que θ_i et θ_j soient conjugués dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, il faut

Liste des algèbres de Lie réelles et simples de type intérieur

$\mathfrak{g}$	Racine maximale $\mu=-\alpha_0$	Ω	h_i	$\mathfrak{k}_i$	$\mathfrak{g}_{\theta_i}$
A_l $(l\geqq 1)$	$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l$		$h_i\left(1\leqq i\leqq\left[\frac{l-1}{2}\right]+1\right)$	$A_i\times A_{l-i-1}\times T$	$AIII$
B_l $(l\geqq 2)$	$\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_l$		h_1	$B_{l-1}\times T$	BI
			$h_i(2\leqq i\leqq l)$	$D_i\times B_{l-i}$	
C_l $(l\geqq 3)$	$2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{l-1}+\alpha_l$		h_l	$A_{l-1}\times T$	CI
			$h_i\left(1\leqq i\leqq\left[\frac{l-1}{2}\right]+1\right)$	$C_i\times C_{l-i}$	CII
D_l $(l\geqq 4)$	$\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{l-2}+\alpha_{l-1}+\alpha_l$		h_1	$D_{l-1}\times T$	DI
			$h_i\left(2\leqq i\leqq\left[\frac{l}{2}\right]\right)$	$D_i\times D_{l-i}$	
			$h_l(si\ l>4)$	$A_{l-1}\times T$	DII
E_6	$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6$		h_1	$D_5\times T$	EII
			h_2	$A_1\times A_5$	EII
E_7	$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6+2\alpha_7$		h_1	$A_1\times D_6$	EVI
			h_6	$E_6\times T$	$EVII$
			h_7	A_7	EV
E_8	$2\alpha_1+4\alpha_2+6\alpha_3+5\alpha_4+4\alpha_5+3\alpha_6+2\alpha_7+3\alpha_8$		h_1	D_8	$EVIII$
			h_7	$A_1\times E_7$	EIX
F_4	$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$		h_1	$A_1\times C_3$	FI
			h_4	B_4	FII
G_2	$2\alpha_1+3\alpha_2$		h_1	$A_1\times A_1$	G

et il suffit que h_i et h_j soient transformés l'un en l'autre par un élément de U_S. L'assertion en résulte sans grande difficulité.

D'après le théorème de Cartan rappelé au §1, le théorème 1 donne la classification complète des algèbres de Lie de type intérieur. Le théorème 1 détermine également la structure des sous-algèbres caractéristiques de toute algèbre de Lie en question, puisqu'une algèbre de Lie semisimple et compacte est bien déterminée par un système de racines simples de cette algèbre. A la page précédente, on donne la liste des algèbres de Lie de type intèrieur ainsi classées avec la structure de leurs sous-algèbres caractéristiques. (Dans cette liste, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_i$ sont désignées par les notations de Cartan, et T signifie le centre de dimension 1).

3. Classification des algèbres de Lie réelles et simples de type extérieur.

Comme dans le cas de type intérieur, la classfication des algèbre de Lie de type extérieur revient à donner, pour une algèbre de Lie simple et compacte $\mathfrak{g}$, un système de représentants des classes de conjugaison du groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ contenant une involution extérieure. Notons que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \neq \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ arrive, pour $\mathfrak{g}$ simple et compacte, seulement lorsque $\mathfrak{g}$ est de type $A_l (l \geqq 2)$, D_l ou E_6.

Soit d'abord $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et compacte. On utilisera les notations introduites au § 2. On peut choisir pour toute racine $\alpha \in \Delta$ un vecteur propre e_α de α de telle manière qu'on ait $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = -\alpha$ et $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta}$ où $N_{\alpha,\beta}$ est un nombre réel, différent de 0 si $\alpha+\beta \in \Delta$. Si un automorphisme θ de $\mathfrak{g}$ conserve $\mathfrak{h}$ et définit une rotation ρ dans $\mathfrak{h}_0$, on a

$$\theta(e_\alpha) = \kappa_\alpha e_{\rho(\alpha)} \tag{2}$$

pour toute $\alpha \in \Delta$, où κ_α est un nombre complexe ; on voit

$$\kappa_\alpha \kappa_{-\alpha} = 1, \; \kappa_{\alpha+\beta} = (N_{\rho(\alpha),\rho(\beta)}/N_{\alpha,\beta}) \kappa_\alpha \kappa_\beta \quad \text{et} \quad \kappa_{-\alpha} = \bar{\kappa}_\alpha \,.$$

Or, étant donnée une rotation particulière ρ de $\mathfrak{h}_0$, il existe un automorphisme θ_ρ et un seul, conservant $\mathfrak{h}$ qui définit ρ dans $\mathfrak{h}_0$ et pour lequel $\kappa_{\alpha_1} = \cdots = \kappa_{\alpha_l} = 1$. Si ρ est involutive, θ_ρ l'est aussi. On sait que tout automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$ est conjugué dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ à un automorphisme θ de la forme

$$\theta = \theta_\rho \exp 2\pi \sqrt{-1}\, \mathrm{ad}\,(h) \tag{3}$$

où ρ est une rotation particulière involutive et où h est un élément de $\mathfrak{h}_0$ fixé par ρ [8b]. Dans cette assertion on peut supposer de plus que

ρ est l'une des représentantes, choisies en avance, de toutes les classes de conjugaison du groupe P. (En réalité, cette remarque n'est utilisée que dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de type D_4). Il va sans dire que θ de (3) conserve $\mathfrak{h}$ et définit la rotation ρ dans $\mathfrak{h}_0$.

Revenons au problème de classification. D'après ce qui précède, toute algèbre de Lie de type extérieur est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{g}_\theta$ définie par une algèbre de Lie simple et compacte $\mathfrak{g}$ et une involution θ de la forme (3) avec $\rho \neq 1$. Pour classer les algèbre de cet espèce, étudions la structure de la sous-algèbre caractéristique $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\ \theta(X) = X\}$. On montre d'abord que $\mathfrak{k}$ est semi-simple. Posons $G = \mathrm{Int}\,(\mathfrak{g})$; c'est un groupe de Lie compact connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$. Soit K la composante connexe de l'élément neutre du sous-groupe de G constitué des éléments échangeable avec θ dans $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$. Alors, on constate que K est un sous-groupe fermé connexe de G qui correspond à la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$.

Lemme 2. *Les notations étant comme ci-dessus, $\mathfrak{k}$ est une algèbre de Lie semi-simple compacte et K est canoniquement isomorphe au groupe* $\mathrm{Int}\,(\mathfrak{k})$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{h}_+ = \{h \in \mathfrak{h}\,;\ \theta(h) = h\}$. Comme $\rho \neq 1$, on a $\mathfrak{h}_+ \neq \mathfrak{h}$. On sait que $\mathfrak{h}_+$ contient un élément régulier de $\mathfrak{g}$; cela résulte par exemple de l'existence dans $\mathfrak{k}$ d'un élément régulier de $\mathfrak{g}$ [5] [8b]. Puisque cet élément est un élément régulier de $\mathfrak{k}$ et que $\mathfrak{k}$ correspond au groupe compact K, il en résulte que $\mathfrak{h}_+$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$. Soient T et S les tores maximaux de G et de K qui correspondent à $\mathfrak{h}$ et à $\mathfrak{h}_+$ respectivement. On a $K \not\supset T$ comme $\mathfrak{h}_+ \neq \mathfrak{h}$. Soit C le centre de K et soit $Z(C)^0$ la composante connexe de l'élément neutre du centralisateur de C dans G. Evidemment $Z(C)^0 \supset K$. Puisque $C \subset S$, on a $C \subset T$ et par suite $Z(C)^0 \supset T$. Cela démontre que $Z(C)^0$ est un sous-groupe connexe de G qui est strictement plus grand que K. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant simple, on sait que $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre maximale de $\mathfrak{g}$. Par conséquent, on a $Z(C)^0 = G$. Puisque le centre de G se réduit à l'élément neutre, C se réduit à l'élément neutre. Le groupe K étant compact et connexe, on en conclut que l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est semi-simple compact et que K est canoniquement isomorphe au groupe $\mathrm{Int}\,(\mathfrak{k})$.

D'après ce lemme, pour savoir la structure de $\mathfrak{k}$, il suffit de voir le système des racines $\Delta_\mathfrak{k}$ de l'algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{k}^C$ complexifiée de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}^C$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ la décomposition (1) de $\mathfrak{g}$ par rapport à l'involution θ. On a $\mathfrak{g}^C = \mathfrak{k}^C + \mathfrak{m}^C$, $\mathfrak{m}^C$ étant le sous-espace complexe engendré par $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{g}^C$; de plus on voit que cette décomposition est celle de $\mathfrak{g}^C$ qui est définie par l'involution θ prolongée sur $\mathfrak{g}^C$.

Puisque θ conserve $\mathfrak{h}$, on a $\mathfrak{h}^C=\mathfrak{h}^C_+ + \mathfrak{h}^C_-$ où $\mathfrak{h}^C_+=\mathfrak{k}^C\cap\mathfrak{h}^C$ et $\mathfrak{h}^C_-=\mathfrak{m}^C\cap\mathfrak{h}^C$; en fait, $\mathfrak{h}^C_+$ peut être considérée comme complexifiée de l'algébre $\mathfrak{h}_+$ introduite au cours de la démonstration du lemme 2. D'autre part, pour toute racine $\alpha\in\Delta$, écrivons α^* au lieu de $\rho(\alpha)$. Posons

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta_1 = \{\alpha\in\Delta\,;\ \alpha^*=\alpha,\ \kappa_\alpha=1\} \\ \Delta_2 = \{\beta\in\Delta\,;\ \beta^*=\beta,\ \kappa_\beta=-1\} \\ \Delta_3 = \{\xi\in\Delta\,;\ \xi^*\neq\xi\} \end{cases}$$

On a $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3$ et il résulte de (2) les formules suivantes:

$$(5)\qquad \mathfrak{k}^C = \mathfrak{h}^C_+ + \sum_{\alpha\in\Delta_1}\{e_\alpha\}^C + \sum_{\xi\in\Delta_3}\{e_\xi+\kappa_\xi e_{\xi^*}\}^C$$

$$(6)\qquad \mathfrak{m}^C = \mathfrak{h}^C_- + \sum_{\beta\in\Delta_2}\{e_\beta\}^C + \sum_{\xi\in\Delta_3}\{e_\xi-\kappa_\xi e_{\xi^*}\}^C$$

où $\{\cdot\}^C$ désigne le sous-espace complexe engendré par $\{\cdot\}$. Pour toute racine $\alpha\in\Delta$, qui est maintenant considérée comme forme linéaire sur $\mathfrak{h}^C$, notons α' la restriction de α dans $\mathfrak{h}^C_+$. Puisque $\mathfrak{h}_+$ contient un élément régulier de $\mathfrak{g}$, α' n'est identiquement nulle pour aucune $\alpha\in\Delta$. Pour la même raison, $\mathfrak{h}^C_+$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}^C$. Il résulte alors de (5) que le système des racines $\Delta_\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{k}^C$ par rapport à cette sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}^C_+$ est donné par $\{\alpha'\,;\ \alpha\in\Delta_1\cup\Delta_3\}$.

La structure de $\mathfrak{k}$ sera déterminée lorsque l'on aura su un système de racines simples de $\mathfrak{k}^C$ avec les produits scalaires entre ces racines simples. Posons $\mathfrak{h}_1=\sqrt{-1}\ \mathfrak{h}_+$; il est evident que $\mathfrak{h}_1$ est la partie réelle de $\mathfrak{h}^C_+$. On définit maintenant un ordre linéaire dans l'espace dual $\mathfrak{h}_1^*$ de $\mathfrak{h}_1$ qui est compatible avec l'inclusion $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_0$, c'est-à-dire, tel que si α est une racine positive de $\mathfrak{g}^C$, α' soit non-negative (et par suite positive); l'existence d'un tel ordre est bien connue et facile à montrer. On désignera par $\Pi_\mathfrak{k}$ le système des racines simples de $\mathfrak{k}^C$ par rapport à cet ordre. Puisque la restriction à $\mathfrak{k}^C$ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}^C$ est invariante par les opérations adjointes des éléments de $\mathfrak{k}^C$, on peut mesurer les produits scalaires entre les racines dans $\Delta_\mathfrak{k}$ en utilisant le produit scalaire $(\ ,\ )$, tout au moins pour savoir le type de $\Pi_\mathfrak{k}$; en particulier, on identifie une racine $\alpha'\in\Delta_\mathfrak{k}$ avec le vecteur $\alpha'\in\mathfrak{h}_1$ tel que $\alpha'(h_1)=(\alpha', h_1)$ quelque soit $h_1\in\mathfrak{h}_1$. Dans ce cas on constate facilement qu'on a, comme vecteurs dans $\mathfrak{h}_0$,

$$(7)\qquad \alpha' = \alpha, \qquad \xi' = \frac{1}{2}(\xi+\xi^*)$$

où $\alpha\in\Delta_1$ et $\xi\in\Delta_3$.

La rotation particulière ρ définit une permutation d'ordre 2 de Π. Ainsi, on peut poser

$$(8) \qquad \Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots, \beta_q, \xi_1, \xi_1^*, \cdots, \xi_r, \xi_r^*\}$$

où $\alpha_i \in \Delta_1$, $\beta_j \in \Delta_2$, $\xi_k \in \Delta_3$ et $p+q+2r=l$. L'expréssion (8) de Π détermine ρ et on a $r>0$; sinon, ρ serait la rotation identique. Remarquons que si α est une racine positive, $\rho(\alpha)$ l'est aussi; cela résulte de (8).

Lemme 3. *$\alpha_1', \cdots, \alpha_p', \beta_1', \cdots, \beta_q', \xi_1', \cdots, \xi_r'$ sont linéairement indépendantes dans $\mathfrak{h}_1$ et $p+q+r$ est égal au rang de $\mathfrak{k}^C$.*

En effet, on voit que $\mathfrak{h}_1 = \{h \in \mathfrak{h}_0;\ (\xi_k - \xi_k^*)(h) = 0,\ k=1, \cdots, r\}$. Le lemme en résulte.

Lemme 4. $\{\alpha_1', \cdots, \alpha_p', \xi_1', \cdots, \xi_r'\} \subset \Pi_k$

Ce lemme est dû à Raghunathan [9, Lemma 22]. Rappelons sa démonstration pour des raison de convenance. Soit α une des racines $\alpha_i (1 \leqq i \leqq p)$ et $\xi_k (1 \leqq k \leqq r)$, et supposons que α' ne soit pas simple. La racine α' étant positive, il est somme de deux racines positives de $\mathfrak{k}^C$. Par suite, il y a deux racines positives $\gamma, \delta \in \Delta_1 \cup \Delta_3$ telles que $\alpha' = \gamma' + \delta'$. Compte tenu de (5), on voit alors que $e_\alpha + \theta(e_\alpha)$ et $[e_\gamma + \theta(e_\gamma), e_\delta + \theta(e_\delta)]$ sont des vecteurs non-nuls et linéairement dépendants. Il en résulte que $[e_\gamma, e_\delta]$ ou $[e_\gamma, \theta(e_\delta)]$ est non-nul et que ceci est un multiple scalaire de e_α ou de $\theta(e_\alpha)$. Ainsi, α est égale à l'une de formes $\gamma+\delta$, $\gamma+\delta^*$, $\gamma^*+\delta$ et $\gamma^*+\delta^*$, ce qui contredit le fait que α est une racine simple de $\mathfrak{g}^C$.

Considérons le cas où $\theta = \theta_\rho$. On désigne par $\mathfrak{k}_\rho$ la sous-algèbre caractéristique pour ce cas. D'après la définition de θ_ρ, on a $q=0$ dans (8) et l'expréssion (8) de Π par rapport à θ_ρ est:

$$(9) \qquad \Pi_\rho = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \xi_1, \xi_1^*, \cdots, \xi_r, \xi_r^*\} .$$

Le lemme 3 dit que $\Pi_{\mathfrak{k}_\rho}$ est constitué de $p+r$ racines. Par conséquent, le lemme 4 implique

$$(10) \qquad \Pi_{\mathfrak{k}_\rho} = \{\alpha_1', \cdots, \alpha_p', \xi_1', \cdots, \xi_r'\} .$$

Le système Π_ρ étant connu, les produits scalaires entre les élements de $\Pi_{\mathfrak{k}_\rho}$ peuvent être calculés en utilisant (7); en effet, $\Pi_{\mathfrak{k}_\rho}$ est l'image de Π_ρ par la projection orthogonale de $\mathfrak{h}_0$ sur $\mathfrak{h}_1$. On obtient ainsi une partie de la liste à la page 305 des algèbres de Lie de type extérieur déterminées par les θ_ρ.

Il reste à considérer le cas où θ est de la forme (3) avec $h \neq 0$. Puisque $\rho(h) = h$, on voit que θ et θ_ρ commutent; par conséquent, $\exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}\,(h)$ appartient au sous-groupe connexe K_ρ qui correspond à la sous-algèbre $\mathfrak{k}_\rho$ dans le groupe Aut $(\mathfrak{g})$. Si l'on remplace $\exp 2\pi\sqrt{-1}$ ad (h) par un élément $\exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}\,(h')$ avec $h' \in \mathfrak{h}_1$ qui est conjugué à

$\exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}\,(h)$ dans K_ρ, θ est conjugué à $\theta'=\theta_\rho \exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}\,(h')$ dans le groupe Aut $(\mathfrak{g})$. Ainsi, pour notre but, on peut supposer que h est choisi de sorte que $\exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}\,(h)$ représente une classe des éléments conjugués de K_ρ. Or, d'après la liste qu'on vient d'obtenir, on voit que $\mathfrak{k}_\rho$ est une algèbre de Lie simple compacte dont le type est l'un de types B_l, C_l et F_4. Dans tous les cas on sait que Aut $(\mathfrak{k}_\rho)=$ Int $(\mathfrak{k}_\rho)$. D'après le lemme 2, K_ρ est canoniquement isomorphe au groupe Int $(\mathfrak{k}_\rho)$ et par suite au groupe Aut $(\mathfrak{k}_\rho)$. En vertu du théorème 1, on peut maintenant supposer que h est l'un des éléments h_i' ou h_k'' de $\mathfrak{h}_1$ définis comme suit. Soit ν la racine maximale de $\mathfrak{k}_\rho$. D'après (10), ν est de la forme

$$\nu = n_1'\alpha_1' + \cdots + n_p'\alpha_p' + n_1''\xi_1' + \cdots + n_r''\xi_r' \,.$$

Pour tout i tel que $n_i'=1$ ou 2 et pour tout k tel que $n_k''=1$ ou 2, on définit les éléments h_i' et h_k'' de $\mathfrak{h}_1$ par les équations

$$\alpha_a'(h_i') = \delta_{ai}/2, \qquad \xi_b'(h_i') = 0\,;$$
$$\alpha_a'(h_k'') = 0, \qquad \xi_b'(h_k'') = \delta_{bk}/2$$

où $a=1, \cdots, p$ et $b=1, \cdots, r$.

Montrons que $\theta_k=\theta_\rho \exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}\,(h_k'')$ est conjugué à θ_ρ. En effet, soit h_k l'élément de $\mathfrak{h}_0$ qui est défini par

$$\alpha_a(h_k) = 0, \quad \xi_b(h_k) = \delta_{bk}/2, \quad \xi_b^*(h_k) = 0\,.$$

On a $h_k''=\rho(h_k)+h_k$ et on constate que l'élément $\exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}\,(h_k)$ de Aut $(\mathfrak{g})$ est d'ordre 2 et que θ_k et θ_ρ sont transformés l'un en l'autre par la conjugaison définie par cet élément.

Etudions enfin le cas où θ est $\theta_i=\theta_\rho \exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}\,(h_i)$. On peut supposer que $i=1$ sans restreindre la généralité. Les systèmes Δ_1, Δ_2, Δ_3 étant pris par rapport à cet automorphisme θ_1, il résulte de la forme de θ_1 que $\Pi\cap\Delta_2$ consiste en une seule racine qui est notée α_1 dans Π_ρ (donné par (9)). Par suite, en posant $\beta=\alpha_1$, on a l'expréssion (8) de Π par rapport à θ_1:

$$\Pi = \{\beta, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \xi_1, \xi_1^*, \cdots, \xi_r, \xi_r^*\}\,. \tag{11}$$

D'après les lemmes 3 et 4, on a alors

$$\Pi_{\mathfrak{k}} = \{\eta', \alpha_2', \cdots, \alpha_p', \xi_1', \cdots, \xi_r'\}\,, \tag{12}$$

où η' est une racine simple de $\mathfrak{k}^C$ et donc restriction d'une racine positive $\eta\in\Delta_1\cup\Delta_3$. On va voir quelle est la racine η.

Lemme 5. *Soit $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ un système de racines simples d'une* *algèbre de Lie complexe simple* $\mathfrak{g}^C$. *Supposons que la somme* $\alpha=\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_m}$ *de* m *racines différentes de* Π *soit une racine de* $\mathfrak{g}^C$. *Alors, étant donnée une racine* $\alpha_j\in\Pi$ *qui est différentes de toutes les* $\alpha_{i_u}(1\leqq u\leqq m)$, *pour que* $\alpha+\alpha_j$ *soit une racine de* $\mathfrak{g}^C$ *il faut et il suffit qu'il existe une racine* α_{i_u} *telle que* $(\alpha_j, \alpha_{i_u})\neq 0$.

Ce lemme résulte facilement du fait que $(\alpha_i, \alpha_h)\leqq 0$ pour $i, h=1, \cdots, l$ et $i\neq h$.

Puisque $\mathfrak{g}$ est simple et que $r>0$, on peut trouver une série de racines appartenant à Π :

$$\beta, \alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_t}, \xi_k \qquad (2\leqq i_1, \cdots, i_t\leqq p) \tag{13}$$

telle que les racines successives ne soient pas orthogonales l'une à l'autre. Puisque le diagramme de Dynkin de Π ne contient pas de "cycle fermé," (13) est bien déterminée si l'on choisit ξ_k ; de plus, si l'on enlève une des racines $\alpha_{i_u}(1\leqq u\leqq t)$ de (13), la série qui reste n'est plus connexe, c'est à dire, se décompose en deux parties qui sont orthogonales l'une à l'autre. Or, d'après le lemme 5

$$\eta = \beta+\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_t}+\xi_k \tag{14}$$

est une racine de $\mathfrak{g}^C$. Il est évident que $\eta\in\Delta_3$ et par suite $\eta'\in\Delta_{\mathfrak{k}}$. On va montrer que η' est une racine simple de $\mathfrak{k}^C$; alors elle doit être celle qui figure dans (12). Supposons donc que η' ne soit pas simple. Comme η' est une racine positive de $\mathfrak{k}^C$, il y a alors deux racines positives $\gamma, \delta\in\Delta_1\cup\Delta_3$ telles que $\eta'=\gamma'+\delta'$. Le raisonnement utilisé dans la démonstration du lemme 4 montre qu'on a alors $\eta=\gamma+\delta$, en remplaçant γ, δ par γ^*, δ^* si nécessaire. Puisque η est la somme (14), γ est somme de certains facteurs de cette somme et $\delta=\eta-\gamma$. On peut supposer que γ admet la racine ξ_k dans ses facteurs. Si γ n'avait par β parmi ses facteurs, δ serait somme de β et d'un certain nombre de α_i, et dans ce cas on aurait $\delta\in\Delta_2$, ce qui contredit $\delta\in\Delta_1\cup\Delta_3$. On a donc $\gamma=\beta+\alpha_{j_1}+\cdots+\alpha_{j_s}+\xi_k$. Puisque $\gamma\neq\eta$, l'ensemble $\{\beta, \alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_s}, \xi_k\}$ se décompose en deux parties qui sont orthogonales l'une à l'autre. Compte tenu du lemme 5, on a alors une contradiction, car on sait qu'il existe une série de racines, partant de l'un des facteurs de γ et se terminant à γ, telle que chaque terme soit obtenu par l'addition au précédent d'un des facteur de γ [2] [8a]. Cela démontre que η' est une racine simple de $\mathfrak{k}^C$.

En résumé, on a ainsi le théorème suivant.

Théorème 2. *Les notations* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}^C$, $\mathfrak{h}^C$, $\mathfrak{h}_0$, Δ, Π *étant comme dans le* *théorème* 1, *on suppose que* $\mathfrak{g}$ *admet un automorphisme involutif extérieur* (*et donc que* $\mathfrak{g}$ *est de type* A_l, D_l, *ou* E_6). *Soit* ρ *une rotation particulière d'ordre* 2 ($\neq 1$) (*qui représente une classe de conjugaison du groupe des rotaitons particulières pour le cas* $\mathfrak{g}=D_4$). *Ecrivons* Π *sous la forme*

$$\Pi_\rho = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \xi_1, \xi_1^*, \cdots, \xi_r, \xi_r^*\}$$

où $\rho(\alpha_i)=\alpha_i$ $(i=1, \cdots, p)$ *et* $\rho(\xi_k)=\xi_k^*$ $(k=1, \cdots, r)$. *Soit* θ_ρ *l'automorphisme involutif de* $\mathfrak{g}$ *qui prolonge canoniquement* ρ *sur* $\mathfrak{g}$. *La sous-algèbre caractéristique* $\mathfrak{k}_\rho$ *de* θ_ρ *est alors une algèbre de Lie semi-simple qui admet* $\mathfrak{h}_1=\{h\in\mathfrak{h}_0\,;\ \rho(h)=h\}$ *comme la partie réelle d'une sous-algèbre de Cartan. De plus, un système de racines simples* $\Pi\mathfrak{k}_\rho$ *de* $\mathfrak{k}_\rho$ *est donné par*

$$\Pi\mathfrak{k}_\rho = \{\alpha_1', \cdots, \alpha_p', \xi_1', \cdots, \xi_1'\}$$

où $'$ *signifie la projection orthogonale de* $\mathfrak{h}_0$ *sur* $\mathfrak{h}_1$. *Soit* $\nu=n_1'\alpha_1'+\cdots+n_p'\alpha_p'+n_1''\xi_1'+\cdots+n_r''\xi_r'$ *la racine dominante de* $\mathfrak{k}_\rho$.

Tout automorphisme extérieur d'ordre 2 *de* $\mathfrak{g}$ *est conjuqué, dans le groupe* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, *à l'un des éléments* θ_ρ *ou* $\theta_i=\theta_\rho \exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}(h_i)$, *où* $h_i\in\mathfrak{h}_1$ *est défini, pour tout* i *tel que* $n_1'=1$ *ou* 2, *par les équations* $\alpha_j(h_i)=\delta_{ij}/2 (j=1, \cdots, p)$, $\xi_k(h_i)=\xi_k^*(h_i)=0$ $(k=1, \cdots, r)$. *De plus, la sous-algèbre caractéristique* $\mathfrak{k}_i$ *de* θ_i *est une algèbre de Lie semi-simple admettant* $\mathfrak{h}_1$ *comme la partie réelle d'une sous-algèbre de Cartain. Un système de racines simples* $\Pi\mathfrak{k}_i$ *de* $\mathfrak{k}_i$ *est*:

$$\Pi\mathfrak{k}_i = \{\eta', \alpha_1', \cdots, \hat{\alpha}_i', \cdots, \alpha_p', \xi_1', \cdots, \xi_r'\}$$

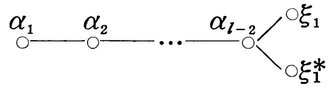
où η *est la racine* $\alpha_i+\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_t}+\xi_k$ *somme des racines successives, partant de* α_i *et se terminant à une racine* ξ_k, *dans le diagramme* Π_ρ.

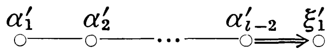
D'après ce théorème on voit les types de $\Pi\mathfrak{k}_\rho$ et de $\Pi\mathfrak{k}_i$ et par suite ceux de $\mathfrak{k}_\rho$ et de $\mathfrak{k}_i$. Le résultat sera donné, pour chaque $\mathfrak{g}$, dans la liste à la page suivante. D'après cette liste, on voit que les structures des sous-algèbres caractéristiques définies par θ_ρ et θ_i se diffèrent l'une de l'autre, sauf le cas où $\mathfrak{g}$ est de type D_l et où elles sont définies par θ_i et θ_{l-i-1}. Dans ce dernier cas, on verra ci-dessous que θ_i et θ_{l-i-1} sont conjuguées dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. On en conclut que, sauf ce dernier cas, les algèbres de Lie de type extérieur définies par l'involution θ_ρ et les θ_i ne sont pas isomorphes l'une à l'autre. Cela termine la classification des algèbres de Lie de type extérieur.

On montre que θ_i et θ_{l-i-1} sont conjuguées dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de type D_l[*)]. Dans ce cas,

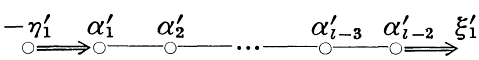
---

*) Cette démonstration est suggérée par Hideya Matsumoto, ce dont l'auteur lui exprime sa reconnaissance.

$\Pi_\rho = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{l-2}, \xi_1, \xi_1^*\}$, 

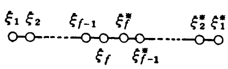
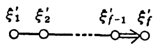
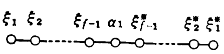
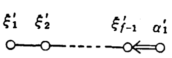
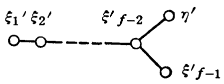
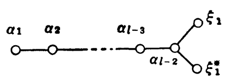
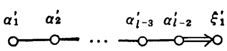
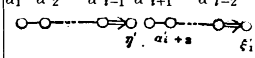
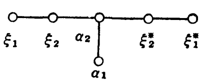
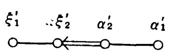
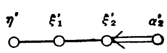
$\Pi_{\mathfrak{k}_\rho} = \{\alpha_1', \cdots, \alpha_{l-2}', \xi_1'\}$ 

et $\mathfrak{k}_\rho$ est de type B_{l-1}. Posons $\eta_1' = \alpha_1' + \cdots + \alpha_{l-2}' + \xi_1'$. D'après le lemme 5, η_1' est une racine de $\mathfrak{k}_\rho$ et les produits scalaires entre $-\eta_1', \alpha_1', \cdots, \alpha_{l-2}', \xi_1'$ sont représentés par le diagramme suivant.



D'après le lemme 1, il en résulte qu'il existe une rotation w de $\mathfrak{h}_+$ telle que $w(\xi_1') = -\eta_1'$ et $w(\alpha_i') = \alpha_{l-i-1}'(i=1, \cdots, l-2)$. Puisque $\mathfrak{k}_\rho$ est de type B_{l-1}, w est nécessairement un élément du groupe de Weyl de $\mathfrak{k}_\rho$. Soit donc $\tilde{w}$ l'élément du groupe $K = \mathrm{Int}(\mathfrak{k}_\rho)$ qui laisse invariant $\mathfrak{h}_+$ et qui

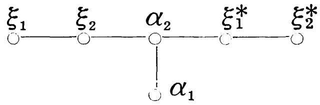
Liste des algèbres de Lie réelle et simples de type extérieur

$\mathfrak{g}$	Π_ρ / $\Pi_{k\rho}$	$\mathfrak{k}_\rho$	$\mathfrak{g}_{\theta\rho}$	Racine maximale ν de $\mathfrak{k}_\rho$	θ_i	η' / $\Pi_{\mathfrak{k}}$	$\mathfrak{k}_i$	$\mathfrak{g}_{\theta_i}$
A_{2f}	 	B_f	AI	$\xi_1' + 2\xi_2' + \cdots + 2\xi_f'$				
A_{2f-1} $(f \geqq 2)$	 	C_f	AII	$2\xi_1' + \cdots + 2\xi_{f-1}' + \alpha_1'$	θ_1	$\alpha_1' + \xi'_{f-1}$ 	D_f	AI
D_l	 	B_{l-1}	DI	$\alpha_1' + 2\alpha_2' + \cdots + 2\alpha_{l-2}' + 2\xi_1'$	θ_i $\left(1 \leqq i \leqq \left[\frac{l}{2}\right]\right)$	$\alpha_i' + \alpha'_{i+1} + \cdots + \alpha'_{l-2} + \xi_1'$ 	$B_i \times B_{l-i-1}$	DI
E_6	 	F_4	EI	$2\alpha_1' + 3\alpha_2' + 4\xi_2' + 2\xi_1'$	θ_1	$\alpha_1' + \alpha_2' + \xi_2'$ 	C_4	EIV

définit la rotation w dans $\mathfrak{h}_+$. On a, pour chaque $i=1, \cdots, l-2$, $h_{l-i-1}-w^{-1}(h_i)=\rho(h_l)+h_l$ où h_l est l'élément de $\mathfrak{h}_0$ défini par $\alpha_a(h_l)=0$ $(a=1, \cdots, l-2)$, $\xi_1(h_l)=1/2$ et $\xi_1^*(h_l)=0$. Alors, la conjugaison du groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ définie par l'élément $(\exp 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}(h_l))\tilde{w}^{-1}$ transforme θ_i en θ_{l-i-1}.

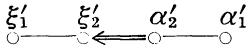
On illustre enfin le cas où $\mathfrak{g}$ est de type E_6. On a

$$\Pi_\rho = \{\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*\}$$



et

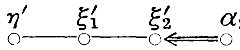
$$\Pi_{\mathfrak{k}_\rho} = \{\alpha_1', \alpha_2', \xi_1', \xi_2'\}\,.$$



Par suite $\mathfrak{k}_\rho$ est de type F_4, et on a

$$\nu = 2\alpha_1'+3\alpha_2'+4\xi_2'+2\xi_1'\,.$$

On a donc, comme θ_i, la seule involution θ_1. D'après le diagramme de Π_ρ, $\eta=\alpha_1+\alpha_2+\xi_2$ et $\eta'=\alpha_1'+\alpha_2'+\xi_2'$. On voit aisément que η' est orthogonale à α_2', à ξ_2' mais non pas à ξ_1' et qu'il est de même longeur que ξ_1'. $\Pi_{k_1}=\{\alpha_2', \xi_2', \xi_1', \eta'\}$ est donc de type C_4. Ainsi $\mathfrak{k}_1$ est de type C_4.



UNIVERSITÉ D'OSAKA

Bibliographie

[1] S. Araki: *On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces*, J. Math. Osaka City Univ. **13** (1962), 1–34.

[2] A. Borel et J. de Siebenthal: *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comm. Math. Helv. **23** (1949), 200–221.

[3] É. Cartan: *Les groupes réels simples, finis et continus*, Ann. Ecole Normale Sup. (3) **31** (1914), 263–355.

[4] É. Cartan: *Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne*, J. Math. Pures Appl. (9) **8** (1929), 1–33.

[5] F. Gantmacher: *Canonical representations of automorphisms of a complex semi-simple Lie group*, Rec. Math. N. S. **5** (1939) 101–144.

[6] F. Gantmacher: *On the classification of real simple Lie groups*, ibid. 217–249.

[7] S. Helgason: Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, New York and London, 1962.

[8] S. Murakami: *On the automorphisms of a real semi-simple Lie algebra*, J. Math. Soc. Japan (a) **4** (1952), 103–133, (b) **5** (1953), 107–112.

[9] M. S. Raghunathan: *On the first cohomology of discrete subgroups of simple Lie groups*, Amer. J. Math. **87** (1965), 103–139.

[10] I. Satake: *On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces*, Ann. of Math. **71** (1960), 77-110.
[11] M. Sugiura, *Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan **11** (1959), 374-434.
[12] Séminaire "Sophus Lie" I, 1954-55, Paris.

NOTE ajoutée à l'épreuve au 15 février 1966.

L'auteur a dernièrement eu l'occasion d'apprécier un article miméographié de M. Nolan R. Wallach dans lequel est donnée une méthode de classification analogue à celle qu'on trouve ici. L'article est intitulé ≪A classification of involutive automorphisms of compact simple Lie algebras up to inner equivalence≫ (partie de la Ph. D. dissertation de l'auteur à Washington University, St. Louis, 1965).