

VOLUME ET RAYON D'INJECTIVITÉ DANS LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES DE DIMENSION 3

MARCEL BERGER*

(Received November 26, 1975)

On démontre que toute variété riemannienne compacte de dimension 3, de volume $v(g)$ et de rayon d'injectivité $i(g)$, vérifie l'inégalité

$$v(g) \geq \frac{i^3(g)}{6}.$$

1. Énoncé du résultat

Dans [2] on a posé la question de savoir si, pour tout entier $n \geq 2$, il existe un réel $k(n) > 0$ ayant la propriété suivante: quelque que soit la variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n , son volume $v(g)$ et son rayon d'injectivité $i(g)$ vérifient l'inégalité

$$v(g) \geq k(n) i^n(g)$$

(rappelons que le rayon d'injectivité d'une variété riemannienne compacte est le plus grand réel r tel que l'application exponentielle $\exp_m: T_m M \rightarrow M$ soit un difféomorphisme sur son image quand elle est restreinte à la boule $B(0_m, r)$ de $T_m M$).

On trouvera dans [2] une réponse affirmative à cette question pour $n=2$ et pour la constante $k(2) = \frac{4}{\pi}$, qui est la meilleure possible et caractérise les sphères munies d'une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante. Dans le présent travail nous démontrons l'existence d'un $k(3)$ égal à $\frac{1}{6}$ (corollaire); la valeur obtenue n'est pas la meilleure possible. Ce résultat suit immédiatement d'une proposition (proposition 2) sur les sphères riemanniennes de dimension 2, évidente pour les sphères de dimension 1 et dont l'extension aux sphères de dimension n résoudrait l'existence d'un $k(n+1)$.

* Ce travail a été commencé pendant un séjour de l'auteur à l'Université d'Osaka à l'aide de la Japan Society for Promotion of Science.

2. Réduction à un résultat sur les sphères riemanniennes

Considérons la sphère $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ et son application antipodale $S^n \ni x \mapsto x' = -x \in S^n$ induite par la symétrie $x \mapsto -x$ de \mathbf{R}^{n+1} autour de l'origine. Soit g une métrique riemannienne quelconque sur S^n et posons, pour la structure d'espace métrique d que détermine g sur S^n :

$$j(g) = \inf \{d(x, x') : x \in S^n\}.$$

Pour un entier $n \geq 1$ notons H_n l'assertion "il existe un réel $h(n) > 0$ tel que, quelle que soit g , le volume $v(g)$ (aire $a(g)$ si $n=2$, longueur $l(g)$ si $n=1$) de (S^n, g) vérifie

$$v(g) \geq h(n)j^n(g).$$

On a évidemment, pour $n=1$: $l(g) \geq 2j(g)$ pour toute g (et on a utilisé ceci dans la démonstration du lemme 2.2. de [2]). On a alors la

Proposition 1. *Si H_{n-1} est vraie, alors toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n vérifie*

$$v(g) \geq \frac{h(n-1)}{n} i^n(g).$$

Il s'agit en effet de l'extension naturelle de la démonstration du lemme 2.2. de [2]. Fixons $m \in M$ et pour tout $t \in \left[0, \frac{i(g)}{2}\right]$ notons $S(t)$ la sphère $S(t) = \{x \in M : d(m, x) = t\}$. Choisissons un isomorphisme d'espaces euclidiens $f: T_m M \rightarrow \mathbf{R}^n$ quelconque; on en déduit pour t donné un difféomorphisme $\bar{f}: S(t) \rightarrow S^{n-1}$ en posant

$$\bar{f} = \theta \circ f \circ \exp_m^{-1}, \quad \text{où } \theta: \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto x/||x|| \in S^{n-1}$$

Considérons alors sur S^{n-1} la structure riemannienne $\bar{g} = \bar{f}^*(g|_{S(t)})$, image induite par \bar{f} de la structure riemannienne induite par g sur la sous-variété $S(t)$. Deux points $x, y \in S(t)$ situés sur une même géodésique passant par m , de part et d'autre de m et à la distance t , sont tels que $\bar{f}(x), \bar{f}(y)$ sont antipodes de S^{n-1} . Comme $d(x, y) = 2t < i(g)$, toute courbe tracée dans $S(t)$ et d'extrémités x, y aura une longueur supérieure ou égale à $2t$ par définition même de $i(g)$. Ce qui implique que pour (S^{n-1}, \bar{g}) et pour la métrique riemannienne \bar{g} introduite précédemment on a:

$$j(\bar{g}) \geq 2t.$$

Par hypothèse on a donc $v(S(t), g|_{S(t)}) = v(S^{n-1}, \bar{g}) \geq h(n-1)(2t)^{n-1}$.

D'après la formule classique qui dit que le volume d'une boule est l'intégrale par rapport au rayon du volume des sphères qui la composent (cf. par exemple [4], 3.2.11) on a bien

$$v\left(B\left(m, \frac{i(g)}{2}\right)\right) \geq \int_0^{i(g)/2} h(n-1)(2t)^{n-1} dt = \frac{h(n-1)}{2n} i^n(g).$$

Maintenant, en prenant $n \in M$ tel que $d(m, n) \geq i(g)$, on met dans M deux boules disjointes et de rayon $i(g)/2$, d'où la proposition.

Nous démontrerons dans le $n^{\circ}5$ la

Proposition 2. *L'assertion H_2 est vraie avec $h(2) = \frac{1}{2}$*

d'où le:

Corollaire. *Pour toute variété riemannienne de dimension 3 on a*

$$v(g) \geq \frac{1}{6} i^3(g).$$

La démonstration de la proposition 2, qui sera donnée dans le $n^{\circ}5$, repose sur l'étude des $n^{\circ}3$ et 4. Elle consiste à étudier, un $a \in S^2$ étant fixé, les ensembles isotèles $I(a, r) = \{x \in S^2 : d(a, x) = r\}$. Si $r < i(g)$, ce sont des courbes fermées simples, difféomorphes au cercle S^1 , mais, si $r > i(g)$, il n'est plus nécessairement de même. Dans le $n^{\circ}4$ nous démontrerons (proposition 4) que les $I(a, r)$ sont, dans le cas analytique au moins, des réunions finies de courbes fermées simples. Il est alors facile d'en déduire que, pour r convenable, la longueur de $I(a, r)$ est minorée en fonction de r , d'où le résultat par intégration (encore la formule 3.2.11 de [4]!).

REMARQUES.

Ni la constante $k(3) = \frac{1}{6}$, ni la constante $h(2) = \frac{1}{2}$ n'est la meilleure possible.

La proposition 2 est une généralisation faible d'un théorème de Pu (cf. par exemple [1], p. 1); si en effet la métrique riemannienne considérée g sur S^2 était invariante par antipodie elle passerait au quotient en g sur le projectif P^2 et, pour (P^2, g) , le nombre $j(g)$ serait la borne inférieure des longueurs des courbes non homotopes de à 0 de P^2 . Le théorème de Pu entrainerait $a(g) \geq \frac{2}{\pi} j^2(g)$, d'où $a(g) = 2a(g) \geq \frac{4}{\pi} j^2(g)$. La proposition 2 généralise donc le théorème de Pu aux métriques riemanniennes sur S^2 non nécessairement invariantes par antipodie mais, en échange, avec une constante non optimale.

L'assertion H_n n'a de sens que pour la sphère S^n ou, en tout cas, que pour certaines variétés. En effet, considérons sur le tore T^2 et, pour tenir lieu d'antipodie, un difféomorphisme involutif sans point fixe f . Il est vain d'espérer que l'on ait, pour toute métrique riemannienne g sur T^2 :

$$a(g) \geq \lambda j^2(g), \text{ avec } \lambda > 0 \text{ et } j(g) = \inf \{d(x, f(x)) : x \in T^2\}.$$

Il suffit de considérer les métriques riemanniennes induites sur des tores de révolution de R^3 , à grands parallèles mais petits méridiens, l'application f étant la symétrie autour de l'axe de révolution: $a(g)$ peut être aussi petit que l'on veut tandis que $j(g)$ reste grand.

3. Quelques précisions sur le cut-locus des sphères riemanniennes analytiques

Nous utilisons de façon essentielle les résultats de [7]. Ici (S^2, g) est la sphère S^2 munie d'une métrique riemannienne *analytique* et a un point fixé de S^2 . Considérons le *cut-locus* $C(a)$ de a (appelé lieu des points minimum dans [7]; nous adoptons la terminologie maintenant standard, cf. au choix: [6], p. 96, [5] p. 97, [3] p. 237).

D'après [7], $C(a)$ est un arbre fini, formé d'arcs analytiques fermés constituant ses branches. L'ordre de $x \in C(a)$ est le nombre k de géodésiques distinctes joignant a à x et de longueur égale à $d(a, x) = r$ (cf. [7], p. 386); il est fini à la seule exception du cas où toutes les géodésiques issues de a et de longueur r ont x pour extrémité commune (et alors $C(a) = \{x\}$). On notera $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ ces k géodésiques minimales. Si $k \geq 3$, cet ordre est aussi le nombre de branches de $C(a)$ d'origine x ([7], p. 388).

D'après [7], lemma 10, p. 386, si $k=1$, c'est que x est une extrémité libre d'une branche δ de $C(a)$ et alors les géodésiques issues de a , et voisines de γ_1 enveloppent un arc analytique (conjugate-locus) ayant en x un point de rebroussement de première espèce (figure 4).

Si $k=2$, alors (cf. [7], lemma 11) x est un point *intérieur une branche* δ de $C(a)$; d'après [9], p. 243, le vecteur tangent $\delta'(x)$ à δ en x fait des angles égaux avec ceux $\gamma_1'(x), \gamma_2'(x)$ de γ_1, γ_2 en x (ce que l'on peut appeler la *condition de bissection*).

Sur toute branche δ de $C(a)$ on a le:

Lemme 3. *La fonction $f = d(a, \cdot) | \delta$ n'est pas constante.*

Noter que le lemme est faux sur le projectif réel P^2 , muni d'une métrique courbure à constante. On procède par l'absurde en supposant donc f constante; la formule de la variation première montre alors que $\gamma_1'(x) = -\gamma_2'(x)$ pour tout $x \in \delta$, ce qui entraîne que chaque réunion $\lambda = \gamma_1 \cup \gamma_2$ est un lacet géodésique d'origine a . Ceci ayant lieu pour tout $x \in \delta$, on obtient une famille analytique $\{\lambda(x)\}$ de lacets géodésiques en a , famille qui se prolonge indéfiniment au-delà de δ . Or le théorème de Jordan entraîne que ces lacets sont contenus les uns dans les autres; un jour donc leurs tangentes en a devraient finir par coïncider, ce qui est absurde (figure 1).

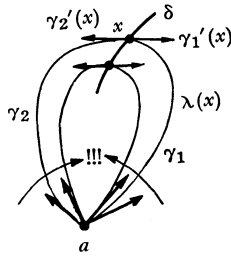


figure. 1

Il résulte du lemme que l'on peut distinguer quatre cas pour un point x d'ordre 2 de $C(a)$ et la nature de la fonction f :

CAS II. 1. *Les tangentes $\gamma_1'(x)$, $\gamma_2'(x)$ ne sont pas orthogonales à δ .*

Alors la fonction f est à dérivée première non nulle sur δ , au moins localement en x (figure 5).

CAS II. 2. *On a $\gamma_1'(x)$, $\gamma_2'(x)$ orthogonales à δ et la première dérivée non nulle de f en x est d'ordre impair.*

Alors f est strictement monotone au voisinage de x (figure 7).

CAS II. 3. *On a $\gamma_1'(x)$, $\gamma_2'(x)$ orthogonales à δ et la première dérivée non nulle de f en x est d'ordre pair et positive.*

Alors f admet en x un minimum local strict (figure 12).

CAS II. 4. *On a $\gamma_1'(x)$, $\gamma_2'(x)$ orthogonales à δ et la première dérivée non nulle de f en x est d'ordre pair et négative.*

Alors f admet en x un maximum local strict (figure 9).

Si x est d'ordre $k \geq 3$ on peut aussi distinguer les cas suivants:

CAS III. 1. *Tous les vecteurs $\gamma_i'(x)$ ($i=1, \dots, k$) tangent en x aux géodésiques minimales joignant a à x sont dans un même demi-plan ouvert de $T_x S^2$.*

Indexons les γ_i en sorte que le secteur angulaire défini par $\gamma_1'(x)$ et $\gamma_k'(x)$ contiennent tous les autres $\gamma_i'(x)$ ($i=2, \dots, k-1$). La condition de bisection implique qu'il existe une branche δ de $C(a)$ d'origine x dont le vecteur tangent $\delta'(x)$ fait avec tous les $\gamma_i'(x)$ ($i=1, \dots, k$) des angles obtus. Ce qui entraîne que la fonction $d(a, \cdot)$ sur δ est, localement en x , strictement croissante à partir de x (figure 6).

CAS III. 2 *Il n'existe aucun demi-plan fermé de $T_x S^2$ contenant tous les $\gamma_i(x)$ $i=1, \dots, k$.*

La condition de bisection entraîne alors que, sur toute branche de $C(a)$ d'origine x , la fonction $d(a, \cdot)$ est strictement décroissante à partir de x . Donc la fonction $d(a, \cdot)$ sur S^2 admet en x un maximum local strict (figure 11).

Supposons n'être ni dans le cas III.1., ni dans le cas III.2. C'est donc qu'il existe un demi-plan fermé K de $T_x S^2$ contenant tous les $\gamma_i'(x)$ et dont la droite frontière $Fr K$ porte $\gamma_1'(x) = -\gamma_k'(x)$ (figure 8 ou 10).

Il existe donc une branche d'origine x de $C(a)$ telle que $\delta'(x) \notin K$ et orthogonale à $Fr K$ en x . D'après le lemme 3 deux cas seulement restent possible:

CAS III. 3. *On a f localement croissante à partir de x sur δ .*

CAS III. 4. *On a f localement décroissante à partir de x sur δ .*

En particulier la fonction $d(a, \cdot)$ sur S^2 admet en x un maximum local strict.

4. Structure des isotèles dans les sphères riemanniennes analytiques

Dans ce n° on considère toujours une métrique riemannienne analytique g sur S^2 . On appelle *isotèle* de (S^2, g) tout ensemble $I(a, r)$ où $a \in S^2$, $r \in R_+$ et défini par $I(a, r) = \{x \in S^2 : d(a, x) = r\}$. La structure des isotèles va se déduire facilement du $n^\circ 3$:

Lemme 4. *Pour tout isotèle $I(a, r)$ et tout $x \in I(a, r)$, la structure locale en x est l'une des suivantes:*

- (i) *x est un point isolé;*
- (ii) *$I(a, r)$ est, localement en x , un arc de Jordan;*
- (iii) *$I(a, r)$ est, localement en x , la réunion de deux arcs de Jordan passant par x et n'ayant que x en commun.*

Nous distinguons plusieurs cas possibles, dont le $n^\circ 3$ montre qu'ils épuisent la situation. Les figures y référées exhibent les géodésiques voisines des γ_i ainsi que les isotèles voisins de $I(a, r)$, qui en sont les trajectoires orthogonales.

Premier cas: $x \notin C(a)$ (figure 2).

Comme $d(a, \cdot) = s$ est alors une fonction analytique sur S^2 à différentielle non nulle en x , c'est que $I(a, r) = s^{-1}(r)$ est, localement en x , une sous variété analytique de dimension 1; on est dans (ii). Cette sous variété est la trajectoire orthogonale, passant par x , des géodésiques issues de a et voisines de l'unique géodésique minimale γ de a à x .

Deuxième cas: $C(a) = \{x\}$ (figure 3).

On est dans (i).

Troisième cas: $x \in C(a)$ et $k=1$ (figure 4).

Alors $I(a, r)$ est, localement en x , la trajectoire orthogonale qui passe par x des géodésiques voisines de γ_1 ; d'après le $n^\circ 3$ c'est un arc de Jordan. On prendra garde que, contrairement à ce que le dessin peut laisser penser, que ce n'est pas une sous variété C^2 , puisque on ne peut pas parcourir cette courbe avec

une vitesse non nulle en x , car alors sa courbure serait infinie (les vieux auteurs appellaient "piriforme" un tel point singulier).

Quatrième cas: *cas II.1 ou cas III.1 du n°3 (figure 5 ou 6).*

Dans l'un ou l'autre de ces deux cas, $I(a, r)$ est la réunion, localement en x , de deux demi-arcs analytiques réguliers, d'origine x et de tangentes t', t'' telles que $t' \neq \pm t''$. On est donc encore dans (ii).

Cinquième cas: *cas II.2 ou cas III.3 du n°3 (figures 7 ou 8).*

Alors $I(a, r)$ est, localement en x , la réunion de deux demi-arcs analytiques réguliers, d'origine x et de même tangente en x égale à $\delta'(x)$. En outre ces deux demi-arcs n'ont que x en commun, on est donc dans (ii).

Sixième cas: *cas II.4 ou cas III.2 ou cas III.4 du n°3 (figures 9 ou 10 ou 11).*

Dans chacun de ces cas, x est isolé dans S^2 , on est donc dans (i).

Septième cas: *cas II.3 du n°3 (figure 12).*

On est dans les cas (iii) car $I(a, r)$ est localement en x la réunion de deux sous-variétés analytiques de dimension 1, de même tangente en x égale à $\delta'(x)$ et n'ayant que x en commun.

Proposition 4. *Tout isotèle non vide et non réduit à un point est réunion d'un nombre fini de courbes fermées simples de Jordan de S^2 .*

En effet, a et r étant fixés, $I(a, r) \cap C(a)$ est un ensemble fini; c'est en effet un compact et tous ses points sont isolés d'après l'étude précédente. Le complémentaire $I(a, r) \setminus C(a)$ est donc une réunion finie de sous-variétés V_i analytiques de dimension 1. Considérons leurs adhérences \bar{V}_i ; l'étude précédente montre encore qu'une extrémité d'une telle \bar{V}_i est nécessairement aussi une extrémité d'une \bar{V}_j ($i \neq j$); en outre des \bar{V}_i n'ont d'extrémités en commun que deux à deux ou quatre à quatre (dans le seul cas (iii)). D'où la proposition.

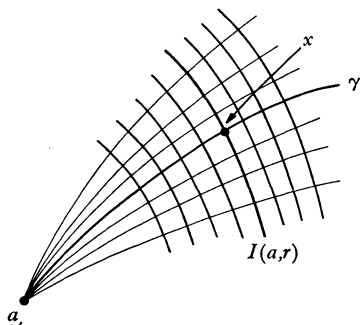


figure. 2

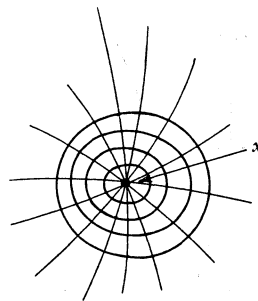
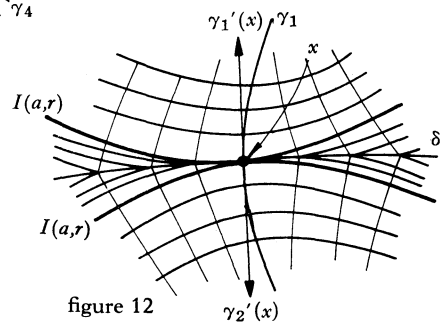
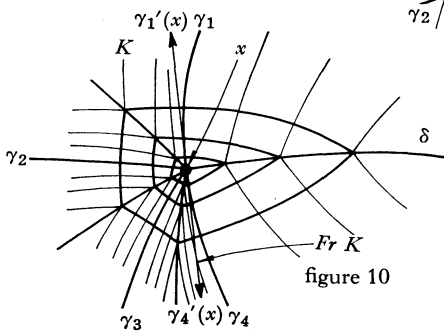
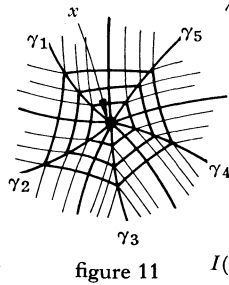
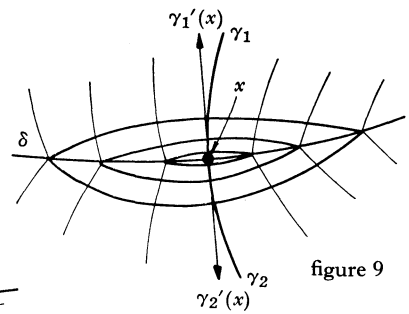
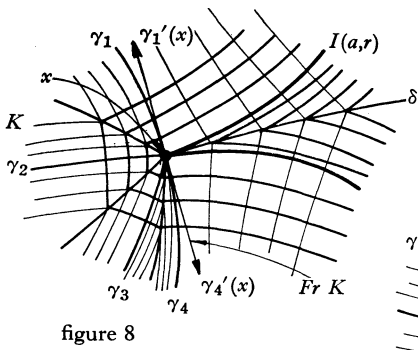
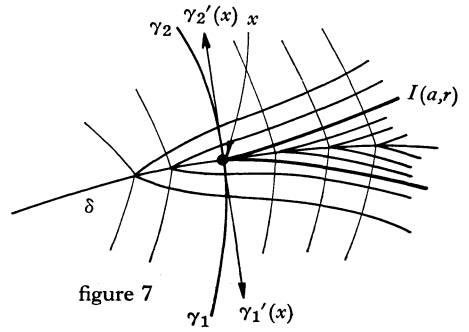
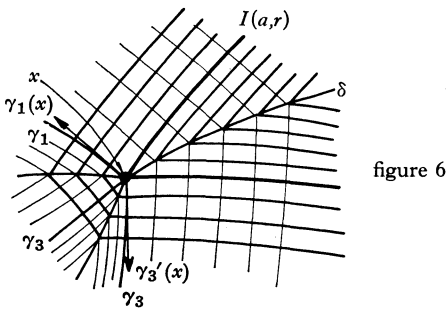
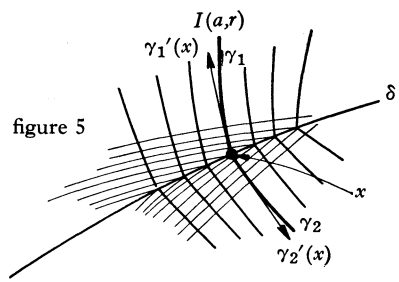
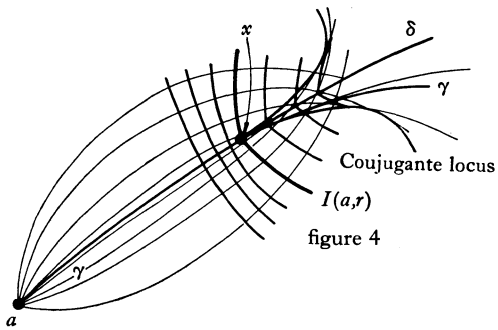


figure. 3



5. Vérité de H_2

On se ramène d'abord à démontrer H_2 pour des métriques riemanniennes analytiques; en effet $a(g)$ et $j(g)$ sont continues en g et toute métrique riemannienne peut être approchée par des g analytiques: [10], p. 668 (alinéa suivant le lemme 24) combiné avec [8], p. 63.

Supposons donc g analytique, fixons $a \in S^2$ tel que $d(a, a') = j(g)$, où a' est l'antipode de a . Fixons aussi une géodésique minimale γ de a à a' et paramétrons la par la longueur de l'arc r de a à a' . Pour tout $r \in]0, j(g)[$, il existe d'après la proposition 4 une courbe fermée simple de Jordan $\Delta(r) \subset I(a, r)$ et passant par $\gamma(r)$. D'après le théorème de Jordan (on utilise ici que l'on est sur S^2 !) la courbe $\Delta(r)$ sépare S^2 en deux régions A et B , l'une A contenant a . Je dis que $a' \in B$; en effet $\gamma(r) \notin C(a)$ puisque γ est prolongeable en une géodésique minimale au-delà de $\gamma(r)$ et alors la courbe $\Delta(r)$ est localement en $\gamma(r)$ une sous-variété de dimension 1 transverse à γ . En outre γ ne peut plus couper $I(a, r)$ au-delà de $\gamma(r)$.

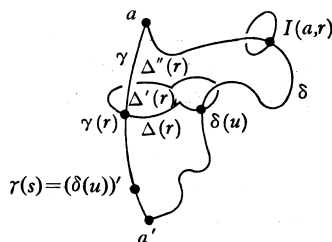


figure 13

Considérons alors δ , l'arc image γ de par l'antipodie; il va de a' à a donc rencontre $\Delta(r)$ en au moins un point $\delta(u)$. Distinguons maintenant deux cas, selon la position sur γ de l'antipode $(\delta(u))'$ de $\delta(u)$:

$$1^\circ / : (\delta(u))' = \gamma(s) \text{ avec } s \leq r;$$

$$2^\circ / : (\delta(u))' = \gamma(s) \text{ avec } s \geq r.$$

Les deux points $\gamma(r)$, $\delta(u)$ divisent la courbe fermée simple $\Delta(r)$ en deux arcs de Jordan $\Delta'(r)$, $\Delta''(r)$. Les deux réunions $\Delta'(r) \cup \gamma_r^s$ et $\Delta''(r) \cup \gamma_r^s$, avec la restriction γ_r^s de γ de r à s , sont des arcs de Jordan d'extrémités antipodes $\gamma(s)$ et $\delta(u)$; donc, par définition de $j(g)$, on a:

$$\text{long}(\Delta'(r) \cup \gamma_r^s) \geq j(g) \text{ et } \text{long}(\Delta''(r) \cup \gamma_r^s) \geq j(g).$$

Comme $\text{long}(\gamma_r^s) = |r - s|$ et eu égard aux deux cas distingués plus haut, on obtient en additionnant $\text{long}(\Delta'(r))$ et $\text{long}(\Delta''(r))$:

$$\text{long}(\Delta(r)) \geq 2j(g) - |r - s| \geq \inf \{2r, 2j(g) - 2r\}.$$

Appliquons maintenant la formule 3.2.11 de [4] à l'application distance

$$d(a, \cdot): S^2 \setminus C(a) \rightarrow R;$$

puisque $C(a)$ est de mesure 0 on a :

$$a(g) = a(S^2 \setminus C(a)) \geq \int_0^{j(g)} \text{long}(I(a, r) \setminus C(a)) dr.$$

Comme le $n^\circ 4$ le montre, $I(a, r) \cap C(a)$ est composé de points isolés, d'où

$$\text{long}(I(a, r) \setminus C(a)) = \text{long}(I(a, r)) \geq \text{long}(\Delta(r)); \text{ ainsi:}$$

$$a(g) \geq \int_0^{j(g)} \text{long}(\Delta(r)) dr \geq 2 \int_0^{j(g)/2} 2r dr = \frac{j^2(g)}{2}.$$

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET UNIVERSITÉ PARIS VII

Bibliographie

- [1] M. Berger: *Du côté de chez Pu*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 5 (1972), 1–44.
- [2] M. Berger: *Some relations between volume, injectivity radius and convexity radius in riemannian manifolds*, Differential geometry and relativity, ed. by Cahen & Flato, D. Reidel, (1976), 33–42.
- [3] R.L. Bishop et R.J. Crittenden: *Geometry of manifolds*, Academic Press.
- [4] H. Federer: *Geometric measure theory*, Springer.
- [5] S. Kobayashi: *On conjugate and cut loci*, Studies in global geometry and analysis, Math. Assoc. Amer. 1967, 96–122.
- [6] S. Kobayashi et K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*, vol. II, Interscience.
- [7] S.B. Myers: *Connections between differential geometry and topology*, Duke Math. J. 1 (1935) 376–391.
- [8] J. Nash: *The imbedding problem for riemannian manifolds*, Ann. of Math. 63 (1956), 20–63.
- [9] R. Poincaré: *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1905), 327–274.
- [10] H. Whitney: *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. 37 (1936), 645–680.

Ajouté sur épreuves. On trouvera une inégalité entre volume et rayon d'injectivité valable en toutes dimensions dans M. Berger, Volume et rayon d'injectivité dans les variétés riemanniennes, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 284 (1977), 1221–1224.

D'autre part R. Osserman nous a signalé qu'une étude assez semblable des isotèles se trouve déjà dans F. Fiala, Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive, Comment. Math. Helv. 13 (1940–41), 293–346.