Saitō, H.
Osaka J. Math.
14 (1977), 649-674

FONCTIONS ENTIERES QUI SE REDUISENT A CERTAINS POLYNOMES (II)

Hiroko SAITŌ

(Received July 1, 1976)

Introduction

C'est le deuxième mémoire des recherches sur les fonctions entières qui se réduisent à certains polynômes. Dans le premier mémoire [7], on a traité des fonctions entières de deux variables, de la classe (A) et de type $(0, 2)$, et on a vu qu'une fonction entière satisfaisant aux conditions $(B_{n,m})$[1], m et n étant entiers positifs, peut être amenée par un automorphisme analytique de $\boldsymbol{C}^2$ au polynôme $x^n y^m$ ou bien à celui de la forme $x^n(x^l y+P_{l-1}(x))^m$ $(l\geq 1,\ P_{l-1}(0)\neq 0)$, où $P_{l-1}(x)$ est un polynôme en x de degré $\leq l-1$. En outre, on a annoncé sans démonstration le fait que toute fonction entière f de la classe (A) et de type $(0, 2)$ peut se mettre sous la forme $f=F\circ f_0$ où F est une fonction entière d'une variable et f_0 est une fonction entière de deux variables qui satisfait aux conditions $(B_{n,m})$ pour certains entiers positifs n et m.

Après que le premier mémoire fut publié, de nombreuses recherches sur les fonctions entières de deux variables ont été faites par Nishino[2], Suzuki [8] et Yamaguchi [9]. Surtout, Nishino(V) a indiqué que toute fonction entière de la classe (A) se réduit à un polynôme. Dans ces recherches, les problèmes qui avaient été laissés sans démonstration dans le premier mémoire ont été résolus presque tous sous certaines conditions plus générales. Il ne nous reste qu'à montrer un théorème que nous établirons dans la section 3 pour les fonctions entières de la classe (A) et de type $(0, n)$.

Le mémoire actuel sera donc consacré principalement aux recherches sur les fonctions entières de deux variables de la classe (A) et de type $(0, 3)$. Le but est aussi la détermination des formes explicites de telles fonctions. Pour cela, il s'agira, comme dans le mémoire précédent, de former pour une fonction en question une fonction adjointe distinguée qui nous conduira à la solution du problème.

Le mémoire consiste en six sections. Dans la section 1, on rappellera quelques résultats déjà connus dont nous aurons besoin dans la suite. On

1) Voir [7] 229-300, 315.
2) Voir [5]; (III), (IV).

posera, dans la section 2, le problème principal. On donne d'abord une table de tous les types qui se déduisent de la formule de Suzuki [8]. On mettra sur chaque type une marque d'existence ou d'inexistence. Dans la section 3, on traitera en général des fonctions entières de la classe (A) et de type $(0, n)$. Dans la section 4, on trouvera les fonctions adjointes et étudiera leurs propriétés. Dans la section 5, on montrera que les types à marque d'inexistence dans la table qui n'existent pas en réalité, ce qui est notre problème central. Dans la dernière section, on indiquera toutes les formes explicites des fonctions en question.

1. Préliminaires. Commençons par rappeler quelques notions et résultats déjà connus.

1° Soit f une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe M à deux dimensions complexes. Pour une valeur complexe α, S_α désigne la surface analytique donnée par $f-\alpha=0$ dans M. Chaque composante irréductible de S_α dans M s'appelle *surface première* de f avec la valeur α. Elle est dite *d'ordre* ν si $f-\alpha$ s'annule en elle avec l'ordre ν. Une surface irréductible dans M est dite *algébrique de type* (g, n) si sa normalisée est analytiquement homéomorphe à la surface obtenue à partir d'une surface de Riemann compacte de genre g par l'exception d'un nombre fini n de points.

Le théorème suivant est du à Nishino(IV) et à Yamaguchi [10].

Théorème 1. *Soit f une fonction holomorphe sur une variété de Stein M, connexe et à deux dimensions complexes et soit F_a la famille des surfaces premières algébriques de f. Supposons que F_a est de capacité positive, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs prises par f sur les surfaces appartenant à F_a est de capacité logarithmique >0. Alors, toute surface première de f est algébrique. De plus, toutes les surfaces premières de f sauf celles qui appartient à une famille de capacité nulle ont même type (g, n).*

Ce théorème nous permet de dire qu'une telle fonction est *de la classe* (A) *et de type* (g, n).

2° Considérons, dans ce n°, le cas où M est tout l'espace $\boldsymbol{C}^2$. Une fonction entière f non constante est dite *primitive* si l'on ne peut jamais se mettre f sous la forme $f=\Phi\circ g$, où g est une fonction entière de deux variables et Φ est une fonction entière d'une variable qui n'est pas linéaire. Alors, toute fonction entière f peut se mettre sous la forme $f=F\circ f_0$, où f_0 est une fonction entière primitive et F est une fonction entière d'une variable. Cette fonction f_0 est déterminée uniquement pour f à une constante additive et un facteur constant près.

D'après Nishino(IV) et Suzuki [8], on a le

Théorème 2. *Soit f une fonction entière primitive de la classe (A). Alors, pour toute valeur complexe α sauf un numbre fini d'elles, S_α est irréductible, non* *singulière, d'ordre un et de même type* (g, n). *Pour une valeur exceptée* β, S_β *consiste en un nombre fini de surfaces premières qui sont conjuguées deux à deux.*

Les valeurs exceptées sont dites *valeurs critiques de* f et, pour toute valeur critique β de f, S_β est dite *surface critique de* f. On dit qu'*une fonction entière* f *se réduit à un polynôme* si f peut mettre sous la forme $f = F \circ P \circ \Phi$, où F est une fonction entière d'une variable, P est un polynôme de deux variables et Φ est un automorphisme analytique de $\boldsymbol{C}^2$. Alors, on peut énoncer un théorème de Nishino (V).

Théorème 3. *Toute fonction entière de deux variables, de la classe* (A) *se réduit à un polynôme.*

3° Soit D un domaine multivalent étalé au-dessus d'un domaine produit $\Delta \times \boldsymbol{C}$ où Δ: $|z| < \rho$ et $\boldsymbol{C}$: $|w| < \infty$, dans l'espace de deux variables complexes z et w. Notons $D(\alpha)$ la fibre dans D qui se trouve au-dessus de la droite complexe $z = \alpha$. Supposons que pour tout z dans Δ, $D(z)$ est irréductible et qu'il y a un feuillet de D qui contient une partie univalente étalée au-dessus d'un voisinage de la droite complexe $w = 0$ dans $(\Delta, \boldsymbol{C})$. Alors, d'après Yamaguchi [11], on a le

Théorème 4. *Supposons que toute fibre* $D(z)$ *est parabolique et de genre* 0 *et que* D *est une variété de Stein. Alors, il existe une fonction méromorphe* $\varphi_0(z, w)$ *sur* D, *sans point d'indétermination, telle que la transformation définie par* $z' = z$, $w' = \varphi_0(z, w)$ *transforme* D *biholomorphiquement sur un domaine univalent dans le domaine donné par* $|z'| < \rho$, $|w'| \leq \infty$.

4° Soit M une variété analytique complexe compacte à deux dimensions. S'il y a une application biholomorphe ζ de $\boldsymbol{C}$ sur une partie de M, la paire (M, ζ) s'appelle *compactification de* $\boldsymbol{C}^2$. Considérons en outre une fonction entière f. Une compactification (M, ζ) de $\boldsymbol{C}^2$ est dite *propre par rapport à* f si $A = M - \zeta(\boldsymbol{C}^2)$ est une surface analytique à une dimension dans M et si la fonction donnée par $f \cdot \zeta^{-1}$ dans $M' = \zeta(\boldsymbol{C}^2)$ peut se prolonger en une fonction méromorphe $\hat{f}$ dans toute M.

Nishino (V) a établi le

Théorème 5. *Pour une fonction entière* f *de la classe* (A), *on peut former une compactification de* $\boldsymbol{C}^2$ *propre par rapport à* f *pourvu que* f *soit primitive.*

A ce moment, on peut supposer sans restreindre la généralité que $\hat{f}$ n'admet aucun point d'indétermination. Cela posé, $\hat{f}$ donne une projection analytique de M sur la sphère de Riemann $\boldsymbol{P}_z^1$ d'une variable z. Soient $\alpha_i (i = 1, \cdots, q)$ les valeurs critiques de f et posons $\Delta = \boldsymbol{P}_z^1 - \{\alpha_1, \cdots, \alpha_q, \infty\}$. Alors, on peut former M de manière que $\hat{f}^{-1}(\Delta)$ soit localement trivial en tant qu'espace fibré topologique. Quant aux groupes d'homologie, en vertu du fait que $M - A$ est homéomorphe à

$\boldsymbol{C}^2$, on obtient facilement les formules

$$(A) \qquad H_j(A) = H_j(M) \quad j = 0, 1, 2$$

et

$$(A') \qquad H_1(A) = 0\,,$$

où $H_j(*)$ désigne le groupe d'homologie à coefficients entiers de $*$. Par suite, chaque composante irréductible de A est rationnelle. De plus, en effectuant une déformation convenable, on peut supposer, que les composantes irréductibles de A satisfont aux conditions (B) suivantes;

1) Chacune d'elles est non singulière.
2) Si deux d'elles se rencontrent, elles s'intersectent transversalement en un seul point.
3) Trois d'elles n'ont pas de point commun.
4) Si "self-intersection number" d'une d'elles est -1, elle intersecte au moins trois autres.

Sous ces hypothèses, Ramanujam [6] et Morrow [3] ont déterminé toutes les possibilités de A. Dans les diagrammes suivants dûs à Ramanjum et à Morrow, chaque petit cercle représente une courbe non singulière rationnelle, chaque ligne représente un point d'intersection, et le nombre attaché à chaque cercle est son "self-intersection number".

(a) $\underset{1}{\circ}$

(b) $\underset{n}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\underset{0}{\circ} \qquad (n \neq -1)$

$$\begin{pmatrix} r \geq 0,\ s \geq 0 \\ n > 0 \\ l_i \leq -2 \\ m_j \leq -2 \end{pmatrix}$$

(c) $\underset{l_1}{\circ}\!-\!-\cdots-\!-\!\underset{l_r}{\circ}\!-\!-\!\underset{n}{\circ}\!-\!-\!\underset{0}{\circ}\!-\!-\!\underset{-n-1}{\circ}\!-\!-\!\underset{m_1}{\circ}\!-\!-\cdots-\!-\!\underset{m_s}{\circ}$

5° Enfin, on considère "one-point-compactification" $\hat{\boldsymbol{C}}^2$ de $\boldsymbol{C}^2$. Pour un ensemble quelconque E de $\boldsymbol{C}^2$, on désigne par $\hat{E}$ la fermeture de E dans $\hat{\boldsymbol{C}}^2$. Pour une fonction entière f de la classe (A) et de type (g, n), supposée primitive, et pour chaque valeur critique α_i de $f\,(i=1, \cdots, q)$, prenons un domaine $\sum_i$ donné par $|f-\alpha_i| < \rho$, où ρ est un nombre réel positif suffisamment petit pour que l'on ait $\sum_i \cap \sum_j = \phi$ quels que soient $i \neq j$. Posons

$$\begin{aligned} b_i &= \operatorname{rang} H_1(\hat{S}_{\alpha_i})\,, \\ d_i &= 2g+n-1-b_i\,, \\ a_i &= \operatorname{rang} H_2(\hat{S}_{\alpha_i})-1\,. \end{aligned}$$

Alors, d'après Suzuki [8], on a le

Théorème 6. *On a les formules* (C):

$$\sum(d_i+a_i) = 2g+n-1$$
$$\text{rang } H_1(\textstyle\sum_i) = b_i - a_i$$
$$H_2(\textstyle\sum_i) = 0 \quad (i = 1, \cdots, q).$$

2. Problème. Dans cette section, bornons-nous au cas où la fonction envisagée f est une fonction entière primitive de deux variables, de la classe (A) de type $(0, 3)$. Dans ce cas, la première formule du théorème 6 se réduit à

$$(C') \qquad 2 = \sum(a_i+d_i).$$

Il s'ensuit que f admet au plus deux valeurs critiques et qu'il ne se présente que six cas suivants:

$$a_1 = 2,\ d_1 = 0;$$
$$a_1 = 1,\ d_1 = 1;$$
$$a_1 = 0,\ d_1 = 2;$$
$$a_1 = 1,\ d_1 = 0,\ a_2 = 1,\ d_2 = 0;$$
$$a_1 = 0,\ d_1 = 1,\ a_2 = 1,\ d_2 = 0;$$
$$a_1 = 0,\ d_1 = 1,\ a_2 = 0,\ d_2 = 1.$$

On peut supposer sans restreindre la généralité que, si f a une seule valeur critique, celle-ci est 0 et, si f en a deux, elles sont 0 et 1. On désigne les composantes irréductibles de chaque surface critique S_α (α=0 ou 1) de f par S_α^i et les ordres de S_0^j et ceux de S_1^k par n^j et m^k respectivement. Alors, dans chacun des cas précédents, une étude directe de la topologie de l'adhérence dans $\hat{C}^2$ de la réunion des surfaces critiques détermine les possibilités des types de leurs composantes irréductibles et des nombres de points d'intersection entre ces composantes. Il se présente 25 types, qu'on voit dans la table (D). Mais, quelques-uns d'entre eux n'existent pas en réalité. Dans la colonne I de la table, on trouve le nombre des valeurs critiques de f; dans II le nombre des composantes irréductibles de ses surfaces critiques; dans III les types de ces composantes et la relation d'intersection entre elles: (,)—(,) et (,)=(,) signifient que les composantes des deux côtés s'intersectent en un seul point et en deux points, respectivement. Les marques ○ et × désignent respectivement l'existence et l'inexistence du type qui la porte.

Notre problème de ce mémoire est de savoir qu'il n'existe pas en realité de fonctions de types portant la marque × dans la table et de déterminer une forme explicite de la fonction pour chaque type portant la marque ○.

table (D)

No	I	II	III	existence	
			S_0^1 $\quad$ S_0^2 $\quad$ S_0^3		
(1)	1		(0, 1) $\quad$ (0, 1) $\quad$ (0, 3)	○	où $n_3=1$
(2)	1		(0, 1) $\quad$ (0, 1) — (0, 2)	○	où $n_3=1$
(3)	1		(0, 1) — (0, 1) — (0, 1)	○	où $n_3=1$
(4)	1		(0, 1) = (0, 1) = (0, 1)	×	
(5)	1	3	(0, 1) $\quad$ (0, 2) $\quad$ (0, 2)	○	où $(n_1, n_2)=1$ ou où $n_1=1$
(6)	1		(0, 1) — (0, 1) $\quad$ (0, 2)	○	où $(n_1, n_2)=1$
(7)	1		(0, 1) $\quad$ (0, 1) = (0, 1)	×	
			S_0^1 $\quad$ S_0^2		
(8)	1		(0, 1) $\quad$ (0, 2)	○	où $n_1=1$
(9)	1	2	(0, 1) — (0, 1)	×	
			S_0		
(10)	1	1	(0, 1)	×	
			S_0^1 $\quad$ S_0^2 $\quad$ S_1^1 $\quad$ S_1^2		
(11)	2		(0, 1) $\quad$ (0, 3) $\quad$ (0, 1) $\quad$ (0, 3)	○	où $n_2=m_2=1$
(12)	2		(0, 1) $\quad$ (0, 3) $\quad$ (0, 1) — (0, 2)	○	où $n_2=m_2=1$
(13)	2		(0, 1) $\quad$ (0. 3) $\quad$ (0, 1) = (0, 1)	×	
(14)	2		(0, 1) $\quad$ (0, 3) $\quad$ (0, 2) $\quad$ (0, 2)	○	où $n_2=m_1=1$
(15)	2	2 2	(0, 1) — (0, 2) $\quad$ (0, 1) — (0, 2)	○	où $n_2=m_2=1$
(16)	2		(0, 1) — (0, 2) $\quad$ (0, 1) = (0, 1)	×	
(17)	2		(0, 1) — (0, 2) $\quad$ (0, 2) $\quad$ (0, 2)	○	où $n_2=m_1=1$
(18)	2		(0, 1) = (0, 1) $\quad$ (0, 1) = (0, 1)	×	
(19)	2		(0, 1) = (0, 1) $\quad$ (0, 2) $\quad$ (0, 2)	×	
(20)	2		(0, 2) $\quad$ (0, 2) $\quad$ (0, 2) $\quad$ (0, 2)	×	
			S_0^1 $\quad$ S_1^1 $\quad$ S_1^2		
(21)	2		(0, 2) $\quad$ (0, 1) $\quad$ (0, 3)	○	où $n_1=m_2=1$
(22)	2		(0, 2) $\quad$ (0, 1) — (0, 2)	○	où $n_1=m_2=1$
(23)	2	1+2	(0, 2) $\quad$ (0, 1) = (0, 1)	×	
(24)	2		(0, 2) $\quad$ (0, 2) $\quad$ (0, 2)	×	
			S_0^1 $\quad$ S_0^2		
(25)	2	1+1	(0, 2) $\quad$ (0, 2)	×	

3. Fonctions entières de type $(0, n)$

1° Avant d'aborder notre problème, on va traiter généralement les fonctions entières de type $(0, n)$. Soit f une fonction entière primitive, de la classe (A) et de type $(0, n)$. D'abord, on voit le

Lemme 1. *Soit α une valeur critique de f et soient $S^1, S^2, \cdots$ les composantes irréductibles de la surface critique $S_\alpha: f=\alpha$. Elles possèdent les propriétés suivantes:*

(1) *Toute S^i est de genre 0 et non singulière.*

(2) *Si deux d'elles se rencontrent, elles s'intersectent transversalement en un seul point.*

(3) *$S^i \cap S^j \cap S^k = \phi$ pour trois indices distincts.*

(4) *Il n'y a aucune chaîne circulaire d'entre elles $S^{i_1}, \cdots S^{i_m}$ $(m \geq 3)$ telle que l'on ait $S^{i_k} \cap S^{i_{k+1}} \neq \phi$ $(k=1, \cdots, m-1)$ et $S^{i_m} \cap S^{i_1} \neq \phi$.*

(5) *Si $n \geq 3$ et si $S^i - (\cup_{j \neq i}(S^j \cap S^i))$ est de type $(0, n)$, alors l'ordre de f en S^i est 1.*

Ces propriétés découlent immédiatement des investigations topologiques: Si elles ne possèdent pas toutes les propriétés (1)$\sim$(4), le genre d'une surface non critique S_z; $f=z$ voisine de S_α deverait être plus grand que 0; si elles ne possèdent pas (5), S_z serait de genre>0 ou bien S_z aurait plus de n points frontières.

2° Considérons maintenant une compactification (M, ζ) de $\boldsymbol{C}^2$ propre par rapport à f et conservons les notations du 4° de la section 1. Le prolongement $\hat{f}$ de f, n'ayant aucun point d'indétermination, $\hat{f}$ est une application holomorphe de M sur P_z^1. Pour tout $\alpha \in P_z^1$, désignons par C_α la fibre $\hat{f}^{-1}(\alpha)$. Décomposons $A = M - \zeta(\boldsymbol{C}^2)$ en ses composantes irréductibles $A = (\bigcup_{i=1}^{p} \Gamma_i) \cup (\cup A_j)$, où Γ_i sont celles qui ne sont contenues dans aucune fibre C_α et A_j sont les autres. En effectuant une modification si nécessaire, on peut supposer qu'aucune des A_i n'est exceptionnelle[3]. D'après $H_1(A)=0$, on verra immédiatement le

Lemme 2. *Toute Γ_i est simplement connexe et intersecte C_∞ en un seul point. Pour $i \neq j$, Γ_i et Γ_j ne s'intersectent pas ou bien ne s'intersectent que sur C_∞.*

Comme, pour toute valeur z non critique, la fibre C_z est irréductible, non singulière et de genre 0, on voit, pour la même raison que dans le lemme 1, que les composantes irréductibles de la fibre C_α pour une valeur non régulière α de f possèdent les propriétés (1)$\sim$(4) du lemme 1. De plus, on aura le

Lemme 3. *Pour $\alpha \in P_z^1$, C_α est une fibre régulière, pourvu que C_α ne contienne pas de surface exceptionnelle.*

---

3) Une courbe irréductible C dans M est dite exceptionnelle (de première espèce) si C est une courbe rationnelle non singulière avec $C^2 = -1$.

En effet, posons $C_\alpha=\sum_{\nu=1}^{l} n_\nu\theta_\nu$ en tant que diviseur, où θ_ν sont les composantes de C_α et n_ν sont les ordres de zéro de $\hat{f}-\alpha$ en θ_ν. Si $l=1$, on peut voir facilement que $n_1=1$, ce qui montre C_α est régulière. Supposons $l>1$, pour le réduire à l'absurde. Pour une valeur régulière z, le nombre d'intersection $(C_z\cdot\theta_\nu)$ s'annule pour $\nu=1, \cdots, l$ puisque l'on a $C_z\cap\theta_\nu=\phi$. C_α étant linéairement équivalente à C_z, on a $(C_\alpha\cdot\theta_\nu)=0$. D'où, il vient $n_\nu(\theta_\nu^2)+\sum_{\mu\neq\nu} n_\mu(\theta_\mu\cdot\theta_\nu)=0$. Donc, on a $(\theta_\nu^2)\leq -2$, puisque $\sum_{\mu\neq\nu} n_\mu(\theta_\mu\cdot\theta_\nu)>0$ et que $(\theta_\nu^2)\neq -1$. D'autre part, d'après la formule due à Kodaira[19], $\frac{1}{2}((C_z^2)+(K\cdot C_z))+1=\pi'(C_z)=0$, où K est le diviseur canonique de M et $\pi'(*)$ est le genre virtuel de $*$. D'où, on a $K\cdot C_z=K\cdot C_\alpha=-2$. Par suite, en vertu de la même formule, on en déduit

$$-2 = (K\cdot C_\alpha) = \sum n_\nu(K\cdot\theta_\nu) = \sum n_\nu(-2-(\theta_\nu^2)) .$$

Ceci est impossible puisque $(\theta_\nu^2)\leq -2$, ce qui montre le lemme 3.

Aucune composante de $\cup A_j$ n'étant exceptionnelle par hypothèse, on a le

Corollaire. *C_∞ est une fibre régulière.*

Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_q$ les valeurs critiques de f. Alors, entre le nombre p des Γ_i et les nombres $a_i=\text{rang } H_2(\hat{S}_{\alpha_i})-1$, introduits dans le 5° de la section 1, on a la relation suivante:

Lemme 4. $p=\sum_{i=1}^{q} a_i+1$.

En effet, soient a_i' $(i=1, \cdots, q)$ les nombres des composantes irréductibles de C_{α_i}, D'après le lemme 3, on peut ramener M, par certains processus inverses de Hopf convenables, itérés $a_i'-1$ fois pour chaque i, à un espace fibré régulier M^* dont la base et la fibre sont biholomorphes à la sphère de Riemann. Un tel espace fibré M^* est une "rational ruled surface". D'après Nagata [4] et le fait que un processus de Hopf augmente le rang du groupe d'homologie de dimension 2 de 1, on voit que rang $H_2(M^*)=\text{rang } H_2(P_1\times P_1)=2$ et que rang $H_2(M^*)$ $=\text{rang } H_2(M)-\sum_{i=1}^{q}(a_i'-1)$. D'autre part, on a

$$\text{rang } H_2(A) = p+1+\sum_{i=1}^{q}(a_i'-a_i-1) .$$

L'isomorphisme $H_2(A)\cong H_2(M)$ entraîne la relation voulue du lemme.

Chaque Γ_i considérée comme surface de Riemann étalée au-dessus de P_z^1, soit k_i le nombre des feuillets de Γ_i. Quant aux nombres d_i, définis à la fin de la section 1, en combinant ce lemme et la formule (C), on obtient les corollaires.

Corollaire 1. *On a l'égalité*

$$\sum_{i=1}^{q} d_i = \sum_{j=1}^{p} (k_i - 1)\,.$$

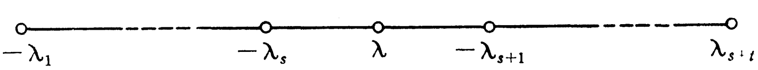
Corollaire 2. *Chacun des nombres d_i est égal à la somme de tous les ordres de ramification de Γ_j $(j=1, \cdots, p)$ aux points qui se trouvent au-dessus de α_i.*

Quant aux surfaces Γ_i, on a le

Lemme 5. *Γ_i n'a aucun point singulier dans $M-C_\infty$.*

En effet, si l'on a $k_i=1$, il n'y a rien à dire puisque Γ_i est une section analytique sur P_z^1. Supposons donc que l'on a $k_i>1$ et Γ_i admet un point singulier e dans $M-C_\infty$. Alors, $\alpha=\hat{f}(e)$ est une valeur critique de f. De plus, du lemme 2, Γ_i est irréductible en e et les autres Γ_j $(i\neq j)$ ne passent pas par e. En faisant par processus de Hopf la réduction de singularité de Γ_i en e, on obtient une nouvelle variété M' avec une application analytique ξ de M' sur M telle qu'à $M-\xi^{-1}(e)$ corresponde biholomorphiquement $M-e$. A ce moment, on peut supposer que $\xi^{-1}(e)=\sum T_j$ satisfait aux conditions 1), 2) et 3) de (B) dans la section 1. Soit T_ν la courbe insérée par le processus final de la réduction et soit Γ_i' la courbe dans M' correspondant à Γ_i. Alors, Γ_i' intersecte transversalement T_ν en un seul point e' mais on a $\Gamma_i' \cap T_j=\phi$ $(j\neq\nu)$. De plus, T_ν intersecte au moins deux de $\{T_j\}$ $(j=1, \cdots, \nu-1)$ et on a évidemment $(T_\nu^2)=-1$ et $(T_j^2)\leq -2$ $(j=1, \cdots, \nu-1)$.

Maintenant, on pose $A'=\xi^{-1}(A)$ et on fait encore la réduction de tous les points singuliers de A'. On peut supposer ici que la nouvelle surface analytique A'' satisfait aux conditions 1), 2), 3) et 4) de (B). Envisageons ici le diagramme de A''. Posons $A=\Gamma_i \cup A^0$. Dans le cas où $e\in A^0$, on peut voir facilement que le diagramme de A'' n'est pas linéaire ou bien possède une partie de la forme

(*)


où $\lambda>0$, $\lambda_j>2$ $(j=1, \cdots, s+t)$ et $s>0$, $t>0$. Ceci est en contradiction avec les résultats de Ramanujam et de Morrow.

En suite, supposons que l'on a $e\in A^0$. Soit A^* une composante connexe de $A\cap C_\alpha$ qui contient e et on a $\Gamma_i\cap A^*=e$. D'après $H_1(A)=0$, on a $\Gamma_j\cap A^*=\phi$ $(j\neq i)$. En raisonnant comme dans le lemme 3, pour chaque composante irréductible A_ν^* de A^*, on a $(A_\nu^{*2})\leq -2$. D'où, on peut aussi conclure que le diagramme de A'' a même caractère que celui du cas précédent, contrairement aux résultats de Ramanujam et de Morrow. Le lemme a été donc démontré.

On remarque ici que les lemmes 2 et 5 sont valables pour toute fonction entière primitive de la classe (A) et de type arbitraire.

3° D'après ce que l'on a vu jusqu'ici, nous allons montrer le théorème suivant qui est le but principal de cette section: Soit f une fonction entière de la classe

(A) et de type $(0, n)$.

Théorème A. *Si, pour toute valeur complexe α, la surface S_α définie par $f=\alpha$ est irréducible, alors f doit être de type* $(0, 1)$.

En effet, par hypothèse, toute S_α est non singulière et l'ordre un et, du lemme 4, on a $p=1$. Par suite, si l'on a, de plus, $q=1$, le théorème se réduit à celui qui a été obtenu par Suzuki. On suppose donc $q>1$. Ceci posé, on a évidemment $n\geq 3$. Considérons une compactification (M, ζ) de $\boldsymbol{C}^2$, propre par rapport à f. En vertu du théorème de Yamaguchi, on peut la former de manière que $A=M-\zeta(\boldsymbol{C}^2)$ consiste justement en deux composantes irréductibles Γ et C_∞, Γ étant celle qui s'étale au-dessus de P_z^1 et C_∞ étant la fibre de M au-dessus du point à l'infini de P_z^1. Alors, C_∞ est non singulière et rationnelle. On a $(C_\infty{}^2)=0$. Γ est aussi rationnelle et n'a pas de point singulier en dehors de C_∞. De plus, $\Gamma\cap C_\infty$ consiste en un seul point e_∞, qui peut être un seul point singulier de Γ.

Maintenant, effectuons ν fois de processus de Hopf au point e_∞ de manière que la nouvelle surface analytique A', qui est l'image inverse A par cette modification, satisfasse aux conditions 1), 2) et 3) de (B). Soient Γ' et C_∞' les composantes irréductibles de A' auxquelles correspondent Γ et C_∞ respectivement. Voyons d'une façon plus précise la structure de A'. Pour cela, prenons un système de coordonnées locales (z_1, z_2) au voisinage de e_∞, où on peut prendre $z_1=1/f$. Soit φ_∞ une fonction holomorphe qui définit A au voisinage de e_∞ et qui se développe en série de la forme

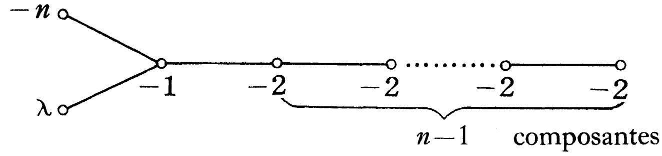
$$\varphi_\infty = z_1((a_1z_1+bz_2)^m+\cdots)\,,$$

où $(a, b)\neq(0, 0)$, $m>0$ et les termes non écrits sont de degré$>m$. On discerne ensuite les trois cas suivants:

(1) Dans le cas où e_∞ n'est pas un point singulier de Γ, on peut supposer que φ_∞ est de la forme

$$\varphi_\infty = z_1(z_1+z_2{}^n+a_{n+1}z_2{}^{n+1}+\cdots)\,.$$

D'où, on voit facilement que le diagramme de A' est



où $\lambda=(\Gamma'^2)$ et $n\geq 3$. Ceci contredit les résultats de Ramanujam et de Morrow.

(2) Dans le cas où e_∞ est un point singulier de Γ et $b=0$, on verra aussitôt que la situation est la même que dans le lemme 5 puisque l'on a $(C_\infty'^2)\leq -2$, ce qui est aussi en contradiction avec les résultats de Ramanujam et de Morrow.

(3) Le cas où e_∞ est un point singulier de Γ et $b\neq 0$ se ramène à un des deux

cas précédents. En effet, en train de la modification, on arrive à une situation intermédiaire, où l'image inverse A^* de A possède la structure suivante: A^* se décompose en ses composantes irréductibles $A^*=\Gamma^* \cup T^*_\mu \cup \cdots \cup T^*_1 \cup C^*_\infty$, Γ^* et C^*_∞ étant les courbes correspondant à Γ et à C_∞ respectivement; $T^*_\mu \cup \cdots \cup T^*_1 \cup C^*_\infty$ satisfait aux conditions 1), 2), 3) de (B) et son diagramme est

$$\begin{array}{ccccccccc} T^*_\mu & & & & & & T^*_1 & & C^*_\infty \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \cdots & \circ & \text{---} & \circ \\ -1 & & -2 & & -2 & & -2 & & -1 \end{array} \;;$$

Γ^* ne rencontre celles-ci qu'en un point e^* de T^*_μ qui n'appartient pas à $T^*_{\mu-1}$; Γ^* et T^*_μ ont le même tangent en e^*. A partir de cette situation, en réduisant successivement C^*_∞, T^*_1, $\cdots$, $T^*_{\mu-1}$ à un point par processus de Hopf inverses, on aboutit au cas (1) ou bien au cas (2), ce qui complète la démonstration du théorème.

4. Fonctions adjointes. Comme on a vu dans le premier mémoire, l'idée fondamentale pour étudier les fonctions entières f de type (0, 2) est de trouver une fonction qui possède des propriétés plus simples que f et qui nous amène à la détermination explicite de f. Cette idée est aussi valable pour le cas de type (0, 3). Dans cette section, nous nous proposons donc de construire une fonction adjointe distinguée à f pour chaque type. Une fois que l'on trouve une telle fonction, on peut déterminer la forme explicite de f comme on le verra plus tard.

Soit donnée une fonction entière primitive f, de la classe (A) et de type (0, 3), et conservons les notations dans les sections 2 et 3. D'après la formule due à Suzuki, nous avons exposé dans la table les possibilités de la structure des surfaces critiques de f. Le lemme 1 et le Théorème A de la section précédente montrent immédiatement qu'aucun des types (4), (7), (10), (13), (16), (18), (19), (23) ni (25) n'existe en realité. De plus, on verra dans la section suivante qu'il n'existe aucun des types (9), (20) et (24). Dans la section actuelle, nous nous bornons aux types différents de ces premiers neuf types inexistants.

Quant aux ordres de f en les surfaces premières critiques, on a d'après l'énoncé 5) du lemme 1 les égalités suivantes:

$$\begin{array}{ll} n_3 = 1 & \text{pour les types (1), (2), (3);} \\ n_2 = m_2 = 1 & \text{pour les types (11), (12), (15);} \\ n_2 = 1 & \text{pour les types (14), (17);} \\ m_2 = 1 & \text{pour les types (21), (22)}\,. \end{array}$$

Soit D la partie de $\boldsymbol{C}^2$ obtenue par l'exception de toutes les surfaces critiques de f. D'après le théorème 4 de Yamaguchi, on peut trouver, pour toute valeur ordinaire de f, un domaine $\sum \subset D$ défini par $|f-\alpha|<\rho$, $\rho>0$ étant assez petit, et une fonction holomorphe φ dans $\sum$ de telle manière que toute surface ordinaire

$S_\beta: f=\beta$ de f dans $\sum$ soit transformée par φ biholomorphiquement sur le domaine $\boldsymbol{C}-\{0, 1\}$. Cette fonction φ peut se prolonger analytiquement sans s'arrêter dans D. Désignons par $\tilde{\varphi}$ la fonction prolongée à partir de φ autant que possible dans D. $\tilde{\varphi}$ peut être uniforme ou multiforme.

Considérons une compactification (M, ζ) de $\boldsymbol{C}^2$, propre par rapport à f. Les notations étant celles de la section précédente, en vertu du lemme 4, on a $p=3$ pour les types (1), (2), (3), (5), (6), (11), (12), (14), (15), (17) et (20). Ceci signifie que les surfaces Γ_i $(i=1, 2, 3)$ sont des sections analytiques globales de M au-dessus de P_z^1, ce qui montre que, pour ces types, $\tilde{\varphi}$ est uniforme et méromorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$. Pour les autres types (8), (9), (21), (22) et (24), on a $p=2$. Il y a alors deux surfaces Γ_i $(i=1, 2)$, l'une, soit Γ_1, est une section analytique de M au-dessus de P_z^1 et l'autre, soit Γ_2, est topologiquement équivalente à la surface de Riemann de la fonction $z^{1/2}$, d'après le corollaire 2 au lemme 4. $\tilde{\varphi}$ est donc biforme dans tout $\boldsymbol{C}^2$ et son domaine d'existence R coïncide évidemment avec celui de la fonction $f^{1/2}$. D'ailleurs, $\tilde{\varphi}$ n'admet pas d'autres singularités que des pôles sur R.

On va étudier d'abord quelques propriétés générales de $\tilde{\varphi}$.

Propriété 1. *Prenons, pour une surface critique S_i de f* $(i=0$ *ou* $1)$, *un domaine* $\sum_i$ *donné par* $|f-i|<\rho\ (0<\rho<1)$ *et supposons que chacune des branches de $\tilde{\varphi}$ soit uniforme dans $\sum_i$. Alors, elle n'est pas constante sur une composante irréductible S_i' de S_i si et seulement si la partie $\hat{S}_i'$ de S_i' obtenue par l'exception des points singuliers de S_i est de type* (0, 3). *S'il en est ainsi, la branche de $\tilde{\varphi}$ se réduit sur chaque composante irréductible de S_i différente de S_i' à une constante égale à quelqu'une des valeurs* 0, 1 *et* ∞.

En effet, si $\hat{S}_i'$ est de type (0, 3), l'ordre de f en S_i' est 1 d'après 5) du lemme 1. Donc, $\sum_i'$ satisfait aux conditions du théorème 4, ce qui nous permet de prendre une fonction φ_0 donnée dans ce théorème. Alors, la restriction de $\tilde{\varphi}$ à S_i' n'est pas autre chose que la transformée par une homographie de la restriction de φ_0 à S_i' et par suite elle n'est pas constante. Inversement, si elle n'est pas constante, il est évident que $\hat{S}_i'$ ne peut être ni de type (0, 1) ni de type (0, 2). La seconde assertion est aussi bien évidente.

Propriété 2. *Supposons que $\tilde{\varphi}$ est uniforme dans tout $\boldsymbol{C}^2$. Alors, $\tilde{\varphi}$ prend au moins deux valeurs constantes parmi* 0, 1 *et* ∞ *sur les composantes irréductibles des surfaces critiques de f.*

Car, $\tilde{\varphi}$ ne prend aucune des valeurs 0, 1 et ∞ dans D et, pour toute valeur complexe $\alpha\ (\neq 0, 1, \infty)$, la surface analytique donnée par $\tilde{\varphi}-\alpha=0$ dans D est irréductible.

Maintenant, supposons qu'une surface critique S_i de f consiste en deux composantes irréductibles de type (0, 2) telles que l'on ait $S_i^1 \cap S_i^2=\phi$. Alors, $d_i=0$. D'après le corollaire 2 au lemme 4, chacune des branches de $\tilde{\varphi}$ est uniforme dans le domaine $\sum_i$; $|f-\alpha_i|<\rho\ (0<\rho<1)$. Par suite, la propriété 1 montre que $\tilde{\varphi}$ est constante sur chacune des S_i^1 et S_i^2. De plus, on a la

Propriété 3. *Chaque branche de $\tilde{\varphi}$ prend sur S_i^1 et sur S_i^2 deux valeurs différentes l'une de l'autre, parmi* 0, 1 *et* ∞.

En effet, soient a et b les valeurs de $\tilde{\varphi}$ sur S_i^1 et sur S_i^2 respectivement et supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'elles sont différentes, par exemple, de 0 et de ∞ à la fois. En général, on a l'égalité

$$\iint_H \frac{(w-a)^{l_1}(w-b)^{l_2}}{(z-i)w} dz \wedge dw = -4\pi^2\,,$$

où H est le 2-cycle donné par $|z-i|=\frac{1}{2}\rho$, $|w|=\frac{1}{2}$ et muni de l'orientation habituelle, et l_j $(j=1, 2)$ sont des nombres entiers positifs tels que la fonction $\Phi=(\tilde{\varphi}-a)^{l_1}(\tilde{\varphi}-b)^{l_2}/(f-i)\tilde{\varphi}$ soit holomorphe dans $\sum_i$. Or, en vertu de la relation $H_2(\sum_i)=0$ due à Suzuki, on a l'égalité $\iint_{H^*} \Phi\, df \wedge d\tilde{\varphi}=0$, où H^* est l'image inverse de H par la transformation donnée par $z=f$, $w=\tilde{\varphi}$. C'est l'absurde, ce qui démontre l'énoncé.

Lorsque $\tilde{\varphi}$ ne prend pas toutes les valeurs 0, 1 et ∞ dans $\boldsymbol{C}^2$, on peut supposer, en faisant une transformation linéaire rationnelle de $\tilde{\varphi}$ qui permute 0, 1 et ∞, que $\tilde{\varphi}$ est une fonction entière.

A) Cas où $\tilde{\varphi}$ est uniforme.

a) Types (1), (2) et (3). Pour ces types, f admet une seule valeur critique 0 et sa surface critique S_0 consiste en trois composantes irréductibles. De plus, $S_0^3-\{S_0^3\cap S_0^1, S_0^3\cap S_0^2\}$ est de type (0, 3). D'après les propriétés 1 et 2, $\tilde{\varphi}$ n'est pas constante sur S_0^3 et prend sur S_0^1 et sur S_0^2 deux valeurs constantes, distinctes l'une de l'autre, parmi 0, 1 et ∞. On peut donc supposer que $\tilde{\varphi}$ est holomorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$ et prend la valeur 0 sur S_0^1 et la valeur 1 sur S_0^2, en faisant si nécessaire à $\tilde{\varphi}$ une transformation linéaire rationnelle qui permute 0, 1 et ∞. On désigne par φ la fonction $\tilde{\varphi}$ ainsi normalisée et on l'appelle fonction adjointe distinguée à f. Alors, on observe facilement que

La fonction adjointe φ à f est primitive, de la classe (A) *et de type* (0, 1).

b) Types (11), (12) et (15). Pour ces types, f admet deux valeurs critiques 0 et 1. Ses surfaces critiques S_0 et S_1 consistent respectivement en deux composantes irréductibles $S_0^i(i=1, 2)$ et $S_1^i(i=1, 2)$. De plus, $S_0^2-(S_0^2\cap S_0^1)$ et $S_1^2-(S_1^2\cap S_1^1)$ sont de type (0, 3) toutes deux. Donc, comme précédemment, on peut supposer que $\tilde{\varphi}$ est holomorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$ et prend la valeur 0 sur S_0^1 et la valeur 1 sur S_1^1. On la désigne aussi par φ comme fonction adjointe distinguée à f. Alors, on voit que

La fonction adjointe φ à f est primitive, de la classe (A) *et de type* (0, 1).

c) Types (5) et (6). Pour ces types, f admet une seule valeur critique 0 et sa surface critique S_0 consiste en trois composantes irréductibles S_0^1, S_0^2 et S_0^3. En vertu des propriétés 1 et 2, $\tilde{\varphi}$ se réduit à une constante sur chaque S_0^i et prend sur elles au moins deux valeurs parmi 0, 1 et ∞. Je dis ici que $\tilde{\varphi}$ *ne peut prendre sur ces* S_0^i *toutes ces valeurs* 0, 1 *et* ∞.

En effet, supposons que $\tilde{\varphi}$ prenne toutes ces valeurs; par example, 0, 1 et ∞ sur S_0^1, sur S_0^2 et S_0^3 respectivement, ce qui ne diminue pas la généralité. Pour le type (6), ceci est impossible, puisque $S_0^1 \cap S_0^2 \neq \phi$ et $S_0^3 \cap S_0^i = \phi$ $(i=1, 2)$. Donc, on se borne au type (5). Désignons par s_i $(i=1, 2, 3)$ les ordres de zéro, d'un et de pôle de $\tilde{\varphi}$ en S_0^i respectivement et par D^* l'image de D par la transformation T_c donnée par: $z=f$, $w=\tilde{\varphi}$. Maintenant, traçons, pour chaque S_0^i, une courbe fermée δ_i suffisamment petite qui entoure S_0^i une et une seule fois et munissons δ_i de l'orientation de telle manière qui l'image de δ_i par f entoure l'origine dans le sens positif. Alors, l'image de δ_1 par $\tilde{\varphi}$ et celle de δ_2 entourent respectivement 0 et 1 aussi dans le sens positif, mais celle de δ_3 est en sens inverse. Soient β, γ_1 et γ_2 les cycles dans D^*, orientés dans le sens positif et donnés respectivement par $|z|=\frac{1}{4}$, $w=w_0(w_0\neq 0, 1)$; par $z=z_0(z_0\neq 0)$, $|w|=\frac{1}{4}$ et par $z=z_0$, $|w-1|=\frac{1}{4}$. Notons δ_i^* $(i=1, 2, 3)$ les images de δ_i par T_c. On obtient aussitôt les relations

$$\delta_1^* \sim n_1\beta+s_1\gamma_1, \quad \delta_2^* \sim n_2\beta+s_2\gamma_2 \quad \text{et} \quad \delta_3^* \sim n_3\beta-s_3(\gamma_1+\gamma_2)\,,$$

où $\sim$ signifie l'équivalence d'homologie dans D^* et n_i est l'ordre de f en S_0^i $(i=1, 2, 3)$. D'une part, on a

$$\begin{vmatrix} n_1 & s_1 & 0 \\ n_2 & 0 & s_2 \\ n_3 & -s_3 & -s_3 \end{vmatrix} = n_1s_2s_3+n_2s_1s_3+n_3s_1s_2 \geq 3\,.$$

D'autre part, quels que soient les entiers $\nu_i(i=1, 2, 3)$, il y a une fonction méromorphe F qui admet les zéros avec l'ordre ν_i en S_0^i (ou les pôle d'ordre $|\nu_i|$ en S_0^i si $\nu_i<0$). Il s'ensuit que le déterminant doit être un, contrairement à l'inégalité précédente. Donc, l'énoncé a été démontré.

Ce que nous venons de démontrer nous permet de supposer que $\tilde{\varphi}$ est holomorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$. Évidemment, elle est de type (0, 2) et primitive. De plus, elle prend les valeurs 0 et 1 sur quelques deux des S_0^i $(i=1, 2, 3)$. Voyons pour chaque type de quelle façon elle les prend.

c_1) Type (6). Comme on a $S_0^1 \cap S_0^2 \neq \phi$, on peut supposer que $\tilde{\varphi}$ prend la valeur 0 sur $S_0^1 \cup S_0^2$ et la valeur 1 sur S_0^3. Désignons cette fonction $\tilde{\varphi}$ ainsi supposée par φ comme fonction adjointe distinguée à f. φ admet la valeur critique 0 et on a $\begin{vmatrix} n_1 & s & 0 \\ n_2 & t & 0 \\ n_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = n_1t-n_2s = \pm 1$ où s et t sont respectivement les ordres de φ en S_0^1 et en S_0^2. De là, on voit que

La fonction adjointe φ à f est de type $(0, 2)$ *et satisfait aux conditions* $(B_{s,t})$ *où* $s>0$, $t>0$, $n_1t-n_2s=\pm 1$.

c_2) Type (5). On discerne deux cas suivants.

1) $\tilde{\varphi}$ ne prend que les valeurs 0 et 1 sur les S_0^i $(i=1, 2, 3)$. Dans ce cas, on peut supposer que $\tilde{\varphi}$ prend la valeur 0 sur S_0^1. Désignons cette fonction par φ comme fonction adjointe distinguée à f. La valeur 0 est aussi une valeur critique de φ puisque S_0^1 est de type $(0, 1)$. Par suite, φ prend la valeur 0 sur l'une des S_0^2 et S_0^3, soit S_0^2. Alors, cette φ a mêmes propriétés que celle au cas (c_1).

2) $\tilde{\varphi}$ prend une valeur différente de 0 et de 1 sur quelqu'une des S_0^i $(i=1, 2, 3)$. Soit a cette valeur. Alors, a est une valeur critique de $\tilde{\varphi}$ puisqu'il existe une surface première d'ordre un de $\tilde{\varphi}$ avec la valeur a dans D. Par suite, S_0^1 est une surface première de $\tilde{\varphi}$ avec la valeur a puisque S_0^1 est de type $(0, 1)$. De plus, on peut supposer que $\tilde{\varphi}$ prend la valeur 0 sur S_0^2 et la valeur 1 sur S_0^3. On a aussi $\begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ n_2 & 1 & 0 \\ n_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = n_1 = \pm 1$. Par suite, l'ordre n_1 de f en S_0^1 doit être 1. Maintenant, prenons la fonction $\varphi=\tilde{\varphi}-a$ comme fonction adjointe distinguée au cas actuel. Évidemment, elle est de type $(0, 2)$ et satisfait aux conditions $(B_{1,s})$, où s est l'ordre de φ en S_0^1. On en conclure, dans le cas (c_2), que

La fonction adjointe φ satisfait aux conditions $(B_{s,t})$ où $n_1t-n_2s=\pm 1$, $s>0$, $t>0$ ou bien aux conditions $(B_{1,s})$. Dans le deuxième cas l'ordre n_1 de f en S_0^1 est 1.

d) Types (14) et (17). Pour ces types, f admet deux valeurs critiques 0 et 1 et ses surfaces critiques S_i $(i=0, 1)$ consistent chacune en deux composantes irréductibles S_i^1 et S_i^2. Et la fonction $\tilde{\varphi}$ est non constante sur S_0^2 mais constante sur les autres. De plus, en vertu des propriétés 1 et 3, en raisonnant comme dans c), on peut supposer que $\tilde{\varphi}$ est holomorphe dans $\boldsymbol{C}^2$ et prend la valeur 0 sur S_0^1. Ceci posé, $\tilde{\varphi}$ prend la valeur 0 sur l'une des S_1^1 et S_1^2, soit S_1^1, et la valeur 1 sur l'autre, soit S_1^2. On prend la fonction ainsi normalisée comme fonction adjointe distinguée à f et la désigne aussi par φ. On observe immédiatement que φ est primitive et de type $(0, 2)$. Soient s et t les ordres de φ en S_0^1 et en S_1^1. Alors, on a

$$\begin{vmatrix} n_1 & 0 & s & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & t & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = s\, m_1 = 1\,,$$

comme précédemment.

On en conclut que

La fonction adjointe φ satisfait aux conditions $(B_{1,t})$,

et que

L'ordre m_1 de f en S_1^1 est 1.

B) Cas où $\tilde{\varphi}$ est biforme.

La fonction $\tilde{\varphi}$ est biforme dans le cas où le type de f est (8), (21) ou (22). D'après la façon même dont on a obtenu $\tilde{\varphi}$, on peut supposer que deux branches $\varphi_i (i=1, 2)$ de $\tilde{\varphi}$ satisfassent à l'égalité $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 1$. Ceci posé, $\tilde{\varphi}$ prend identiquement la valeur 1 ou la valeur -1 sur la surface de ramification du domaine d'existence R de $\tilde{\varphi}$. Par suite, en vertu de la propriété 1, $\tilde{\varphi}$ devient constante sur chaque composante irréductible de S_0.

Introduisons ici la fonction ψ donnée par $\psi = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + 2)$. Évidemment, ψ est uniforme et méromorphe dans tout C^2. Pour une valeur $\alpha\,(\neq 0, 1)$, la restriction de ψ à S_α fait correspondre à S_α biholomorphiquement la surface obtenue à partir de la surface de Riemann de la fonction $\sqrt{u(u-1)}$ par l'exception des points au-dessus de $u=1$ et ∞. On observera alors que ψ est primitive et de type (0, 2). En outre, elle ne prend pas la valeur 1 dans D, et il y a une surface première T_0 de ψ avec la valeur 0 qui figure dans D. Il est clair que ψ est d'ordre 2 en T_0.

e) Type (8). Pour ce type, f admet la seule valeur critique 0 et sa surface critique S_0 consiste en deux composantes irréductibles; l'une S_0^1 est de type (0, 1) et l'autre S_0^2 de type (0, 2). On a $S_0^1 \cap S_0^2 = \phi$ et $(n_1, n_2) = 1$. Ici, on discerne encore deux cas suivants.

1) Dans le cas où n_1 et n_2 sont impairs tous les deux, ψ est holomorphe dans tout C^2, puisque R se ramifie au-dessus de S_0^1 et de S_0^2. En vertu des propriétés générales des fonctions entières de type (0, 2), ψ prend la valeur 0 sur S_0^1 et la valeur 1 sur S_0^2. On prend donc ψ elle-même comme fonction adjointe distinguée à f. Soit s l'ordre de zéro de ψ en S_0^1. Alors, s est impair puisque ψ est primitive et que l'ordre de T_0 est 2.

D'où, on conclut que

La fonction adjointe ψ est de type (0, 2) *et satisfait aux conditions* $(B_{2,s})$, *où s est impair.*

2) Dans le cas où l'un des n_1 et n_2 est pair, désignons à nouveau par n' l'un des n_1 et n_2 qui est pair et par n'' l'autre, qui est nécessairement impair; et par S' et S'' respectivement les composantes irréductibles de S_0 correspondant à n' et à n''.

D'abord, on peut dire que

La surface analytique $\tilde{S}'$ dans R, qui se trouve justement au-dessus de S', se décompose en deux composantes irréductibles $\tilde{S}_1'$ et $\tilde{S}_2'$ et $\tilde{\varphi}$ prend la valeur 0 *sur l'une de ces composantes et la valeur* ∞ *sur l'autre.*

En effet, supposons d'abord que $\tilde{S}'$ soit irréductible ou bien $\tilde{\varphi}$ prenne une même valeur sur les $\tilde{S}_1'$ et $\tilde{S}_2'$. Alors, ψ prendrait la valeur 0 ou 1 sur S' puisque l'on a $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 1$. Par suite, ψ serait holomorphe dans tout C^2. De plus, par un calcul facile, l'ordre de ψ en S' serait pair, ce qui est impossible puisque ψ est primitive et de type $(0, 2)$ et que l'ordre de ψ en T_0 est aussi pair. Le même raisonnement montre qu'il est impossible que les valeurs de $\tilde{\varphi}$ en $\tilde{S}_1'$ et en $\tilde{S}_2'$ soient finies toutes les deux. Donc, l'énoncé a été démontré.

Il suit de là que ψ prend la valeur ∞ sur S'.

Je dis ici que

ψ prend la valeur 0 *sur* S''.

En effet, R se ramifiant au-dessus de S'', la valeur de ψ sur S'' est 0 ou 1. Supposons qu'elle prenne la valeur 1 sur S''. Soit R' la partie de R étalée justement au-dessus de D et soit D^* l'image de R' par la transformation T_e donnée par: $z'=f^{1/2}$, $\tilde{w}=\tilde{\varphi}$. Traçons autour de $\tilde{S}_1'$, de $\tilde{S}_2'$ et de $\tilde{S}''$, trois courbes fermées orientées δ_1, δ_2 et δ_3 sur R', une autour de chacune, de la même manière que dans le cas (c). On suppose que $\tilde{\varphi}$ prend la valeur 0 sur $\tilde{S}_1'$. Soit s l'ordre de $\tilde{\varphi}$ en $\tilde{S}_1'$. Alors, les images de δ_1 et δ_3 par $\tilde{\varphi}$ ont aussi sens positif, mais l'image de δ_2 est en sens inverse. Décrivons β, γ_1 et γ_2 les cycles dans D^*, orientés dans le sens positif et donnés respectivement par $|z|=1$, $w=w_0\,(w_0\neq 0, 1)$; $z=z_0\,(z_0\neq 1)$, $|\omega|=\frac{1}{4}$; $z=z_0$, $|\omega-1|=\frac{1}{4}$. Soient $\delta_i^*\,(i=1, 2, 3)$ les images de δ_i par T_e. On aura aussitôt les relations $\delta_1^*\sim\frac{n'}{2}\beta+s\gamma_1$, $\delta_2^*\sim\frac{n'}{2}\beta-s(\gamma_1+\gamma_2)$, $\delta_3^*\sim n''\beta+t\gamma_2$, où t est l'ordre de $\tilde{\varphi}$ en S'' dans R. D'autre part, posons $d=(s, t)$ et prenons deux entiers l' et l'' de manière que l'on ait $sl'+tl''=d$. Alors, il y a une fonction méromorphe F dans $\boldsymbol{C}^2$ qui s'annule sur S' avec l'ordre l' et sur S'' avec l'ordre l'' et qui est holomorphe et non nulle dans D. Posons $F^*=F\cdot T_e^{-1}$. Alors, par un calcul facile on voit que l'ordre de zéro de F^* à la droite analytique $z'=0$ est $2d/(sn'+tn'')$. D'autre part, on a évidemment $sn'+tn''\geq 3d$. Ceci est l'absurde puisque l'ordre de zéro de F^* est entier. Donc, ψ prend la valeur 0 sur S''.

Ici, posons $\psi'=\psi/(\psi-1)$. Cette fonction ψ' est holomorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$. Par suite, on a $S_0^1=S''$ et $S_0^2=S'$. On prend ψ' comme fonction adjointe distinguée à f. Soit s l'ordre de ψ en S_0'. s est aussi impair. Alors, on en conclut que

La fonction ψ' est primitive et de type $(0, 2)$ *et satisfait aux conditions* $(B_{2,s})$ *pour un certain entier impair s.*

Maintenant, on va étudier quelques propriétés de f, pour le type actuel (8), au moyen de la fonction $\tilde{\varphi}$. Considérons encore une fois la transformation T_e de R dans l'espace $(z', \tilde{w})$. $\tilde{\varphi}$ prend la valeur -1 sur S_0^1 et l'ordre n_1 de f en S_0^1 est impair. On a donc la relation $\delta_1^*\sim n_1\beta$. D'autre part, il y a une fonction entière $F(x, y)$ qui s'annule seulement sur S_0^1 avec l'ordre 1. Ceci montre que

L'ordre n_1 de f en S_0^1 doit être 1.

f) Types (21) et (22). Pour ces types, f admet deux valeurs critiques 0 et 1 et sa surface critique S_0 est irréductible, mais son autre surface critique S_1 consiste en deux composantes irréductibles S_1^1 et S_1^2. De plus, R se ramifie seulement au-dessus de S_0 et par suite $\tilde{\varphi}$ prend sur la surface $\tilde{S}_0$ de R au-dessus de S_0 la valeur constante 1 ou -1. Je dis que

$\tilde{\varphi}$ y prend la valeur 1.

En effet, le raisonnement de la section 7 du mémoire précédent montre qu'on peut trouver un entier positif s et un polynôme α d'une variable de degré $\leq s-1$ tels que la fonction $\Phi=\dfrac{\tilde{\varphi}-\alpha(f^{1/2})}{(f^{1/2})^s}$ devienne non constante sur $\tilde{S}_0$. Pour $z'\neq 0$ assez voisin de 0, la restriction de Φ à la surface dans R définie par $f^{1/2}=z'$ fait correspondre à cette surface biholomorphiquement le domaine $\boldsymbol{C}-\{-\alpha(z')/(z')^s, (1-\alpha(z'))/(z')^s\}$. Si α n'est pas la constante 0 ni la constante 1, les points $-\alpha(z')/(z')^s$ et $(1-\alpha(z'))/(z')^s$ tendent vers ∞ quand z' tend vers 0, ce qui montre que la restriction de Φ à $\tilde{S}_0$ fait correspondre à $\tilde{S}_0$ biholomorphiquement le plan entier $\boldsymbol{C}$. Comme S_0 ainsi que $\tilde{S}_0$ sont de type (0, 2), α doit être la constante 0 ou la constante 1. Or, $\tilde{\varphi}$ est 1 ou -1 sur $\tilde{S}_0$. D'où, $\tilde{\varphi}$ prend la valeur 1 sur $\tilde{S}_0$. Par suite, on voit que

ψ prend la valeur 1 *sur* S_0.

$\tilde{\varphi}$ n'étant pas constante sur chacune des surfaces au-dessus de S_1^2, $\tilde{\varphi}$ prend l'une des valeur 0, 1, ∞ sur chacune des surfaces au-dessus de S_1^1. D'où, ψ prend 1 ou ∞ sur S_1^1. On va montrer que

ψ prend la valeur ∞ *sur* S_1^1.

En effet, sinon, ψ serait holomorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$. Par suite, en vertu d'une propriété générale des fonctions de type (0, 2), ψ prendrait la valeur 0 sur S_1^1 puisque S_1^1 est de type (0, 1), contrairement à ce qu'on vient de dire.

Ici, introduisons une nouvelle fonction $\psi_s=\dfrac{\tilde{\varphi}+1}{\tilde{\varphi}-1}f^{s/2}$ où s est un entier positif impair. On suppose ici que ψ_s prend la valeur 1 sur S_1^1. Evidemment, elle est uniforme et méromorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$. A chaque surface ordinaire S_α de f correspond biholomorphiquement, par la restriction de ψ_s à S_α, le domaine $\boldsymbol{C}-\{\alpha^{s/2}, -\alpha^{s/2}\}$, $\boldsymbol{C}$ étant le plan d'une variable complexe. Je dis d'abord que

Il existe un nombre entier s tel que ψ_s ne soit pas constante sur S_0.

En effet, désignons par t l'ordre de zéro de $\tilde{\varphi}$ en S_0, et considérons la fonction ψ_t ou ψ_{t+1} suivant que t est impair ou non. ψ_t est non constante ou bien constante non nulle sur S_0, mais ψ_{t+1} est toujours constante nulle sur S_0. Ici, supposons, pour le réduire à l'absurde, que t est pair ou bien que t est impair mais ψ_t est constante sur S_0. Alors, comme précédemment, la fonction ψ_t/f^l ou ψ_{t+1}/f^l est non constante sur S_0. Dans le premier cas, ceci est directement l'absurde. Dans le deuxième cas, où t est pair, ψ_{t+1}/f^l n'est pas autre que ψ_{t+1-2l}, qui est la constante infinie sur S_0^1. C'est aussi l'absurde, ce qui démontre l'énoncé.

Considérons une fonction ψ_s, qui est non constante sur S_0. Elle est holomorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$. On indiquera de plus que

On a $s=1$.

En effet, soit T^* la transformation donnée par $z=f$, $u=\psi_s$ et soit Δ la partie de $\boldsymbol{C}^2$ donnée par l'exception de S_1^1. Alors, à Δ correspond holomorphiquement par T^* la partie de l'espace de (z, u) donnée par l'exception de la surface analytique $\sum$: $u^2-z^s=0$. Et, S_1^1 est envoyée au point $(1, 1)$. Regardons l'espace de (z, u) comme une partie de $\boldsymbol{P}_z\times\boldsymbol{P}_u$, où $\boldsymbol{P}$ désigne la sphère de Riemann d'une variable. Cela posé, en effectuant une modification convenable pour $\boldsymbol{P}_z\times\boldsymbol{P}_u$ au point $(1, 1)$ on obtient une compactification de $\boldsymbol{C}^2$ propre par rapport à f. Donc, d'après le lemme 5, $\sum$ ne peut admettre aucun point singulier. Ceci signifie certainement que l'on a $s=1$. L'énoncé a été donc démontré.

La fonction ψ_1 est évidemment primitive et de type $(0, 2)$. On prendra la fonction $\psi^*=\psi_1-1$ comme fonction adjointe distinguée à f. On en conclut que

La fonction adjointe ψ^* *est primitive et satisfait aux conditions* $(B_{1,t})$, *où* t *est l'ordre de zéro de* ψ^* *en* S_1^1.

Enfin, posons $\Psi=(\psi_1)^2-f$. Cette fonction Ψ est alors primitive et de type $(0, 1)$. De plus, on peut voir facilement que

Ψ *est une fonction adjointe à* ψ^* *qui satisfait à la relation* $\Psi=(\psi^*+1)^2-f$.

5. Inexistence des types (9), (20) et (21). Dans cette section, on verra qu'aucun des types (9), (20) et (21) n'existe en réalité. Conservons les notations $\tilde{\varphi}$, ψ, ψ_1 et R, introduites dans la section précédente.

g) Type (9). Pour ce type, la situation est presque pareille à celle pour le type (8), mais S_0^1 et S_0^2 s'intersectent transversalement en un point. Comme on a $p=2$, $\tilde{\varphi}$ est biforme dans $\boldsymbol{C}^2$. Pour chaque $i=1, 2$, la surface analytique $\tilde{S}_0^i$ dans R située justement au-dessus de S_0^i est irréductible. En raisonnant comme dans (e), les valeurs de $\tilde{\varphi}$ prises sur les $\tilde{S}_0^1$ et $\tilde{S}_0^2$ sont constantes et égales à 1 ou -1. De plus, ces valeurs sont identiques puisque $\tilde{\varphi}$ est holomorphe sur R et que l'on a $\tilde{S}_0^1\cap\tilde{S}_0^2\neq\phi$ dans R. Il s'ensuit que ψ devient holomorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$ et prend même valeur sur les S_0^1 et S_0^2. C'est évidemment l'absurde puisque ψ est primitive et de type $(0, 2)$, et qu'elle admet une surface primitive avec la valeur 0 d'ordre 2 dans D. On en conclut qu'il n'existe pas de fonction du type (9).

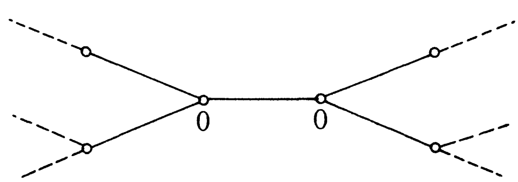
h) Type (20). Pour ce type, la situation est presque pareille à celle pour le type (14); $p=3$ et $S_i^1\cap S_i^2=\phi$ $(i=1, 2)$ mais les composantes S_i^j sont de type $(0, 2)$ toutes les quatre. $\tilde{\varphi}$ est uniforme dans tout $\boldsymbol{C}^2$. En vertu de la propriété 3, elle prend deux valeurs distinctes parmi 0, 1 et ∞ sur les S_0^1 et S_0^2, ainsi que sur les S_1^1 et S_1^2. On peut supposer que $\tilde{\varphi}$ prend la valeur 0 sur S_0^1 et la valeur 1 sur S_0^2 et on désigne par φ la fonction $\tilde{\varphi}$ ainsi normalisée. En raisonnant comme dans (c) de la section précédente, on voit que φ prend la valeur 0 sur l'une des S_1^1 et S_1^2, soit S_1^1, et la valeur 1 sur l'autre, soit S_1^2. φ est donc holomorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$.

Maintenant, on va construire une compactification (M, ζ) de $\boldsymbol{C}^2$ propre par rapport à f. Soit T_h l'application holomorphe de $\boldsymbol{C}^2$ dans l'espace produit $\boldsymbol{P}_z\times\boldsymbol{P}_w$ de deux sphères de Riemann, définie par $z=f$ et $w=\varphi$. Alors, T_h fait correspondre à D biholomorphiquement la partie de $\boldsymbol{P}_z\times\boldsymbol{P}_w$ obtenue par l'exception des six droites analytiques $z=0$, $z=1$, $z=\infty$, $w=0$, $w=1$ et $w=\infty$. Elle envoie les surfaces S_0^1, S_0^2, S_1^1 et S_1^2 respectivement aux points (0, 0), (0, 1), (1, 0) et (1, 1). D'abord, voyons que

Les fonctions f^{s_1}/φ^{n_1}, $f^{t_1}/(\varphi-1)^{n_2}$, $(f-1)^{s_2}/\varphi^{m_1}$ *et* $(f-1)^{t_2}/(\varphi-1)^{m_2}$ *sont non constantes respectivement sur les* S_0^1, S_0^2, S_1^1 *et* S_1^2, *où* s_1, s_2, t_1 *et* t_2 *sont les ordres de* φ *en* S_0^1, S_0^2, S_1^1 *et* S_1^2 *respectivement.*

En effet, on considère, par exemple, la première fonction f^{s_1}/φ^{n_1}. Soit R^* le domaine d'existence de la fonction f^{1/n_1}. En regardant φ comme fonction sur R^*, et en raisonnant comme au début de f), on voit que la fonction $\varphi/(f^{1/n_1})^s$ devient, pour un certain s, non constante sur la surface dans R^* située au-dessus de S_0^1 et par suite que φ^{n_1}/f^s est non constante sur S_0^1. En comparant leurs ordres de zéro, on a $s=s_1$. Il en est exactement de même des autres fonctions, ce qui achève la démonstration de l'énoncé.

Maintenant, en faisant des processus de Hopf, au moins une fois en chacun des points (0, 0), (0, 1), (1, 0) et (1, 1), on modifie $\boldsymbol{P}_z\times\boldsymbol{P}_w$ de telle manière qu'aucune des fonctions z^{s_1}/w^{n_1}, $z^{t_1}/(w-1)^{n_2}$, $(z-1)^{s_2}/w^{m_1}$ et $(z-1)^{t_2}/(w-1)^{m_2}$ n'admette de point d'indétermination dans la nouvelle variété M obtenue par la modification. L'application ζ de $\boldsymbol{C}^2$ dans M, induite par T_h, est alors une application biholomorphe de $\boldsymbol{C}^2$ sur une partie ouverte de M. D'après la façon même de la modification, la surface $A=M-\zeta(\boldsymbol{C}^2)$ satisfait aux conditions (B) et son diagramme contient une partie de la forme



contrairement aux résultats de Ramanujam et de Morrow. On en conclut qu'

Une fonction du type (20) *n'existe pas en réalité.*

i) Type (24). Pour ce type, la situation est analogue à celle pour le type (21). S_0 est irréductible et de type (0, 2). S_1 a deux composantes S_1^1 et S_1^2 qui ne s'intersectent pas. Mais, S_1^1 et S_1^2 sont de type (0, 2) toutes deux. On a aussi $p=2$, ce qui montre que $\tilde{\varphi}$ est biforme. Considérons ensuite la fonction $\psi_1=\dfrac{\tilde{\varphi}+1}{\tilde{\varphi}-1}f^{1/2}$, introduite dans f) de la section précédente. En raisonnant comme dans f), on voit que ψ_1 est non constante sur S_0. Un raisonnement tout analogue à celui de e) dans la section 4, utilisé pour indiquer que "ψ *prend la valeur* 0 *sur*

S'''', montre que ψ_1 prend la valeur 1 sur l'une des S_1^1 et S_1^2, soit S_1^1 et la valeur -1 sur l'autre, soit S_1^2. D'où, ψ_1 est holomorphe dans tout $\boldsymbol{C}^2$. Soit maintenant T_i l'application holomorphe de $\boldsymbol{C}^2$ dans l'espace produit $M_0=\boldsymbol{P}_z\times\boldsymbol{P}_w$ défine par $z=f$ et $w=\psi_1$. Alors, T_i transforme $\boldsymbol{C}^2-S_1$ biholomorphiquement sur la partie de M_0 obtenue par l'exception de trois droites analytiques $z=1$, $z=\infty$, $w=\infty$ et d'une surface analytique $w^2-z=0$. Ceci montre que ψ_1 est primitive et de type (0, 3). Pour chaque valeur a, désignons par X_a la surface donnée par $\psi_1=a$. Il est aisé de voir que chacune des surfaces X_1 et X_{-1} consiste en deux composantes irréductibles, dont l'une au moins est de type (0, 2). Soient X_1' la surface première de ψ_1 avec la valeur 1 dans $\boldsymbol{C}^2-S_1$ et X_{-1}' celle avec la valeur -1. L'ordre de ψ_1 est 1 en X_1' ainsi qu'en X_{-1}'. En consultant la table de la section 2, ψ_1 doit être du type (15) ou bien du type (17), puisque le type (20) n'existe pas.

Supposons d'abord que ψ_1 soit du type (15). Alors, l'ordre de ψ_1 est aussi 1 en S_1^1 ainsi qu'en S_1^2 d'après le lemme 1, puisque $S_1^1-(S_1^1\cap X_1')$ ainsi que $S_1^2-(S_1^2\cap X_{-1}')$ sont de type (0, 3). La fonction $\Phi=((\psi_1)^2-1)/(f-1)$ est alors une fonction adjointe à ψ_1 telle qu'à toute surface première X de ψ_1, différente de X_1' et de X_{-1}', corresponde par Φ biholomorphiquement le domaine $\boldsymbol{C}-\{0, 1\}$ et que Φ envoie X_1' et X_{-1}' au point 0 à la fois. La fonction entière Φ ne prend pas donc la valeur 1, ce qui est l'absurde puisque Φ est primitive.

Supposons ensuite que ψ_1 soit du type (17). On peut supposer $X_1'\cap S_1'\neq\phi$ et $X_{-1}'\cap S_1^2=\phi$ sans diminuer la généralité. Nous allons construire encore une compactification (M, ζ) de $\boldsymbol{C}^2$ propre par rapport à f, en modifiant $M_0=\boldsymbol{P}_z\times\boldsymbol{P}_w$. Il s'agit alors des ordres de f et de $\psi_1-f^{1/2}$ sur les S_1^1 et S_1^2. Pour cela, soient $\sum_1$ le domaine dans $\boldsymbol{C}^2$ défini par $|f-1|<\frac{1}{2}$ et Δ le domaine dans M_0 défini par $|z-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$, $|\omega|\leq\infty$. f_1 étant une branche de $f^{1/2}$ dans $\sum_1$ qui prend la valeur 1 sur S_1, considérons la fonction $\tilde{\psi}=(f_1-\psi_1)/2f_1$, qui est holomorphe dans $\sum_1$ et prend la valeur 0 sur S_1^1 et la valeur 1 sur S_1^2. Alors, l'application holomorphe T_i' de $\sum_1$ dans Δ, donnée par $z=f$ et $w=\tilde{\psi}$, fait correspondre à $\sum_1-S_1$ biholomorphiquement la partie Δ' de Δ obtenue par l'exception de quatre droites analytiques $z=1$, $w=0$, $w=1$ et $w=\infty$. L'image de S_1^1 par T_i' est le point $(1, 0)$ et celle de S_1^2 est $(1, 1)$. A ce moment, on va montrer que

L'ordre de f en S_1^1 est 1 *et la fonction* $(f-1)/\tilde{\psi}$ *est non constante sur* S_1^1; *et que, s étant l'ordre de $\tilde{\psi}$ en S_1^2, la fonction* $(f-1)^s/(\tilde{\psi}-1)^{m_2}$ *est non constante sur* S_1^2 *et on a* $m_2-s=\pm 1$.

En effet l'ordre de f sur S_1^1 est 1 puisque $S_1^1-(S_1^1\cap X_1)$ est de type (0, 3), par suite l'ordre de ψ_1 en S_1^1 est 1 et la restriction de $\Phi=((\psi_1)^2-1)/(f-1)$ à S_1^1 est non constante. De même, l'ordre de $\tilde{\psi}$ en S_1^1 est 1 puisqu'on a $\tilde{\psi}=((\psi_1)^2-f)/(-2f_1)(\psi_1+f)$. En suite, l'ordre de $(\psi_1)^2-f$ en S_1^1 est 1 et celui en S_1^2 est s

puisqu'on a $\tilde{\psi}-1=((\psi_1)^2-f)/(-2f_1)\,(\psi_1-f)$. D'où, le raisonnement souvent utilisé plus haut montre que l'on a $m_2-s=\pm 1$.

D'après l'énoncé qu'on vient de démontrer, on fait des processus de Hopf convenables aux points (1, 1) et (1, -1) de M_0 de telle manière que S_1^1 et S_1^2 soient réalisées d'une façon biholomorphe dans la variété M obtenue par la modification; autrement dit, de telle manière que l'application ζ de $\boldsymbol{C}^2$ dans M, induite canoniquement par T_i, soit injective. Alors, comme précédemment, on voit que le diagramme de $A=M-\zeta(\boldsymbol{C}^2)$ est de la forme

$$\underset{-(m_2+1)}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{-m_2}{\circ} \qquad \text{lorsque } s=m_2+1\text{; ou}$$

$$\underset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{-2}{\circ}\cdots\cdots\underset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{-3}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{0}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{0}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{-(s+1)}{\circ}$$

lorsque $m_2=s+1$.

Ceci est aussi en contradiction avec les résultats de Ramanujam et de Morrow. Donc, ψ_1 ne peut être du type (17). D'où, on conclut que le type (24) n'exsite pas en réalité.

6. Conclusion

Théorème. *Soit g une fonction entière de deux variables de la classe* (A) *et de type* (0, 3). *Alors, on peut la ramener par un certain automorphisme analytique de $\boldsymbol{C}^2$ à la forme $F\cdot P$ avec une fonction entière F d'une variable et l'un des polynômes P des* 13 *types suivants* (*conservons les notations de la section* 2).

Type (1): $x^{n_1}(x-1)^{n_2}(x^s(x-1)^t y+P_{s+t-1}(x))$;

Type (2): $x^{n_1}(x-1)^{n_2}(x^s y+P_{s-1}(x))$;

Type (3): $x^{n_1}(x-1)^{n_2}y$;

où n_1, n_2, s, t sont des entiers positifs et $P_i(x)$ est un polynôme en x de degré $\leq i$ tel que $P_i(0)\neq 0$.

Type (5): $x^{n_1}(x^l y+P_{l-1}(x))^{n_2}(x^s(x^l y+P_{l-1}(x))^t-1)^{n_3}$,
$x(x^s y+a)^{n_2}(x^s y+a-1)^{n_3}$ *ou bien*
$x(x^s(x^l y+P_{l-1}(x))+a)^{n_2}(x^s(x^l y+P_{l-1}(x))+a-1)^{n_3}$

Type (6): $x^{n_1}y^{n_2}(x^s y^t-1)^{n_3}$;

où n_1, n_2, n_3, s, t, l sont des entiers positifs tels que $n_1 t-n_2 s=\pm 1$, $P_{l-1}(x)$ est un polynôme en x de degré $\leq l-1$ tel que $P_{l-1}(0)\neq 0$, et a est un nombre complexe $\neq 0$ et $\neq 1$.

Type (8): $x(x^s y^2-1)^{n_2}$ *ou bien*
$x(x^s(x^l y+P_{l-1}(x))^2-1)^{n_2}$;

où n_2, s, l sont des entiers positifs tels que s soit pair, et $P_{l-1}(x)$ est un polynôme en x de degré $\leq l-1$ tel que $P_{l-1}(0)\neq 0$.

Type (11): $x^{n_1}(x^s(x-1)^t y+Q_{s+t-1}(x-1))$;

Type (12): $x^{n_1}(x^s(x-1)^{m_1} y+Q_{s+m_1-1}(x-1))$;

Type (15): $x^{n_1}((x-1)^{m_1} y+Q_{m_1-1}(x-1))$;

où n_1, m_1, s, t sont des entiers positifs tels que $t>m_1$, et $Q_i(\xi)$ est un polynôme en ξ de degré $\leq i$ tel que $Q_i(0)=1$, dont les premiers m_1 coefficients (coefficients en ξ^k pour $0\leq k\leq m_1-1$) sont certains nombres rationnels déterminés uniquement par l'ordre n_1 (ξ étant remplacé par $x-1$) et dont le (m_1+1)—ième coefficient est un normbre complexe qui subit une seule condition qu'il soit différent d'un certain nombre rationnel déterminé uniquement par n_1 et m_1.

Type (14): $(x^l y+R_{l-1}(x))\,(x(x^l y+R_{l-1}(x))^t-1)^{m_2}+1$,

Type (17): $(x^{n_1} y+R_{n_1-1}(x))\,(x(x^{n_1} y+R_{n_1-1}(x))^t-1)^{m_2}+1$,

où n_1, m_2, l, t sont des entiers tels que $l>n_1$, et $R_i(x)$ est un polynôme en x de degré $\leq i$ tel que $R_i(0)=(-1)^{m_2-1}$, dont les premiers n_1 coefficients (donc tous les coefficients pour le type (17)) sont certains nombres rationnels déterminés complètement par les ordres t et m_2 et dont le (n_1+1)-ième coefficient est un nombre complexe différent d'un certain nombre rationnel déterminé uniquement par t, m_2 et n_1:

Type (21): *lorsque* $m_1=1$,

$(x^t y+1)^2-x$ *ou bien*

$(x^t(x^l y+P_{l-1}(x))+1)^2-x$ *ou bien*

$(x(x^l y+P^0_{l-1}(x))+1)^2-x$;

lorsque $m_1>1$

$(x(x^k y+S_{k-1}(x))+1)^2-x$;

Type (22): *lorsque* $m_1=1$,

$(xy+1)^2-x$;

lorsque $m_1>1$,

$(x(x^{m_1-1} y+S_{m_1-2}(x))+1)^2-x$;

où m_1, k, l, t sont des entiers positifs tels que $t>1$ et $k>m_1-1$; $P_{l-1}(x)$ et $P^0_{l-1}(x)$ sont des polynômes en x de degré $\leq l-1$ tels que $P_{l-1}(0)\neq 0$, $P^0_{l-1}(0)\neq 0$ et $\neq \frac{1}{2}$; $S_i(x)$ est un polynôme en x de degré $\leq i$ tel que $S_i(0)\neq 0$, dont les premiers m_1-1 coefficients sont certains nombres rationnels déterminés uniquement et dont le m_1-ième coefficient est un nombre complexe différent d'un certain nombre rationnel déterminé uniquement par m_1.

Remarquons que tout polynôme indiqué dans ce théorèmé, quels que soient les coefficients des polynômes qui interviennent dans les formules, est bien entendu de type (0, 3) et primitive. Mais, certains polynômes entre eux admettent des valeurs critiques qui sont différentes de zéro et de un.

D'après 2° dans la section 1, toute fonction entière de deux variables de type (0, 3) peut se ramener à la forme $F\cdot f$ avec une fonction entière F d'une variable et une fonction entière primitive f de deux variables, de type (0, 3). Pour cette raison, on peut toujours supposer que, si f a une seule valeur critique, celle-ci est 0 et, si f en a deux, elles sont 0 et 1.

Pour démontrer ce théorème principal, maintenant qu'on a montré l'inexistence des types portant la marque $\times$ dans la table (D), il reste à faire la réduction à l'aide de la fonction adjointe distingée à f construite dans la section 4 pour chaque type existant. Pour les types (1), (2), (3), (11), (12) et (15), la fonction adjointe distingée est de type (0, 1). Par suite, le procédé de réduction est le même que pour les fonctions satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$ dans le mémoire précédent. Nous n'en donnerons pas de démonstration détaillée. Pour les autres types, comme on l'a vu dans la section 4, la fonction adjointe distinguée à f est de type (0, 2). Nous n'indiquerons dans la suite le procédé de réduction que pour deux types (6) et (22). Pour le reste des types, on pourrait sans difficulté réaliser la réduction, en employant le moyen pour ces deux types et ceux dans les sections 15 et 16 du mémoire précédent.

Type (6). Pour ce type, f admet sa seule valeur critique 0 et sa surface critique S_0 consiste en trois surfaces premières S_0^i $(i=1, 2, 3)$. S_0^1 et S_0^2 sont de type (0, 1) et s'intersectent. Mais, S_0^3 est de type (0, 2) et n'intersecte pas les autres. La fonction adjointe distinguée φ à f satisfait aux conditions $(B_{s,t})$, où s et t sont respectivement les ordres de zéro de φ en S_0^1 et en S_0^2. On a $n_1t-n_2s=\pm 1$, où n_i est l'ordre de f en S_0^i. De plus, φ prend la valeur constante 1 sur S_0^3. D'après le résultat du mémoire précédent, on peut réduire φ au polynôme de la forme x^sy^t par un automorphisme analytique convenable de $\boldsymbol{C}^2$. Cette réduction étant faite, on voit aisément que f se met sous la forme

$$f(x, y) = x^{n_1}y^{n_2}(x^sy^t-1)e^{\Omega(x,y)},$$

où $\Omega(x, y)$ est une fonction entière de x et y.

Je dis ici que

$\Omega(x, y)$ *est une fonction de* φ.

En effet, pour toute surface ordinaire S_α de φ, la restriction de f à S_α fait correspondre à S_α biholomorphiquement $\boldsymbol{C}-\{0\}$. D'autre part, la fonction $g=x^{n_1}y^{n_2}$ a même caractère que f par rapport à φ puisque l'on a $n_1t-n_2s=\pm 1$. Donc, on voit facilement que f s'écrit sous la forme

$$f(x, y) = h^*(\varphi)g(x, y),$$

où h^* est une fonction entière d'une variable. En comparant cette forme-ci avec la forme plus haute de f, on aura l'énoncé.

Maintenant, considérons un automorphisme de $\boldsymbol{C}^2$ donné par

$$x' = xe^{\alpha h(x^sy^t)},\ y' = y\, e^{\beta h(x^sy^t)},$$

où h est une fonction entière d'une variable telle que l'on ait $\Omega=h(\varphi)$, et α et β sont les nombres rationnels définis par $s\alpha+t\beta=0$ et $n_1\alpha+n_2\beta=-1$. Alors, le raisonnement de la section 16 du mémoire précédent montre que f se réduit au polynôme de la forme

$$x^{n_1}y^{n_2}(x^s y^t-1)^{n_3}$$

par cet automorphisme, ce qui achève la réduction pour le type (6).

Type (22). Pour ce type, f admet deux valeurs critiques 0 et 1. La surface critique S_0 est irréductible et de type (0, 2). L'autre surface critique S_1 consistent en deux composantes irréductibles s'intersectant, l'une S_1^1 étant de type (0, 1) et l'autre S_1^2 de type (0, 2). La fonction adjointe distinguée ψ^* à f satisfait aux conditions $(B_{1,t})$, t étant l'ordre de zéro de ψ^* en S_1^1. De plus, ψ^* admet $\Psi=(\psi^*+1)^2-f$ pour sa fonction adjointe. D'après le théorème de Nishino, on peut réduire Ψ au monôme x par un automorphisme de $\boldsymbol{C}^2$. D'après le résultat du mémoire précédent, ψ^* se réduit par cet automorphisme au polynôme de la forme

$$x^t y \qquad \text{ou bien} \qquad x^t(x^l y+S_{l-1}(x))$$

où l est un nombre entier positif et $S_{l-1}(x)$ est un polynôme en x de degré$\leq l-1$ tel que $S_{l-1}(0)\neq 0$. Par suite, en vertu de l'expression de Ψ, f se met sous la forme

$$\begin{gathered}(x^t y+1)^2-x \qquad \text{ou} \\ (x^t(x^l y+S_{l-1}(x))+1)^2-x\end{gathered}$$

suivant que ψ^* est de la première forme ou de la deuxième forme.

Je dis ici que

On a $t=1$.

En effet, la surface critique S_1 se représente par l'équation

$$x(x^{2t-1}y^2+2x^{t-1}y-1)=0$$

ou bien

$$x(x^{2t-1}(x^l y+S_{l-1}(x))^2+2x^{t-1}(x^l y+S_{l-1}(x))-1)=0\,.$$

D'où, t doit être 1 puisque S_1^1 et S_1^2 s'intersectent.

Il suit de là que, dans le cas où f est de la première forme ci-dessus, f est de la forme $(xy+1)^2-x$. On voit, de cette forme-ci de f, que l'ordre m_1 de f en S_1^1 est 1. Au cas de la deuxième forme un calcul facile montre qu'on a $m_1=l+1$. Par suite, si l'on a $m_1=1$, f est de la première forme. Lorsqu'on a $m_1>1$, le polynôme $S_{m_1-2}(x)$ est déterminé uniquement de la relation suivante où k est un polynôme de x:

$$x^2(S_{m_1-2}(x))^2+2xS_{m_1-2}(x)-x=k\,x^{m_1}\,.$$

Par suite, avec le polynôme $S_{m_1-2}(x)$ ainsi déterminé, f se met sous la forme voulue

$$(x(x^{m_1-1}y+S_{m_1-2}(x))+1)-x\,.$$

UNIVERSITÉ DE LA PRÉFECTURE D'OSAKA

Bibliographie

[1] F. Hirzebruch: *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen veränderlichen*, Math. Ann. **126** (1953), 1–22.

[2] K. Kodaira: *On compact complex analytic surface*, I, Ann. of Math. **71** (1960), 111–152. II, Ann. of Math. **77** (1963), 563–626.

[3] J.A. Morrow: *Compactification of* $\boldsymbol{C}^2$, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 813–816.

[4] M. Nagata: *On rational surfaces* I. *Irreducible curves of arithemtic genus* 0 *or* 1. Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Ser A **32**, Math. (1960), 351–370.

[5] T. Nishino: *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes* (I), J. Math. Kyoto Univ. **8** (1968), 49–100. (II) *Fonctions entières qui se reduisent à celle d'une variable*, J. Math. Kyoto Univ. **9** (1969), 221–274. (III) *Sur quelques propriétés topologiques des surfaces premières*, J. Math. Kyoto Univ. **10** (1970), 245–271. (IV) *Types de surfaces premières*, J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973), 217–272. (V) *Fonctions qui se réduisent aux polynômes*. J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 527–553.

[6] C.P. Ramanujam: *A topological characterization of the affine plane as an algebraic variety*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 69–88.

[7] H. Saito: *Fonctions entières qui se reduisent à certains polynômes* (I), Osaka J. Math. **9** (1972), 293–332.

[8] M. Suzuki: *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphisemes algébriques de l'espace* $\boldsymbol{C}^2$, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 241–257.

[9] H. Yamaguchi: *Sur une uniformité des surfaces constantes d'une fonction entière de deux variables complexes*. J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973), 417–433.

[10] H. Yamaguchi: *Parabolicité d'une fonction entière*. J. Math. Kyoto Univ. **16** (1976), 71–92.

[11] H. Yamaguchi: *Famille holomorphe de surfaces de Riemann ouvertes, qui est une variété de Stein*. à paraître.