

## REMARQUES SUR LES VARIÉTÉS LOCALEMENT HESSIENNES

PHILIPPE DELANOË

(Reçu le 7 mars, 1988)

Les variétés localement hessiennes sont une classe privilégiée de variétés affines pour l'étude de la *convexité* [10]. Les variétés hyperboliques [11] [7] en constituent l'exemple non trivial d'origine; elles ont été initialement créées dans le cas homogène non compact en leur qualité de bases de variétés-tubes (tangentes) biholomorphiquement équivalentes à des domaines bornés homogènes de  $\mathbf{C}^n$  [6]. En première partie, nous notons deux caractérisations géométriques de ces variétés. En seconde partie, nous améliorons le théorème de [2] sur les variétés localement hessiennes *compactes*, concernant l'existence d'une structure localement hessienne cohomologue à une structure donnée et de volume prescrit. Nous en tirons un corollaire sur l'impossibilité pour la première classe de Chern des variétés affines compactes d'être définie positive, résultat déjà obtenu mais de façon différente dans [8].

1. Suivant [9], définissons une variété *localement hessienne*  $(V, D, g)$ , comme une variété différentielle  $V$  munie d'une connexion linéaire plate et sans torsion  $D$ , et d'une métrique Riemannienne  $g$  qui, vue comme 1-forme sur  $V$  à valeurs dans  $T^*V$ , est fermée pour la différentiation extérieure covariante associée à  $D$ . Nous allons maintenant proposer deux caractérisations de ces variétés.

### Variétés-tubes.

Le fibré tangent d'un ouvert connexe  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  peut être vu comme un *tube complexe* (ou comme son *conjugué*;  $i$ , racine carrée "positive" de l'unité),

$$T\Omega \simeq \Omega \pm i\mathbf{R}^n$$

un difféomorphisme défini sur  $\Omega$  étant alors holomorphe si et seulement s'il est *affine*. Ainsi, le fibré tangent d'une variété affine est-il muni de façon canonique d'une structure (affine) complexe de variété-tube.

**Théorème 1.** *Soit  $(V, D)$  une variété affine. C'est une variété localement hessienne si et seulement si son fibré tangent, muni de la structure-tube complexe canonique, admet une métrique Kählerienne quasi-fibrée relativement au feuilletage*

défini par la submersion canonique de  $TV$  sur  $V$ .

Preuve. La nécessité fait l'objet de la proposition 0.1 de [9]. Montrons la suffisance; soit donc  $G$  une métrique Kählérienne quasi-fibrée sur  $TV$  relativement au feuilletage vertical canonique. L'atlas affine réel naturel de  $TV$  hérité de l'atlas affine de  $V$ , est constitué de cartes qui sont *adaptées* à ce feuilletage. Aussi, dans une carte affine complexe de  $TV$  dont on note les coordonnées ( $n$  est la dimension de  $V$ ),

$$z^\lambda = x^\lambda + iy^\lambda, \quad \lambda = 1, \dots, n,$$

$G$  s'écrit-il par hypothèses (avec la convention d'Einstein),

$$G = G_{\lambda\bar{\mu}}(x^1, \dots, x^n) dz^\lambda d\bar{z}^\mu.$$

Fixons un point  $P$  de  $TV$ , et choisissons en  $P$  une carte affine de  $TV$  *diagonalisant*  $G$  (il suffit pour cela de composer la carte générique précédente avec une transformation unitaire convenable de  $\mathbf{C}^n$ ). Dans cette carte,

$$\begin{aligned} G(P) &= \sum_{\lambda=1}^n G_{\lambda\bar{\lambda}}(x) dz^\lambda d\bar{z}^\lambda \\ &= \sum_{\lambda=1}^n G_{\lambda\bar{\lambda}}(x) (dx^\lambda)^2 + \sum_{\lambda=1}^n G_{\lambda\bar{\lambda}}(x) (dy^\lambda)^2. \end{aligned}$$

Cette écriture montre que les feuilletages vertical et horizontal (pour  $D$ ) de  $TV$  sont orthogonaux relativement à  $G$ , que l'écriture générique de  $G$  en carte affine est en fait de la forme,

$$G = G_{\lambda\bar{\mu}}(x) (dx^\lambda \otimes dx^\mu + dy^\lambda \otimes dy^\mu)$$

que ses composantes  $G_{\lambda\bar{\mu}}(x)$  sont donc *réelles*. Ainsi,  $G_{\lambda\bar{\mu}}(x) \equiv G_{\mu\bar{\lambda}}(x)$  et en posant dans toute carte affine de  $V$ ,

$$g := G_{\lambda\bar{\mu}}(x) dx^\lambda \otimes dx^\mu$$

nous définissons bien une *métrique Riemannienne sur  $V$* . La preuve s'achève dès lors comme dans [9] (proposition 0.1). c.q.f.d.

### Variétés de Codazzi.

Soit  $(V, D)$  une variété différentielle munie d'une connexion linéaire *sans torsion*. Soit  $\text{Cod}(V, D)$  le sous-espace fermé des formes différentielles quadratiques  $g$  sur  $V$ , de *Codazzi* pour  $D$ , i.e. telles que pour tout triplet de champs de vecteurs  $(X, Y, Z)$  sur  $V$ ,

$$D_X g(Y, Z) \equiv D_Y g(X, Z).$$

Appelons  $(V, D)$ , variété de Codazzi, s'il existe  $g \in \text{Cod}(V, D)$  non dégénérée et non parallèle (relativement à  $D$ ).

Une variété localement hessienne,  $(V, D, g)$  avec  $g$  non plate, est un exemple de variété de Codazzi.

**Théorème 2.** Soit  $(V, D)$  une variété de Codazzi et soit  $g$  une métrique pseudo-Riemannienne sur  $V$ , vue comme isomorphisme de  $TV$  sur  $T^*V$ . Alors,  $g \in \text{Cod}(V, D)$  si et seulement si l'image par  $Tg$  du sous-fibré horizontal  $H$  défini par  $D$ , est un sous-fibré Lagrangien pour la structure symplectique canonique  $\sigma$  de  $T^*V$ .

Preuve. Un calcul de routine montre que la restriction  $\sigma'$  de  $\sigma$  à  $Tg(H)$ , a pour expression dans une carte locale naturelle de  $T^*V$ ,  $(q^i, p_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ ,

$$\sigma'(q, p) = \frac{1}{2} (\#p)^i (D_j g_{ik} - D_k g_{ij}) dq^j \wedge dq^k$$

$\#$  désignant l'isomorphisme inverse de  $g$ . Le théorème s'ensuit. c.q.f.d.

**Corollaire 1.** Une variété affine  $(V, D)$  est localement hessienne si et seulement s'il existe une métrique  $g$  sur  $V$  qui envoie le sous-fibré horizontal canonique de  $TTV \rightarrow TV$  sur un sous-fibré Lagrangien de  $TT^*V \rightarrow T^*V$ .

2. Soit  $(V, D, g)$  une variété localement hessienne compacte de dimension  $n$  et soit  $\omega$  une densité non dégénérée sur  $V$ .

Une métrique Riemannienne  $g'$  sur  $V$  est dite *cohomologue* à  $g$  s'il existe un *potentiel* global de  $(g' - g)$ , i.e. une fonction réelle  $u$  sur  $M$  dont la *hessienne* dans la connexion  $D$  coïncide avec  $(g' - g)$ .  $g'$  est alors localement hessienne et les formes de Kähler des métriques quasi-fibrées correspondantes à  $g'$  et à  $g$  sur  $TV$  (voir théorème 1) sont cohomologues.

**Théorème 3.** Il existe une constante positive  $C$  et une métrique Riemannienne  $g'$  cohomologue à  $g$ , uniques, telles que,

$$\det(g') = C \omega^2.$$

Preuve. On montre par la *méthode de continuité* (voir e.g. [3], section I) qu'il existe une unique fonction réelle lisse  $u$  sur  $V$ , solution *admissible* (i.e. telle que  $g + D^2u$  soit *définie positive*), de l'équation (intégré-) différentielle de type Monge-Ampère réelle suivante sur  $V$ ,

$$\det(g + D^2u) [\det(g)]^{-1} = \exp(\langle u \rangle) \omega^2 [\det(g)]^{-1}$$

$\langle u \rangle$  désignant la *moyenne* de  $u$  sur  $V$  dans la métrique  $g$ . L'introduction de cette moyenne dans l'équation, idée-clef de [3], rend le problème, qui est elliptique, *localement inversible* et elle ramène l'estimation *a priori* uniforme de

$u$  à celle de  $\text{osc}(u)$ , l'oscillation de  $u$  sur  $V$ . Les estimations *a priori* d'ordre supérieur sont établies dans [2].

Pour estimer  $\text{osc}(u)$ , nous pouvons d'après [10] joindre par une géodésique de  $D$  le point  $Q$  de  $V$  où  $u$  atteint son minimum au point  $P \in V$  où  $u$  atteint son maximum. Soit  $t$  le paramètre affine sur la géodésique  $\gamma$  de  $P$  à  $Q$ , qui vaut zéro en  $P$  et un en  $Q$  (cf. e.g. [5], p. 138).  $u$  étant admissible pour  $g$ , et de gradient nul en  $P$  et  $Q$ , nous avons,

$$\begin{aligned} \text{osc}(u) &= -\int_0^1 d(u \cdot \gamma)/dt dt = -\int_0^1 \int_0^t d^2(u \cdot \gamma)/ds^2 ds dt \\ &= -\int_0^1 \int_0^t (D_{i,j}u)[\gamma(s)](d\gamma^i/ds)(d\gamma^j/ds) ds dt \\ &\leq \int_0^1 \int_0^t g(d\gamma/ds, d\gamma/ds) ds dt. \end{aligned}$$

L'existence de  $u$  est donc acquise. L'unicité de la constante  $C = \exp(\langle u \rangle)$  se démontre comme dans [4] (p. 647); celle de  $g' = g + D^2u$  découle alors du Principe du Maximum. c.q.f.d.

**Corollaire 2.** *La première classe de Chern d'une variété affine compacte ne peut être strictement positive.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Soit  $(V, D)$  une variété affine compacte admettant une densité  $\omega$  telle que,

$$g := -D^2(\text{Log } \omega),$$

intrinséquement définie (voir [2]), soit définie positive sur  $V$ .  $(V, D, g)$  est donc localement hessienne et d'après le théorème 3, il existe  $g'$  métrique localement hessienne cohomologue à  $g$  telle que,

$$\det(g') = C\omega^2.$$

La métrique Kählérienne quasi-fibrée correspondant à  $g'$  sur  $TV$ , manifestement complète, possède pour tenseur de Ricci l'extension quasi-fibrée de  $(2g)$ , qui est uniformément définie positive. Ceci est impossible d'après le théorème de Myers (voir e.g. [1]). c.q.f.d.

Le théorème 3 précédent améliore le théorème 2.1 de [2], en relâchant la condition (artificielle) sur  $(V, D, g)$  d'être "spéciale", et en précisant la preuve de l'important lemme 2.2 sur l'estimation *a priori* de  $\text{osc}(u)$ . Notons que le corollaire 2.3 de [2] fait déjà l'objet du corollaire de [8].

#### REMERCIEMENTS.

Je tiens à remercier E.B. Vinberg de m'avoir signalé, à Moscou en Octobre

1985 (donc, hélas, *postérieurement* à la rédaction de mon mathematical review sur [2]), l'existence des travaux de H. Shima.

---

### Bibliographie

- [1] J. Cheeger, D.G. Ebin: Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland mathematical library, **9** (1975).
- [2] S.-Y. Cheng, S.-T. Yau: *The real Monge-Ampère equation and affine flat structures*, Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Science Press Peking (1982), 339–370.
- [3] Ph. Delanoë: *Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés Riemanniennes compactes II*, J. Funct. Anal. **41** (1981), 341–353.
- [4] Ph. Delanoë: *Plongements radiaux  $S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  à courbure de Gauss positive prescrite*, Ann. Sci. École. Norm. Sup., 4 série, **18** (1985), 635–649.
- [5] S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Interscience tracts in pure and applied mathematics n°15, vol. I, John Wiley & Sons (1963).
- [6] J.-L. Koszul: *Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines*, Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 515–533.
- [7] J.-L. Koszul: *Variétés localement plates et convexité*, Osaka J. Math. **2** (1965), 285–290.
- [8] H. Shima: *Compact locally hessian manifolds*, Osaka J. Math. **15** (1978), 509–513.
- [9] H. Shima: *Homogeneous hessian manifolds*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **30** (1980), 91–128.
- [10] H. Shima: *Hessian manifolds and convexity*, Manifolds and Lie groups, papers in honor of Y. Matsushima, Progress in Math. **14**, Birkhäuser (1981), 385–392.
- [11] J. Vey: *Une notion d'hyperbolicité sur les variétés localement plates*, C.R. Acad. Sci. Paris, série A, **266** (1968), 622–624.

C.N.R.S., U.A. n°168  
I.M.S.P. de l'Université de Nice  
Parc Valrose F-06034 NICE CEDEX

