Journal of the Institute of Polytechnics,
Osaka City University,
Vol. 3, No. 1–2, Series A

Ergenzende Bemerkungen über die Arithmetik in Schiefringen

By Keizo ASANO und Takasaburo UKEGAWA

(Received September 15, 1951)

Es sei $\mathfrak{o}^*$ ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K, für den die übliche Arithmetik gilt, und $\mathfrak{o}$ sei eine mit $\mathfrak{o}^*$ äquivalente Ordnung in K, d. h. ein Teilring von $\mathfrak{o}^*$ mit Einselement, so dass $\mathfrak{o}^*a\subseteq\mathfrak{o}$ mit einem Element $a\neq 0$ aus $\mathfrak{o}$ ist. Es sei $\mathfrak{f}$ der Führer von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$, und $\sum$ bzw. $\sum^*$ der Bereich aller zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{o}^*$. $\sum$ und $\sum^*$ werden dann bekanntlich durch die Zuordnung von Verengungs- und Erweiterungsideal eineindeutig und hinsichtlich aller elementaren Idealoperationen isomorph aufeinander abgebildet ([1] §33, [2] S. 91). In der vorliegenden Note soll diese Tatsache auf den nichtkommutativen Fall verallgemeinert werden.

§1. Führer

Es sei $\mathfrak{o}^*$ ein Schiefring mit Einselement 1 und $\mathfrak{o}$ sei ein 1 umfassender Teilring von $\mathfrak{o}^*$ derart, dass es Elemente x aus $\mathfrak{o}^*$ mit $\mathfrak{o}^*x\mathfrak{o}^*\subseteq\mathfrak{o}$ gibt. Dann bildet die Menge $\mathfrak{f}=\{x\,|\,\mathfrak{o}^*x\mathfrak{o}^*\subseteq\mathfrak{o},\ x\in\mathfrak{o}^*\}$ ein von Null verschiedenes in $\mathfrak{o}$ enthaltenes Ideal von $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{f}$ umfasst alle zweiseitigen Ideale aus $\mathfrak{o}^*$, die in $\mathfrak{o}$ enthalten sind, d. h. $\mathfrak{f}$ ist das grösste zweiseitige Ideal von $\mathfrak{o}^*$, das eine Untermenge von $\mathfrak{o}$ ist. $\mathfrak{f}$ heisst der Führer von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$.

$$\mathfrak{f}\subseteq\mathfrak{o},\qquad \mathfrak{o}^*\mathfrak{f}=\mathfrak{f}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{f}$$

SATZ 1. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremdes zweiseitiges Ideal aus* $\mathfrak{o}$: $(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, *so ist* $\mathfrak{A}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*$, *und* $(\mathfrak{A},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}^*$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*\mathfrak{f}=\mathfrak{a}\mathfrak{f}\subseteq\mathfrak{a}\mathfrak{o}=\mathfrak{a}$, also

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}&=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*\mathfrak{o}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*(\mathfrak{a},\mathfrak{f})\\&=(\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*\mathfrak{a},\ \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*\mathfrak{f})\subseteq(\mathfrak{o}^*\mathfrak{a},\ \mathfrak{o}^*\mathfrak{a})=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\,.\end{aligned}$$

Da aber $\mathfrak{A}\supseteq\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}$ ist, gilt $\mathfrak{A}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}$. Ebenso ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*$. Aus $(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, folgt $(\mathfrak{A},\mathfrak{f})=(\mathfrak{o}^*\mathfrak{a},\mathfrak{o}^*\mathfrak{f})=\mathfrak{o}^*(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}^*\mathfrak{o}=\mathfrak{o}^*$.

SATZ 2. *Ist ein Linksideal* $\mathfrak{l}$ *aus* $\mathfrak{o}$ *ein Teiler eines zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremden zweiseitigen Ideals* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{o}$, *dann ist das Erweiterungsideal* $\mathfrak{L}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}$ *von* $\mathfrak{l}$ *ein Teiler eines zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremden zweiseitigen Ideals* $\mathfrak{A}$ *aus* $\mathfrak{o}^*$ *und das Verengungsideal* $\mathfrak{L}\frown\mathfrak{o}$ *von* $\mathfrak{L}$ *ist gleich* $\mathfrak{l}$, Beweis. Es sei $\mathfrak{l}\supseteq\mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}$. Es ist dann $\mathfrak{L}\supseteq\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*$, $(\mathfrak{A},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}^*$. Da $\mathfrak{L}\supseteq\mathfrak{l}$ ist, so gilt $\mathfrak{l}'=\mathfrak{L}\frown\mathfrak{o}\supseteq\mathfrak{l}$. Andererseits wegen

$$\mathfrak{f}\mathfrak{l}'\subseteq\mathfrak{f}\mathfrak{L}=\mathfrak{f}\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}=\mathfrak{f}\mathfrak{l}\subseteq\mathfrak{o}\mathfrak{l}=\mathfrak{l}$$

ist $\mathfrak{l}'=\mathfrak{o}\mathfrak{l}'=(\mathfrak{a},\mathfrak{f})\,\mathfrak{l}'=(\mathfrak{a}\mathfrak{l}',\mathfrak{f}\mathfrak{l}')\subseteq(\mathfrak{a},\mathfrak{l})=\mathfrak{l}$. Es ist also $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}'$.

SATZ 3 *Ist ein Linksideal $\mathfrak{L}$ aus $\mathfrak{o}^*$ ein Teiler eines zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden zweiseitigen Ideals $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{o}^*$, so ist das Verengungsideal $\mathfrak{l}=\mathfrak{L}\frown\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{L}$ ein Teiler eines zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden zweiseitigen Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{o}$ und das Erweiterungsideal $\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}$ ist gleich $\mathfrak{L}$.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{l}=\mathfrak{L}\frown\mathfrak{o}\supseteq\mathfrak{A}\frown\mathfrak{o}=\mathfrak{a}$ und

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{o}^*\frown\mathfrak{o}=(\mathfrak{A},\mathfrak{f})\frown\mathfrak{o}=(\mathfrak{A}\frown\mathfrak{o},\mathfrak{f})=(\mathfrak{a},\mathfrak{f}).$$

Da $\mathfrak{L}\supseteq\mathfrak{l}$ ist, so gilt $\mathfrak{L}\supseteq\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}$. Andererseits wegen

$$\mathfrak{f}\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{f}\frown\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{o}\frown\mathfrak{L}=\mathfrak{l},\qquad \mathfrak{a}\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}$$

ist $\mathfrak{L}=\mathfrak{o}\mathfrak{L}=(\mathfrak{a},\mathfrak{f})\,\mathfrak{L}=(\mathfrak{a}\mathfrak{L},\mathfrak{f}\mathfrak{L})\subseteq(\mathfrak{o}^*\mathfrak{l},\mathfrak{l})=\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}$. Es ist also $\mathfrak{L}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}$.

SATZ 4. *Die Menge Λ aller Linksideale aus $\mathfrak{o}$, welche zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde zweiseitige Ideale aus $\mathfrak{o}$ enthalten, bildet einen Verband. Ebenso bildet auch die Menge Λ^* aller Linksideale aus $\mathfrak{o}^*$, welche zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde zweiseitige Ideale aus $\mathfrak{o}^*$ enthalten, einen Verband. Durch die Zuordnung*

$$\mathfrak{l}\leftrightarrow\mathfrak{L}\qquad(\mathfrak{l}\in\Lambda,\ \ \mathfrak{L}\in\Lambda^*,\ \ \mathfrak{L}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{l},\ \ \mathfrak{l}=\mathfrak{L}\frown\mathfrak{o})$$

sind die beiden Verbände Λ und Λ^* isomorph.

Beweis. Nach Satz 2 und Satz 3 werden Λ und Λ^* durch die Zuordnung $\mathfrak{l}\leftrightarrow\mathfrak{L}$ eineindeutig aufeinander abgebildet. Aus $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{l}'$ folgt $\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}=\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}'=\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}'$. Denn sonst wäre $\mathfrak{L}\supseteq\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{L}\frown\mathfrak{o}\supseteq\mathfrak{L}'\frown\mathfrak{o}$, d. h. $\mathfrak{l}\supseteq\mathfrak{l}'$ gegen die Voraussetzung. Daraus folgt der Satz.

SATZ 5. *Die Menge Σ aller zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden zweiseitigen Ideale aus $\mathfrak{o}$ und die Menge Σ^* aller zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden zweiseitigen Ideale aus $\mathfrak{o}^*$ sind durch die Zuordnung von Verengungs- und Erweiterungsideal sowohl als Verband wie auch als Halbgruppe isomorph.*

Beweis. Dass Σ und Σ^* als Verband isomorph sind, folgt aus Satz 4. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde zweiseitige Ideale aus $\mathfrak{o}$, so gilt für die Erwiterungsideale $\mathfrak{A}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*\mathfrak{b}\mathfrak{o}^*$ die Gleichung $\mathfrak{o}^*(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,\mathfrak{o}^*=\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

SATZ 6. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes zweiseitiges Ideal aus $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{A}$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$. Dann ist der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ mit dem Restklassenring $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{A}$ ringisomorph.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{o}\smile\mathfrak{A}=(\mathfrak{a}\smile\mathfrak{f})\smile\mathfrak{A}=\mathfrak{a}\smile(\mathfrak{f}\smile\mathfrak{A})=\mathfrak{a}\smile\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*$, und $\mathfrak{o}\frown\mathfrak{A}=\mathfrak{a}$, also $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{A}\cong\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$.

SATZ 7. *In der Zuordnung im Satz 5 entsprechen die zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Primideale $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{o}^*$ den ebenfalls zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Primidealen $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$.*

Beweis. $\mathfrak{P}$ sei ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes Primideal von $\mathfrak{o}^*$. Wir zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$ ist. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige zweiseitige Ideale aus $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \equiv 0$ $(\mathfrak{p})$. Dann ist

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{o}^*\mathfrak{p}\mathfrak{o}^* \supseteq \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{o}^* \supseteq \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{f}\mathfrak{b}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^* \cdot \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{o}^*\mathfrak{b}\mathfrak{o}^*,$$

und wegen $\mathfrak{f} \not\equiv 0$ $(\mathfrak{P})$ folgt $\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^* \equiv 0$ $(\mathfrak{P})$ oder $\mathfrak{o}^*\mathfrak{b}\mathfrak{o}^* \equiv 0$ $(\mathfrak{P})$, also

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^* \cap \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{P} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{o}^*\mathfrak{b}\mathfrak{o}^* \cap \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{P} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}.$$

Demnach ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$. Umgekehrt sei $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes Primideal von $\mathfrak{o}$ und wir behaupten, dass $\mathfrak{P}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}^*$ ist. Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ beliebige zweiseitige Ideale aus $\mathfrak{o}^*$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \equiv 0$ $(\mathfrak{P})$. Dann ist $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{o})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{o}) \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{P} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$, und daraus folgt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{p}$. Ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{f}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{f} \cap \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{o} \cap \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{p}$, also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{o}^*\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{f})\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}\mathfrak{A}, \mathfrak{f}\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{P}.$$

Ebenso aus $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}$. Damit ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}^*$.

§2. Führersatz

Es sei S ein Schiefring mit Einselement, $\mathfrak{o}$ eine (reguläre) Ordnung von S und $\mathfrak{o}^*$ eine $\mathfrak{o}$ umfassende mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Ordnung. Dann enthält der Führer $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$ reguläre Elemente aus S und $\mathfrak{f}$ ist ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal und zugleich ein zeiseitiges $\mathfrak{o}^*$-Ideal. In diesem Paragraphen behandeln wir nur in $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{o}^*$ enthaltene Ideale. Wir setzen nun voraus:

A_1 . *$\mathfrak{o}^*$ ist eine Maximalordnung.*

A_2 . *Es gilt der Teilerkettensatz für ganze zweiseitige $\mathfrak{o}^*$-Ideale.*

A_3' . *Jedes Primideal von $\mathfrak{o}^*$ ist (zweiseitig) teilerlos.*

SATZ 8. *Das Produkt von zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden zweiseitigen Idealen ist kommutativ und jedes zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Primideal von $\mathfrak{o}$ ist teilerlos. Jedes zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ lässt sich eindeutig in das Produkt von zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Primidealen zerlegen.*

Beweis. Wegen der eindeutigen Primidealzerlegungen von ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}^*$-Idealen ([3], [4]) folgt der Satz sofort aus Satz 5 und Satz 7.

Wir setzen ferner Voraus:

A_3 . *Jedes Primideal $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{o}^*$ ist stark teilerlos, d. h. der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{P}$ ist ein einfacher Ring.*

SATZ 9. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal. Dann ist der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ ein einreihiger Ring. Ist $\mathfrak{p}$ insbesondere ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes Primideal, so ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein einfacher Ring und $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\rho}$ ist ein einreihiger primärer Ring.*

Beweis. Ist $\mathfrak{A}$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$, so sind nach Satz 6 $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{A}$ ringisomorph. Da $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{A}$ einreihig ist, so ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ einreihig.

Ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein κ-reihiger Matrizenring über einem Schiefkörper, so heisst κ die *Kapaziätt* von $\mathfrak{p}$.

SATZ 10. *Die Menge Λ aller zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden $\mathfrak{o}$-Linksideale bildet einen Verband. Ebenso bildet auch die Menge Λ^* aller zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden $\mathfrak{o}^*$-Linksideale einen Verband. Durch die Zuordnung*

$$\mathfrak{l} \leftrightarrow \mathfrak{L} \qquad (\mathfrak{l} \in \Lambda,\ \ \mathfrak{L} \in \Lambda^*,\ \ \mathfrak{L} = \mathfrak{o}^*\mathfrak{l},\ \ \mathfrak{l} = \mathfrak{L} \frown \mathfrak{o})$$

sind die beiden Verbände Λ und Λ^* isomorph. Dabei ist die Hülle von $\mathfrak{l}$ (d. h. das grösste in $\mathfrak{l}$ enthaltene zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideal) sowie die Hülle von $\mathfrak{L}$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd und die beiden Hüllen werden aufeinander abgebildet.

Beweis. Jedes zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde $\mathfrak{o}^*$-Linksideal $\mathfrak{L}$ enthält zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde zweiseitige $\mathfrak{o}^*$-Ideale, weil die Hülle von $\mathfrak{L}$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd ist ([4]). Jedes zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde $\mathfrak{o}$-Linksideal $\mathfrak{l}$ enthält auch zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideale. Denn $\mathfrak{L}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{l}$ ist zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd, also enthält ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes zweiseitiges $\mathfrak{o}^*$-Ideal $\mathfrak{A}$. Das Verengungsideal $\mathfrak{a}=\mathfrak{A}\frown\mathfrak{o}$ ist zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd. Wir zeigen, dass $\mathfrak{l}\supseteqq\mathfrak{a}$ ist. Wegen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{f} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}^*\mathfrak{f} = \mathfrak{A}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{f}\mathfrak{L} = \mathfrak{f}\mathfrak{o}^*\mathfrak{l} = \mathfrak{f}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{o}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$$

ist $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{o}=\mathfrak{a}(\mathfrak{l},\mathfrak{f})=(\mathfrak{a}\mathfrak{l},\mathfrak{a}\mathfrak{f})\subseteq\mathfrak{l}$. Nach Satz 4 folgt sofort der Satz.

Nach Satz 9, Satz 10 und [3], § 7 erhalten wir die folgenden Sätze.

SATZ 11. *Die Hülle eines zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden, direkt unzerlegbaren $\mathfrak{o}$-Linksideals $\mathfrak{q}$ ist eine Potenz $\mathfrak{p}^\rho$ eines zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Primideals.*

$\mathfrak{p}$ heisst das zugehörige Primideal von $\mathfrak{q}$ und ρ heisst die Höhe von $\mathfrak{q}$.

SATZ 12. *Ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes $\mathfrak{o}$-Linksideal $\mathfrak{a}$ ist dann und nur dann direkt unzerlegbar, wenn $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ (als $\mathfrak{o}$-Linksmodul) nur eine einzige Kompositionsreihe besitzt.*

SATZ 13. *Jedes zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde $\mathfrak{o}$-Linksideal lässt sich als direkter Durchschnitt von direkt unzerlegbaren $\mathfrak{o}$-Linksidealen bis auf Gleichartigkeit eindeutig darstellen.*

SATZ 14. *Jedes zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde $\mathfrak{o}$-Linksideal ist als Durchschnitt von $\mathfrak{o}$-Linksidealen $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ mit den folgenden Eigenschaften eindeutig darstellbar:*

1. *$\mathfrak{a}_i$ ist ein Teiler einer Potenz eines zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Primideals $\mathfrak{p}_i$.*
2. *$\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ sind einander verschieden.*

SATZ 15. *Ist $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes Primideal von $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{p}^\rho$ als direkter Durchschnitt von einander gleichartigen, direkt unzerlegbaren $\mathfrak{o}$-Linksidealen mit der (gemeinsamen) Höhe ρ darstellbar. Die Anzahl der Komponenten ist gleich der Kapazität von $\mathfrak{p}$.*

SATZ 16. *Jedes* $\mathfrak{o}$*-Linksteiler* $\mathfrak{a}$ *einer Potenz von Primideal* $\mathfrak{p}$ *ist als direkter Durchschnitt von direkt unzerlegbaren* $\mathfrak{o}$*-Linksidealen* $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ *darstellbar. Die Komponentenanzahl ist höchstens gleich der Kapazität von* $\mathfrak{p}$.

§ 3. reguläre Ideale

Es sei S ein Schiefring mit Einselement, $\mathfrak{o}$ eine Ordnung von S und $\mathfrak{o}^*$ eine $\mathfrak{o}$ umfassende mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Maximalordnung.

HILFSSATZ 1. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal mit* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, *so ist die Linkssowie die Rechtsordnung von* $\mathfrak{a}$ *gleich* $\mathfrak{o}$.

Beweis. Bedeutet $\mathfrak{o}_l$ die Linksordnung von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{o}\subseteq\mathfrak{o}_l$. Andererseits sei $\mathfrak{A}$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{A}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}$. Es ist $\mathfrak{o}_l\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$, also $\mathfrak{o}_l\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$, daraus folgt $\mathfrak{o}_l\subseteq\mathfrak{o}^*$, weil $\mathfrak{o}^*$ eine Maximalordnung ist, und $\mathfrak{f}\subseteq\mathfrak{o}_l\mathfrak{f}\subseteq\mathfrak{o}^*\mathfrak{f}=\mathfrak{f}$, $\mathfrak{o}_l\mathfrak{f}=\mathfrak{f}$. Demnach ist $\mathfrak{o}_l(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})=(\mathfrak{o}_l\mathfrak{a}, \mathfrak{o}_l\mathfrak{f})=(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$, d. h. $\mathfrak{o}_l\mathfrak{o}=\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}_l=\mathfrak{o}$. Ebenso ist die Rechtsordnung $\mathfrak{o}_r$ von $\mathfrak{a}$ gleich $\mathfrak{o}$.

HILFSSATZ 2. *Es sei* $\mathfrak{c}$ *ein zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal. Gibt es ein zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *mit* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, *so ist* $(\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathfrak{f})=(\mathfrak{c}\mathfrak{b}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$ *für jedes zweiseitige* $\mathfrak{o}$*-Ideal* $\mathfrak{b}$ *mit* $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{o}$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{o}=(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{f})\subseteq(\mathfrak{b}\mathfrak{o}\mathfrak{c}, \mathfrak{f})=(\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathfrak{f})\subseteq\mathfrak{o}$, also $(\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$. Aus $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{o}$ folgt $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{b}$. Nach Hilfssatz 1 ist die Rechtsordnung von $\mathfrak{b}$ gleich $\mathfrak{o}$, somit ist $\mathfrak{c}\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{o}$, und $\mathfrak{o}=(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}, \mathfrak{f})\subseteq(\mathfrak{c}\mathfrak{b}, \mathfrak{f})\subseteq\mathfrak{o}$, $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$.

Ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{c}$ heisst *zu* $\mathfrak{f}$ *prim* oder *regulär*, wenn es ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})=(\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$ (als Folge davon $(\mathfrak{c}\mathfrak{a}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$) gibt.

HILFSSATZ 3. *Ist* $\mathfrak{c}$ *ein reguläres zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal, so ist die Linkssowie die Rechtsordnung von* $\mathfrak{c}$ *gleich* $\mathfrak{o}$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{o}'$ die Linksordnung von $\mathfrak{c}$: $\mathfrak{o}'\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$. Es gibt ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, $(\mathfrak{c}\mathfrak{a}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$. Es ist $\mathfrak{o}'\mathfrak{c}\mathfrak{a}=\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ und da die Linksordnung von $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ nach Hilfssatz 1 gleich $\mathfrak{o}$ ist, gilt $\mathfrak{o}\subseteq\mathfrak{o}'\subseteq\mathfrak{o}$, d. h. $\mathfrak{o}'=\mathfrak{o}$. Ebenso ist die Rechtsordnung von $\mathfrak{c}$ gleich $\mathfrak{o}$.

HILFSSATZ 4. *Ist* $\mathfrak{c}$ *ein reguläres zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal, so ist* $\mathfrak{c}^{-1}$ *auch ein reguläres zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal.*

Beweis. Es sei $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$. Es ist $\mathfrak{c}\mathfrak{c}^{-1}\subseteq\mathfrak{o}$, weil die Linksordnung von $\mathfrak{c}$ gleich $\mathfrak{o}$ ist. Daher gilt

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{f}) \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{c}^{-1}, \mathfrak{f}) \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{o}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}, \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}^{-1}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}.$$

Im folgenden setzen wir voraus, dass S allgemein-halbeinfach ist und dass für $\mathfrak{o}^*$ die Bedingungen A_1, A_2, A_3 gelten.

SATZ 17. *Es sei* $\mathfrak{m}$ *ein zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal mit* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$. *Dann gibt es ein reguläres Element* μ *in* $\mathfrak{m}$, *so dass* $\mathfrak{o}\mu$ *ein reguläres zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *enthält.*

Beweis. Bedeutet $\mathfrak{M}$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{m}$, so ist $(\mathfrak{M}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}^*$. Nach [4] II, S. 8 bibt es ein reguläres Element μ, so dass

$$\mu \equiv 0 \;(\mathfrak{M}), \quad \mu \equiv 1 \;(\mathfrak{f})$$

Wegen $(\mathfrak{o}^*\mu, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$ ist die Hülle $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{o}^*\mu$ ist zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd. Das Verengungsideal $\mathfrak{a}=\mathfrak{A}\frown\mathfrak{o}$ ist also zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd: $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$. Es ist $\mathfrak{o}^*\mu\frown\mathfrak{o}=\mathfrak{o}\mu$. Denn es gibt ein Element $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{f}$ mit $\mu+\mathfrak{c}=1$ und für jedes Element $x\mu\,(x\in\mathfrak{o}^*)$ aus $\mathfrak{o}^*\mu\frown\mathfrak{o}$ ist

$$x = x\mu + x\mathfrak{c} \in (\mathfrak{o}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}\,, \quad x\mu \in \mathfrak{o}\mu\,,$$

d. h. $\mathfrak{o}^*\mu\frown\mathfrak{o}\subseteq\mathfrak{o}\mu$; da aber $\mathfrak{o}^*\mu\frown\mathfrak{o}\supseteqq\mathfrak{o}\mu$ ist, gilt $\mathfrak{o}^*\mu\frown\mathfrak{o}=\mathfrak{o}\mu$. Demnach ist $\mathfrak{o}\mu\supseteqq\mathfrak{a}$ und der Satz ist bewiesen.

SATZ 18. *Die regulären zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale bilden eine multiplikative abelsche Gruppe, und sie ist das direkte Product von den regulären Primidealen erzeugten unendlichen Zyklen.*

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes Primideal von $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{p}^{-1}\neq\mathfrak{o}$. Wir nehmen jetzt an, es sei $\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}$. Ist $\mathfrak{c}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal mit $(\mathfrak{c}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, so ist $(\mathfrak{c}\mathfrak{p})^{-1}=\mathfrak{c}^{-1}$. Denn aus $\mathfrak{c}\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{c}$ folgt nach Hilfssatz 1 $(\mathfrak{c}\mathfrak{p})^{-1}\supseteqq\mathfrak{c}^{-1}$; andererseits ist $(\mathfrak{c}\mathfrak{p})^{-1}\,\mathfrak{c}\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{o}$, $(\mathfrak{c}\mathfrak{p})^{-1}\,\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}$, also $(\mathfrak{c}\mathfrak{p})^{-1}\subseteq\mathfrak{c}^{-1}$. Es gibt ein reguläres Element μ in $\mathfrak{p}$ derart, dass $\mathfrak{o}\mu$ ein reguläres zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ enthält. Weil $\mathfrak{a}$ als Produkt von regulären Primidealen dargestellt wird, enthält $\mathfrak{o}\mu$ ein Produkt von regulären Primidealen. Es sei $\mathfrak{p}_1\dots\mathfrak{p}_r$ ein solches Produkt mit der kleinsten Anzahl r: $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{o}\mu\supseteqq\mathfrak{p}_1\dots\mathfrak{p}_r$. Da $\mathfrak{p}_i$ teilerlos ist, so ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_i$ für irgendein i, folglich

$$\mathfrak{p}_1\dots\mathfrak{p}_r = \mathfrak{c}\mathfrak{p}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{o}\mu\,, \quad \mathfrak{c}\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mu^{-1} \subseteq \mathfrak{o}\,, \quad \mathfrak{b}\mu^{-1} \subseteq (\mathfrak{c}\mathfrak{p})^{-1} = \mathfrak{c}^{-1}\,.$$

Wir erhalten daraus $\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mu^{-1}\subseteq\mathfrak{c}\mathfrak{c}^{-1}\subseteq\mathfrak{o}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{o}\mu$ gegen die Annahme über r. Es ergibt sich somit ein Widerspruch. Es muss also $\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}$ sein. Daraus folgt $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}\subseteq\mathfrak{o}$, und da $\mathfrak{p}$ teilerlos ist, gilt $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}$; ebenso gilt $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}=\mathfrak{o}$. Nun sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges reguläres zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal und sei $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$. Weil $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sich als Produkte von regulären Primidealen darstellen lassen, ist $\mathfrak{a}$ als Potenzprodukt von regulären Primidealen darstellbar: $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{e_1}\dots\mathfrak{p}_r^{e_r}$ ($e_i>0$ oder $e_i<0$). Damit ist der Satz bewiesen.

SATZ 19. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein in $\mathfrak{o}$ enthaltenes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal. Dann ist*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\dots\mathfrak{p}_r\mathfrak{a}_0\,,$$

wobei $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r$ reguläre Primideale sind und $\mathfrak{a}_0$ einen Teiler einer Potenz von $\mathfrak{f}$ bedeutet. Ferner ist $\mathfrak{a}_0$ mit jedem regulären Primideal kommutativ und die obige Darstellung von $\mathfrak{a}$ ist eindeutig.

Beweis. $\mathfrak{A}$ sei das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{A}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*$. Dann ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}_1\dots\mathfrak{P}_r\mathfrak{C}$, wobei $\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_r$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Primideale von $\mathfrak{o}^*$ und $\mathfrak{C}$ ein Teiler einer Potenz von $\mathfrak{f}$ sind. Setzt man $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1^{-1}\dots\mathfrak{p}_r^{-1}$, $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{P}_i\frown\mathfrak{o}$, $i=1,\dots,r$, so ist ersichtlich $\mathfrak{p}_i^{-1}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}_i^{-1}=\mathfrak{P}_i^{-1}$ und $\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}_0\mathfrak{o}^*=\mathfrak{A}\mathfrak{P}_1^{-1}\dots\mathfrak{P}_r^{-1}=\mathfrak{C}\supset\mathfrak{f}^\rho$. Es ist also

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{o}\mathfrak{a}_0\mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{f}\mathfrak{a}_0\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}_0\mathfrak{o}^*\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{C}\mathfrak{f} \supset \mathfrak{f}^{\rho+2}.$$

Ist $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd, so ist $(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}_0)=\mathfrak{o}$. Wegen $\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}^{-1} \subseteq \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}$ ist

$$\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{p}\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0, \mathfrak{p}\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}_0) \subseteq \mathfrak{a}_0 .$$

Daher ist $\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_0\mathfrak{p}$. Ebenso ist $\mathfrak{a}_0\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}\mathfrak{a}_0$. Es ist also $\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0$. Damit erhalten wir $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r\mathfrak{a}_0$. Die Eindeutigkeit der Zerlegungen ist leicht einzusehen.

HILFSSATZ 5. *R sei ein Schiefring mit Einselement. Sind* $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ *Linksideale von R mit* $(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2)=R$, *und ist* $\mathfrak{r}$ *ein Rechtsideal von R, so ist*

$$(\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2) = (\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_1) \frown (\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2).$$

Beweis. $(\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2) \subseteq (\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_1) \frown (\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2)$ ist klar. Sei jetzt x ein beliebiges Element aus $(\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_1) \frown (\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2)$, also $x \in (\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_1)$ und $x \in (\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2)$, d. h.

$$x = c_1+a_1 = c_2+a_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathfrak{r}, a_1 \in \mathfrak{l}_1, a_2 \in \mathfrak{l}_2)$$

Wegen $(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2)=R$ gibt es Elemente e_1, e_2 mit $e_1+e_2=1$, $e_1 \in \mathfrak{l}_1$, $e_2 \in \mathfrak{l}_2$. Dann ist $c=c_2e_1+c_1e_2$ ein Element von $\mathfrak{r}$, $x-c=(c_1+c_2)e_1+a_1 \in \mathfrak{l}_1$, ebenso $x-c \in \mathfrak{l}_2$, also $x-c \in \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2$. Daher ist $x \in (\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2)$, folglich $(\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_1) \frown (\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2) \subseteq (\mathfrak{r}. \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2)$.

SATZ 20. *Jedes in* $\mathfrak{o}$ *enthaltene* $\mathfrak{o}$*-Linksideal* $\mathfrak{l}$ *ist als (direkter) Durchschnitt von zwei* $\mathfrak{o}$*-Linksidealen derart eindeutig darstellbar, dass das eine zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremd und das andere ein Teiler einer Potenz von* $\mathfrak{f}$ *ist.*

Beweis. $\mathfrak{a}$ sei die Hülle von $\mathfrak{l}$. Dann ist nach Satz 19 $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{a}_0$, wobei $\mathfrak{a}_1$ regulär und $\mathfrak{a}_0$ ein Teiler von $\mathfrak{f}^\rho$ ist. Satzt man $\mathfrak{l}_1=(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}_1)$, $\mathfrak{l}_0=(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}_0)$, so ist $(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, $\mathfrak{l}_0 \supset \mathfrak{f}^\rho$ und $\mathfrak{l}=(\mathfrak{l}, \mathfrak{a})=\mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_0$. Ist nun $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_1' \frown \mathfrak{l}_0'$, $(\mathfrak{l}_1', \mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, $\mathfrak{l}_0' \supset \mathfrak{f}^{\rho'}$, so ist die Hülle von $\mathfrak{l}$ gleich $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}_0'$, wo $\mathfrak{a}_1'$ bzw. $\mathfrak{a}_0'$ die Hülle von $\mathfrak{l}_1'$ bzw. $\mathfrak{l}_0'$ ist. Aus $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}_0'=\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_0$ folgt nach Satz 19 $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}_0'$. Man erhält also

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{l}) &= (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{l}_1') \frown (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{l}_0') = \mathfrak{l}_1' \frown \mathfrak{a} = \mathfrak{l}_1' \\ &= (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{l}_1) \frown (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{l}_0) = \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{a} = \mathfrak{l}_1,\end{aligned}$$

d. h. $\mathfrak{l}_1'=\mathfrak{l}_1$. Ebenso ist $\mathfrak{l}_0'=\mathfrak{l}_0$.

Literaturverzeichnis

1) D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereining **4** (1897).
2) W. Krull, Idealtheorie, Ergebnisse der Math. (1935).
3) K. Asano, Aritmhetishe Idealtheorie in nichotkmmutativen Ringen, Japanese Journ. Math. **16** (1939).
4) K. Asano, Zur Arithmetik in Schiefringen I, Osaka Math. Journ. **1** (1949); II, Journ. Institute Polytechnics Osaka City Univ. Series A **1** (1950).