A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VII. KÖTET

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN,
HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY,
RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

1957

NÉVMUTATÓ

TARTALOMJEGYZÉK

KÖNYVISMERTETÉSEK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VII. KÖTET 1. SZÁM

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN,
HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY,
RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:
ALEXITS GYÖRGY

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

BUDAPEST, 1957

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

VII. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest V. Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V. Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI. Magyar Ifjúság Útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK AZ 1956. ÉVI NAGYGYŰLÉSÉHEZ KAPCSOLÓDÓ PROGRAMJA:

Osztályülés

Május 28-án, hétfőn délelőtt 10 órakor

HAJÓS GYÖRGY* akadémikus: Osztálytitkári beszámoló

Május 31-én, csütörtökön délelőtt 10 órakor

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag: Matematikai problémák eldönthetőségének fogalmáról
FEJES TÓTH LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora: Szabályos alakzatok

Május 31-én, csütörtökön délután fél 5 órakor

TARJÁN REZSŐ, a műszaki tudományok doktora: A gyorsműködésű automatikus számológépek fejlődési irányai. (A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Osztályával közösen)

Június 1-én, pénteken délelőtt 10 órakor

NEUGEBAUER TIBOR,** a fizikai tudományok doktora: Egy új elméleti lehetőség a szupravezetés jelenségének természettudományi magyarázatára

* Hajós György akadémikus távollétében bemutatta Rényi Alfréd akadémikus.
**-gal megjelölt előadás a szerző kívánságára nem jelenik meg.

OSZTÁLYTITKÁRI BESZÁMOLÓ*

HAJÓS GYÖRGY r. tag

Az 1955. évi Nagygyűlésen elhangzott osztálytitkári beszámoló a felszabadulás utáni 10 év tudományos eredményeiről törekedett összefoglaló képet adni. Jelen beszámolóm a múlt évi Nagygyűlés óta eltelt időre vonatkozik.

Mindenekelőtt a legutóbbi Nagygyűlés óta elért tudományos eredményeket szeretném röviden ismertetni. A tudományos eredmények ismertetésénél az osztályhoz tartozó akadémiai intézetek és céltámogatásban részesülő egyetemi intézetek beszámolóira támaszkodom. Az eredmények ismertetésénél nem törekedhettem távolról sem teljességre.

Mielőtt a hazai matematikai kutatások eredményeit ismertetném, azt a súlyos veszteséget kívánom megemlíteni, amely nemcsak a hazai, hanem a nemzetközi matematikai életet is érte RIESZ FRIGYES elhunytával. RIESZ FRIGYES halálával századunk első felének egyik legkiválóbb matematikusát vesztettük el.

A matematika azon ágaiban, amelyekben FEJÉR LIPÓT és RIESZ FRIGYES alapvető, eredményekben gazdag és kiterjedt munkásságot fejtettek ki, az elmúlt évben is szép eredmények láttak napvilágot. FEJÉR LIPÓT a Hermite—Fejér-féle interpoláció elméletében szereplő alappolinomok fontos tulajdonságainak egyszerű tárgyalását és összefoglalását tartalmazó újabb munkával gazdagította az interpoláció elméletét.

TURÁN PÁL SURÁNYI JÁNOSsal és BALÁZS JÁNOSsal közösen az ún. „hézagos" interpoláció terén, FREUD GÉZA a Hermite—Fejér-féle interpoláció elméletben, KISS OTTÓ kandidátusi disszertációjában a trigonometrikus interpolációra vonatkozóan ért el új eredményeket.

ALEXITS GYÖRGY egyrészt az ortogonális sorok erős szummációjára vonatkozóan, másrészt az ortogonális polinomok szerinti sorfejtés konvergenciájára vonatkozóan ért el új eredményeket.

TANDORI KÁROLY az ortogonális polinom-sorok Cesaro-szummációjára, valamint a Fourier-sorok erős szummációjára vonatkozóan közölt újabb eredményeket.

* Hajós György akadémikus távollétében bemutatta Rényi Alfréd akadémikus.

RÉNYI ALFRÉD és CZIPSZER JÁNOS szükséges és elégséges kritériumokat találtak bizonyos ortogonális függvényrendszerek teljességére vonatkozóan.

FREUD GÉZA további eredményeket ért el az ortogonális polinomok aszimptotikája, a polinom-sorfejtés Lebesgue-aszimptotikája és az ortogonális polinomok zérushelyeinek eloszlásával kapcsolatban.

SZÁSZ PÁL $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ sor maradéktagjának új integrálelőállítását adja és ennek segítségével bizonyítja be a sor különféle ismert tulajdonságait.

MIKOLÁS MIKLÓS azon ortogonális függvényrendszerekkel kapcsolatban ért el érdekes eredményeket, amelyek integrálás, illetve differenciálás után is ortogonális rendszerek maradnak.

A funkcionálanalízisben főként a Hilbert-tér és egyéb általánosabb függvényterek és az ezeken értelmezett lineáris operációk és transzformációk vizsgálatában SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA, PUKÁNSZKY LAJOS és KORÁNYI ÁDÁM eredményei számottevők. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA a RIESZ FRIGYESsel közösen írt „Leçons d' Analyse Fonctionnelle“ című könyvének III. kiadásához újabb eredményeiről egy függeléket írt.

A valós függvénytani kutatásokat illetően elsősorban CSÁSZÁR ÁKOS, CZIPSZER JÁNOS és GEHÉR LÁSZLÓ nevét kell említeni. CSÁSZÁR ÁKOS a derivált fogalmának egy halmazrendszerhez tartozó halmazok elhanyagolása által történő általánosítását tárgyalja és ilyen módon számos a közönséges deriváltakra ismert tételt általánosít. Hasonló módon általánosítja a lokálisan növekvő függvény fogalmát. Ugyancsak CSÁSZÁR ÁKOS a RÉNYI ALFRÉD által definiált feltételes valószínűségi mezők struktúrájának vizsgálatai közben felvetődött számos mértékelméleti problémát old meg.

Az analitikus számelméletben TURÁN PÁL az analízis általa bevezetett új módszerét további problémák megoldására alkalmazta. SÓS VERÁval közösen a diofantikus approximáció elméletére vonatkozóan ért el érdekes új eredményeket. Meg kell említeni továbbá, hogy TURÁN PÁL a Riemann-féle zéta függvény gyökeloszlásával kapcsolatban új fontos eredményekhez jutott el.

TURÁN PÁL az analízis általa bevezetett új módszerét sikeresen alkalmazta a differenciálegyenletek elméletében fellépő stabilitási és labilitási kérdések vizsgálatában. Módszere az ismert eredmények új bizonyítását és egyúttal élesítését szolgáltatja.

A hazai algebrai kutatásokban az elmúlt évben is gazdag eredményekről lehet beszámolni. RÉDEI LÁSZLÓ és SZÉP JENŐ közös dolgozatukban a Zappa—Casadio-féle csoportszorzat elméletének egy olyan irányú kiterjesztését adják, amely felöleli egy csoportnak két részcsoport szorzataként való, eddig tárgyalt előállításait. FUCHS LÁSZLÓ legutóbbi dolgozataiban az Abel-féle csoportok elméletéhez nyújt érdekes adalékokat.

Az absztrakt algebra és a csoportelmélet területére eső több eredményt ért el KERTÉSZ ANDOR, STEINFELD OTTÓ és SZENDREI JÁNOS. E helyen számos más fiatal matematikus neve volna még említhető. SZÁSZ GÁBOR a hálók elméletében jutott újabb eredményekhez.

Számottevők a geometriában és elsősorban a differenciálgeometriában elért eredmények. VARGA OTTÓ a Bolyai—Lobacsevszkij és az elliptikus geometriára ad egy új jellemzést. Egy másik eredménye az, hogy a Finsler-tér egyik oly görbületi tenzorára ad geometriai jellemzést, amit az eddigi kutatásokban csak formálisan vezettek be. További eredménye azon szükséges és elégséges feltételek meghatározása, amelyek teljesülése esetén az általános Kawaguchi-tér metrikus osztályú lesz. A differenciálgeometria területén elsősorban a Finsler- és Cartan-féle terek vizsgálatával kapcsolatos eredményeket ért el SOÓS GYULA, RAPCSÁK ANDRÁS és MOÓR ARTHUR.

SZÁSZ PÁL több dolgozatában újabb érdekes adalékokat szolgáltat a hiperbolikus geometria megalapozásához, elsősorban a hiperbolikus trigonometria felépítésének különféle módszereihez.

A valószínűségszámításban RÉNYI ALFRÉD több irányban továbbfejlesztette axiomatikus elméletét. RÉNYI ALFRÉD a valószínűségszámítás új axiomatikus elmélete segítségével a sztochasztikus folyamatok elméletében felmerülő feltételes határeloszlások kérdését tisztázta. TAKÁCS LAJOS a rekurrens folyamatok tárgyalása terén ért el új eredményeket, továbbá új módszert adott bizonyos rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalására. PRÉKOPA ANDRÁS a sztochasztikus halmazfüggvények elméletében jutott el új eredményekhez. MEDGYESSY PÁL a keverékeloszlás felbontására vonatkozó újabb eredményeit a frakcionáló megosztás vizsgálatainál alkalmazta sikerrel.

Számottevők azok az eredmények amelyeket TAKÁCS LAJOS és PÁL LÉNÁRD értek el a reaktorokban történő neutronlassítás valószínűségszámítási problémáira vonatkozólag. Eredményesen folynak az információ-elméleti kutatások.

A mátrix-elmélet továbbfejlesztése terén EGERVÁRY JENŐ szép eredményeket ért el a mátrixokkal kapcsolatos rangcsökkentő műveletek vizsgálatában, illetve azok alkalmazása terén a lineáris egyenletrendszerek iteratív megoldásával kapcsolatban. EGERVÁRY JENŐ és munkatársai a mátrix-elméleti eredményeket eredményesen alkalmazták számos mechanikai, hővezetési elektrotechnikai gyakorlati probléma megoldásában.

A függvényegyenletek, a differenciál- és integrálegyenletek elméletében elért eredmények alapján elsősorban ACZÉL JÁNOS, FENYŐ ISTVÁN, MAKAI ENDRE, továbbá HOSSZU MIKLÓS és BIHARI IMRE nevét kell megemlíteni.

A matematika elvi kérdéseinek vizsgálatában KALMÁR LÁSZLÓ az eldöntés problémának általános rekurzív algoritmussal való megoldhatatlanságára vonatkozóan adott egy új bizonyítást. HAJNAL ANDRÁS figyelemre méltó eredményeket ért el az általános Cantor-féle sejtés egyes speciális eseteinek vizsgálatában. KALMÁR LÁSZLÓ és HAJNAL ANDRÁS együttesen egyszerűsítette a halmazelmélet Gödel-féle axióma rendszerét. PÉTER RÓZSA új egyszerű bizonyítást adott BERECZKI ILONA azon tételére, hogy a primitív rekurzív függvények osztálya tágabb az elemi függvények osztályánál, továbbá értékes eredményeket ért el a korlátosan rekurzív függvényekkel kapcsolatos Ackermann-féle majorizációjára vonatkozóan.

Megindult a matematikai gépek programozását érintő kutatás: KALMÁR LÁSZLÓ vezetésével egy kutatócsoport létesült a szegedi egyetemen.

A matematika alkalmazásait illetően a Matematikai Kutató Intézet igen eredményes munkásságról számolhat be. Erről tanúskodik a következő adat: az intézet megalakulása óta a különböző üzemektől, tudományos intézetektől összesen 787, a gyakorlatban felmerült elméleti probléma megoldására kapott megbízást. 1955. végéig a 787 témából az intézet kutatói 720 problémát sikerrel megoldottak. A témákkal kapcsolatban elért matematikai eredmények igen sok esetben a gyakorlatban sikeres felhasználásra kerültek. Nem kívánok ezen eredmények részletes ismertetésébe bocsátkozni, mert azok ismertetése egy külön beszámoló tárgyát képezhetné. A matematika alkalmazásaira vonatkozó intézeti eredményekről tanúskodnak az intézet most már folyóiratként megjelenő kiadványai is.

A Matematikai Kutató Intézet a következőkben fokozottabban kíván törekedni arra, hogy a legaktuálisabb műszaki problémákhoz feladatának megfelelően matematikai segítséget nyújtson. Erre a lehetőség azóta nagyobb, amióta a korábban működő Alkalmazott Matematikai Intézet Matematikai Kutató Intézetté alakult át és az intézeten belül megvalósulhat az elméleti matematikai kutatásnak és a matematika alkalmazásainak egységbe foglalása.

A hazai fizikai kutatások eredményeit ismertetve örömmel meg kell állapítani, hogy az elméleti fizikai eredmények mellett az elmúlt évben kiemelkedő eredmények születtek a kísérleti fizikában is. A fizikai eredmények ismertetésénél sem törekszem teljességre, hiszen erre a beszámoló terjedelme nem ad lehetőséget. Nem tér ki a beszámoló azokra az eredményekre sem, amelyeket fizikusaink olyan intézetekben értek el, amelyek nem részesülnek az Akadémia részéről anyagi támogatásban.

Az atomok és atommagok statisztikus elméletében a beszámoló időszakában is értékes eredményeket értek el GOMBÁS PÁL és munkatársai. GOMBÁS PÁL az általa bevezetett kinetikus energiakorrekció továbbfejlesztésével meghatározta az atomok energiáit, amelyek az empirikus és félempirikus értékektől maximálisan csak 2%-kal térnek el. Ilyen módon az eredeti statisztikus atommodellből számított energiák hibáit, amelyek 50%-ig terjedtek és a

GOMBÁS PÁL által tavaly nyert energiák hibáit, amelyek 3%-ig terjedtek, sikerült egészen lényegesen csökkenteni. GOMBÁS PÁL és LADÁNYI KÁROLY közösen egy statisztikus atommodellt dolgoztak ki, amelyekben az elektronok a főkvantumszámok szerint vannak csoportosítva. Ezt a modellt sikerrel alkalmazták több atom és ion-elektron sűrűségének meghatározására. A hullámmechanikai többtestprobléma és annak alkalmazásai tárgykörben GÁSPÁR REZSŐ meghatározta az Ag-atom egy elektron sajátfüggvényeit és energianívóit az általa bevezetett univerzális potenciáltér alapján. A fémek és ionkristályok elméletének továbbfejlesztésében GOMBÁS PÁL és GÁSPÁR REZSŐ neveit kell megemlítenünk elsősorban. A kvantumkémiában GÁSPÁR REZSŐ, CSAVINSZKY PÉTER a GOMBÁS PÁL által kidolgozott módszert, amelyet eddig egyszeres töltésű ionmolekulák kölcsönhatása számításánál alkalmaztak sikerrel, általánosították kétszeres töltésű ionmolekulák tárgyalására. GÁSPÁR REZSŐ és MOLNÁR BÉLA az alkáli atomok elektronaffinitására vonatkozóan végeztek értékes és eredményes vizsgálatokat. PAUNCZ REZSŐ komplikáltabb aromás vegyületek elméleti számításainál a Dewar-féle perturbációs módszert kiterjesztette és megállapította alkalmazhatóságának határát. A H_2 molekula kvantumkémiai tárgyalásának problémájával kapcsolatban PAUNCZ REZSŐ és BERENCZ FERENC nevét kell megemlítenünk. FÉNYES IMRE a WKB közelítő módszernek olyan változatát dolgozta ki, amely kiküszöböli a régebbi elmélet divergencia nehézségeit.

A relativisztikus dinamika tárgykörében SZAMOSI GÉZA kimutatta, hogy a skaláris mezontérben felismert „relativisztikus taszítás" a relativisztikus dinamikában meglehetősen általános jelenség, továbbá a relativisztikus dinamika olyan új variációs elvét állította fel, amely mellékfeltételeknek nincs alávetve és így lehetővé teszi a kanonikus tárgyalás nehézségmentes keresztülvitelét. A relativisztikus dinamika területére esnek még azok a további eredmények, amelyek KÁROLYHÁZI FRIGYES, MARX GYÖRGY és FÉNYES IMRE nevéhez fűződnek. A relativisztikus kinematika terén MÁTRAI TIBOR jutott új eredményekhez. A kvantumelektrodinamikában és az elemi részek elméletében MARX GYÖRGY a Dirac-egyenlettel kapcsolatos problémák szemléletes tárgyalását dolgozta ki.

NAGY KÁZMÉR egyszerű módszert dolgozott ki a Dirac—Fock—Podolsky-egyenletnek a kovariáns kvantumelektrodinamikából való levezetésére.

Eredményesen zárultak SZAMOSI GÉZA és MARX GYÖRGY vizsgálatai az atommag felületi feszültségének hőmérsékletfüggésére vonatkozólag. E vizsgálataik kapcsolatosak a Központi Fizikai Kutató Intézet Kozmikus Sugárzási Osztályán folyó elméleti atommagfizikai kutatásokkal. A Központi Fizikai Kutató Intézet elméleti fizikai kutatócsoportjában dolgozó kutatók SZAMOSI GÉZA vezetésével azt találták, hogy a relativisztikus effektusoknak jelentékeny szerepük lehet a mag héjszerkezetével kapcsolatos tények értelmezésénél. Az atommagok állapotainak energia viszonyaira vonatkozó vizsgálatokban SZAMOSI GÉZA, ZIEGLER MÁRIA és GYÖRGYI GÉZA értek el újabb értékes eredményeket.

A térelméleti vizsgálatokban HORVÁTH JÁNOS közölt több új eredményt. A kozmikus záporok elméleti tárgyalásán kívül JÁNOSSY LAJOS vizsgálatokat végzett az elektronsokszorozók statisztikai elméletére vonatkozólag. Vizsgálatokat végzett továbbá a valószínűségszámítás megalapozásával és a fizikai mérések kiértékelésével kapcsolatban. A kiterjedt légizáporok áthatolási effektusának mérésében SOMOGYI ANTAL és munkatársai, az áthatoló záporok vizsgálatában pedig FENYVES ERVIN és munkatársai értek el eredményeket. A mezonok bomlása és befogadása témakörből KISS DEZSŐ, a Rossi-görbe vizsgálatában NAGY LÁSZLÓ munkássága és eredményei emelendő ki. A Központi Fizikai Kutató Intézet Kozmikus Sugárzási Osztályán további eredményes munka folyt a GM-csövek és a Wilson-kamra építése és fejlesztésére vonatkozólag. A Központi Fizikai Kutató Intézet Kozmikus Sugárzási Osztályán JÁNOSSY LAJOS és NÁRAY ZSOLT a kvantummechanika eddig nem tisztázott elvi kérdéseinek kísérleti vizsgálata során a kisintenzitású interferencia technikáját dolgozták ki.

A spektroszkópiai kutatásokban BUDÓ ÁGOSTON és KOVÁCS ISTVÁN az általuk kifejlesztett elméleti módszerekkel az O_2^+ molekula színképében jelentkező rendellenességet magyarázzák meg kvantitatíve. SCARI OTTÓ a BiO molekula emissziós színképének vizsgálatában ért el említésre méltó új eredményeket. Az emissziós spektroszkópiában a gerjesztőberendezések gyújtási viszonyainak vizsgálatában és elemző eljárások kidolgozásában BARDÓCZ ÁRPÁDnak és VARSÁNYI FERENCnek vannak új eredményei. Sikeres munkát végeztek BARDÓCZ ÁRPÁD, VARSÁNYI FERENC és munkatársai a spektroszkópiai segédberendezések építésében is. A fémkohászati műveletekkel kapcsolatos spektroszkópiai kutatásokban VORSATZ BRUNÓ egy elemző módszert dolgozott ki platina- és platinarádiumötvözetre. Az abszorpciós spektroszkópiában LÁNG LÁSZLÓ és munkatársai különböző szerves vegyületek színképeinek vizsgálatában jutottak új eredményekhez, továbbá új spektrográfiai módszert dolgoztak ki. A Raman spektroszkópiai méréseket illetőleg új módszert dolgozott ki DULLIEN FERENC olvadékok színképi felvételére.

Kísérleti atomfizikai kutatásokban az elmúlt évben különösen kiemelkedő eredményeket ért el a SZALAY SÁNDOR vezetésével működő Debreceni Fizikai Kutató Intézet. SZALAY SÁNDOR sikerrel zárta le az urán dúsítására vonatkozó kísérleteit, ugyancsak sikerrel zárultak a Szalay-féle eljárással elődúsított hazai szénhamuból az urán kinyerésére vonatkozó kísérletek. E kísérletek a továbbiakban előreláthatólag félüzemi méretekben fognak folytatódni, amennyiben ezek gazdaságosak lesznek. Fotoemulziós magfizikai vizsgálatokban Medveczky László ért el új eredményeket, e vizsgálatokhoz célszerű mikroszkóp megvilágítást dolgozott ki.

A Központi Fizikai Kutató Intézet Atomfizikai Osztályán a múlt év végéig elkészült a 4 MeV-os Van de Graaff gyorsító feszültségforrása. Ez évben a gyorsító-cső elkészítése és az ionok gyorsítása van tervbe véve. Erő János nagyfrekvenciás gázkisülések atom és molekulaionjainak tulajdonságát vizsgálta sikerrel. A vákuumátütések mechanizmusának vizsgálatával Schmidt György végzett eredményes munkát.

A kísérleti atomfizikai kutatások eredményeiről szólva meg kell említeni azt, hogy hazai kutatásainkat nagymértékben elő fogja segíteni a Szovjetunió segítségével megépítendő kísérleti atomreaktor, továbbá számos együttműködési lehetőségre ad alkalmat a nemrégen megalapított Egyesített Atomkutató Intézet.

Nagy erővel megindultak a rádioizotópokkal való kutatások. E kutatásokat az tette lehetővé, hogy a Szovjetunió a szükséges izotópokat rendelkezésre bocsátotta. Radiológia területén a Központi Fizikai Kutató Intézet Radiológiai Osztályán, a Debreceni Fizikai Kutató Intézetben és a budapesti Orvostudományi Egyetem Orvosi Fizikai Intézetében folyik intenzív és eredményes munka.

A Központi Fizikai Kutató Intézet Elektromágneses Hullámok Osztályán ki kell emelnünk a mikrohullámú spektroszkópia területére eső eredményeket. Itt e témával kapcsolatban elsősorban a paramágneses anyagokra, nevezetesen a paramágneses Faraday-effektusára vonatkozólag történtek viszgálatok.

Pál Lénárd az elmúlt évben a ferromágneses kristályok energia anizotrópiájára vonatkozólag ért el több, számottevő eredményt.

A kristályfizikában Gyulai Zoltán vékony tűkristályok mechanikai vizsgálataiban, továbbá konyhasó kristály rekrisztallizációs vizsgálatában ért el újabb eredményeket. Félvezető alkalihaloideken végzett elektromos és optikai vizsgálatok eredményességét tekintve Boros János és Császár Sándor nevét kell megemlítenünk.

Szincentrumok tulajdonságainak vizsgálatában, továbbá tudományos és ipari vizsgálatokhoz szükséges monokristályok előállításában, eljárások kidolgozásában eredményes munka folyt Tarján Imre vezetésével a budapesti Orvosi Fizikai Intézetben.

A félvezetők elektromos és fotoelektromos vizsgálatában, organikus anyagok lumineszcenciájának vizsgálatában Budó Ágoston, Gombai Lajos, Ketskeméty István és Szalay László ért el újabb eredményeket.

A csillagászatban a változó csillagok megfigyelésében további eredményeket értek el csillagászaink Detre László vezetésével. Elsősorban a Blaskoeffektus vizsgálatában elért eredmények a számottevők. Sikeresen folynak a gömbhalmazok kozmogóniájára vonatkozó vizsgálatok, továbbá a turbulencia vizsgálatok és a napfizikai kutatások, amelyek főként a napfolt statisztikai vizsgálataira vonatkoznak.

Az osztály tudományterületein elért eredmények rövid és meglehetősen vázlatos ismertetése is arról tanúskodik, hogy a beszámoló időszakában eredményes kutató munka folyt mind az elméleti kutatásokban, mind pedig az alkalmazásokban.

A következőkben tájékoztatást kívánok adni az Osztályvezetőség és az osztály keretében működő főbizottságok munkájáról.

Az osztály legfontosabb munkája a II. ötéves tudományos tervek és ezen belül az 1956. évi tudományos tervek, valamint az ehhez kapcsolódó költségvetési, beruházási és létszámfejlesztési tervek részletes kidolgozása volt.

Az Akadémia és intézetei egyrészt elsőrendű feladatnak tekintették az alapvető, perspektivikus kutatások folytatását és fejlesztését, másrészt azoknak a kutatásoknak a folytatását, amelyek a népgazdaság szempontjából és ezen belül a műszaki színvonal fejlesztése szempontjából fontosak. Az osztály tudományterületeit tekintve alapvető perspektivikus kutatások az elméleti matematikai, az elméleti fizikai, a kísérleti fizikai és a csillagászati kutatások. Az e területeken folyó kutatások egy része perspektivikus ugyan, azonban a népgazdaság szempontjából is fontos (pl. a kísérleti atomfizikai kutatások). A népgazdaság és a műszaki fejlesztés szempontjából azonnali fontossággal bírnak pl. a szilárdtestek fizikájára vonatkozó kutatások, a radiológiai és a mágneses kutatások, valamint a matematika eredményeinek alkalmazásai.

A tervek kidolgozásánál az osztály törekedett a kutatások fejlesztésének minél nagyobb elősegítése mellett a reális lehetőségeket is figyelembe venni. A tudományos tervek kidolgozása a korábbi tervekhez viszonyítva sokkal nagyobb gonddal és körültekintéssel történt.

Az Osztályvezetőség részletesen megvitatta és véleményezte az Akadémiára vonatkozó alapszabály-tervezetet, amely az április végén tartott rendkívüli közgyűlésen megvitatásra és elfogadásra került. Az Osztályvezetőség a főbizottságok javaslatai és véleménye alapján kidolgozta az 1956. évi Nagygyűlés osztályprogramját, az osztály által rendezendő kozmikus sugárzási és csillagászati konferencia programját. A kozmikus sugárzási konferencia megrendezésére ez év augusztus 28 és szeptember 4-e között kerül sor. A kozmikus konferenciára 27 külföldi tudóst hívott meg az Akadémia Elnöksége. A csillagászati konferencia, amely a változó csillagokra vonatkozó kutatásokkal foglalkozik, ez év augusztus 23-tól 28-ig kerül megrendezésre. Erre a konferenciára 20 külföldi csillagászt hívott meg az Akadémia. 1957-re tervezzük a II. Magyar Matematikai Kongresszus megrendezését.

Az Osztályvezetőség ezenkívül a főbizottságok véleményezése alapján megvitatta az osztályhoz tartozó akadémiai és céltámogatásban részesülő egyetemi intézetek 1955. évi munkájáról szóló beszámolóit. Az Osztályvezetőség foglalkozott továbbá külföldi publikálási kérelmek elbírálásával, külföldi meghívási és kiküldetési javaslatok véleményezésével, az 1956. és 1957. évi könyvkiadási terv kidolgozásával, az 1956. évi nevezetesebb évfordulók megünneplésére vonatkozó javaslat összeállításával.

A beszámoló időszakában az osztály 2 zárt ülést tartott. A zárt ülésen egyrészt az 1956. évi Kossuth-díj javaslatok megvitatására és összeállítására, az új rendes és levelező tagokra vonatkozó javaslatok megvitatására és megtételére, másrészt az április végén megjelent II. ötéves népgazdasági terv irányelveinek megvitatására, a módosító javaslatok megtételére került sor.

A Matematikai Főbizottság az elmúlt évben megvitatta az analízis területén folyó hazai kutatások problémáit. A Matematikai Főbizottság megvitatta és véleményezte az Osztályvezetőség számára az akadémiai és a céltámogatásban részesülő egyetemi matematikai intézetek 1956. évi tudományos terveit, továbbá foglalkozott a külföldi kiküldetésekről készített beszámolókkal, prémium javaslatokkal, ösztöndíjasok munkájának értékelésével, disszertációs tématervek felülbírálatával, illetőleg jóváhagyásával. A főbizottság tagjai valamennyien aktívan közreműködnek a bizottság munkájában, az egyes napirendi pontok megvitatásában, javaslatok, határozatok meghozatalában. A Matematikai Főbizottság legutóbbi ülésén a műszaki fejlesztéssel kapcsolatos, matematikusokra váró feladatokat vitatta meg.

A Fizikai Főbizottság az elmúlt évben az akadámiai fizikai kutató intézetek, valamint a céltámogatásban részesülő egyetemi fizikai intézetek II. ötéves és ezen belül az 1956. évi kutatási terveinek megvitatása és véleményezése mellett felülvizsgálta és megvitatta a fizikus káderutánpótlás, a fizikus aspiránsképzés problémáit. A főbizottság a beszámoló időszakában megvizsgálta helyszíni látogatás során az Eötvös Loránd Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetének, a budapesti Orvosi Fizikai Intézetének, valamint a szegedi Tudományegyetem fizikai intézeteinek tudományos munkáját. Ezen intézetekben folyó kutató munka elősegítése érdekében javaslatokat dolgozott ki. A főbizottság továbbá összeállította az 1956. és 1957. évi könyvkiadási tervet. A főbizottság, hasonlóan a Matematikai Főbizottsághoz az elmondottakon kívül foglalkozott az ösztöndíjasok munkájának irányításával, prémiumpályázatok elbírálásával, külföldi meghívási és kiküldetési javaslatok összeállításával. A Fizikai Főbizottság munkájában a beszámoló időszakában nagy fejlődés tapasztalható.

A főbizottsághoz tartozó és a VII. osztállyal közös abszorpciós spektroszkópiai szakbizottság eredményes munkát végzett. A szakbizottság Budapesten előadást rendezett a karotinoidok kémiájának spektroszkópiai problémájáról. Több ülés keretében foglalkozott a spektroszkópiai oldószerekkel kapcsolatos problémákkal. A szaktitkárság segítségével az elmúlt évben megszervezte az abszorpciós spektroszkópiai dokumentációt és előkészítette az 1956. januárjában Szegeden megrendezett spektroszkópiai abszorpciós témájú ankétot.

A Csillagászati Tudományos Tanács az osztály keretében a főbizottságok feladatkörét látja el. Az elmúlt időszakban a Tanács kidolgozta az 1956-ban megrendezésre kerülő változó csillagokkal foglalkozó konferencia programját, megvitatta Csillagvizsgáló Intézet, valamint az Eötvös Lóránd Tudományegyetem Csillagászati Tanszékének 1956. évi kutatási tervét, továbbá az osztály másik két főbizottságához hasonlóan rendszeresen ismétlődő ügyeket tárgyalt.

Néhány szót a III. és VI. osztály kapcsolatáról. A két osztályhoz tartozó kutatók között eredményes együttműködés van kialakulóban a mágneses kutatások területén. Az együttműködés azonban más területeken még korántsem kielégítő. Az együttműködés eredményesebb lesz, ha a VI. osztály keretében megalakul a tervbevett Műszaki Fizikai Intézet, amelynek szükségességét, úgy gondolom, nem kell külön indokolni. A két osztály vezetősége tervezi továbbá egy Műszaki Matematikai Főbizottság megalakítását, amelynek feladata lesz többek között a matematikai gépek építése terén folyó hazai kutatások elősegítése.

A tavalyi Nagygyűlés óta az osztály a mai napig 8 felolvasó ülést tartott, amelyeken 35 matematikai, 39 fizikai és 5 csillagászati tárgyú előadás, illetőleg bemutatás megtartására került sor. A felolvasó üléseken elhangzott előadások, illetőleg bemutatások nagy száma és az ismertetett új eredmények is bizonyítják, hogy a beszámoló időszakában komoly előrehaladás történt hazánkban az osztály tudományterületein. Az osztály felolvasó üléseinek hiányosságaként kell megállapítani, hogy az előadások, illetőleg a bemutatások alkalmával hozzászólások alig voltak. Némi javulás tapasztalható a felolvasó ülések látogatottságában, azonban a látogatottság koránt sem kielégítő. Főként azt kell helyteleníteni, hogy a fiatal kutatók, kandidátusok és aspiránsok kis számmal látogatják az osztály felolvasó üléseit.

A beszámoló időszakában az osztály az Országos Béketanáccsal és részben a Társadalom- és Természettudományi Ismeretterjesztő Társulattal 2 emlékünnepséget rendezett. (FRANKLIN BENJAMIN születésének 250. évfordulója és PIERRE CURIE halálának 50. évfordulója alkalmával.) Az Oktatásügyi Miniszteriummal közös rendezvény volt „A dialektikus materializmus filozófiájának alkalmazásáról a matematikai oktatásban“ című vita, amelynek előadója KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag volt.

A következőkben az osztályhoz tartozó intézetek munkájáról kívánok beszélni. Az osztályhoz 4 kutatóintézet és egy önálló kutatócsoport tartozik.

(Központi Fizikai Kutató Intézet, Matematikai Kutató Intézet, Debreceni Fizikai Kutató Intézet, Csillagvizsgáló Intézet, Elméleti Fizikai Kutató Csoport.)

A Központi Fizikai Kutató Intézet felépítése a befejezéshez közeledik. Az intézetben ma már a modern kísérleti fizikai kutatás feltételei biztosítva vannak. Az intézetben a kísérleti fizikai kutatások folytatására alkalmas kutatógárda nevelődött. Megvannak tehát a feltételek ahhoz, hogy a Szovjetunió segítségével felépítendő kísérleti atomreaktorral az atomenergia békés felhasználását célzó kutatások induljanak meg az elkövetkező időben. Az intézetben eredményes kutató munka folyik a kozmikus sugárzási, spektroszkópiai, a radiológiai, az elektromágneses hullámok és a mágnességtan terén. A fizika e fejezeteiben a Központi Fizikai Kutató Intézetben az elmúlt évben több értékes eredmény látott napvilágot. Ezekről a tudományos eredmények ismertetésénél szóló részben már beszámoltam.

A Debreceni Fizikai Kutató Intézetben ugyancsak eredményes munka folyik. Az eredményekről már beszámoltam. Az intézet most költözött be a részére rendelkezésre bocsátott és a kutatómunkának megfelelően átalakított épületbe. Az elkövetkező években új kétemeletes kutató laboratórium és egy lakóház építésére kerül sor.

Igen jól működik az Elméleti Fizikai kutató Csoport. Erről tanúskodnak a már korábban ismertetett a kutató csoport által elért, tudományos eredmények.

A beszámoló időszakában elnöki rendelkezés folytán alakult át az Alkalmazott Matematikai Intézet Matematikai Kutató Intézetté. Az intézet szervezeti felépítése jelenleg a következő: Mechanikai és szilárdságtani osztály, valószínűségszámítási osztály, amelynek keretében egy orvos-statisztikai csoport működik, matematikai-statisztikai osztály, numerikus és grafikus módszerek osztálya, elektrotechnikai és automatizálási osztály, valós függvénytani osztály, differenciálegyenletek osztálya és nemrég alakult meg a komplexfüggvénytani és a funkcionál-analízis csoport önálló osztály jelleggel. A Matematikai Kutató Intézet több új csoport, illetőleg osztály létesítését vette tervbe. Az intézetben eredményes kutatómunka folyik mind az elméleti matematika, mind a matematika eredményeinek alkalmazásai területén.

Az intézet munkáját nagymértékben gátolja a mind tűrhetetlenebbé váló rossz elhelyezése. Ez év őszére fejeződnek be azok a várbeli építkezések, amelyeknek révén a Matematikai Kutató Intézet elhelyezésében javulás következik be.

A Csillagvizsgáló Intézet tudományos munkájáról már beszámoltam. A Szabadság-hegyen lévő intézetben nagymértékben akadályozza a megfigyeléseket Budapest erős megvilágítása és a levegő szennyezettsége. Megnehezíti az intézetben a kutató munkát továbbá a rendkívül elavult műszerpark is.

(A legkésőbbi beszerzésű műszert 1913-ban tervezték és 1929-ben került felállításra, a többi műszer a múlt század végén készült.) Éppen ezért az osztály a Mátrában egy csillagvizsgáló fiókállomás létesítését és egy korszerű teleszkóp beszerzését tervezi. Reméljük, hogy a II. ötéves terv során a mátrai fiókállomás létesítéséhez szükséges összeget kormányzatunk rendelkezésünkre bocsátja és a mátrai fiókállomás a II. ötéves terv során felépül.

Néhány szót kívánok szólni az elmélet és a gyakorlat kapcsolatáról, a tudományos kutatási eredmények gyakorlati hasznosításáról. E téren még igen sok a hiányosság. Kétségkívül több tudományos eredmény a gyakorlatban felhasználásra került (pl. a Matematikai Kutató Intézet által elért némely eredmény, a Központi Fizikai Kutató Intézet által épített néhány műszer), azonban nagyon sok tudományos eredmény a gyakorlatban nem került felhasználásra, a minisztériumok és az üzemek elzárkózása miatt (pl. a kristályfizikában elért eredmények, valamint a matematika alkalmazásai terén elért több eredmény).

A Központi Fizikai Kutató Intézet igen szép eredményeket ért el korszerű műszerek előállításában. E műszerek nagy sikert arattak a moszkvai kiállításon, irántuk nagy érdeklődés volt tapasztalható. A kidolgozott műszerek gyártása nagy exportlehetőséget biztosítana, az illetékes szakminisztériumok eddig mégis elzárkóztak gyártásuktól.

A tudományos eredmények gyakorlati felhasználása érdekében az osztálynak a jövőben nagyobb propagandát kell kifejtenie, ugyanakkor a különböző szakminisztériumoknak nagyobb gondot kell fordítaniok a tudományos eredmények gyakorlati felhasználására.

Az osztály nemzetközi kapcsolatai az elmúlt évben sokat fejlődtek. Eredményes együttműködés jött létre pl. a matematikai statisztikai és valószínűségszámítási kutatásokban, elsősorban a lengyel és cseh matematikusokkal, a kozmikus sugárzási kutatásokban a lengyel, cseh és német fizikusokkal, a fémek elméletében a cseh fizikusokkal, a csillagászatban a szovjet és bolgár csillagászokkal. Az Egyesített Atomfizikai Intézet létrejötte a magfizikai kutatásokban széleskörű nemzetközi együttműködést tesz lehetővé. A nemzetközi kapcsolatok javulását mutatja az is, hogy a beszámoló időszakában a korábbi évekhez viszonyítva sokkal több külföldi tudós meghívására, illetve magyar tudós kiküldésére került sor.

A beszámoló időszakában 28 külföldi tudós (16 fizikus, 10 matematikus és 2 csillagász) járt Magyarországon, míg külföldön 46 magyar kutató (25 fizikus, 19 matematikus, 2 csillagász) járt tanulmányúton vagy kongresszuson. Örvendetes tény az, hogy a vezető tudósok mellett fiatal kutatók is mind nagyobb számban jutnak el külföldi tanulmányutakra. Ez azonban még korántsem elegendő. A jövőben fokozottabban kellene lehetővé tenni fiatalabb kutatók hosszabb időre történő külföldi kiküldetését.

A nemzetközi tudományos együttműködés fokozottabb kialakítását teszi lehetővé az is, hogy felújítottuk a Nemzetközi Csillagászati Unióban való tagságunkat, beléptünk a Nemzetközi Elméleti és Alkalmazott Fizikai Unióba, és folyamatban van a Nemzetközi Matematikai Unióba való belépésünk.

A tudományos káderutánpótlásunk az osztály területén eredményesnek mondható. Az elmúlt Nagygyűlés óta 10 matematikus védte meg kandidátusi disszertációját, ezek közül 8 esetben a Tudományos Minősítő Bizottság már odaítélte a kandidátusi fokozatot, 2 vitaanyagot a TMB a közeljövőben fog tárgyalni. Fizikából 8 kandidátusi értekezés megvédésére került sor. A jelöltek közül 6-nak a Tudományos Minősítő Bizottság már odaítélte a kandidátusi fokozatot, míg 2 jelölt ügyével a TMB a legközelebbi ülésén fog foglalkozni. 3 fizikus doktori értekezés vitája volt az elmúlt időszakban, amelyek közül 2 esetben a jelöltet a TMB már doktorrá minősítette, 1 esetben a következőkben fog dönteni. A közeljövőben számos kandidátusi és doktori értekezés vitájára kerül sor. — Jelenleg az osztály tudományterületein a doktorok száma 8 (ebből 5 matematikus, 3 fizikus), kandidátusok száma 69 (32 matematematikus, 37 fizikus). A megvédésre került disszertációk a legtöbb esetben értékes, új eredményeket tartalmaztak.

Az osztály tudományterületein jelenleg 43 aspiráns folytat tanulmányokat (ebből 19 matematikus, 22 fizikus és 2 csillagász), ebből 3 a Szovjetunióban tanul (1 matematikus és 2 fizikus.)

A fiatal kutatók munkáját az osztály prémiumok és ösztöndíjak adományozásával segítette elő. Az elmúlt évben az osztály 80 000 Ft-nyi prémiumot és ösztöndíjat adományozott. Ezen összegből 17 matematikus és 22 fizikus, valamint 3 csillagász kapott ösztöndíjat, illetve prémiumot.

A tudományos káderutánpótlásban elért eredmények mellett nem hallgathatók el a hiányosságok. Veszélyezteti a tudományos káderutánpótlást az egyetemeken a fizikusképzés indokolatlan csökkentése, a végzett fizikusok elhelyezése körül mutatkozó nehézségek. Fizikusokat és alkalmazott matematikusokat nem a képzettségüknek megfelelő munkakörökben alkalmazzák. Az egyetemekre sok esetben tehetséges fiatalok sem nyernek felvételt. Súlyos gondot okozott a végzett aspiránsok elhelyezése. Az a gyakorlat, hogy a végzett aspiránsok elhelyezéséhez szükséges létszámkeretet és béralapot ki kell gazdálkodni, nem folytatható. Feltétlenül szükséges, hogy időben történjék gondoskodás a végzett aspiránsok elhelyezéséhez szükséges álláshelyekről és béralapról. Egyetemeink nem támogatják kellő mértékben az aspirantúrán kívüli kandidátusi fokozat megszerzését.

Itt kívánom megemlíteni azt a súlyos hiányosságot, hogy egyetemi intézeteink nagyrészénél nincsenek biztosítva a kutatáshoz szükséges alapvető feltételek (pl. kellőszámú helyiség, laboráns, műszerész stb). Gátolja a kutató munkát az is, hogy a deviza hiány miatt a szükséges külföldön megjelenő szakkönyvek és folyóiratok megrendelése csak kis részben lehetséges. Az elmondott hiányosságok megszüntetése az Akadémia és az Oktatásügyi Minisztérium feladata.

Eredményes volt az osztály múlt évi könyv és folyóirat kiadási munkája. A beszámoló időszakában az osztály kiadásában 5 matematikai és 9 fizikai tárgyú könyv jelent meg. A kiadott könyvek a maguk területén mind elsőrendűek. A kiadott könyvek között szerepel RIESZ FRIGYES—SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: „Leçons d' Analyse Fonctionnelle“ című korábban megjelent műnek a III. bővített kiadása, a párizsi Gauthier—Villars céggel közösen. KERÉKJÁRTÓ BÉLA: „A geometria megalapozása“ című korábban megjelent könyvének francia fordítása, GOMBÁS PÁL: „Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen“ és a bécsi Springer kiadónál 1949-ben német nyelven megjelent könyv magyar fordítása. Hazai szerzőtől megjelent munka FENYVES ERVIN: „A magsugárzások mérése“. Hiányosság az elmúlt évi könyvkiadásunkban, hogy rendkívül kevés eredeti munka jelent meg. Kívánatos, hogy a jövőben több hazai szerző által írt könyv jelenjék meg. Az elkövetkező években az osztály tudományterületein kevesebb fordítás és több hazai szerző által írt könyv megjelentetését tervezzük.

Az osztály kiadásában megjelenő folyóiratok (Acta Mathematica, Acta Physica, Magyar Fizikai Folyóirat, Osztályközlemények) tudományos színvonalukat tekintve megfelelőek. Actáink külföldi visszhangja megfelelő, legalábbis a referáló folyóiratok közlései, sőt a külföldi folyóiratokban való idézések azt jelzik. Sajnos azonban a külföldi terjesztésük még korántsem kielégítő.

Az osztály tudományos irányítása alatt 2 tudományos egyesület (Bolyai János Matematikai Társulat és Eötvös Loránd Fizikai Társulat) áll. Az osztály tagjai tevékenyen közreműködnek a két egyesület munkájában és az osztály a maga részéről a két egyesület számára igyekszik minden segítséget megadni. Mindkét egyesület a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségéhez tartozik.

A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat az elmúlt évben egy-egy szűkebb problémakörrel kapcsolatban több kollokviumot rendezett. E kollokviumokon számos probléma megvitatására került sor és örvendetes, hogy ezeken a kollokviumokon igen sok fiatal matematikus és fizikus számolt be kutatási munkájának eredményéről. Ugyancsak eredményes volt az Eötvös Loránd Fizikai Társulat által rendezett múlt évi vándorgyűlés is.

Beszámolóm végére érve rá szeretnék mutatni az osztály előtt álló legfontosabb feladatokra. E feladatokat a II. ötéves népgazdasági tervre vonatkozó irányelvek határozzák meg. Elsőrendű feladat a hazai kísérleti atomfizikai kutatások fokozott fejlesztése, e kutatásokhoz szükséges feltételek biztosítása, az atomreaktor megépítése. Az atomfizikai kutatások fejlesztése természetesen szükségessé teszi a fizika valamennyi ágában a kutatások fokozottabb fejlesztését is. Feltétlenül szükségesnek mutatkozik egy, az alacsonyhőmérsékletek fizikájával foglalkozó laboratórium létesítése.

A matematikát illetően az elméleti kutatások és a matematika eredményeinek alkalmazásaira vonatkozó kutatások fejlesztése mellett igen fontos feladat a népgazdaság szempontjából is a gyorsműködésű automatikus számológépek tervezési és építési munkálatainak megindítása és az ehhez szükséges feltételek biztosítása.

Csillagászatban a változó csillagokra vonatkozó megfigyelések, valamint a napfizikai kutatások további fokozása és e kutatásokhoz szükséges feltételek megteremtése a cél.

E célkitűzések — úgy gondolom — az osztály tudományterületén működő valamennyi kutatót lelkesedéssel töltenek el és valamennyien minden tudásuk latbavetésével törekednek újabb eredményekkel gazdagítani a tudományt, eredményeikkel elősegíteni népgazdaságunk fejlesztését, a szocializmus-építését.

AZ ÚN. MEGOLDHATATLAN MATEMATIKAI PROBLÉMÁKRA VONATKOZÓ KUTATÁSOK ALAPJÁUL SZOLGÁLÓ CHURCH-FÉLE HIPOTÉZISRŐL

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag

(A Magyar Tudományos Akadémia 1956. évi Nagygyűléséhez kapcsolódó osztályülésen, május 31-én, elhangzott előadás*)

1. GÖDEL [1] és CHURCH [1] ma már klasszikusnak tekinthető publikációja óta számos matematikai logikai dolgozat foglalkozik ún. megoldhatatlan matematikai problémák szerkesztésével. Minthogy a szakirodalomban egyesek olyan filozófiai következtetéseket vontak le az ilyen problémák létezéséből, amelyek legalább is súrolják az agnoszticizmus határát (lásd pl. POST [1], WEDBERG [1]), ezért szükségesnek látszik megvizsgálni, milyen értelemben megoldhatatlanok a szóban forgó problémák és mennyiben érinti ilyen problémák létezése a világ és törvényszerűségei megismerhetőségének kérdését.

2. GÖDEL említett dolgozatában, valamint a hozzá kapcsolódó kutatásokban a következőről van szó. Adva van egy A axiómarendszer, amely azoknak a módszereknek rögzítésére szolgál, amelyeket bizonyos típusú problémák megoldására felhasználunk. Maguk a szóban forgó problémák a következő alakúak. Adva van egy T ítélet, amely az A axiómarendszer alapfogalmai, továbbá a logikai fogalmak segítségével megfogalmazható; és azt kérdezzük, igaz-e a T ítélet, vagy nem. (Logikai fogalmakon itt a logikai ítéletkalkulusnak az „és", „vagy", „ha ... akkor ...", „... akkor és csak akkor, ha ...", „nem" szavaknak megfelelő műveleteit, a „van oly ..., amelyre ..." „minden ...-re ..." szavaknak megfelelő ún. kvantorokat, valamint az egyenlőségrelációt értjük.) Az A axiómarendszer helyességében olyan értelemben megbízunk, hogy a szóban forgó problémát megoldottnak tekintjük, ha akár a T ítéletet, akár kontradiktórius tagadását, a $\bar{T}$ ítéletet, sikerül bebizonyítani az A axiómarendszer axiómáiból kiindulva, az A axiómarendszerben megengedett következtetésmódok véges számú alkalmazásával; az első esetben azt mondjuk, hogy a probléma megoldása az, hogy a T ítélet igaz, a második esetben az, hogy a T ítélet hamis. (Az A axiómarendszer helyességében való bizalom azt a feltételezést is magában foglalja, hogy e két eset egyidejűleg semmiféle T ítélet esetén nem következhetik be, vagyis, hogy az A axiómarendszer ellentmondástalan.) Ha egy ilyen természetű probléma ebben az értelemben nem

* A Magyar Tudományos Akadémia illetékes szervei az előadást téves intézkedés folytán a következő címen hirdették meg: „Matematikai problémák eldönthetőségének fogalmáról"; ez a cím azonban nem felel meg az előadás tárgyának.

oldható meg, vagyis ha sem a T, sem a $\overline{T}$ ítélet nem bizonyítható be az A axiómarendszerben, az semmiféle agnoszticista következtetésre nem jogosít, hiszen nem azt mutatja, hogy egyáltalában nem tudjuk eldönteni, igaz-e a T ítélet, hanem csak azt, hogy ennek eldöntésére nem alkalmas az A axiómarendszer; ez pedig nem „tudásunk határának" létezését, hanem csak az A axiómarendszer egy bizonyos fogyatékosságát, ti. nem teljes, pontosabban: nem kategorikus voltát mutatja.

Abból a tényből, hogy valamely A axiómarendszer nem kategorikus, vagyis, hogy van olyan, A alapfogalmai és a logikai fogalmak segítségével megfogalmazható T ítélet, hogy sem T, sem $\overline{T}$ nem bizonyítható be az A axiómarendszerben, csak az vonhat le agnoszticista következtetéseket, aki ragaszkodik az *abszolút axiómarendszer* koncepciójához, mégpedig A-t ilyen axiómarendszernek tartja. Ez a koncepció abban a véleményben áll, hogy van olyan axiómarendszer, amelyen belül minden helyes matematikai meggondolás elvégezhető. Ez a vélemény közel áll a mechanisztikus materializmus azon feltételezéséhez, hogy van olyan differenciálegyenlet, amelynek alapján, megfelelő kezdeti feltételek ismerete esetén minden, a valóságra vonatkozó kérdésre választ lehet adni, tehát a világ kimerítő megismerése rögzíthető módszerek keretein belül lehetséges. Másrészt, a matematikai megismerésre korlátozva, RUSSELL és WHITEHEAD logicista iskolája hirdetett ilyen véleményt. A logicisták szerint a halmazelmélet antinómiái a circulus vitiosushoz hasonló logikai hibák következményei. Hogy ilyen hibák elkövetését meggátolják, a matematikai logika eszközei segítségével igyekeztek pontosan megfogalmazni a megengedett logikai lépéseket. Véleményük szerint az így előálló, matematikai logikai jellegű axiómarendszerben, amely azonban tartalmaz néhány nem-logikai axiómát is, minden helyes matematikai meggondolás elvégezhető; ami nem végezhető el, azt eleve hibásnak ítélik. E vélemény alátámasztására *Principia Mathematica* című háromkötetes könyvükben (WHITEHEAD—RUSSELL [1]) a matematika addig ismert fejezetei legfontosabb tételeit felírják a matematikai logika jeleivel és bizonyításukat is megadják, vagy legalábbis vázolják, az említett axiómarendszerből kiindulva.

GÖDEL [1] azonban éppen a *Principia Mathematica* axiómarendszeréről mutatta meg, hogy van olyan, ráadásul elemi aritmetikai, T ítélet, hogy sem T, sem $\overline{T}$ nem bizonyítható be a kérdéses axiómarendszerben. Aki elfogadja azt a hipotézist, hogy a *Principia Mathematica* axiómarendszere a fenti értelemben abszolút matematikai axiómarendszer, az ebből azt a következtetést vonja le, hogy az a probléma, igaz-e a T ítélet, vagy nem, semmiféle helyes matematikai módszerrel nem dönthető el.

GÖDEL azonban ugyanakkor megadott olyan axiómarendszert, amelyben ez a probléma mégis csak eldönthető, ráadásul olyat, amelynek minden axiómáját el kell, hogy fogadják azok, akik megbíznak a *Principia Mathematica* axiómarendszerében. Ez az axiómarendszer ugyanis egyetlen egy axióma hozzávételében különbözik a *Principia Mathematica* axiómarendszerétől, s ez az egy axióma azt mondja ki, hogy a *Principia Mathematica* eredeti axiómarendszere ellentmondástalan; márpedig ezt az axiómát el kell, hogy fogadják azok, akik megbíztak a *Principia Mathematica* axiómarendszerében. Így Gödel eredménye azt mutatja, hogy a *Principia Mathematica* axiómarendszere sem kategorikus, egyben azonban azt is, hogy az a hipotézis, hogy ez az axiómarendszer a matematika abszolút axiómarendszere, tarthatatlan. Ezzel azonban elesett az az alap, amelyen agnoszticista következtetéseket lehetne levonni Gödel eredményéből.

Az abszolút matematikai axiómarendszer „babéraira" Gödel eredményei előtt a halmazelmélet Zermelo—Fraenkel-féle axiómarendszere (lásd pl. Fraenkel [1]) is pályázhatott azon az alapon, hogy a matematika jelenleg ismeretes fejezetei felépíthetők a halmazelmélet speciális ágaiként. Gödel említett dolgozatában épp ezért megjegyzi, hogy eredményei szószerint átvihetők a Zermelo—Fraenkel-féle axiómarendszerre is; ezért ez sem tekinthető a matematika abszolút axiómarendszerének.

Azonban Gödel eredményeinek jelentősége még ennél is nagyobb. Ugyanis meggondolásai bármely olyan A axiómarendszerrel kapcsolatban elvégezhetők, amely bizonyos, nagyon általános, feltételeknek eleget tesz. E feltételek háromféle követelményt állítanak az A axiómarendszer elé. Röviden így lehet nevezni ezeket a követelményeket: az axiómarendszer 1. eléggé kifejező, 2. eléggé szabályos, 3. eléggé ellentmondástalan legyen. Gödel tétele — általános alakjában — azt mondja ki, hogy minden, e követelményeknek eleget tevő A axiómarendszerhez van olyan, ezen axiómarendszer alapfogalmai és a logikai fogalmak segítségével megfogalmazható $T = T(A)$ ítélet, hogy sem T, sem $\overline{T}$ nem bizonyítható be az A axiómarendszerben. Maguknak az 1—3. követelményeknek pontos alakja attól függ, hogyan bizonyítjuk be a Gödel-tételt. Az 1. követelmény azt kívánja, hogy bizonyos alakú aritmetikai ítéletek megfogalmazhatók legyenek az A axiómarendszer alapfogalmai és a logikai fogalmak segítségével, továbbá bizonyos alakú aritmetikai és logikai jellegű következtetésmódokat el lehessen végezni az A axiómarendszer axiómái és következtetési szabályai segítségével. A 3. követelmény nemcsak azt kívánja, hogy ne legyen két olyan ítélet, amelyek mindketten bebizonyíthatók az A axiómarendszer axiómái és következtetési szabályai segítségével, és amelyek egymásnak ellentmondanak, amennyiben ugyanis az egyik a másiknak tagadása, hanem ezenfelül azt is, hogy bizonyos alakú végtelen sok ítélet se legyen egyidejűleg bebizonyítható az A axiómarendszerben, amelyek közül kettőkettő, vagy általában véges számú ugyan nem mond egymásnak ellent, de összességükben ellentmondanak egymásnak: ti. olyan ítéletek, amelyek közül az egyik azt állítja, hogy van olyan nemnegatív egész szám, amelynek megvan egy bizonyos tulajdonsága, a második azt, hogy a 0-nak nincs meg ez a tulajdonsága, a harmadik azt, hogy az 1-nek nincs meg, a következő azt, hogy a 2-nek nincs meg, és így tovább. (Ezt a követelményt az *A* axiómarendszer ω-ellentmondástalanságának szokás nevezni.) A 2. követelménynek még a hozzávetőleges megfogalmazása is messze vezetne; elég talán annyit mondani róla, hogy triviálisan kielégíti minden olyan axiómarendszer, amelynek véges számú axiómája és következtetési szabálya van, de kielégítik bizonyos „végtelen" axiómarendszerek is. Mindenesetre igaz, hogy minden olyan axiómarendszer kielégíti az 1—3. követelményeket, amelyet eddig a matematikának valamely, legalábbis az aritmetikát magában foglaló fejezetének axiómatizálására használtak vagy javasoltak. Az 1. követelmény olyan keveset kíván, hogy olyan axiómarendszer, amely ezt nem teljesíti, nem tekinthető aritmetikai (vagy a matematika valamely, az aritmetikát is magában foglaló fejezetére vonatkozó) axiómarendszernek; az olyan axiómarendszer, amely a 3. követelményt nem teljesíti, nyilván nem tekinthető helyesnek; az olyan axiómarendszer pedig, amely a 2. követelményt nem teljesíti, teljesen használhatatlan, minthogy vagy azt lehetetlen áttekinteni, mely axiómák tartoznak hozzá, vagy azt, mely következtetésmódok vannak benne megengedve, így semmi sem biztosíthatja, hogy axiómái és következtetési szabályai tartalmilag elfogadhatók.

GÖDEL tétele tehát nemcsak egyes axiómarendszerekről mondja ki, hogy nem kategorikusak, hanem úgyszólván minden használható aritmetikai (vagy a matematika valamely, az aritmetikát is magában foglaló fejezetére vonatkozó) axiómarendszerről; tehát nemcsak egyes axiómarendszerek egy bizonyos fogyatékosságát fedi fel, hanem magának az axiómatikus módszernek egy sajátosságát: azt, hogy egy axiómarendszer felállítása magában rejti ezen axiómarendszer állandó bővítésének kötelezettségét, legalábbis, amennyiben a kérdéses axiómarendszert arra akarjuk használni, hogy sorra valamennyi aritmetikai problémát megoldjunk a segítségével. Sőt, ez a kötelezettség már akkor is fennáll, ha csak bizonyos típusú aritmetikai problémák közül akarjuk valamennyit megoldani az axiómarendszer segítségével. Ugyanis a GÖDEL-tétel bizonyítása, függetlenül az *A* axiómarendszertől, mindig olyan alakú, az *A* axiómarendszerben sem be nem bizonyítható, sem meg nem cáfolható *T* ítélet létezését mutatja, amely azt mondja ki, hogy minden nemnegatív egész számnak megvan egy bizonyos (az *A* axiómarendszertől függő) tulajdonsága; mégpedig olyan tulajdonsága, hogy bármely numerikusan adott természetes számról az *A* axiómarendszerben (és általában bármely, az 1. követelménynek eleget tevő axiómarendszerben) el lehet dönteni, megvan-e a kérdéses tulajdonsága (ha megvan, ezt, ha pedig nincs meg, akkor azt be lehet a kérdéses axiómarendszerben bizonyítani). Ennélfogva már ahhoz is, hogy sorra valamennyi ilyen típusú aritmetikai problémát meg tudjunk oldani axiómatikusan, szükség van az alapul vett axiómarendszer szakadatlan bővítésére.

Hogy az axiómarendszer alkalmas szakadatlan bővítési folyamata valóban segít a GÖDEL-tétel által feltárt nehézségen, azt a következő tény mutatja. A GÖDEL-tétel bizonyítása az általános esetben is ugyanakkor, amikor minden, az 1—3. követelményeknek eleget tevő A axiómarendszerhez megad egy, az A axiómarendszer alapfogalmai és a logikai fogalmak segítségével megfogalmazható, de az A axiómarendszerben sem be nem bizonyítható, sem meg nem cáfolható $T = T(A)$ ítéletet, egyúttal megadja az A axiómarendszer olyan A' bővítését, amelyben ez a T ítélet bebizonyítható. Magában véve ilyen bővítés létezése triviális: elegendő volna magát a T ítéletet új axiómaként hozzávenni az axiómarendszerhez. Azonban a GÖDEL-tétel bizonyítása az A axiómarendszer olyan A' bővítését adja meg, amely tartalmilag elfogadható, amennyiben az A axiómarendszer helyességében megbízunk; ugyanis A' egyetlen egy új axióma hozzávételével keletkezik A-ból és ez az új axióma azt mondja ki, hogy az eredeti A axiómarendszer ellentmondástalan. (Természetesen ehhez a bővített A' axiómarendszerhez a GÖDEL-tétel szerint ismét van olyan $T(A')$ ítélet, amely A'-ben sem bizonyítható be, sem pedig nem cáfolható meg; de viszont létezik olyan még bővebb A'' axiómarendszer is, amelyben ez a $T(A')$ ítélet is bebizonyítható, és így tovább.)

Az a meggondolás, amelyet fentebb a *Principia Mathematica* axiómarendszerének speciális esetében alkalmaztunk, mutatja, hogy ennélfogva nemcsak ez az axiómarendszer, de semmiféle más axiómarendszer sem tekinthető a matematika abszolút axiómarendszerének, úgy, hogy épp a GÖDEL-tétel következtében kell elejteni az abszolút axiómarendszer koncepcióját, vagyis azt az alapot, amelyből kiindulva agnoszticista következtetést lehetne levonni a GÖDEL-tételből.

3. Azt, hogy a GÖDEL-tétel még legáltalánosabb alakjában sem jogosít agnoszticitista következtetésekre, ma már a legtöbb matematikai logikus elismeri, hiszen a GÖDEL-tétel csak relatíve (ti. valamely A axiómarendszerre nézve) megoldhatatlan aritmetikai probléma létezését mondja ki. Egészen más a helyzet azonban a CHURCH-tétel esetében, amely, szokásos megfogalmazásában, abszolút-megoldhatatlan aritmetikai probléma létezése bebizonyításának és így a GÖDEL-tétel élesítésének igényével lép fel.

Félreértések elkerülése végett jó lesz eleve leszögezni, hogy a CHURCH-tétel *nem* olyan T aritmetikai ítélet létezését mondja ki, amelyről be lehetne bizonyítani, hogy semmiféle helyes eljárással nem lehet eldönteni, igaz-e vagy nem. Olyan típusú T ítélet esetén, mint amilyet a GÖDEL-tétel bizonyítása szolgáltat, ez nem is volna lehetséges. Ha ugyanis a T ítélet azt mondja ki, hogy minden nemnegatív egész számnak megvan valamely olyan tulajdonsága, hogy bármely adott nemnegatív egész számról el tudjuk dönteni, megvan-e a kérdéses tulajdonsága, és be lehetne bizonyítani, hogy semmiféle helyes eljárással nem lehet eldönteni, igaz-e a T ítélet, vagy nem, akkor maga ez a bizonyítás azt is bebizonyítaná, hogy minden nemnegatív egész számnak megvan a kérdéses tulajdonsága. Ha ugyanis valamely n nemnegatív egész számnak nem volna meg a kérdéses tulajdonsága, akkor annak (a feltevés szerint lehetséges) eldöntése során, megvan-e az n számnak a kérdéses tulajdonsága, az derülne ki, hogy nincs meg, tehát nem minden nemnegatív egész számnak van meg; vagyis mégis csak eldőlne, hogy igaz-e a T ítélet, vagy nem, ti. az, hogy nem igaz. De akkor meg éppen annak bizonyítása, hogy semmiféle helyes eljárással nem lehet eldönteni, igaz-e a T ítélet, vagy nem, döntené el, hogy igaz-e a T ítélet, vagy nem, ti. bebizonyítaná, hogy T igaz, hiszen minden nemnegatív egész számnak megvan a kérdéses tulajdonsága.

A CHURCH-tételben azonban nem egy T ítéletről van szó, hanem végtelen sokról, mégpedig az ítéletek egy olyan egyparaméteres seregéről, ahol a paraméter megszámlálhatóan végtelen sok $p_0, p_1, p_2, \dots$ értéket vesz fel; ez a megszámlálás effektív, vagyis bármely p paraméterértékéhez véges számú lépésben meg tudunk határozni olyan nemnegatív egész számot, hogy $p = p_n$, és viszont, bármely adott nemnegatív egész n esetén véges számú lépésben meg lehet határozni a p_n paraméterértéket. A CHURCH-tételben szereplő probléma az, hogy a p paraméter mely értékeire igaz a megfelelő $T = T(p)$ ítélet. Ilyen típusú „egyparaméteres problémasereg“ pl. az, hogy a racionális egész együtthatójú egyváltozós polinomok közül melyek reducibilisek a racionális számok testében; vagy hogy melyeknek van pozitív egész zérushelyük; vagy hogy melyeknek lehet meghatározni valamennyi zérushelyét a négy alapművelet és a gyökvonás véges számú alkalmazása segítségével. A felsorolt három problémasereg esetén a paraméter a kérdéses egész együtthatójú egyváltozós polinom; és mindhárom esetben ismeretes olyan eljárás, amelynek segítségével a paraméterként szereplő polinom bármely választása esetén véges számú lépésben meg tudjuk állapitani, igaz-e a megfelelő (a polinom reducibilitását, pozitív egész zérushelyének létezését ill. zérushelyeinek algebrai kiszámíthatóságát kimondó) ítélet: ilyen eljárást az első problémasereg esetén KRONECKER adott meg, a második problémasereg esetén klasszikus eljárásról van szó, a harmadik problémasereg esetén pedig a GALOIS-elmélet szolgáltat ilyen eljárást. A KRONECKER-féle eljárás többváltozós polinomokra is alkalmazható; ezzel szemben többváltozós (racionális egész együtthatós) diofantikus egyenletek esetén ezidőszerint nem ismeretes olyan eljárás, amelynek segítségével, mihelyt meg van adva a (zérusra redukált) egyenlet baloldala, véges számú lépésben el lehetne dönteni, van-e az egyenletnek pozitív egész számokból álló megoldásrendszere. Nem ismeretes megoldó eljárás e probléma azon speciális esetére sem, hogy a p primszám mely értékeire van olyan pozitív egész x, y és z szám, amelyekre $x^p + y^p = z^p$ (FERMAT-féle probléma); e problémasereg paramétere a p primszám.

Mármost CHURCH tétele szokásos, de mint látni fogjuk, nem egészen helyes fogalmazásában azt mondja ki, hogy van olyan egyparaméteres problémasereg, amely abszolút-megoldhatatlan abban az értelemben, hogy nincs olyan eljárás, amelynek segítségével a paraméter bármely adott értéke esetén véges számú lépésben el lehetne dönteni, mi a válasz a problémaseregnek a kérdéses paraméterértékhez tartozó problémájára. Itt, mint már mondtuk, olyan problémaseregről van szó, amelynek a paramétere megszámlálhatóan végtelen sok, mégpedig effektív $p_0, p_1, p_2, \ldots$ megszámlálással megadott, értéket vesz fel; s a p_n paraméterértékhez tartozó probléma olyan alakú, hogy igaz-e valamely, a GÖDEL-tételben szereplő ítélethez hasonló típusú $T(p_n)$ aritmetikai ítélet, vagy sem.

A CHURCH-tétel e fogalmazásában szerepel valamely problémasereg megoldására alkalmas, bármely adott paraméterértékhez tartozó probléma megoldását véges számú lépésben szolgáltató eljárás fogalma. E fogalomról minden matematikus definíció nélkül is tudja, mit jelent. Pl. amikor fentebb azt mondtuk, hogy van olyan eljárás, amelynek segítségével bármely adott racionális egész együtthatójú egyváltozós polinomról véges számú lépésben el tudjuk dönteni, van-e pozitív egész zérushelye, viszont többváltozós polinomok esetén nem ismeretes ilyen eljárás, mindenki tudta, mit jelent ez.

Könnyen látható, hogy valamely fent vázolt alakú egyparaméteres problémasereghez akkor és csak akkor van olyan eljárás, amelynek segítségével bármely adott p paraméterértékről véges számú lépésben el lehet dönteni, igaz-e a $T(p)$ ítélet, ha van olyan eljárás, amelynek segítségével a problémasereg ún. karakterisztikus függvényének, vagyis a következőképpen definiált χ aritmetikai függvénynek értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani:

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, \text{ha a } T(p_n) \text{ ítélet igaz,} \\ 0, \text{ha a } T(p_n) \text{ ítélet nem igaz.} \end{cases}$$

Valóban, ha van ilyen „problémamegoldó" eljárás, akkor adott n-hez véges számú lépésben meg tudjuk határozni a p_n paraméterértéket, tehát további véges számú lépésben el tudjuk dönteni, igaz-e a $T(p_n)$ ítélet, vagyis véges számú lépésben ki tudjuk számítani a $\chi(n)$ függvényértéket. Fordítva, ha van ilyen „függvényérték-kiszámító" eljárás, akkor a paraméter adott p értékéhez véges számú lépésben meg tudunk határozni olyan n nemnegatív egész számot, hogy $p = p_n$, további véges számú lépésben ki tudjuk számítani a $\chi(n)$ függvényértéket, tehát el tudjuk dönteni, igaz-e a $T(p) = T(p_n)$ ítélet. Ennélfogva CHURCH tétele úgy is fogalmazható, hogy van olyan, fent említett alakú, egyparaméteres problémasereg, amelynek karakterisztikus függvényéhez nincs olyan eljárás, amelynek segítségével bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehetne számítani a megfelelő függvényértéket.

Az is világos minden matematikus számára, mit értünk ilyen „függvényérték-kiszámító" eljáráson, ill. olyan (egy- vagy többváltozós) aritmetikai függvényen, amelyhez van ilyen eljárás, röviden: „effektíve kiszámítható" függvényen. Pl. a számtan elemeiből ismeretes, hogyan számíthatjuk ki bármely két adott nemnegatív egész szám összegét és szorzatát véges számú lépésben; ennélfogva $x+y$ és xy az x és y változók effektíve kiszámítható függvényei. Vagy a faktoriális-függvény

$$\begin{cases} 0! = 1, \\ (x+1)! = x!\,(x+1) \end{cases}$$

rekurzív definíciója alapján világos, hogy bármely adott n nemnegatív egész számhoz véges számú lépésben ki tudjuk számítani $n!$ értékét. Valóban, ez áll $n=0$ esetén, hiszen az első egyenlet közvetlenül megadja $0!$ értékét; és ha valamely n-re áll, akkor áll $n+1$-re is, hiszen $(n+1)!$ kiszámításához nem kell mást tenni, mint a második egyenletben x helyébe n-et helyettesíteni, majd a jobboldalon $n!$-t a feltevés szerint véges számú lépésben kiszámítható értékével pótolni, végül az $n!\,(n+1)$ szorzást elvégezni. Hasonlóan látható, hogy bármely olyan aritmetikai függvény effektíve kiszámítható, amely az $y=0$ konstansból és az $y=x+1$ (vagy akár a $z=x+y$ és a $z=xy$) függvényből kiindulva véges számú helyettesítés (vagyis függvény vagy függvények függvényének képzése) és

$$\begin{cases} \varphi(0, y, z, \ldots) = \alpha(y, z, \ldots), \\ \varphi(x+1, y, z, \ldots) = \beta(x, \varphi(x, y, z, \ldots), y, z, \ldots) \end{cases}$$

alakú, ún. primitív rekurzív definíció segítségével definiálható (az utóbbi definíció a φ függvényt definiálja az előzőleg definiálandó α és β függvények segítségével). Az ilyen függvényeket primitív rekurzív függvényeknek nevezzük. Hasonló igaz e függvények osztályának számos általánosítására, mint pl. az ún. többszörösen rekurzív függvényekre (lásd PÉTER [1]). Azt is könnyű látni, hogy a kiszámító eljárás véges számú lépésének mindegyike ebben az általánosabb esetben is, úgy, mint az $y = x!$ függvény esetén, a következő két típusú lépés egyike: 1. valamely egyenletben (a szóban forgó függvény definíciós egyenleteinek egyikében) változók helyébe adott nemnegatív egész számok helyettesítése; 2. valamely már megkapott egyenletben egy másik már megkapott egyenlet egyik oldalának másik oldalával való pótlása (ilyen lépés volt fentebb az, amikor $n!(n+1)$ szorzást elvégeztük, ekkor ugyanis az $n!(n+1) = m$ egyenletnek, ahol m az $n!(n+1)$ szorzat numerikus értéke, baloldalát pótoltuk jobboldalával). Ez a felismerés indította KLEENE-t a rekurzív függvény fogalmának következő általánosítására: általános rekurzív függvénynek nevezzük az olyan aritmetikai függvényt, amelyet olyan, a kérdéses függvényt és további segédfüggvényeket tartalmazó egyenletrendszerrel lehet definiálni, amelyből a kérdéses függvény értékét bármely adott helyen véges számú 1. és 2. típusú lépés segítségével egyértelműen ki lehet számítani (lásd KLEENE [1]). Az általános rekurzív függvények tehát, definíciójuk folytán, effektíve kiszámítható függvények.

Mármost CHURCH tételének bizonyítása azon a hipotézisen alapul, hogy fordítva is, minden kiszámítható függvény általános rekurzív függvény. CHURCH ezt a hipotézist definíció alakjába öltözteti: a kiszámítható függvény fogalmát úgy definiálja, hogy az általános rekurzív, vagy ami ezzel egyenértékű, a λ-definiálható, vagyis az ő ún. λ-konverziós kalkulusában jólképzett formulával előállítható függvényeket nevezi kiszámítható függvényeknek (lásd CHURCH [1], 356. oldal). Látszólag joga van ahhoz, hogy a kiszámítható függvény fogalmát tetszése szerint definiálja, mert előtte senki sem definiálta szabatosan ezt a szakkifejezést. Azonban egy ilyen definíció, mint általában minden olyan fogalom szabatos definíciója, amelyet definíció nélkül is használ az ember, egy bizonyos veszélyt rejt megában. Megeshetik ugyanis, hogy valamely függvényről be lehet bizonyítani, hogy nem effektíve kiszámítható e definíció értelmében, s utólag mégis kiderül, hogy megadható olyan eljárás, amelynek segítségével szemmelláthatólag bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani a függvény értékét. Hasonló a helyzet az effektíve megoldható problémasereg fogalmával, ha azt CHURCH nyomán úgy definiáljuk, hogy olyan problémasereget értünk rajta, amelynek karakterisztikus függvénye általános rekurzív függvény: megeshetik, hogy valamely problémaseregről be lehet bizonyítani, hogy e definíció értelmében megoldhatatlan s utólag valaki mégis megoldja.

Maga CHURCH is nyilván érzi, hogy nem pusztán definícióról van szó, hiszen több mint két oldalnyi érvet sorol fel annak plauzibilissé tételére, hogy „definíciója" valóban fedi a kiszámítható függvény addig definíció nélkül használt fogalmát. Egy másik dolgozatában pedig (CHURCH [2]) a második számosztály konstruktíve megadható rendszámának addig szintén definíció nélkül használt fogalmát definiálja azáltal, hogy ugyancsak visszavezeti a kiszámítható (aritmetikai) függvény fogalmára s ez utóbbit ismét azonosítja az általános rekurzív függvény fogalmával, majd a következőket mondja. Azok számára, akik nem tartják meggyőzőnek azt, hogy a konstruktív rendszám e definíciója fedi ezt a fogalmat, álljon ez a definíció kihívásként (challenge): adjanak meg olyan bővebb definíciót, amely alá eső rendszámok szintén megérdemlik a konstruktív rendszám nevét, vagy pedig olyan szűkebb definíciót, amely szintén kimeríti azoknak a rendszámoknak fogalmát, amelyek ezt a nevet megérdemlik.

Egyébként már POST [1] is rámutatott arra, hogy az effektíve kiszámítható függvény fogalmának az általános rekurzív függvény fogalmával való azonosításának definíció alakjába öltöztetése elhomályosítja ezen azonosítás szakadatlan verifikálásának szükségességét. (Ebben igazat adok Postnak, a hozzáfűzött agnoszticista megjegyzésében azonban, amely szerint a CHURCH-tétel a Homo Sapiens matematizáló képességének határaira vonatkozó alapvető felfedezés volna, nem, hiszen nem lehet abszolút határról beszélni.)

Az ún. abszolút megoldhatatlan problémákra (helyesen: problémaseregekre) vonatkozó további kutatások ugyancsak ezen a CHURCH-féle hipotézisen, vagy más hasonló, azzal ekvivalens hipotézisen alapulnak. Így pl. TURING [1] az effektíve kiszámítható függvény fogalmát az olyan aritmetikai függvény fogalmával azonosítja, amelyhez szerkeszthető olyan (pontosan definiált értelemben vett) számológép, amellyel a kérdéses függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani. Az ebben az azonosításban rejlő hipotézis plauzibilitása mellett szintén számos érvet sorol fel; egyik érve éppen annak bizonyítása, hogy e hipotézis ekvivalens a CHURCH-félével (lásd TURING [2]). MARKOV ([1] és [2]; lásd még ott idézett többi munkáját is) a problémamegoldó eljárás (algoritmus) fogalmát a karekterisztikus függvényen át vezető kerülőút megtakarításával, közvetlenül definiálja; e definíció felhasználásával számos problémaseregnek algoritmussal való megoldhatatlanságát bizonyította be, köztük olyanokét is, amelyekre előzőleg valóban kerestek megoldó algoritmust az algebristák. Vizsgálatai azonban szintén egy hipotézisen alapulnak, amely szerint minden algoritmus egy bizonyos normálalakra hozható. E hipotézis plauzibilitását ismét egy sereg érvvel igyekszik alátámasztani. NOVIKOV [1] ugyancsak e MARKOV-féle hipotézis alapján bizonyította be a csoportelmélet szóproblémájának megoldhatatlanságát. Egyébként GYETLOVSZ [1] megmutatta, hogy a MARKOV-féle hipotézis szintén ekvivalens a CHURCH-félével.

4. A megoldhatatlan problémaseregek létezésére vonatkozó CHURCH-tétel még akkor sem jogosít agnoszticista következtetésekre, ha elfogadjuk a CHURCH-féle hipotézist. Valóban, a világ kimerítő megismerésére irányuló törekvésünk során, e megismerés fejlődésének minden stádiumában csak véges számú matematikai probléma megoldását kívánja a világ megismerésére irányuló következő lépés; végtelen sok matematikai probléma megoldását csak a meg-

ismerés egész végtelen folyamata kívánja. Igaz, hogy a világ megismerése folyamatát elősegíti, ha valamely végtelen problémasereg valamennyi problémáját egyidejűleg, közös eljárással meg tudjuk oldani, mert akkor, valahányszor a világ megismerésére irányuló törekvésünk során olyan problémára bukkanunk, amely e problémasereghez tartozik, alkalmazhatjuk e probléma megoldására azt az általános módszert, amit a problémasereg megoldására találtunk; azonban, ha valamely problémasereghez nincs is olyan általános eljárás, amellyel a problémasereg bármely adott problémáját véges számú lépésben meg tudjuk oldani, ez nem zárja ki azt, hogy amint valamely, e problémasereghez tartozó probléma a világ megismerésére irányuló törekvésünk során felmerül, e speciális problémát meg tudjuk oldani.

Egyébként PÉTER RÓZSA bebizonyította, hogy a CHURCH-tétel az általános alakban fogalmazott GÖDEL-tétel *következménye*; majd, PÉTER RÓZSA bizonyítását elemezve, bebizonyítottam, hogy a GÖDEL-tételt olyan általánosan is meg lehet fogalmazni, hogy a CHURCH-tétel egyenesen *speciális esete* legyen, annak ellenére, hogy a GÖDEL-tétel ebben az általános fogalmazásban is csak relatíve (valamely axiómarendszerre nézve) megoldhatatlan aritmetikai probléma létezését állítja (lásd KALMÁR [1]). Ebből is világos, hogy a CHURCH-tételből sem lehet agnoszticista következtetést levonni, hiszen az a fenti meggondolás, amely azt mutatta, hogy a GÖDEL-tételnek nincs ilyen következménye, a GÖDEL-tétel ezen általános megfogalmazására is alkalmazható. Ezenkívül azt is mutatja PÉTER Rózsával közös eredményünk, hogy helytelen a CHURCH-tételt a GÖDEL-tétel élesítésének tekinteni azon az alapon, hogy a CHURCH-tételben nincs szó olyan axiómarendszerről, amelynek segítségével leszögeznők, milyen módszereket szabad a tételben szereplő problémák megoldására alkalmazni, tehát a CHURCH-tétel ilyen értelemben abszolút-megoldhatatlan probléma létezését állítja. (Ebben a beállításban ott a hiba, hogy a CHURCH-tétel nem megoldhatatlan *probléma*, hanem megoldhatatlan *problémasereg* létezését állítja; a tévedésre az ad alkalmat, hogy problémasereg helyett szokás problémát is mondani.)

5. A CHURCH-tétel szokásos bizonyítása ún. konstruktív bizonyítás, azaz módot ad egyrészt a kérdéses problémasereg effektív megadására, másrészt minden olyan effektíve megadott megoldás-kisérlethez, amely a problémasereg karakterisztikus függvényét általános rekurzív függvényként állítaná elő, olyan ellenpélda effektív megadására, amely megcáfolja, hogy a kérdéses megoldás-kisérlet a problémasereg helyes megoldása volna. Ez az ellenpélda abban áll, hogy effektíve ki tudunk jelölni egy speciális, a problémasereghez tartozó problémát (hogy melyiket, az éppen a kérdéses megoldás-kisérlettől függ), azt effektíve meg tudjuk oldani, azonban a megoldás épp az ellenkező lesz, mint amit a kérdéses megoldás-kisérlet szolgáltatna. Ily módon a kérdéses problémasereg megoldhatatlanságát — a CHURCH-féle hipotézis felhasználásával — nem úgy mutatjuk meg, hogy megadjuk egy megoldhatatlan speciális esetét, hanem éppen effektíve megoldható speciális esetein keresztül.

Meg fogom azonban mutatni, hogy ha nem ragaszkodunk a konstruktív bizonyításmódhoz, így többek között megengedjük a harmadik kizárása elvének korlátlan alkalmazását (mint ahogy azt matematikai bizonyításokban általában meg szokás engedni), akkor abszolút-megoldhatatlan aritmetikai probléma (nem problémasereg!) létezése is következik a CHURCH-féle hipotézisből, mégpedig olyan körülmények között, hogy ez a következmény erős érvet ad magának a CHURCH-féle hipotézisnek plauzibilitása *ellen*. (Mint már CHURCH [1] megjegyezte, a CHURCH-féle hipotézis, vagyis az effektíve kiszámítható függvény fogalmának az általános rekurzív függvény fogalmával való azonosítása mellett csak plauzibilitási érveket lehet felhozni, mint ahogy általában azt, hogy valamely szabatos definíció nélkül is használatos fogalomnak egy bizonyos szabatos definíciója fedi a kérdéses fogalmat, nem lehet szabatosan bebizonyítani, csak plauzibilitási érvekkel lehet alátámasztani. Ez azonban nem zárja ki azt, hogy a CHURCH-féle hipotézis plauzibilitása ellen is lehessen érveket felhozni.)

Valóban, ismeretes, hogy van olyan kétváltozós φ általános rekurzív függvény, hogy a következőképpen definiált egyváltozós ψ aritmetikai függvény nem általános rekurzív függvény:

$$\psi(x)=\begin{cases}\text{a legkisebb olyan } y \text{ nemnegatív egész szám, amelyre} \\ \qquad \varphi(x,y)=0, \text{ ha van ilyen szám,} \\ 0, \text{ ha nincs olyan } y \text{ nemnegatív egész szám, amelyre} \\ \qquad \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

(lásd KLEENE [1], 741. oldal, XIV. tétel). A φ függvényt akár primitív rekurzív függvénynek is választhatjuk; sőt, meg lehet mutatni, hogy van ilyen tulajdonságú φ elemi függvény is, vagyis olyan függvény, amely az 1 konstansból, továbbá az x, y és egyéb (szumma- és produktum-index gyanánt használandó) változókból véges számú aritmetikai összeadás, aritmetikai kivonás, aritmetikai szorzás és aritmetikai osztás segítségével felépített kifejezéssel definiálható. Itt aritmetikai összeadáson két tag összeadását vagy szummaképzést, aritmetikai kivonáson két tag különbsége abszolút értékének képezését, aritmetikai szorzáson két tényező összeszorzását vagy produktumképzést, aritmetikai osztáson pedig két nemnegatív egész szám hányadosa egész részének képezését értjük; ha a nevezőben 0 áll, akkor értsünk ez utóbbi művelet eredményén pl. 0-t.

Minthogy a ψ függvény nem általános rekurzív függvény, a CHURCH-féle hipotézis szerint nem is effektíve kiszámítható függvény, vagyis nincs olyan eljárás, amelynek segítségével bármely adott n helyen véges számú lépésben ki lehetne számítani a $\psi(n)$ függvényértéket. Másrészt világos, hogy ha n olyan nemnegatív egész szám, amelyhez van olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n, y)=0$, akkor véges számú lépésben meg tudjuk találni a legkisebb ilyen y számot, vagyis véges számú lépésben ki tudjuk számítani a $\psi(n)$ függvényértéket. Ehhez nem kell mást tennünk, mint sorra kiszámítani a $\varphi(n, 0), \varphi(n, 1), \varphi(n, 2), \ldots$ függvényértéket (mindegyiket véges számú lépésben ki tudjuk számítani, hiszen φ általános rekurzív, tehát biztosan effektíve kiszámítható függvény), míg az első olyat meg nem találjuk közöttük, amely 0, és leolvasni, mi volt ebben a φ függvény második argumentuma. Az is világos, hogy ha n olyan nemnegatív egész szám, amelyről be lehet bizonyítani, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n, y)=0$, akkor szintén véges számú lépésben meg tudjuk határozni a $\psi(n)$ függvényértéket. Annak bizonyítása ugyanis, hogy nincs ilyen y, szükségképpen véges számú lépésből áll, és arra az eredményre vezet, hogy $\psi(n)=0$.

A most leírt két eljárást egyesítve olyan eljárást kapunk, amelynek segítségével legalábbis bizonyos n nemnegatív egész számok esetén véges számú lépésben ki tudjuk számítani a $\psi(n)$ függvényértéket, ti. azon n-ek esetén, amelyekhez vagy van olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n, y)=0$, vagy pedig be lehet bizonyítani, hogy nincs ilyen y. Ehhez nem kell mást tennünk, mint egyidejűleg elkezdeni kiszámítani sorra $\varphi(n, 0), \varphi(n, 1), \varphi(n, 2), \ldots$ értékét és ugyanakkor megpróbálni bebizonyítani, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $\varphi(n, y)=0$, egészen addig, amíg vagy olyan értékre nem bukkanunk a $\varphi(n, 0), \varphi(n, 1), \varphi(n, 2), \ldots$ sorozatban, amely 0, vagy annak bizonyítása nem sikerül, hogy nincs a sorozatnak ilyen tagja; az első esetben $\psi(n)$ a $\varphi(n, 0), \varphi(n, 1), \varphi(n, 2), \ldots$ sorozat első olyan tagjában, amelynek 0 az értéke, a φ függvény második argumentuma, a második esetben $\psi(n)=0$.

Mármost a CHURCH-féle hipotézis szerint többek között ez az eljárás sem lehet olyan, amelynek segítségével bármely n helyen ki lehet számítani a $\psi(n)$ függvényértéket (ha ugyanis valamely n helyen ki lehet számítani, akkor véges számú lépésben ki lehet számítani); tehát, a harmadik kizárása elvének alkalmazásával, adódik, hogy van olyan n nemnegatív egész szám, amelyre a fenti eljárás nem alkalmazható; vagyis amelyre egyrészt nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n, y)=0$, másrészt az, hogy nincs ilyen y, nem bizonyítható be.

Hangsúlyozom, hogy ebben a meggondolásban azon, hogy „bebizonyítható", nem azt értettük, hogy valamely adott axiómarendszer keretein belül bebizonyítható, hanem azt, hogy valamilyen helyes (és természetesen véges számú lépésből álló) módszerrel bebizonyítható. Valóban, akármilyen helyes módszerrel sikerül bebizonyítanunk azt, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $\varphi(n, y) = 0$, ezzel kiszámítottuk a $\psi(n)$ függvényértéket, mégpedig a $\psi(n) = 0$ eredménnyel.

Ennélfogva *a Church-féle hipotézisből*, a fenti meggondolás szerint, *olyan aritmetikai tartalmú T ítélet létezése következik*, ti. azé, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $\varphi(n, y) = 0$, *amely egyrészt igaz, másrészt azonban semmiféle helyes meggondolással nem bizonyítható be.*

Az ilyen T ítéletnek természetesen a tagadása (azaz esetünkben az az ítélet, hogy van olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $\varphi(n, y) = 0$) sem bizonyítható be semmiféle helyes meggondolással, mert helyes meggondoláson természetesen csak olyan meggondolást értünk, amelynek segítségével csak igaz ítélet bizonyítható be, márpedig a T ítélet igaz, tehát tagadása nem igaz. Eszerint, ha a CHURCH-féle hipotézis igaz, akkor sem maga a T ítélet, sem tagadása nem bizonyítható be semmilyen helyes módszerrel, vagyis az a probléma, hogy igaz-e a T ítélet, abszolút-megoldhatatlan probléma. Hangsúlyozom, hogy határozott, paramétert nem tartalmazó problémáról, nem pedig problémaseregről van szó, hiszen φ határozott (KLEENE által effektíve megadott) általános rekurzív függvény, és n is határozott nemnegatív egész szám (amelynek a létezése a CHURCH-féle hipotézisből következik), tehát T határozott, semmiféle paramétert nem tartalmazó ítélet.

A CHURCH-féle hipotézisnek ez a következménye meglepő ugyan, de magában véve még elfogadható volna, ha ugyanakkor nem derült volna ki, hogy ez a T ítélet, amelyről abszolút-eldönthetetlen, hogy igaz-e, — igaz. Márpedig az, hogy egy igaz ítélet semmiféle helyes módszerrel nem bizonyítható be, annyira nem valószínű, hogy az a körülmény, hogy a CHURCH-féle hipotézisből olyan igaz ítélet létezése következik, amely semmiféle helyes módszerrel nem bizonyítható be, plauzibilissé teszi azt, hogy maga a CHURCH-féle hipotézis sem igaz.

Megjegyzem, hogy a T ítélet ismét olyan alakú, mint amilyenről a GÖDEL-tétellel kapcsolatban szó volt, ti. azt mondja ki, hogy minden y nemnegatív egész számnak megvan egy bizonyos tulajdonsága (az, hogy $\varphi(n, y) \neq 0$), mégpedig olyan, hogy bármely adott y nemnegatív egész számról (véges számú lépésben) el tudjuk dönteni, megvan-e a kérdéses tulajdonsága (hiszen φ általános rekurzív, tehát mindenesetre effektíve kiszámítható függvény). Az ilyen alakú ítéletek esetén fentebb megmutattuk, hogy nem lehet bebizonyítani, hogy semmiféle helyes eljárással nem lehet eldönteni, igaz-e a kérdéses ítélet. Mi ezt nem is bizonyítottuk be, hanem csak azt mutattuk meg, hogy a CHURCH-féle hipotézisből következik, hogy semmiféle helyes eljárással nem lehet eldönteni, igaz-e a kérdéses ítélet. Más szóval bebizonyítottuk, hogy a CHURCH-féle hipotézisnek olyan következménye van, amelynek igazságát nem lehet bebizonyítani. Ez is a CHURCH-féle hipetézis plauzibilitása elleni érvnek tekinthető.

6. A fenti meggondolást úgy is lehet fogalmazni, mint választ CHURCH fentemlített kihívására (nem a második számosztály konstruktíve megadható rendszámaira, hanem a CHURCH-féle hipotézis eredeti alakjára vonatkoztatva). Azt állítom, hogy a fenti ψ függvény ellenpélda a CHURCH-féle hipotézisre, azaz példa olyan függvényre, amely (mint KLEENE bebizonyította) nem általános rekurzív függvény, mégis effektíve kiszámítható; mégpedig a fentemlített eljárás: $\varphi(n, 0), \varphi(n, 1), \varphi(n, 2), \ldots$ értékének kiszámítása és ugyanakkor annak, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $\varphi(n, y) = 0$, minden lehető helyes módon való bizonyításának megpróbálása, mindaddig, míg vagy az utóbbi sikerül, vagy a $\varphi(n, 0), \varphi(n, 1), \varphi(n, 2), \ldots$ függvényértékek sorozatában olyanra nem bukkanunk, amely 0, olyan, amelynek segítségével bármely adott n helyen véges számú lépésben ki lehet számítani a ψ függvény értékét. Ezt az állításomat nem bizonyítom be, éppoly kevéssé, mint CHURCH a maga hipotézisét. De ugyanolyan joggal, mint CHURCH, én is mondhatom, álljon ez az állítás kihívásként: aki kételkedik benne, adjon meg olyan n nemnegatív egész számot, amelyre be tudja bizonyítani, hogy ez az eljárás nem vezet véges számú lépésben a $\psi(n)$ függvényérték kiszámításához. Világos, hogy ezt senki sem tudja semelyik n nemnegatív egész szám esetén sem bebizonyítani. Mert ahhoz többek között be kellene bizonyítania, hogy a $\varphi(n, 0), \varphi(n, 1), \varphi(n, 2), \ldots$ függvényértékek kiszámítása során sohasem bukkanunk olyanra, amely 0, vagyis, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $\varphi(n, y) = 0$. Ezzel azonban megadná annak, hogy nincs ilyen y, egy bizonyítását, tehát megmutatná, hogy a fentemlített eljárás mégis csak a $\psi(n)$ függvényérték kiszámításához vezet véges számú lépésben a ($\psi(n) = 0$ eredménnyel).

7. Ha valamely H hipotézisből következik egy I ítélet, akkor jogos azt mondani, hogy az I ítélet bennerejlik a H hipotézisben (akkor is, ha annak, aki a H hipotézist kimondta, esetleg szubjektíve nem volt szándékában belerejteni). Ilyen értelemben a CHURCH-féle hipotézisben bennerejlik az az állítás, hogy van olyan T ítélet, amely egyrészt igaz, másrészt semmiféle helyes meggondolással nem bizonyítható be (sem meg nem cáfolható); mégpedig olyan alakú T ítélet, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $\varphi(n, y) = 0$, ahol φ valamely általános rekurzív, vagy akár elemi függvény, n pedig valamely nemnegatív egész szám.

Ez a CHURCH-féle hipotézisben bennerejlő állítás erősen agnoszticista, mégpedig kantiánus jellegű állítás, hiszen azt mondja, hogy az objektív valóságban magában (an sich) igaz a T ítélet, de számunkra sohasem derülhet ki, hogy így van, hiszen mi ezt csak valamely bizonyítás útján tudhatnók meg.

Az az ellenérv sem áll meg, hogy a T ítélet nem az objektív valóságra vonatkozik. Világosan látszik, hogy nem így van, ha a φ függvényt elemi függvénynek választjuk. Ugyanis minden olyan ítélet, amelyben csak nemnegatív egész számokról és a négy aritmetikai alapműveletről van szó, az objektív valóságban meglevő mennyiségi viszonyokra vonatkozik. Valóban, az ítéletben szereplő nemnegatív egész számokat bizonyos tárgyak, pl. golyók, elektronok (vagy akár azoknak csak a jövő században felfedezendő részei) számaként interpretálhatjuk; az összeadásnak a kérdéses tárgyak megfelelő halmazainak egyesítése felel meg, az aritmetikai kivonásnak elvevés (abból a halmazból veszünk el, amelyből lehet, annyi tárgyat, amennyiből a másik halmaz áll), a szorzásnak egyenlő számú tárgyból álló sorok egyesítése egy halmazba, az aritmetikai osztásnak a tárgyak egy halmazának egyenlő számú tárgyból álló sorokba, továbbá esetleg egy kevesebb tárgyból álló sorba való elrendezése (a szumma- és produktumképzés pedig ismételt összeadás ill. szorzás). Így pl. a GOLDBACH-féle sejtés az objektív valóságnak azt a feltételezett tulajdonságát fejezi ki, hogy ha bizonyos tárgyakat ki lehet rakni két sorba úgy, hogy mindegyikben ugyanannyi tárgy legyen, akkor e tárgyakat szét lehet választani két olyan csoportba, hogy egyik csoportban levő tárgyakat sem lehet egynél több sorban elrendezni úgy, hogy minden sorban ugyanannyi, de egynél több tárgy legyen. Hasonlóan látható, hogy ha φ elemi függvény és n nemnegatív egész szám, akkor az az ítélet, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n, y) = 0$, az objektív valóságban meglévő valamely (esetleg nagyon bonyolult) mennyiségi törvényszerűséget fejez ki. Eszerint a CHURCH-féle hipotézisben bennerejlik az az állítás, hogy van olyan törvényszerűség, amely az objektív valóságban megvan, de az, hogy megvan, semmiféle helyes meggondolással nem látható be. Ezt az állítást nem fogadhatja el senki, aki meg van arról győződve, hogy az objektív valóságban meglevő törvényszerűségek megismerhetők; ennélfogva a CHURCH-féle hipotézist sem fogadhatja el.

8. A fenti meggondolásban szerepel a tetszőleges helyes módszerrel való matematikai bizonyítás fogalma. Ez a fogalom szintén olyan, amit szabatos definíció nélkül használnak a matematikában.* A fenti meggondolást, e fogalom szabatos definíciója hiján, csak heurisztikus meggondolásnak tekinthetjük;

* A moszkvai Harmadik Össz-szövetségi Matematikai Kongresszuson, ahol szintén előadtam a jelen dolgozat tartalmát, arról értesültem, hogy NOVIKOV sejtése szerint egyszer majd a tetszőleges, tartalmilag helyes matematikai bizonyítás fogalmát is sikerül olyanféle szabatos definícióval elhatárolni, mint az effektíve kiszámítható függvény fogalmát sikerült (a CHURCH-féle hipotézis értelmében) az általános rekurzív függvény fogalma (vagy a normalizálható algoritmus MARKOV-féle fogalma) segítségével. A Szovjetunióban ez a sejtés NOVIKOV-féle prognózis néven ismeretes. A magam részéről a NOVIKOV-féle prognózist éppoly kevéssé tartom plauzibilisnek, mint azt, hogy az effektíve kiszámítható függvény fogalma szabatos definícióval elhatárolható. (Utólagos megjegyzés, 1956. szeptember 5-én.)

azonban plauzibilitási érvként (a CHURCH-féle hipotézis plauzibilitása ellen) ilyen meggondolás is megengedhető.

A fenti meggondolás azonban szó szerint elismételhető úgy, hogy tetszőleges helyes módszerrel való bizonyítás helyett valamely olyan A axiómarendszer keretei között végzett bizonyítást mondunk, amely eleget tesz a következő feltételeknek.

1. Az A axiómarendszer formulái (vagyis az A axiómarendszerben megfogalmazható ítéleteket formalizáló formulák) a 0 és 1 konstansból, továbbá nemnegatív egész számokon átfutó változókból úgy épülnek fel, hogy ezekből először az aritmetikai műveletek jelének ($+, \Sigma, | - |, \cdot, //, [\ /\ ]$) (ismételt) alkalmazásával (elemi függvényeket előállító) kifejezéseket készítünk, majd ilyen kifejezéseket az egyenlőség jelével ($=$) összekapcsolunk, végül az így keletkező „elemi egyenletekre" (ismételten) alkalmazzuk a logikai ítéletkalkulus műveleteinek jelét ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) és a kvantorok jelét ($\exists, \forall$).

2. Valahányszor valamely φ (kétváltozós) elemi függvény valamely numerikusan adott m, n helyen valamely k értéket vesz fel, az ezt a tényt formalizáló formula bebizonyítható az A axiómarendszerben. (Ez a formula úgy keletkezik a φ elemi függvényt előállító kifejezésből, hogy változói helyébe az m és n nemnegatív egész számokat formalizáló kifejezéseket helyettesítjük, majd az így keletkező kifejezést az egyenlőség jelével összekötjük a k nemnegatív egész számot formalizáló kifejezéssel. Itt pl. a k számot formalizáló kifejezésen $k=0$ esetében 0-t, különben $(\ldots((1+1)+1)+\ldots)+1$-et értünk, k számú 1-gyel.)

3. Valahányszor az A axiómarendszer valamely x szabad (azaz kvantorral le nem kötött) változót tartalmazó $\mathbf{F}(x)$ formulájához található olyan, valamely nemnegatív egész számot formalizáló $\mathbf{k}$ kifejezés, hogy az $\mathbf{F}(\mathbf{k})$ formula, amely $\mathbf{F}(x)$-ből x helyébe $\mathbf{k}$ helyettesítésével keletkezik, bebizonyítható az A axiómarendszerben, akkor az az $\exists x \mathbf{F}(x)$ formula is bebizonyítható az A axiómarendszerben, amely azt formalizálja, hogy van olyan x nemnegatív egész szám, amelyre $\mathbf{F}(x)$ áll.

4. Az A axiómarendszer ellentmondástalan (azaz nincs olyan $\mathbf{F}$ formulája, hogy $\mathbf{F}$ is, tagadása: $\overline{\mathbf{F}}$ is, bebizonyítható az A axiómarendszerben).

Valóban, fentebb abból, hogy helyes módszerrel való bizonyításról van szó, csak azt használtuk fel, hogy ha valamely φ elemi függvény és n nemnegatív egész szám esetén be lehet bizonyítani, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n, y) = 0$ (amit így formalizálunk: $\neg \exists y \mathbf{f}(\mathbf{n}, y) = 0$, ahol $\mathbf{f}(x, y)$ a $\varphi(x, y)$ elemi függvényt formalizáló kifejezés, $\mathbf{n}$ az n nemnegatív egész számot formalizáló kifejezés és az $\mathbf{f}(\mathbf{n}, y)$ kifejezés úgy jön létre $\mathbf{f}(x, y)$-ből, hogy az x változó helyébe az $\mathbf{n}$ kifejezést helyettesítjük), akkor ez igaz is, tehát akkor $\psi(n)=0$. Ez fennáll akkor is, ha ilyen A axiómarendszerben való bizonyításra szorítkozunk. Valóban, ha nem volna igaz, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n,y)=0$, vagyis, ha volna olyan m nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n,m)=0$, akkor 2. miatt az ezt formalizáló $\mathbf{f}(\mathbf{n},\mathbf{m})=0$ formula, tehát 3. folytán az $\exists y\mathbf{f}(\mathbf{n},y)=0$ formula is bebizonyítható volna az A axiómarendszerben (az x változó szerepét most y vette át, az $\mathbf{F}(x)$ formuláét ill. a $\mathbf{k}$ kifejezését pedig $\exists y\mathbf{f}(\mathbf{n},y)$ ill. $\mathbf{m}$). Ez azonban 4. miatt nem lehetséges, hiszen a $\neg\exists y\mathbf{f}(\mathbf{n},y)=0$ formula a feltevés szerint bebizonyítható A-ban.

Mármost a fenti meggondolás azt adja, hogy a CHURCH-féle hipotézisből következik olyan φ kétváltozós elemi függvény és olyan n nemnegatív egész szám létezése, hogy egyrészt nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n,y)=0$, másrészt az ezt a tényt formalizáló $\neg\exists y\mathbf{f}(\mathbf{n},y)=0$ formula semmiféle, az 1—4. feltételeknek eleget tevő A axiómarendszerben nem bizonyítható be.

A CHURCH-féle hipotézisnek ez a következménye azonban megcáfolható. Valóban, könnyű olyan A_0 axiómarendszert megadni, amely teljesíti az 1—3. feltételeket és amelynek axiómái részben a logikai függvénykalkulus axiómáiból (lásd pl. HILBERT—BERNAYS [1], 105. oldal) logikai változók és függvényváltozók helyébe az axiómarendszer formuláinak helyettesítésével keletkező formulák, részben verifikálható formulák (lásd ugyanott, 238. oldal), következtetési szabályai pedig a logikai függvénykalkulus következtetési szabályai (lásd ugyanott, 105—106. oldal.) Vegyük hozzá A_0-hoz új, az y szabad változóit tartalmazó axiómaként a $\neg\mathbf{f}(\mathbf{n},y)=0$ formulát. A keletkező A axiómarendszerben a $\neg\exists y\mathbf{f}(\mathbf{n},y)=0$ formula, mint a logikai függvénykalkulus axiómáinak és következtetési szabályainak felhasználásával könnyen adódik, bebizonyítható. Az A axiómarendszer nyilván szintén teljesíti az 1—3. feltételeket. Felhasználva azt a tényt, hogy az új $\neg\mathbf{f}(\mathbf{n},y)=0$ axióma a feltevés folytán (ti. hogy bármely y nemnegatív egész számra $\varphi(n,y)\neq 0$) verifikálható, az aritmetika axiómarendszere ellentmondástalanságának GENTZEN-féle bizonyításából (lásd GENTZEN [1], [2]) adódik, hogy az A axiómarendszer ellentmondástalan, vagyis a 4. feltételt is teljesíti.

A CHURCH-féle hipotézis e *cáfolata* már szabatosan definiált fogalmakkal dolgozik; mégsem értékelem többnek, mint plauzibilitási meggondolásnak. Valóban, ahhoz, hogy a ψ függvény értékét az olyan n helyeken is kiszámítsuk e meggondolás felhasználásával, amelyhez nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n,y)=0$, minden n-hez egy-egy az 1—4. feltételeknek eleget tevő olyan A axiómarendszert kell megkeresnünk, amelyben a $\neg\exists y\mathbf{f}(\mathbf{n},y)=0$ formula bebizonyítható. Ilyen axiómarendszert *megadni* könnyű a fentiek alapján, de annak megmutatásához, hogy valóban eleget tesz a 4. feltételnek, valamilyen helyes módszerrel meg kell mutatnunk, hogy a $\neg \mathbf{f}(\mathbf{n}, y) = 0$ formula verifikálható, vagyis, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n, y) = 0$; tehát végeredményben így sem kerülhetjük el a tetszőleges helyes módszerrel való bizonyítás fogalmát.

9. Még egy lehetséges ellenvetést kell kivédenem. Azt lehetne mondani, hogy a CHURCH-féle hipotézis úgy értendő, hogy csak azokra az aritmetikai függvényekre állítja, hogy általános rekurzív függvények, amelyeknek értéke bármely adott helyen valamely *egységes eljárással* véges számú lépésben kiszámítható; ezzel szemben a ψ függvény értékeinek kiszámítására adott eljárás nem egységes, hiszen más-más olyan n helyeken, amelyekhez nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n, y) = 0$, más-más lesz az a „valamilyen helyes módszer“, amellyel ez bebizonyítható. Véleményem szerint azonban az „egységes eljárás“ fogalma relatív. Az általános iskolai tanuló minden egyes számtanpélda megoldására szolgáló eljárást másnak vél; és csak akkor jön rá, hogy egységes eljárásról van szó, amikor megtanul elsőfokú egyenleteket felállítani és megoldani. De nemcsak az egyes ember, hanem az emberiség fejlődésében is észlelhetünk hasonlót; pl. a csoportelmélet felfedezése óta számos olyan eljárást egységesnek tekintünk, amelyek azelőtt külön-külön algebrai, számelméleti vagy geometriai eljárásoknak számítottak. Így a kiszámítható függvény fogalmának és vele együtt a CHURCH-féle hipotézisnek csak akkor van objektív értelme, ha nem keverjük bele az „egységes eljárás“ fogalmát.

10. Meggondolásaim, amelyek úgy vélem, újabb érvet adnak a CHURCH-tételnek agnoszticista következtetések levonására való felhasználása ellen, természetesen nem érintik a CHURCH-tételnek magának, vagy az ún. megoldhatatlan problémaseregekre vonatkozó többi tételnek érvényét, vagy jelentőségét. Csak azt mutatják, hogy ezeket a tételeket szabatosabban úgy kellene kimondani, hogy a kérdéses problémaseregek *általános rekurzív eljárással* (vagy normális algoritmussal) nem oldhatók meg, ahelyett, hogy röviden megoldhatatlanságukról beszélünk. Ilyen fogalmazásuk esetén nyilvánvalóbbá válnék az is, hogy agnoszticista következtetéseket nem lehet belőlük levonni.

IRODALOM

CHURCH, A. [1], An unsolvable problem of elementary number theory, *American J. of Math.*, **58** (1936), 345—363.

[2], The constructive second number class, *Bulletin of the American Math. Soc.*, **44** (1938), 224—232.

Детловс, В. К. [1], Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции, Доклады Акад. Наук СССР, **90** (1953), 249—252.

FRAENKEL, A. [1], *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre* (Leipzig—Berlin, 1927).

GENTZEN, G. [1], Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Math. Annalen*, **112** (1936), 493—565.

[2], Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, Neue Folge, 4 (1938), 19—44.

GÖDEL, K. [1], Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte f. Math. und Phys.*, **38** (1931), 349—360.

HILBERT, D.—BERNAYS, P. [1], *Grundlagen der Mathematik*, **1** (Berlin, 1934).

KALMÁR L. [1], On unsolvable mathematical problems, *Library of the* Xth *Int. Congress of Philos.* (Amsterdam, 1948), I, 756—758.

KLEENE, S. C. [1], General recursive functions of natural numbers, *Math. Annalen*, **112** (1936), 727—742.

Марков, А. А. [1], Теория алгорифмов, *Az Első Magyar Mat. Kongresszus Közl.* (Budapest, 1950), 191—203.

[2], Теория алгорифмов, Труды Мат. Инст. им. В. А. Стеклова, **42** (1954), 1—375.

Новиков, П. С. [1], Об алгоритмической неразрешимость проблемы тождества слов в теории групп, Труды Мат. Инст. им. В. А. Стеклова, **44** (1955), 1 - 143.

PÉTER R. [1], *Rekursive Funktionen* (Budapest, 1951).*

POST, E. L. [1], Finite combinatory processes — formulation 1, *Journal of Symb. Log.*, **1** (1936), 103—105.

TURING, A. M. [1], On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. of the London Math. Soc.*, (2) **42** (1937), 230—265, **43** (1937), 544—546.

[2], Computability and λ-definability, *Journal of Symb. Log.*, **2** (1937), 153—163.

WEDBERG, A. [1], L. NELSON, Critical philosophy and mathematical axiomatics ismertetése, *Journal of Symb. Log.*, **14** (1949), 244—246.

WHITEHEAD, A. N.—RUSSELL, B. [1], *Principia Mathematica* 1—3, (Cambridge, England, 1910—1913).

* Időközben megjelent a 2. kiadása is: Budapest, 1957. (Utólagos megjegyzés, 1957. március 5-én.)

SZABÁLYOS ALAKZATOK

FEJES TÓTH LÁSZLÓ

Előadta az 1956. évi május 31-én tartott nyilvános osztályülésen

Építkezéseinken, gépeinken és civilizációnk számos más termékén különféle szabályosan elhelyezett tárgyakat figyelhetünk meg. A szoba padlóján a parkettlapok, a háztetőn a cserepek, a kerékben a küllők mind szabályosan vannak elhelyezve. A természet is változatos szabályos alakzatokat hoz létre az élő és élettelen világban egyaránt. Gondoljunk csak a kristályok belső szerkezetére vagy „a természet legbájosabb gyermekeire“, ahogy H. WEYL Symmetry című könyvében a virágokat nevezi.

A szabályosság azt jelenti, hogy az egész alakzatot alkotó tárgyak közül egyik sincs egy másikkal szemben kitüntetve, sem alakját és nagyságát, sem pedig a többihez viszonyított helyzetét illetőleg. Ezt fejezi ki a következő definíció: geometriai tárgyaknak egy diszkrét halmazát* szabályosnak nevezzük, ha bármelyik tárgy átvihető egy kongruenciával (vagyis egy távolságtartó leképezéssel) bármelyik másik tárgyba úgy, hogy az egész alakzat önmagába menjen át.

Az alakzatot önmagába átvivő kongruenciák csoportot alkotnak: az alakzat szimmetriacsoportját vagy mozgáscsoportját**. Az alakzat szerkezetét szimmetriacsoportja jellemzi; az alakzatot alkotó tárgyak mineműsége lényegtelen. A szabályos alakzatok elméletének főfeladata az n-dimenziós elliptikus, euklideszi, illetőleg hiperbolikus térben lehetséges összes szimmetriacsoportok meghatározása. Ezzel az általános (és pl. az euklideszi terekben eddig csupán az $n \leq 3$ esetben megoldott) kérdéssel egy egész problémakör függ össze: milyen reguláris alakzatok léteznek bizonyos megszorító feltételek mellett? Ez a kérdéskomplexus felöleli a szabályos politópok, térfelbontások és rácsok elméletét.

Vessünk egy pillantást az elmélet történetére!

* Geometriai tárgyon itt ponthalmaz értendő. A ponthalmazok H halmazának diszkrét volta azt jelenti, hogy H bármelyik P eleméhez meg lehet adni egy ϱ számot úgy, hogy P ϱ-sugarú környezete (vagyis a P ponthalmaz pontjai köré ϱ sugárral írt körlapok pontjainak egyesített halmaza) nem tartalmazza P-n kívül H más elemét.

** A mozgáscsoport elnevezés indokolt, amennyiben egy n-dimenziós térben bármely kongruens leképezés ekvivalens az $n+1$-dimenziós tér egy mozgásával.

A szabályos alakzatok elmélete a legklasszikusabb tudományágak egyike, amelynek alapjait a görögök és az egyiptomi művészek vetették meg. Az előbbiek behatóan tanulmányozták a szabályos sokszögek és soklapok tulajdonságait, míg az utóbbiak falornamentikáikkal felfedezték a 17 síkbeli krisztallografikus (azaz véges alaptartománnyal bíró) mozgáscsoportot. Az egyiptomiaknak ezt az alkotását A. SPEISER az ókor legnagyobb matematikai teljesítményei közé sorolja.

A szabályos alakzatok iránti érdeklődés a közép- és újkorban sem szünetelt. KEPLER nevéhez fűződik a két pentagramm lapu csillagpoliéder, a a stella octangula és más szabályos alakzatok felfedezése, valamint a sík szabályos felbontásainak a szabályos testek analogonjaiként való felismerése. De az elmélet fénykora a 19. századra esik. Az antik reguláris idomok reneszánszának ez a kora GAUSS Disquisitiones arithmeticae-jének megjelenésével kezdődik (1801), amelyben közkinccsé válik a princeps mathematicorum nagy ifjúkori alkotása, a szabályos sokszögek szerkeszthetőségének elmélete. Követi ezt a két Kepler-féle csillagpoliéder duálisainak POINSOT által történt felfedezése, CAUCHY bizonyítása, hogy a négy Kepler—Poinsot-féle szabályos csillagpoliéderen kívül nincs több, HESSEL, MÖBIUS és BRAVAIS térrácsokra vonatkozó vizsgálatai, majd SCHLÄFLI „Theorie der vielfachen Kontinuität" című hatalmas, klasszikus munkája, amely a szabályos testek többdimenziós analogonjainak felfedezését és elméletét tartalmazza. A múlt század ilyen irányú vizsgálatait a 230 térbeli krisztallografikus mozgáscsoport felfedezése és a felsorolás teljességének bizonyítása tetőzi be. A prioritás ezen a téren a nagy orosz krisztállográfust, FJODOROVot illeti, de osztozik vele a felfedezés dicsőségében SCHÖNFLIESS német és BARLOW angol matematikus. Mindhárman egymástól függetlenül jutottak ugyanahhoz az eredményhez, éppen úgy, mint ahogy a szabályos politópokat is a század végén SCHLÄFLItől és egymástól függetlenül többen is felfedezték.

A szabályos alakzatok vizsgálatában a mi századunk is szép eredményekkel dicsekedhet. Ilyen pl. FROBENIUSnak és BIEBERBACHnak az a tétele, amely az n-dimenziós euklideszi tér krisztallografikus mozgáscsoportjai számának végességét fejezi ki. A számos újabb idevágó eredmény közül itt csupán egyet emelünk ki. FJODOROV és MINKOWSKI vizsgálatai alapján ismeretes, hogy öt különböző típusú poliéder létezik, amelyeknek rácsszerűen elhelyezett kongruens példányai az euklideszi teret egyrétűen és hézagmentesen kitöltik. Ezek a kocka, a szabályos hatszöges hasáb, a rombdodekaéder, a csonka oktaéder és végül egy hat- és négyszögek által határolt 12-lap. DELONAY szovjet matematikus megadta ezek 4-dimenziós analogonjainak teljes felsorolását. Ezek száma 52-re rúg.

A szabályos alakzatok elméletére állandóan termékenyítőleg hatott annak a természettudományokkal és a matematika más ágaival, különösen a csoportelmélettel, számelmélettel, a projektív konfigurációkkal, az algebrával és függvénytannal való szoros kapcsolata. A GAUSS, DIRICHLET és MINKOWSKI által megalapozott geometriai számelmélet ma is egyik fő mozgatóereje az elmélet fejlődésének.

Előadásom célja az, hogy a reguláris alakzatoknak az előzőkben körülhatárolt klasszikus elméletével egy új elmélet lehetőségét állítsam szembe. Ez azon a felismerésen alapszik, hogy bizonyos szélsőérték-követelmények automatikusan maguk után vonják a szabályosságot. Itt tehát nem a szabályosságnak egy többé-kevésbé önkényes definíciójából indulunk ki, hanem egy szabálytalan, kaotikus sokaságból, amely spontán válik szabályossá egy elég tág értelemben vett gazdaságossági elv rendező hatására. Míg a klasszikus elmélet a szabályos alakzatok rendszertanának és morfológiájának tekinthető, addig az új irányt a reguláris idomok származástanának nevezhetjük. A következőkben a szabályos idomok ezen genetikájának néhány eredményét szeretném ismertetni.

A szabályos sokszögeknek és a három egyszerűbb szabályos testnek LHUILIER és STEINER óta több szélsőérték-tulajdonságát ismerjük. Meglepő tényként kell ezzel szemben megállapítanunk, hogy az ikozaédernek vagy dodekaédernek egyetlen szélsőérték-tulajdonsága sem szerepel a régebbi irodalomban. Ma azonban már a szabályos testek különféle szélsőérték-tulajdonságait ismerjük. Az első egy botanikai problémával kapcsolatos.

TAMMES [1] holland biológus a fumaria capriolata és más virágok gömbalakú pollenszemein tanulmányozta a plazma kijutására szolgáló apró nyílások elhelyezkedését. Azt a megfigyelést tette, hogy ezek a nyílások többnyire úgy helyezkednek el, hogy valamennyi a lehető legtávolabb kerüljön egymástól. Ezért felvetette azt a geometriai problémát: hogyan kell egy gömbön n pontot úgy elhelyezni, hogy a köztük fellépő minimális távolság maximális legyen? Erre a kérdésre vonatkozik a következő egyenlőtlenség (FEJES TÓTH [1]):

Az egységgömb $n > 2$ pontja közül mindig kiválasztható két olyan, amelyek távolsága

$$\leqq \left(4 - \operatorname{cosec}^2 \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ez az egyenlőtlenség csak abban az esetben nem javítható, ha a pontok egy főkörbe írt szabályos háromszög, egy szabályos tetraéder, oktaéder vagy ikozaéder csúcspontjai.

Meggondolva még, hogy a fenti egyenlőtlenség n-nek nagy értékére aszimptotikusan pontos becslést ad, azt mondhatjuk, hogy egyenlőtlenségünk pontos az $n=3, 4, 6, 12$ és ∞ esetben, amikoris TAMMES problémája a háromszöglapokkal bíró szabályos testekhez, illetőleg a szabályos háromszögrácshoz vezet.

Az $n=5$ eset megoldását már TAMMES ismerte. Az $n=7, 8$ és 9 esetet SCHÜTTE és VAN DER WAERDEN [1] oldotta meg 1951-ben. Kiemelem az $n=8$ esetet, amely egy félig szabályos testhez, a 4-oldalú archimédeszi antiprizmához vezet. Végeredményben a fenti egyszerű és természetes probléma egy minden pontszámra értelmezett interpolációs láncot határoz meg, amely bizonyos klasszikus alakzatokat köt össze. Ilyen értelemben az új elmélet általánosítása a réginek.

Most egy olyan problémát említek, amelyben a háromélű csúcsokkal bíró szabályos testek vannak kitüntetve. Ez az n-lapokra vonatkozó izoperimetrikus probléma, amelynek érdekes történetében LHUILIER, STEINER, L. LINDELÖF, MINKOWSKI, STEINITZ és mások neve szerepel. Erre vonatkozik az alábbi tétel:

Ha F és V jelenti egy konvex n-lap felszínét és térfogatát, akkor

$$F^3/V^2 \geqq 54(n-2)\,\mathrm{tg}\,\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\left(4\sin^2\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}-1\right)$$

és egyenlőség csak a háromélű csúcsokkal bíró szabályos testekre áll fenn.

Ez a tétel elintézi a kockára és dodekaéderre STEINERnek azt a híres sejtését, amely szerint az F^3/V^2 hányados bármelyik szabályos testtel izomorf poliéderek közül a szabályosra a legkisebb. A tetraéderre ezt már LHUILIER tudta, az oktaéderre STEINER mutatta ki, az ikozaéderre azonban a mai napig sincs bizonyítva. Viszont a kockára és dedokaéderre a fenti tétel sokkal többet mond STEINER sejtésénél: a dedokaéder például nemcsak a vele topologikusan megegyező típusú poliéderek közt, hanem az összes konvex 12-lapok közt is a legjobb.

Egyenlőtlenségünk az $n\to\infty$ határesetben átmegy a bármely konvex testre érvényes, klasszikus $F^3-36\pi V^2\geqq 0$ izoperimetrikus egyenlőtlenségbe. Ezen túlmenőleg azonban pontos aszimptotikus becslést ad nagy n-re az $F^3/V^2-36\pi$ izoperimetrikus deficitre. Ez a tény úgy interpretálható, hogy tételünk a szabályos tetraéder, hexaéder és dodekaéder izoperimetrikus tulajdonságán kívül a sík szabályos hatszögekre való bontásának analóg tulajdonságát is kifejezi: a legjobb n-lap n nagy értékére egy olyan gömb köré írt soklap, amelynek lapjai „közelítőleg“ egybevágó szabályos hatszögek.

A fenti egyenlőtlenség bizonyítására 1935-ben GOLDBERG [1] tett egy kísérletet, de annak első egzakt bizonyítását én találtam [2] 1948-ban. Később egy másik bizonyítást is adtam [3]. Mindkét bizonyítás más úton halad mint GOLDBERGÉ.

Egy bizonyos poliédertípus vizsgálata túl szűk ahhoz, hogy általános eredményeket nyerjünk. Az adott lapszámú vagy adott csúcspontszámú poliéderek osztálya viszont — mint láttuk — túl bőnek bizonyul mind az öt szabályos testnek ugyanazzal a szélsőérték-tulajdonsággal való jellemzésére. Ezt az utóbbi célt elérhetjük azonban a csúcspontszám és lapszám egyidejű megadásával. Ennek illusztrálására szolgáljon a következő tétel [3].

Legyen az egységgömböt tartalmazó valamely konvex poliéder lapszáma l, csúcspontszáma c és élszáma e. Akkor a poliéder V térfogata kielégíti a

$$V \geqq \frac{e}{3} \sin \frac{\pi l}{e} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi l}{2e} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi c}{2e} - 1 \right)$$

egyenlőtlenséget és egyenlőség csak egy körülírt szabályos poliéder esetén áll fenn.

Újabban sikerült ennek az egyenlőtlenségnek az érvényességét alkalmas definíciókkal csillagpoliéderekre is kiterjesztem [4], ami mind a kilenc szabályos testnek, sőt határesetként az euklideszi sík három szabályos felbontásának is egyetlen szélsőérték-problémából való származtatását teszi lehetővé.

Ennek részletes kifejtése helyett megemlítem, hogy a fenti tétel egy sokkal általánosabb egyenlőtlenségből folyik, amelynek felhasználásával egy nem euklideszi poliéder térfogatára is az előbbihez analóg becslés nyerhető. Ez a becslés felhasználható a szabályos politópok genetikájában, de önmagában is érdekes, amennyiben egy klasszikus kérdéssel függ össze: egy nem euklideszi tetraéder köbtartalmának meghatározásával. A köbtartalmat a lapszögekkel kifejező SCHLÄFLI—LOBACSEVSZKIJ-féle függvények tudvalevőleg nem elemiek, s azok tulajdonságaival és explicit előállításával a két nagy matematikuson kívül, akiknek nevét viselik, GAUSS, BOLYAI JÁNOS, RICHMOND, COXETER, H. KNESER és mások foglalkoztak. Az említett egyenlőtlenség, amely a SCHLÄFLI—LOBACSEVSZKIJ-féle függvények egy új előállítására épült, így szól [5]:

Jelentse l, e és c egy állandó $g \neq 0$ görbületű térben egy r sugarú gömböt tartalmazó konvex poliéder lap-, él- és csúcspontszámát. Akkor a poliéder V térfogatára fennáll a

$$V \geqq \frac{2e}{\sqrt{g^3}} \int_0^{\pi l/2e} \left\{ \sqrt{g}\, r - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \varphi}} \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{tg} \sqrt{g}\, r \frac{\sqrt{k^2 - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \right) \right\} d\varphi$$

egyenlőtlenség, ahol

$$k = \frac{\sin \dfrac{\pi l}{2e}}{\cos \dfrac{\pi c}{2e}}.$$

Egyenlőség csak az öt szabályos testre áll fenn.

Egyenlőtlenségünk a $g \to 0$ határesetben átmegy az előbbibe.

E tétel közvetlen folyománya, hogy pl. bármely konstans görbületű térben egy gömböt tartalmazó 12 lappal bíró konvex poliéderek közt a körülírt szabályos dodekaéder, a 12 csúccsal bírók közt pedig a körülírt szabályos ikozaéder bír a legkisebb térfogattal.

A reguláris politópok genetikájában csupán néhány kezdeti eredményről számolhatok be. Ismeretes, hogy a szabályos tetraéder, oktaéder és a kocka bármely dimenziójú térben létező analogonjain kívül csupán három 3-nál több dimenziós szabályos konvex politóp létezik, mégpedig mind a 4-dimenziós térben. Ezek az önmagához duális 24-cella és az egymáshoz duális 120-cella és 600-cella. Ez utóbbiak szélsőérték-tulajdonságairól csak keveset tudunk.

Tájékoztatásul megemlítem azt a jól megalapozott sejtést, hogy pl. TAMMES problémájának megoldását a négydimenziós gömbön 120 pont esetén a gömbbe írt 600-cella csúcsai, vagy ami egyre megy, a körülírt 120-cella cellaközéppontjai alkotják. Annyit sikerült is kimutatnom [6], hogy ez a konfiguráció lokálisan extremális. Helyes tehát az a várakozásunk, hogy a szabályos soklapok genetikájához hasonlóan a szabályos politópok genetikája is kiépíthető. Egyelőre azonban ezen a téren — a poliéderekre vonatkozó szélsőértékproblémák történetének kezdeti stádiumához hasonlóan — inkább csak olyan eredményeket ismerünk, amelyben izomorf politópokat hasonlítunk össze. Ilyen a következő eredmény, amelynek tömör megfogalmazásához egy kis magyarázatra van szükség.

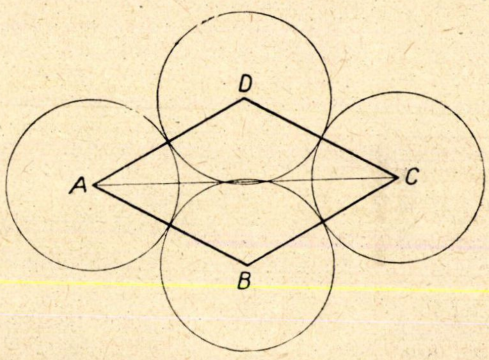
Tekintsünk egy konvex politóphoz két koncentrikus R és r sugarú gömböt, amelyek közül az első tartalmazza a politópot, a második benne fekszik abban. Válasszuk ki az így keletkező gömbpárok közül azt, amelyek sugarának viszonya R/r minimális. E két gömb által határolt térrészt a politóp gömbhéjának nevezzük. A gömbhéj nagyságát a R/r hányadossal mérjük és vizsgáljuk, hogy ilyen értelemben bizonyos politópok közül melyiknek a gömbhéja minimális, vagyis szemléletesen, melyik hasonlít legjobban a gömbhöz. Eredményünk mármost így hangzik [4]:

Bármely szabályos konvex politóppal izomorf konvex politópok közül a szabályosnak a gömbhéja a legkisebb.

Megemlítem most a legsűrűbb körelhelyezés problémáját, amely a tárgykörünkbe vágó számos vizsgálat kiindulási pontját képezte: milyen elrendezésben érik el a síkban fekvő, egymásba nem nyúló kongruens körök a maximális sűrűséget? Ennek a kérdésnek megoldása következik A. THUE [1] egy 1892-ben talált tételéből. A legsűrűbb elhelyezést az jellemzi, hogy minden kört hat másik érint. Ez az eredmény nem annyira nyilvánvaló, mint amilyennek első pillanatra tűnik. Annak kimutatásáról van ugyanis szó, hogy az eredetileg teljesen irregulárisan szétszórt körök a legsűrűbb illeszkedés követelményére, mintegy vezényszóra, regulárisan, mégpedig rácsszerűen helyezkednek el.

Én ezt az eredményt kiterjesztettem körökről tetszésszerinti centrálisan szimmetrikus konvex tartományokra [7]: egybevágó, centrálisan szimmetrikus konvex lemezek bármely elhelyezésének sűrűsége sem lépheti túl a legsűrűbb rácsszerű elhelyezés sűrűségét. Ez annyiban meglepő, hogy itt a lemezek párhuzamos irányítása is automatikusan következik be a hely leggazdaságosabb kihasználásának követelményére.

Vajon fennáll az imént kimondott tétel középponttal nem bíró lemezekre is? Nyilvánvalóan nem, amint azt a háromszög példája mutatja. Ha azonban előre párhuzamos helyzetű lemezekre szorítkozunk, akkor ROGERS [1] egyik szép tétele tetszésszerinti konvex lemezekre is biztosítja a legsűrűbb elhelyezés rácsszerű voltát.



1. ábra

Térjünk most vissza a körökhöz! Ha a sík minden pontja legfeljebb k kör belsejéhez tartozik, akkor k-szoros körelhelyezésről beszélünk. Mi egy k-szoros körelhelyezés sűrűségének s_k maximuma? A $k=1$ esetben a választ THUE tétele adja: $s_1=\pi/\sqrt{12}=0{,}9069\ldots$. A probléma már $k=2$-re is rendkívül nehéznek látszik, de annyit kimutatott HEPPES ALADÁR [1] az én ösztönzésemre, hogy $s_2>2s_1$.

Tekintsünk egy $ABCD$ rombuszt, amelynek oldalhossza 2 és egyik átlója $AC=7/2$. Könnyű belátni, hogy AC-t a négy csúcs köré rajzolt egységkör öt olyan szakaszra bontja, amelyek hossza 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1. Mivel $BD<2$, azért $ABCD$ területe kisebb, mint annak a 2 oldalú rombusznak a területe, amelynek rövidebb átlója 2. Ámde az utóbb említett rombusz éppen a legsűrűbb egységkörrács egyik alapparallelogrammája. Ezért az $ABCD$ által generált R egységkörrács sűrűsége $>s_1$.

Toljuk el R-t az AC irányban 1/2-del! Akkor az eltolt R' rács által kétszeresen fedett részek éppen R bizonyos hézagjaiba esnek. Fordítva, R kétszeresen borított részei az R' által fedetlenül maradt részben lesznek. R és R' körei tehát együttesen kétszeres körelhelyezést alkotnak, amelynek sűrűsége $>2s_1$.

A köröknek ez a kedvező elhelyezése azért érdemel figyelmet, mert az szabályos, de nem rácsszerű. Ezért indokoltnak látszik az a várakozásunk, hogy a tartományrácsokon kívül az euklideszi sík más szabályos alakzatai is egyszerű és természetes szélsőérték-tulajdonságokkal lesznek jellemezhetők.

A hiperbolikus sík sokkal gazdagabb reguláris alakzatokban, mint az elliptikus és euklideszi sík. Ezért ezen alakzatok szélsőérték-tulajdonságainak vizsgálata hálás területnek látszik. A legsűrűbb körelhelyezés problémája a hiperbolikus síkon — éppen úgy mint a gömbön és az euklideszi síkon — elvezet mindazokhoz a reguláris hálózatokhoz, amelyek csúcsaiban három él fut össze (FEJES TÓTH [8]). Míg azonban a gömbön három (3-, 4- és 5-szöges) és az euklideszi síkon csupán egy (6-szöges) ilyen hálózat van, addig a hiperbolikus síkon végtelen sok (7-, 8-,... szöges). E hálózatok lapjaiba írt körök szolgáltatják az illető körsugár esetén a legsűrűbb körelhelyezést.

A hiperbolikus síknak legfeljebb hányadrésze tölthető ki kongruens, de tetszésszerinti nagyságú körökkel? A válasz az (FEJES TÓTH [9]), hogy $3/\pi$-ed része, és ezt a maximális sűrűséget olyan paraciklusok érik el, amelyek középpontjai egy aszimptotikus háromszög-hálózat csúcsaiba esnek. Ez a hálózat a modulfüggvények elméletében játszik szerepet.

Ismertetésem végére érve hangsúlyoznom kell, hogy az eddig elért idevágó eredményeknek csak egy töredékét mutattam be. De talán így is képet sikerült adnom az itt fellépő problémák gazdagságáról.

C'est la dissymétrie qui crée le phénomène — mondja PIERRE CURIE, kifejezve ezzel a természet számos jelenségében a szimmetriára való törekvést. Ennek a törekvésnek rugója minden bizonnyal valamilyen szélsőérték-követelményben, pl. a potenciális energia minimumának elérésében keresendő. Ezért talán nem egészen utópisztikus a szabályos alakzatok egész elméletének az a távolabbi célkitűzése, hogy a természetben előforduló szabályos alakzatoknak ne csak leírását és osztályozását, hanem keletkezésének okát is megadja.

IRODALOM

P. M. L. TAMMES [1] On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollengrains. *Recueil des travaux botaniques néerlandais* **27**, 1—84 (1930).

L. FEJES TÓTH [1] Über die Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. *Jber. dtsch. Math.-Ver.* **53**, 66—68 (1943) — [2] The isepiphan problem for n-hedra. *Amer. J. Math.* **70**, 174—180 (1948) — [3] Extremum properties of the regular polyhedra. *Canadian J. Math.* **2**, 22—31 (1950) — [4] Characterisation of the nine regular polyhedra by extremum properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7**, 31—48 (1956) — [5] On the volume of a polyhedron in non-Euclidean spaces. *Publicationes Math.* [6] On close-packings of spheres in spaces of constant curvature. *Publicationes Math.* **3**, 158—167 (1953) — [7] Some packing and covering theorems.

Acta sci. math. 12/A, 62—67 (1950) — [8] Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4**, 103—110 (1953) — [9] Über die dichteste Horozyklenlagerung. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** 41—44 (1954).

K. Schütte és B. L. van der Waerden [1] Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? *Math. Ann.* **123**, 96—124 (1951).

M. Goldberg [1] The isoperimetric problem for polyhedra. *Tôhoku Math. J.* **40**, 226—236 (1935).

A. Thue [1] Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer. *Forhal. Skând. Naturforsk.* **14**, 352—353 (1892).

C. A. Rogers [1] The closest packing of convex two-dimensional domains. *Acta Math.* **86**, 309—321 (1951).

A. Heppes [1] Über mehrfache Kreislagerungen. *Elemente d. Math.* **10**, 125—127 (1955).

A GYORSMŰKÖDÉSŰ AUTOMATIKUS SZÁMOLÓGÉPEK FEJLŐDÉSI IRÁNYA

TARJÁN REZSŐ

Előadta a harmadik és hatodik osztály 1956. május 31-én tartott együttes ülésén

Az előadás témája — gyorsműködésű automatikus számológépek fejlődési irányai — annyira elágazó, maga a fejlődés annyira hallatlanul gyorsütemű, hogy részletes kifejtése egyetlen dolgozat keretében aligha lehetséges. Ennek következtében az elmondandók hangsúlya nem annyira a jelenlegi megoldási módszereken, mint inkább a fejlődés várható perspektiváján van. A jelenlegi megoldási módszerekre csak ott és annyira térünk ki részletesebben, ahol és amennyire az összefüggések miatt feltétlenül szükség van.

1. Az analóg és digitális módszer

A numerikus számításokat igénylő problémák megoldására szolgáló gépi — mechanikus, elektromos vagy elektronikus — segédeszközök két alapvető elv alapján működnek: az egyik az analógia elve, a másik pedig a numerikus, illetve a meghonosodott terminológia szerint: a digitális kifejtés elve. (Digit angolul számjegyet jelent.)

1.1 Az analóg számítási elv

Az analóg számítási módszer alapgondolata a következő: olyan fizikai rendszert építünk meg, amelynek kiválasztott paraméterei az idő- vagy a térkoordináták függvényében ugyanolyan matematikai összefüggéseknek tesznek eleget, mint a megoldandó probléma. A függő változóknak a rendszer térkoordinátái, a független változónak az idő az analogonja, maga a rendszer a probléma fizikai modellje. A megoldást azáltal kapjuk meg, hogy a modell megfelelő pontjain *mérést* végzünk. Matematikai szempontból a megoldás, néhány kivételtől eltekintve, mint a független változó minden értékére definiált *folytonos függvény* jelentkezik.

1.2 A digitális kifejtés elve

A digitális módszer a megoldást nem folytonos függvény alakjában, hanem *diszkrét helyeken, numerikus formában* adja meg. A probléma megoldásához szükséges műveleteket ennek megfelelően konkrét numerikus formában kell elvégezni, ugyanúgy, mint a manuális asztali számológépeknél.

1.2 1 A számok reprezentálása

A korszerű, gyorsműködésű digitális számológépekben a számokat villamos feszültségimpulzusok kombinációival ábrázolják. Minthogy az impulzusok legbiztonságosabban megállapítható tulajdonsága az, hogy egy adott helyen adott időpontban jelen vannak-e vagy nincsenek — „minden vagy semmi" jellegűek —, a korszerű digitális számológépekben nem a tizes, hanem a kettes számrendszert használják. A kettes számrendszer ismeretes módon csak két számjegyet, a nullát és az 1-et ismeri; így legjobban megfelel egyrészt az impulzusok „igen—nem" jellegének, másrészt pedig a gépben felhasznált szerkezeti elemek természetének (jelfogók, elektroncsövek), amelyeknél legbiztonságosabban ugyancsak a „vezet—nem vezet" állapotokat lehet megkülönböztetni.

Az egyes számokat reprezentáló impulzusok elrendezése kétféle lehet: térbeli vagy időbeli. Ennek következtében az impulzuskombinációk továbbítása a gép egyes részei között ugyancsak kétféle módon történhetik. Ha az egyes bináris helyértékeknek megfelelő impulzusok ugyanazon a vezetéken *időben egymás után* következnek, *soros működésű* gépről beszélünk. A másik esetben az egyes helyértékeken jelenlevő impulzusok *térben egymás mellett* elhelyezett *párhuzamos* vezetékeken egyidejűleg haladnak; ezek a *párhuzamos működésű* gépek.

A gép működési sebességét alapvetően az szabja meg, hogy az egyes impulzusok milyen sebességgel következnek egymás után, tehát az impulzusismétlődési frekvencia. Elektromechanikus eszközökkel, jelfogókkal maximálisan 5—600/sec impulzus érhető el — legalábbis a jelenlegi technológiai eszközökkel. Az elektronikus gépeknél az impulzus-ismétlődési frekvencia közepes gyorsaság esetén 50 000—500 000/sec, a kifejezetten nagy sebességre épített gépeknél pedig 1—5 millió. Azonos impulzus-ismétlődési frekvencia mellett a párhuzamos működésű gépek kb. 30—40-szer gyorsabbak, mint a soros működésűek, viszont ugyanilyen arányban több szerkezeti elemet igényelnek, tehát bonyolultabbak és költségesebbek.

A most említett nagy működési sebességből következik, hogy a digitális gépeket teljes mértékben automatizálni kell. Ez viszont két újabb problémát is felvet: egyrészt előre ki kell dolgozni azt, hogy a gép mikor, milyen sorrendben, milyen műveleteket hajtson végre — más szóval teljes részletességgel előre ki kell dolgozni az elvégzendő számítások *programját.* Másrészt szükség van olyan berendezésre is, amely egyrészt a programot, másrészt a műveletekben szereplő számokat (kezdeti adatok, közbenső és végső eredmények) a számítások során *tárolja,* mégpedig úgy, hogy ha szükség van rájuk, elég gyorsan rendelkezésre álljanak. A funkciók analógiája miatt a gépnek ezt a részét plasztikus, ma már a közhasználatba átment kifejezéssel memória-egységnek nevezik. Szükség van továbbá a tulajdonképpeni számításokat elvégző úgynevezett aritmetikai egységen kívül alkalmas kiíró-szerkezetre, továbbá az adatok bevitelére alkalmas egységre, végül egy olyan egységre, amely a gép különböző részei közötti forgalmat, illetve a helyes működési sorrendet biztosítja.

1. 22 A digitális számológép működése

A tulajdonképpeni működést megelőzően a feldolgozandó problémát a programozó matematikus előkészíti. Kidolgozza a megoldás programját, azaz a probléma megoldását lebontja a gépbe beépített alapműveletek (összeadás, kivonás stb.) megfelelő egymásutánjára. A műveleti utasításokat, valamint a kezdeti adatokat (számokat) pl. a postán használatos lyukkombinációkkal távírószalagra perforálják. A szalag a gép bemenő egységébe kerül, amely a lyukakat letapogatja és a megfelelő villamos impulzus-kombinációkat eljuttatja a tulajdonképpeni gépbe. Itt a memória-egységbe kerülnek, amely azokat a gép működése során tárolja.

Az impulzus-kombinációk — mint említettük — kétféle típusúak: utasítások és számok. A műveleti utasítások a programvezérlő egységbe kerülnek, amely a gép egyes részeit az utasítások megszabta sorrendben és módon működteti, és gondoskodik a számok megfelelő továbbításáról is. A tulajdonképpeni számításokat, mint a neve is mutatja, az aritmetikai egység végzi el, amely a számokat a memória-egységből kapja és oda küldi vissza. Az aritmatikai egységbe a tulajdonképpeni aritmetikai műveleteken kívül (összeadás, kivonás, szorzás és kivételesen az osztás) még néhány logikai műveletet is beépítenek, amelyek közül a legfontosabb a *diszkrimináció.* Ennél a legegyszerűbb esetben a gép két impulzus-kombinációt hasonlít össze egymással és azt érzékeli, hogy megegyeznek-e vagy sem; az eredménytől függően másmás további utasítássorozatot hajt végre. Ennek azért van döntő jelentősége, mert bonyolult problémáknál a számítások menete gyakran elágazik és a folytatás pl. attól függhet, hogy mi volt egy korábbi számítás eredménye. A diszkriminációs készség segítségével ezek a választások — persze előre megadott kritériumok alapján — automatizálhatók.

A számítások elvégzése után a végeredmények a memóriából a kimenőegységbe kerülnek. Ez egyszerűbb esetben a postán is használatos villamos írógép, nagyobb berendezéseknél pedig lyukkártyaberendezés, amely az adatokat táblázatos formában is rögzíti.

1.3 Az analóg és digitális módszer összehasonlítása

1. 31 A számítási pontosság

Az első öszehasonlitási szempont a kapott eredmények pontossága. Minthogy az analóg gépeknél az eredményt végső soron mérés útján kapjuk meg, az elérhető pontosságot a mérési pontosság határozza meg. Az elektronikus analóg-gépeknél a pontosság általában néhány százalék a maximális értékhez viszonyítva; ha a megoldás a zérus közelébe esik, a pontosság lényegesen rosszabb. A pontosságot — jelentékeny erőfeszítések árán — ezrelék nagyságrendre, precíziós finommechanikai gépeknél pedig tízezrelék nagyságrendre lehet fokozni. Ezzel szemben a digitális módszernél az eredményt elvileg tetszőleges számú tizedes pontosságig meg lehet kapni: az elérhető pontosságnak csak a gép számjegykapacitása szab gyakorlati határt. Ezen a területen tehát a digitális gépek határozott előnyben vannak.

1. 32 Szerkezeti elemek

A digitális számológépekben jelfogók, elektroncsövek, félvezetőből készült egyenirányitók és egyéb, *szabványos kivitelű*, tehát olcsó híradástechnikai alkatrészek vannak. Az analóg számológépeknél ezzel szemben — ha csak valamelyes pontosságra is törekszünk — a nagyfokú mérési pontosság érdekében precíziós alkatrészekre (pl. lineáris potenciométerek, pontos műszerkondenzátorok) van szükség. Ezzel szemben azt szokták felhozni, hogy a digitális számológépek több száz, vagy éppen több ezer elektroncsövet tartalmazó nagyméretű berendezések, szemben a kisméretű, egyszerűbb analógiás berendezésekkel. Ez azonban csak látszólag van így. Az analóg gépeket általában egyszerűbb, legtöbbször egyváltozós problémák megoldására szokták felhasználni, ahol korlátozott pontosság is elegendő. Ha azonban többváltozós vagy egyébként bonyolultabb problémáról van szó, az analóg gépek méretei (elektroncsövek száma stb.) gyorsan nőnek, és nem egy esetben meghaladják egy közepes méretű digitális számológép méreteit, — *anélkül, hogy az eredmények pontossága növekednék:* a szükséges precíziós alkatrészek miatt a költségek még közepes bonyolultságú problémáknál is meghaladhatják a digitális gépek költségeit. Ehhez járul még az a körülmény, hogy az analóg gépeknél, ha a probléma változik, nemcsak az egyes műveleti egységek egymás közti összeköttetését kell megváltoztatni (ami viszonylag egyszerű), hanem a probléma természetének megfelelően a műveleti egységek esetleg jelentős hányadát cserélni is kell — szemben a digitális gépekkel, ahol a gép nem változik, hanem elegendő a programot cserélni. *Az analóg gépek tehát lényegében véve egycélú berendezések, míg a digitális gépek univerzális felhasználhatóságúak.*

A legutóbbi időkben kialakult az analóg mennyiségek digitális formára és vissza történő átalakításának a technikája. Ez lehetővé tette, hogy a digitális gépeket úgy programozzuk, hogy analóg gépek módjára legyenek kezelhetők. Sőt, új géptípus is alakult ki: az ún. digitális differenciálanalizátorok, amelyeknél az összes műveleteket digitális technikával végzik el, de az eredményt egy ezrelék pontossággal grafikusan, tehát analóg módon kapják.

1. 33 A funkcionális különbségek a legdöntőbbek. Mint említettük, az analóg számológépek lényegében a probléma fizikailag megépített modelljei. Ha a külső tényezőknek megfelelő valamelyik paraméter pillanatnyilag megváltozik, a modell ezekre — *és csak ezekre* — reagál. A digitális számológépek ettől funkcionálisan alapvető módon különböznek: memóriájuk van és diszkriminációs készséggel rendelkeznek. Ebből a kettőből következik, hogy — kibernetikus hasonlattal élve — a digitális gépek viselkedését nem egyedül a külső környezetből *pillanatnyilag* befutó változások („ingerek"), hanem ezeken kívül a memóriában tárolt *korábbi adatok* („tapasztalatok") *együttesen* határozzák meg. Ebből viszont a tulajdonképpeni számítások elvégzésén kívül egy sor olyan alkalmazási lehetőség adódik, amely az analóg gépeknél szóba sem jöhet.

1. 34 A végső következtetést a következőkben lehet összefoglalni: a fejlődés egyre jobban a digitális gépeket helyezi előtérbe. Az okok: nagyobb numerikus pontosság, kevésbé kényes technológia és nagyobb flexibilitás. Az analóg gépek felhasználási területe egyre jobban olyan fizikai folyamatok *modellezésére* korlátozódik, amelyeknél a digitális technika valamilyen oknál fogva nem használható. A továbbiakban csak a digitális számológépekkel fogunk foglalkozni.

2. Digitális számológépek

2. 1 Típusfelosztás. Összehasonlítási szempontok

A digitális számológépek legjellegzetesebb szerkezeti eleme a kétállapotú elem, amely megfelel az impulzusok „igen—nem" jellegének. A kétállapotú elem vagy elektromechanikus, vagy elektronikus lehet; az elsőt a közismert jelfogó, a másodikat az elektroncsöves billenő-kör reprezentálja. A digitális számológép mindkét elem segítségével megépíthető; történelmileg az első digitális számológépet ténylegesen szabványos telefon-jelfogókból építették meg. Nem felesleges, ha a kétféle szerkezeti elemet, illetve a belőlük készíthető gépeket összehasonlítjuk egymással. A sokféle lehetséges szempont közül mint legfontosabbakat a következőket választjuk ki:

— költségek
— energiaszükséglet
— működési sebesség, és ami a legfontosabb:
— megbízhatóság.

2.2 *Költségek*

Az elektroncső és a jelfogó beszerzési költségei gyakorlatilag egyformák, — legalábbis világpiaci árszínvonalon. Hazai viszonylatban ugyan az elektroncső beszerzési ára nagyobb, mint a telefon-jelfogóké, ennek oka azonban nem a reális technológiai különbségben, hanem a kalkuláció módjában keresendő.

2.3 *Energiaszükséglet*

Mindkét szerkezeti elemnél gyakorlatilag egyforma — tartós terhelés esetén kb. 3—5 watt.

2.4 *Működési sebesség*

A digitális gép működési sebességét alapvetően az szabja meg, hogy az egyes impulzusok milyen gyorsan következnek egymás után. A hazai gyártású telefon-jelfogók meghúzási ideje biztonságos működés esetén kb. 15 msec, az elengedési idő ennek mintegy 20%-a. Külföldön a számológépek céljaira különleges gyorsműködésű jelfogókat használnak, amelyeknek meghúzási ideje kereken 1 msec, az elengedési idő ennek megfelelően kb. 0,2 msec vagy rövidebb. Ha az elengedési időt teljesen elhanyagoljuk, az elektromechanikus jelfogó másodpercenként legfeljebb 1000 impulzust képes előállítani. Ezzel szemben a közepes sebességű elektroncsöves gépek is másodpercenként néhányszor 10^5, a nagysebességű gépek pedig néhányszor 10^6 impulzussal dolgoznak — anélkül, hogy a technológiával szemben különösebb követelményeket kellene támasztani. A működési sebességek aránya tehát 1 : 100, illetve 1 : 1000, vagyis két vagy három nagyságrend.

2.5 *Megbízhatósági szempontok*

Érthető módon ezek a legfontosabbak. A digitális számológépek numerikusan dolgoznak; a bináris számokat lényegében a bináris elemek mindenkori állapota reprezentálja. *Ha a nagyszámú bináris elem közül bármelyik csak egyszer is rosszul működik — az egész hosszadalmas számítás eredményét meghamisíthatja.* Ebből a szempontból az összehasonlítás a következő képet mutatja:

Az elektromechanikus jelfogó átlagos élettartamát általában a hibamentes elemi működések (meghúzás—elengedés) számában szokás kifejezni. A jelenlegi követelmények szerint a jó minőségű jelfogó élettartama átlagosan 100 millió (10^8) elemi működés, ami még a jelenlegi technológia keretén belül egy nagyságrenddel, tehát egymilliárdra (10^9) fokozható. Ha az elemi működések teljes időszükségletét ismét 1 msec-nak vesszük, ez *folyamatos működés esetén* nagyságrendileg 300 üzemórának felel meg. Ezzel szemben számológépekben használatos elektroncsövek átlagos élettartama, ugyancsak folyamatos működés esetén tízezer óra; az arány tehát kereken 1 : 100. Ez azonban még nem a teljes kép; csak azt mutatja, hogy az elektromechanikus jelfogót körülbelül százszor gyakrabban kell cserélni, mint az elekroncsövet. Az elektroncső a tízezer óra átlagos élettartam alatt másodpercenként egymillió, összesen tehát nagyságrendileg 10^{13} elemi mőködést képes végrehajtani.

Ha ezt a számot hasonlítjuk össze a jelfogó 10^9 elemi működésével — márpedig az elvégzett munkára a működések száma a legfőbb jellemző — akkor az arány 1 : 100-ról 1 : 10 000-re emelkedik. Ha még figyelembe veszszük azt is, hogy a jelfogó az elektroncsővel ellentétben egyidejűleg több érintkezőt is tud működtetni, az arány legfeljebb 1 : 1000-re csökken. Ezt az arányt a jelfogó javára még tovább javítja az a körülmény, hogy a jelfogós számológépekben a jelfogó nem működik állandóan, szemben az elektroncsővel, amely a gép teljes működési ideje alatt üzemben van, még akkor is, ha nem ad impulzust. Ha ezt a tényezőt szintén egy 10-es faktorral vesszük figyelembe, az arány az elektroncső javára végső soron még mindig 1 : 100.

Az elektroncső tehát végeredményben mindenképpen előnyösebb: ugyanannyi üzemidő alatt az elektromos gép mintegy százszor annyi hasznos munkát tud elvégezni. Lényegében ez a körülmény tükröződik abban a tényben, hogy a jelenleg működő digitális számológépeknek jóval több mint 90%-a elektronikus gép. A második világháború alatt épült jelfogós gépeket fokozatosan lebontják, új jelfogós gépeket pedig csak ott építenek, ahol ezt különleges helyi okok, vagy egyébb szempontok, pl. oktatás, feltétlenül szükségessé teszik.

A digitális számológépek a fejlődésben csak a kezdet kezdetén tartanak; a fejlesztés feltétlenül szükséges és lehetséges is. A fejlesztés három főproblémát vet fel:

— *a technológiai fejlesztés* fő problémája a megbízható és olcsó mikro-komponensek kidolgozása; az egymás közötti összeköttetések célszerűen a nyomtatott áramkörök technológiájával oldhatók meg;

— *a rendszertechnika* fő problémája: az adott szerkezeti elemek célszerű, optimális organizációja; minden eddigi eredmény arra utal, hogy a jelenlegi organizációs módszereink meglehetősen kezdetlegesek.
Végül külön problémaként jelentkezik

— *valamely adott gép alkalmazása* különböző területekre, ezek a a programozás problémái.

A továbbiakban ezeket a problémákat fogjuk áttekinteni.

3. A technológiai fejlesztés kérdései

A digitális számológépek szerkezeti elemei kétféle alapvető funkciót látnak el: a tárolás és a kapcsolás funkcióját. A tárolási funkció biztosítja a gép memória-készségét; a kapcsolási funkciók segítségével pedig a közvetlen értelemben vett kapcsolási feladatokon kívül az aritmetikai, tehát logikai műveletek is instrumentálhatók.

3. 1 Kapcsoló elemek

A jelenleg üzemszerűen használt digitális számológépekben kapcsolóelemekként kizárólag elektroncsövek működnek. A méretcsökkentési kisérletek a szubminiatűr-csövek alkalmazására vezettek: ezek segítségével sikerült ugyan a gép méreteit lényegesen csökkenteni, de nem sikerült kiküszöbölni azt, hogy az elektroncsövek üzembiztonság szempontjából a gépek leggyengébb pontjai. Éppen ezért a technológiai fejlesztés fő problémája az elektroncső lehetőleg teljes kiküszöbölése. A technológiai fejlesztés jelenlegi iránya olyan kapcsolóelemek kidolgozása, amelyek a kapcsolási feladatokat a szilárd testek valamilyen fizikai tulajdonságának felhasználásával hajtják végre és vezérelhető módon reverzibilis állapotváltozásra képesek. Az ezzel járó előnyök ismeretesek: viszonylag nagy ellenállóképesség mechanikai behatásokkal szemben, gyakorlatilag korlátlan élettartam. Gyakorlatilag a szilárd testek három tulajdonsága jön figyelembe: a vezetőképesség, a mágneses tulajdonságok és a dielektromos polarizálás.

3.11 Félvezetők, tranzisztor

A szilárd testek vezetőképességét a félvezetőknél a külső elektródák segítségével lehet vezérelni. Ez a jelenlegi technológiai szinten legjobban a germániumnál valósítható meg. Dióda formájában általánosan használják a logikai funkciók instrumentálására, sőt újabban a visszáram tehetetlenségét felhasználva, két állapotú elemként is sikerült alkalmazni. Ez utóbbi célra azonban sokkal alkalmasabbak a tranzisztorok, amelyek az elektroncsöveket kétségtelenül már a közeljövőben mindazokból az alkalmazásokból ki fogják szorítani, amelyeknél a kapcsolási funkcióhoz nincsen szükség komolyabb teljesítményre. Előnyeik ismeretesek: az elektroncsőhöz képest nagyságrendileg kisebb méretek, annyira, hogy erősen megközelítik a tulajdonképpeni mikrokomponenseket. Teljesítményszükségletük elhanyagolhatóan kicsi. A rétegtranzisztor mechanikai behatásokkal szemben gyakorlatilag érzéketlen. A jelenleg használatos germániumtranzisztor legfőbb hátránya az alacsony üzemi hőmérsékleti határ, ezt a problémát azonban a sziliciumtranzisztor előreláthatóan meg fogja oldani.

A tranzisztorok széleskörű elterjedését jelenleg a rendkívül bonyolult és ennek megfelelően költséges gyártási technológia akadályozza: egyenletes minőségű példányokat még ilyen körülmények között is csak válogatással lehet biztosítani. Remélhető azonban, hogy ez a helyzet a legközelebbi néhány év alatt lényegesen javulni fog.

3.12 A ferromágneses tulajdonságok felhasználása

Ismeretes, hogy a ferromágneses anyagok hiszterézisgörbéje alkalmas hőkezelési vagy hengerlési eljárással, esetleg ezek kombinációjával közel négyszögletessé tehető: a remanencia a telítési érték 95%-át is elérheti. Ha az anyag egyszer valamelyik irányban telítésbe kerül, mindaddig telített állapotban marad, amíg elegendő erősségű ellenkező irányú mágnesezést nem kap; ekkor ugrásszerűen átmegy az ellenkező irányú telítésbe. A kétféle telítési állapot a kettes számrendszer kétféle számjegyének feleltethető meg.

A ferromágneses anyagokat jelenleg kétféle formában hasznosítják: az egyik a rendkívül vékonyra (1/8 mil) hengerelt különleges ötvözésű vasanyagok, a másik a kisméretű ferritgyűrűk. Gyakorlatilag az utóbbiak azok, amelyek a kívánatos mikrokomponenseket legjobban megközelítik; az ilyen ferritgyűrűk nem nagyobbak, mint egy írógép *o* betűje. Élettartamuk gyakorlatilag korlátlan, lényegében véve olcsó tömegcikként állíthatók elő és mechanikai behatásokkal szemben is viszonylag érzéketlenek. Hátrányaik közül elsősorban a telítéshez szükséges nagy koercitív erőt kell említeni, ami nagy energiafelhasználással ekvivalens. A cambridge-i (Anglia) egyetem most épülő második nagyteljesítményű gépén a teljes memóriát ilyen ferritgyűrűkből építik meg; az energiaszükséglet és ezzel a disszipált hőmennyiség olyan méreteket ölt, hogy elszállítására külön szellőztetőberendezés szükséges. Hátrányaik közé tartozik az is, hogy az elektroncsövekkel és félvezetőkkel ellentétben nem unipoláris eszközök, aminek következtében az unipolaritást külön félvezetők közbeiktatásával kell biztosítani. Memóriaelemként való felhasználásuknál az is hátrányként jelentkezik, hogy a tárolt adatok kivételénél az illető memóriarész kiürül. Ha a memória tartalmának felhasználása mellett a tartalom további megőrzésére van szükség, a regenerálásról külön segédművelet útján kell gondoskodni, ami a gép működését lassítja. Végül meg kell említeni azt, hogy ez idő szerint még legfeljebb 100 Kc impulzusismétlődési frekvenciával használhatók, tehát viszonylag lassú eszközök.

A ferromágneses anyagok felhasználása fejlődésének még csak a kezdetén van; a fentemlített hátrányok több-kevesebb kísérleti munkával kiküszöbölhetők. A tranzisztorokkal szemben rendkívüli előnyük az egyszerű eszközökkel, nagy tömegben történő olcsó előállíthatóságuk. Megfelelő fejlesztési munka esetén a sokkal nehezebben és drágábban előállítható tranzisztorok egyenrangú vetélytársai lehetnek.

A négyszögletes hiszterézisgörbe a ferromágneses anyagoknak nem az egyetlen, a digitális számológépek részére hasznosítható tulajdonsága. Említést kell tenni a gyorsműködésű mágneses erősítőkről, amelyekre vonatkozólag sokat igérő lehetőségek vannak. A gyorsműködésű mágneses erősítők lehetővé teszik az elektroncsövek pótlását azokon a területeken, ahol komoly teljesítményre van szükség (központi szinkronizáló impulzusok). További lehetőségeket nyújt a hiszterézisgörbe inherens szimmetriájának a felhasználása, amelyet méréstechnikai vonalon rendkívül kis mágneses terek detektálására már eddig is szép sikerrel hasznosítottak.

3.13 Ferroelektromos tulajdonságok

Már régóta ismeretes, hogy bizonyos kristályok, elsősorban a különböző bárium-stronciumtitanátok elegendő nagy feszültséggel tartósan polarizálhatók és a polarizációs görbe a ferromágneses anyagok hiszterézisgörbéjével teljesen analóg menetű. A ferromágneses anyagok remanens indukciójának itt a remanens polarizáció felel meg. Minden jel arra mutat, hogy nagykapacitású és ugyanakkor kis méretű memória céljaira ezek az anyagok lesznek a legalkalmasabbak. A kísérletek azonban még a laboratóriumi stádium elején tartanak, noha az irodalomban már működő modellekről is említés történt. Még egy sor kérdést kell tisztázni, amelyek közül a legfontosabbak az energiaviszonyok, illetve a segédelektrodákkal való vezérelhetőség kérdései.

3.2 A tárolóegység (memória) kérdései

3.21 Elvi követelmények

Mint már említettük, a digitális számológép tárolóegysége lényegében véve ugyanazokat a funkciókat teljesíti, mint az emberi emlékezőkészség. A számológép vonatkozásában a döntő követelmények a következők:

— a memóriába történő bevitelhez, illetve az onnan történő kivételezéshez szükséges várakozási idő (acces-time) minimális legyen; ellenkező esetben a gép működési sebességét fékeznénk;

— a tárolás legyen elvileg korlátlan tartamú és változatlan minőségű. A követelmény nem teljes kielégítése gyakorlatilag annyit jelent, hogy a gép „felejt". Ennek az a legrosszabb következménye, hogy a tárolt nullák és egyesek közötti különbség elmosódik, ami hibás eredménnyel egyértelmű;

— gyors és teljes mértékű törlés;

— legalább is elvileg korlátlan kapacitás.

Ezeket az egymásnak részben ellentmondó követelményeket egyidejűleg nem lehet megvalósítani; a gyakorlatban kompromisszumra van szükség. — A memóriafunkció instrumentálására logikailag két lehetőség van:

— dinamikus (időbeli) tárolás és

— statikus (térbeli) tárolás.

3.22 A dinamikus tárolás elve azon alapszik, hogy megfelelő rugalmas közeg egyik végén alkalmas adófejjel impulzusszerű rugalmas alakváltozást keltünk. Az alakváltozás a terjedési sebességnek megfelelő idő után megjelenik a közeg másik végén, ahol a vevőfejben ismét feszültségimpulzust kelt, ezt a feszültségimpulzust megfelelő regeneráló erősítő útján visszatápláljuk a rugalmas közeg elején levő adófejre. Az egyszer betáplált impulzuskombinációk tehát a rugalmas közegből, az adó- illetve vevőfejből és a regeneráló erősítőből álló zárt körben mindaddig keringeni fognak, amíg alkalmas szelekciós áramkörök segítségével onnan ki nem eresztjük. Az első számológépekben rugalmas közegként folyadékokat, legtöbbször higanyt alkalmaztak. Ez a módszer ma már elavultnak tekinthető; jelenleg késleltető közegként leginkább nikkelt használnak, amelynek előnyei a higannyal szemben kézenfekvők. A rugalmas alakváltozást magnetostriktív effektus segítségével keltik.

A dinamikus tárolásnál egy-egy impulzus helyét egy idő- és egy tér-koordináta határozza meg: az első azt az időpontot jelzi, amikor a szükséges impulzuskombináció a rendszer kimenetén megjelenik, a másik pedig azt a művonalat, amelyben az impulzuskombinációt tárolják. A dinamikus tárolási módszer egyszerűsége és olcsósága miatt széles körben elterjedt; legnagyobb hátránya a maximálisan 1—2 milliszekundum nagyságrendű várakozási idő, ami az adatok beviteléhez, illetve kivételezéséhez átlagban szükséges.

3.23 A sztatikus tárolás elve: síkban vagy térben egymás mellett elhelyezett szerkezeti elemeken viszonylag tartós, de vezérelhető módon reverzibilis állapotváltozást létrehozni. Ez idő szerint kétféle effektust használnak fel:

— az elektromos polarizáció megváltoztatását (töltéstárolás),
— a mágneses állapot megváltoztatását (remanencia).

3.231 A töltéstárolás elvét legszellemesebben WILLIAMS oldotta meg azáltal, hogy az impulzusokat reprezentáló töltéseket egy katódsugárcső ernyőjén helyezte el. A módszert sokan és sok helyütt tökéletesítették; a részletek ismeretesek. Rendkívül nagy előnye az adatok beírásához, illetve kivételezéséhez szükséges várakozási idő rendkívül kicsiny volta (néhány mikroszekundum). Legfőbb hátránya, hogy az ernyőnek azok a helyei, ahol az egyes impulzusoknak megfelelő töltések tárolódnak, egymástól csak rosszul vannak elszigetelve. Emiatt töltéselszivárgás lép fel, ami a nullák és egyesek közötti különbség fokozatos eltűnésével egyértelmű. Ezért a tároláshoz periodikus regenerálásra van szükség; a regeneráláshoz szükséges idő a nagy működési sebesség miatt ugyan gyakorlatilag elhanyagolható, másrészt azonban a szelekcióhoz, illetve beíráshoz bonyolult, nagy csőszámot igénylő, tehát költséges segédáramkörökre van szükség. Mindez együttesen nagy fizikai méretekhez és viszonylag nagy meghibásodási valószínűséghez vezet.

Ezeken a nehézségeken segített HOLT (Bureau of Standards) úgy, hogy a katódsugárcső ernyője helyett fizikailag különálló kondenzátorokat használ, amelyeket egymástól és a szelekciós áramköröktől germániumdiódák választanak el. Ez a módszer egyelőre még csak kísérleti stádiumban van; kísérleti modell ugyan kisebb kapacitásra már épült, de tapasztalatok még nem állnak rendelkezésre. Kétségtelen, hogy a módszer alkalmas arra, hogy erősen miniatürizálják és megközelítsé a tényleges mikrokomponenseket. A szelekciós áramkörök is viszonylag egyszerűbbek és tranzisztorokkal is megoldhatók. További lehetőséget jelent ebben az irányban a ferroelektromos anyagok használata, amelyeknél a nagy dielektromos állandó miatt rendkívül kis fizikai méretek és nagyfokú mechanikai stabilitás érhető el; az előállításhoz szükséges technológia is olcsó.

3.232 A mágneses állapot megváltoztatása egyik formájában lényegében véve a magnetofon elvét hasznosítja, részben közvetlenül, tényleges magnetofon alakjában, részben pedig mágneses dob formájában. Ezek a technikai részletek annyira közismertek, hogy nem szükséges rá kitérni. A magnetofont mint gyakorlatilag korlátlan kapacitású memóriát használják. Minthogy a beírás, illetve kiolvasás csak egy irányú mozgással történhet, az adatok elővételéhez, illetve a megfelelő helyre történő beírásához időnként a szalagtekercsek visszapörgetésére van szükség, ami a várakozási időt rendkívül megnyújtja.

Ezt a nehézséget a mágneses dob azáltal hidalja át, hogy körmozgást végez, tehát az adatok periodikusan rendelkezésre állnak. Ez viszont a kapacitás viszonylagos csökkentését jelenti: a gyakorlatban egy-egy dobon néhány ezer tízjegyű számnál többet nemigen lehet elhelyezni. A várakozási idő a fordulatszámtól függ, általában 6—10 milliszekundum körül mozog, ami a kapcsolóelemek működési idejénél több nagyságrenddel nagyobb. Mindkét módszer nagy előnye azonban a tárolás tartós volta, még abban az esetben is, ha a hálózati tápfeszültség valamilyen oknál fogva kimarad.

3.233 A mágneses állapot megváltoztatásának másik formája a ferritgyűrűket hasznosítja kétállapotú elemek formájában; minden egyes bináris jegynek egy-egy ferritgyűrű felel meg. Minthogy a *jelenlegi* gépeknél az átlagos memória-kapacitás kb. 2—4000 tízjegyű decimális szám, mintegy 60—120 ezer bináris számjegy tárolására, tehát ugyanennyi ferritgyűrűre van szükség. Ez a memóriakapacitás azonban már a jelenlegi alkalmazásokhoz is kicsi, még inkább az a később tárgyalandó bonyolultabb feladatok megoldásához.

3.3 A technológiai fejlesztés perspektivái

3.31 A számológépek és az agyvelő közötti analógia

A mikrokomponensek feltétlen szükségességét legjobban akkor értjük meg, ha a számológépet az emberi agyvelővel hasonlítjuk össze. Ezzel az analógiával ugyan sokan és sokszor visszaéltek; ha azonban megfelelő óvatossággal használjuk fel, rendkívül hasznosnak bizonyul. A kibernetika műszaki szempontból az első tudatos és módszeres kisérlet arra, hogy az élő szervezeteken megfigyelhető konstrukciós és organizációs elveket a konkrét műszaki gyakorlatban hasznosítsuk.

Kétségtelen, hogy az emberi agyvelő nem kis mértékben azért *is* tudja a maga rendkívül bonyolult funkcióit ellátni, mert elegendő nagy számban rendelkezik a szükséges kapcsolóelemekkel, ti. a neuronokkal, ahhoz, hogy a szükséges kombinációkat megvalósíthassa. A neuronok a szinapszisokon keresztül kapcsolódnak egymáshoz, a neuronok által keltett villamos impulzusok kombinálása és irányítása a különböző neuronok felé a szinapszisokban történik.

A számológép terminológiájában ezt a következőképpen lehet megfogalmazni: a természet a szinapszisokban a logikai műveleteket és ezek kombinációit instrumentálja, a tulajdonképpeni neuronok a neuronális impulzusok erősitésére, illetve regenerálására szolgálnak. A szinapszis + neuron (ebben a sorrendben) tulajdonképpen egyetlen egységet alkot: a különböző helyekről beérkező impulzusok logikailag kombinálódnak, majd az eredő impulzus a neuronban történő regenerálás után további szinapszisok felé ágazik el.

Rendkívül figyelemre méltó, hogy a számológépek konstrukciós elvei öntudatlanul is ebben az irányban fejlődnek. A jelenlegi konstrukciókban a gépet szabványositott egységpanelekből rakják össze. Az egységpanelek bemenő oldalán germániumdiódákból kiképzett logikai áramkörök vannak, amelyek a logikai konjunkció, diszkonjunkció és negáció kombinációi. Ez felel meg a színapszisnak. Ezekhez csatlakozik a tulajdonképpeni kapcsoló-elem, a jelenlegi kiviteli formában egy elektroncső, melynek egyetlen feladata a logikai áramkörökben keletkező eredő-impulzusok regenerálása és továbbítása a többi egységpanelek felé. Ez felel meg magának a neuronnak. A logikai egységpanelek analógiája a szinapszis + neuronból álló egységgel kézenfekvő.

3.3 2 Kémiai módszerek alkalmazásának lehetősége

Világos tehát, hogyha a digitális számológépeket a jelenleginél bonyolultabb feladatok megoldására is alkalmassá akarjuk tenni — és erre legalább is *logikailag* megvan a lehetőség — egyrészt lényegesen növelni kell az egységpanelek számát, másrészt pedig javítani kell az egységpanelek *organizációját.* A jelenlegi szerkezeti elemek méretei és energiaszükséglete azonban az egységpanelek számának bármiféle, valóban jelentékeny növelését — ha gyakorlatilag kezelhető keretek között akarunk maradni — egyszerűen lehetetlenné teszik. A tranzisztorok és ferritgyűrűk alkalmazása a nyomtatott áramkörök technológiájával kombinálva a jelenlegiekhez képest ugyan a lineáris méreteknek egy teljes nagyságrenddel való csökkentését teszik lehetővé, de az így kialakítható logikai egységek még mindig távol vannak a valódi mikrokomponensektől; méreteik még mindig legalább két nagyságrenddel nagyobbak, mint azoké a szerkezeti elemeké, amelyeket a természet az agyvelőben használ.

Minden jel arra utal, hogy a digitális számológépek szerkezeti elemeinek lineáris méreteit (legalábbis a jelenlegi technológiával) nem lehet lényegesen csökkenteni; a szerelés már a jelenlegi o-betű nagyságú ferritgyűrűknél is kényelmetlen és drága. Ha valódi mikrokomponensekhez akarunk eljutni, a jelenlegi gyártástechnológiát radikálisan meg kell változtatni. A szerkezeti elemek gyártási technológiáját jelenleg — a tranzisztorok kivételével — túlnyomó részben *fizikai módszerek* alkalmazása jellemzi. A megoldást minden valószínűség szerint a *kémiai módszerek* alkalmazása fogja jelenteni. A félvezetők már egy lépés ebben az irányban. Ezek révén a valódi mikrokomponensek előállítását és az olcsó gyártási technológiát egyszerre lehet megvalósítani. Ez a módszer még teljesen feltáratlan; használhatóságát és jelentőségét semmi sem bizonyítja jobban, mint az a tény, hogy — a természet is ezt a technológiát használja az agyvelő konstrukciójánál.

3.33 Példák

A lehetséges módszerek és a felhasználható effektusok száma szinte korlátlan. A sokfajta lehetőség közül példaképpen csak kettőt akarunk megemlíteni:

Már említettük, hogy a félvezetőknél a vezetőképesség vezérelhető megváltozását hasznosítják; a tulajdonképpeni alapeffektus az, hogy a félvezetőben mobil töltéshordozók vannak jelen, amelyeket az előzőleg legkínosabban megtisztított alapanyagba mesterséges szennyezéssel visznek bele. Éppen az alapanyag gondos tisztítása és az utólagos szennyezés az, ami a technológiát rendkívül kényessé és drágává teszi. Mármost mobilis töltéshordozók nemcsak tiszta fémekben, hanem vegyületekben is felléphetnek. Éppen ezért kézenfekvő az a gondolat, hogy olyan *vegyületeket* (és ne csak *ötvözeteket)* állítsunk elő, amelyek eléggé mobilis töltéshordozókkal rendelkeznek. Tiszta vegyületek szintetizálása sokkal egyszerűbb technológiát jelent, mint a fémek előzetes megtisztítása és az utólagos, rendkívül kis százalékú és amellett pontosan betartandó ötvözés. Szóbeli diszkussziók során a kémikus szakemberek sokféle lehetőségre rámutattak; figyelmet érdemel DÉNES PÉTER elgondolása szerves kristályok felhasználását illetően.

A másik lehetőségre maga a természet ad példát: ez a reverzibilis kémiai reakciók alkalmazása kapcsolóelemekben. Ismeretes, hogy a neuronban a beérkező impulzus hatására reverzibilis kémiai reakciók mennek végbe, amelyek végén ismét elektromos impulzus keletkezik. A részletek még mindig nincsenek teljes mértékben tisztázva, de ismeretesek más, anorganikus reakciók, amelyek reverzibilisek és amelyek például tárolás, tehát memória-célokra legalábbis elméletileg felhasználhatók. Ilyenek pl. a különböző akkumulátorokban végbemenő reakciók. A kémikusok, biokémikusok és híradástechnikusok együttműködése ezen a területen rendkívül fontos, gyakorlatilag is hasznos új eredményekre vezethet.

3.34 A kémiai módszerek alkalmazásának következményei. A kémiai módszerek alkalmazásával — ha megvalósul — a digitális számológépek fejlődése kétségtelenül fordulóponthoz fog érni. Egyrészt lehetővé fogják tenni, hogy az élő szervezet mintájára valóban olcsó mikrokomponenseket állítsunk elő. Ennek döntő fontossága van olyan feladatok megoldásánál, amelyek extrém nagy memóriakapacitást kívánnak meg. Másrészt azonban *a kémiai reakciókat inherens módon lássuk,* legalábbis a jelenleg szokásos sebességekhez viszonyítva. Ami még ennél is fontosabb: *fokozott mértékben lépnek fel az elhasználódásnak és a fáradásnak az élő szervezeteknél megszokott jelenségei.* Igaz, hogy az élő szervezethez képest van egy döntő eltérés: a mesterségesen előállított szerkezeti egységeket meghibásodás esetén egyszerűen ki lehet cserélni vagy regenerálni, ami bizonyos mértékig kompenzálja az élő szervezet spontán regeneráló készségét. A hibás működés ellen, mint NEUMANN JÁNOS egy rendkívül figyelemre méltó dolgozatában kimutatta, lényegében véve logikai, organizációs eszközökkel lehet védekezni, mégpedig az ún. többségi elv alkalmazásával. Lényegében arról van szó, hogy a fontosabb szerkezeti elemeket elegendő számban multiplikáljuk; a gép automatikusan azt az eredményt fogadja el helyesnek, amelyek a multiplikált egységek nagyobb részében megegyezők. A legegyszerűbb eset pl. három közül két egyezés.

A részletes diszkusszió ez alkalommal nem lehetséges; meg kell elégednünk annak a megállapításával, hogy az egymásnak ellentmondó követelmények és lehetőségek miatt nyilvánvalóan kompromisszumokra lesz szükség, amelyeket végső soron azok a feladatok fognak megszabni, amelyekre a gépet építik. A legvalószínűbb, hogy a kémiai eszközöket a nagy kapacitású tárolóegységeknél fogják elsősorban alkalmazni, ahol a kisebb működési sebességet megfelelő organizáció alkalmazásával kompenzálni lehet.

4. A szerkezeti elemek organizációjának kérdései

4.1 A struktúra logikai problémái

Ha a már említett egységpanelek mint elemi szerkezeti egységek adva vannak, a feladat arra redukálódik, hogyan kell ezeket úgy organizálni, hogy valamely adott művelet, pl. az összeadás vagy szorzás minimális idő alatt és minimális számú szerkezeti elemmel elvégezhető legyen. Ezek a gép logikai struktúrájának a kérdései.

Az itt felmerülő problémák a matematikai logika kérdéseitől abban a lényeges pontban különböznek, hogy nemcsak térbeli állapotokról, hanem *állapotok térbeli és időbeli elrendezéséről* van szó. Másként kifejezve: nemcsak az a körülmény fontos, hogy az egyes logikai változók a kétféle lehetséges érték közül melyiket veszik fel, tehát milyen *térbeli* kombinációk fordulnak elő, hanem döntő fontosságú az is, hogy ezeket az értékeket *milyen időpontban, milyen egymásutánban* veszik fel. Az itt felmerült bonyolult problémák a matematikai logika egy új ágának, az ún. szekvenciális logikának a kifejlődéséhez vezettek. A részletek kifejtése sajnos túlságosan messzire vezetne.

A struktúra logikai problémái, vagyis az egyes műveletek optimális instrumentálása azonban a teljes problémának csak egy része. Az egész probléma ennél általánosabb és a következő két kérdéscsoportra oszlik:

— milyen műveletekre van szükség valamely *adott probléma* megoldásához,

— milyen problémákat lehet a gép szerkezeti elemeiben instrumentált *adott műveletekkel* elvégezni.

4.2 A memóriaorganizáció kérdései

Az első kérdéscsoport reprezentatív problémája a memóriaorganizáció. A digitális számológépekkel általában kétféle problémát lehet feldolgozni:

— az első típust *kevés adat,* de *bonyolult program* jellemzi. Ilyenek például az elméleti fizikában fellépő differenciálegyenletek;

— a második problémát rendkívül *nagyszámú adat* és viszonylag *egyszerű program* jellemzi. Ilyen pl. a nagyüzemi bérszámfejtés vagy magasabb szinten a népgazdasági tervezés.

Mindkét esetben felmerül a memóriakapacitás kérdése. Az első esetben elsősorban a programot, a második esetben pedig a nagyszámú feldolgozandó adatot és az eredményeket kell tárolni.

A jelenlegi gyorsmemóriák kapacitása néhány ezer tízjegyű szám. A megoldásnál közönséges magnetofont használnak; az oda-vissza való pörgetés azonban nehézkes és az adatok beviteléhez ill. kivételéhez szükséges várakozási idő hosszú. Az organizáció szempontjából ez utóbbi a legfontosabb, mert megnehezíti a gép egyébként gyors működésének racionális kihasználását. *A várakozási idő azonban organizációs eszközökkel csökkenthető,* pl. úgy, hogy a memóriát két vagy több lépcsőre osztják. A gyorsműködésű, de kis kapacitású és a nagy kapacitású, de hosszú várakozási idejű memóriaegység közé viszonylag kis kapacitású, közepes gyorsaságú memóriaként beiktatják a *mágneses dobot,* mely a kettő között mintegy áttételként szerepel. A részletek ismeretesek. Amire ebben az összefüggésben még rá kell mutatni, az a *kibernetikus analógia:* a konsruktörök ezen a ponton is öntudatlanul az emberi emlékezést utánozták, amelynél a gyakran használt adatok azonnal rendelkezésre állanak, viszont annak a felidézéséhez, amit ritkán használunk, érezhetően hosszú időre van szükség.

4.21 Szelektív emlékezés

A számológép és az ember memóriája között azonban van egy lényeges különbség: a programozásnál a memóriában minden adatnak a helyét *előre pontosan meg kell határozni,* és a memóriába való bevitelre, illetve az onnan történő kivételre a gépet külön-külön *utasítani kell.* Ezzel szemben az emberi memóriánál — megint a számológép terminológiájában kifejezve — láthatóan nemcsak az adatok tárolása történik automatikusan, hanem ugyanakkor annak a memóriapozíciónak a tárolása is, ahová az adatokat az emlékezés elraktározta. Ez a két körülmény kombinálva az emberi agyvelőben minden jel szerint meglevő keresési (scanning) mechanizmussal, lehetővé teszi a szelektív visszaemlékezés folyamatának teljesen automatikus lefolyását, valószínűleg többlépcsős asszociális mechanizmusok segítségével.

A most elmondottak szabják meg a memóriaorganizáció fejlődési irányát. Egyrészt a jelenlegi nehézkes keresési—utasítás-rendszer helyett szükség van egy *ténylegesen kereső művelet* (scanning) instrumentálására; másrészt meg kell oldani az adatok *asszociatív ismérvének* az adatokkal együtt való tárolását is. A memóriába való automatikus bevitel egyszerűen megoldható, de az automatikus kivétel még nincs megoldva. *Ez viszont a jelenlegi nehézkes programozási technika alapvető megváltoztatását követeli meg.* Egyik sem könnyű, de feltétlenül megoldandó feladat.

4.3 A működés logikai problémái

4.31 A program mint algoritmus

Mint említettük, a gép tényleges működését a program határozza meg. A program: utasítások sorozata, effektív eljárás, amely megszabja, hogy a gépben instrumentált műveleteket milyen sorrendben kell alkalmazni. A program tehát nem más, mint *általános algoritmus.* Ha attól a gyakorlati korláttól, amit a véges memóriakapacitás jelent, elvileg eltekintünk, az előbbiekből következik, hogy *a gép minden olyan feladatot meg tud oldani, amelynek algoritmusa a gépben instrumentált elemi műveletek véges hosszúságú kombinációjával előállítható, más szóval: amit egyértelmű szabályokba lehet foglalni.* A működés logikai problémája tehát oda redukálódik, hogy milyen problémákat tudunk szabályokba foglalni, milyen feladatok algoritmusát tudjuk az adott műveletekkel előállítani. A digitális számológépek elmélete ezen a ponton ismét érintkezik a matematikai logikával, nevezetesen a kiszámítható számok, a TURING-féle gépek és az általános rekurzív függvények elméletével.

4.32 A probléma általánosítása

A digitális gépek impulzuskombinációkkal dolgoznak. *Ezek interpretációja azonban önkényes*: már a jelenlegi gépeknél is részben számokat, részben pedig utasításokat jelentenek, amelyek között a gép önmagától természetesen nem tud különbséget tenni. Az impulzusok tényleges felhasználásánál jelenleg egy sor olyan — a felhasználás által megszabott — korlátozás érvényesül, amely sem logikailag, sem pedig műszakilag nem szükségszerű:

— a kiinduló adatokat nemcsak a perforált szalagról, hanem alkalmas műszer útján közvetlenül a szó általános értelmében vett „külső környezetből" is lehet származtatni. Ebben az esetben azonban az adatok már nemcsak számokat vagy utasításokat, hanem tetszőleges kémiai vagy fizikai mennyiséget reprezentálhatnak. Az ehhez szükséges műszerek, valamint az analóg-digitális és inverz átalakítás technikája már rendelkezésre áll;

— az utasítások mechanikai mozgást jelenleg csak a kimenő írószerkezetnél vezérelnek. Ez a korlátozás nem szükségszerű; az impulzuskombinációk felhasználhatók bármely más mechanikai mozgás, pl. szerszámgépek vezérlésére is;

— a műveleti utasítások nem szükségképpen aritmetikai műveletet kell hogy jelentsenek. Jelenthetnek bármely más szabályt is, pl. logikai műveleteket, grammatikai szabályokat vagy technológiai utasításokat is; végül

— a program előzetes összeállítása sem feltétlen logikai szükségesség. A gép diszkriminációs képességénél fogva módosítani tudja saját programját is azáltal, hogy nemcsak a számokon, hanem az utasításokat reprezentáló impulzus-kombinációkon is transzformációkat, pl. aritmetikai műveleteket hajt végre. Ezt a programozás egyszerűsítése és automatizálása érdekében jelenleg is kiterjedten hasznosítják. Így elvileg lehetséges az is, hogy a gép a külső környezetből kapott képletesen szólva ingerek (impulzus-kombinációk) hatására a memóriában tárolt program megfelelő részeinek automatikus végrehajtásával reagáljon.

5. Alkalmazások

5.1 Automatikus programozás

A felhasználás megkönnyítését legjobban az automatikus programozás szolgálja.

A jelenlegi technika a következő: az egyes gyakran előforduló műveletek (mint pl. négyzetgyökvonás, $\sin x$ kiszámítása adott helyen) programját előre kidolgozzák, az argumentum helyét üresen hagyják és mint ún. szubrutint, tehát részprogramot, egyszer és mindenkorra elhelyezik a gép nagy kapacitású, de lassú memóriájába. Az egész részprogram egyetlen vezérszámot kap, ami logikailag a GÖDEL-számnak felel meg. Ha mármost a számítások során pl. $\sin x$ értékére van szükség, a gép a megfelelő vezérszám alapján az egész szubrutint átviszi a lassú memóriából a gyors memóriába, az argumentum üres helyeire behelyettesíti a megfelelő értékeket, kiszámítja a szükséges értéket (végrehajtja a szubrutint), az eredményt elraktározza az előre kijelölt memóriapozicióba, majd visszatér a főműveletsorozatra. A gép tehát képletesen szólva egyetlen utasításhoz egy egész módszert asszociál.

Ha az ilyen részprogramok elegendő nagy számban előre ki vannak dolgozva (az angliai cambridge-i egyetem szubrutin „könyvtára" már 156 szubrutinból áll), a gép a megfelelő utasítások alapján az egyes részprogramokat kompilálni tudja, tehát végső soron maga állítja össze a saját programját.

A szubrutin módszer lényegében véve mechanikus eljárás. A fejlődés tulajdonképpeni útja logikai, és az algoritmusok elméletére kell támaszkodnia. Itt fel lehet használni a gépnek azt a képességét, hogy nemcsak a számokon, hanem az utasításokat jelentő impulzuskombinációkon is aritmetikai műveleteket tud végrehajtani. Ilyen módon el lehet érni, hogy valamely műveleti utasítást alkalmas rekurziós formulával az őt megelőző egy vagy több utasításból származtassunk, másként szólva: egyik utasítás a másikat generálja. Lényegében véve tehát arról van szó, hogy *ki kell dolgozni a szabályok kidolgozásainak szabályait.* A feladat még részleteiben nincs megoldva, de világszerte intenzív kutatások folynak.

5.2 *A flexibilitás növelése*

Említettük, hogy a gépben felhasznált impulzuskombinációk értelmezése önkényes, és hogy az utasításokat nemcsak egyetlen művelet, hanem egy egész műveletsor, végső fokon tehát a módszer kiváltására is fel lehet használni.

Ezen a területen is már egy sor fontos eredményről lehet beszámolni. Ismeretes, hogy a számológépeket eredményesen használják fel idegen nyelvű szövegek fordítására. Az, hogy a gépi fordítás jelenleg viszonylag lassú, két körülményre vezethető vissza: az egyik a szótár céljaira túlságosan kicsi memóriakapacitás. A másik körülmény, melyet gyakran figyelmen kívül hagynak, hogy a fordítást nem *fordítógép,* hanem *számológép* végzi. Ez azt jelenti, hogy egyrészt *vannak olyan szerkezeti egységek, melyekre a fordításnál nincsen szükség,* mint pl. az aritmetikai egység. Másrészt a gép *nem tartalmaz olyan műveleteket, amelyekre viszont a fordításnál nagymértékben szükség van,* mint pl. a jó hatásfokú gyors keresés (szótározás). Végül meg kell említeni azt is, hogy a mechanikus fordítás módszertana sincs még kellőképpen kidolgozva.

Másik alkalmazási példa a termelési folyamatok irányítása. A részletek ismertetése túlságosan messzire vezetne; meg kell említeni azonban, hogy az idén márciusban a Szovjetunióban tartott nemzetközi számológépkonferencián részletesen foglalkoztak a számológépeknek a kohászati folyamatok irányításánál történő felhasználásával, az Egyesült Államokban pedig szerszámgépek közvetlen vezérlésével kísérleteznek.

5.3 *Logikai gépek*

Ismeretes, hogy a számológépben lényegében véve logikai műveleteket instrumentálnak. A memória felhasználása azt a perspektívát nyújtja, hogy a gép nemcsak egyes *ítéletek* igaz vagy nem igaz voltát határozza meg, hanem képes arra is, hogy egész itélet-sorokat, következtetéseket mechanikusan hajtson végre. A szillogizmus instrumentálásának első kisérlete NEMES TIHAMÉR-tól származik. Újabban KALMÁR akadémikusnak vannak rendkívül érdekes eredményei kialakulóban.

A logikai gépek kérdése azonban nemcsak elméletileg, hanem gyakorlatilag is érdekes és fontos. B. V. BOWDEN egy rendkívül érdekes példát hoz arra, hogyan lehet a digitális számológépet tartószerkezetek tervezésénél nem egyszerűen csak arra felhasználni, hogy a szükséges számításokat elvégezze, hanem arra is, hogy adott kiinduló feltételek és követelmények alapján a gép adott módszereket automatikusan alkalmazzon. Reméljük, hogy rövidesen módunk lesz másik publikációban megmutatni, hogyan lehet a digitális számológépeket a műszaki tervezésnél *általában* hasznosítani és konkréten egy transzformátor tervezésének a példáján bebizonyítani, hogy a gép a felvett adatok, adott körülmények és az ismert, szabályokba foglalható módszerek alapján legalábbis bizonyos szabványos terveket önmagában is el tud készíteni.

Befejezésül még egyszer szeretnénk hangsúlyozni, hogy az *elektronikus digitális számológépek tulajdonképpeni jelentősége* nem elsősorban a numerikus számítások gyors elvégzésében, hanem *abban az új technikában van, amelyet az impulzuskombinációk önkényes értelmezése, az ezeken, illetve ezek segítségével végrehajtható műveletek rendkívüli sokoldalúsága jelent.* Ez teszi lehetővé, hogy ezeket a gépeket — föltéve, hogy a szükséges műveleti szabályokat meg tudjuk adni — az emberi termelő, szervező, tervező és tudományos tevékenység olyan széles területein tudjuk alkalmazni, amelyeknek határait ma még korántsem tudjuk áttekinteni.

HOZZÁSZÓLÁSOK

EGERVÁRY JENŐ elnök

T. Hallgatóság! Az a tény, hogy ezt az előadást az Akadémiának két osztálya tűzte programjára, nyilván már előre jelezte, hogy a számológépeknek már a jelenben is és különösen a jövőben az elmélet és gyakorlat szempontjából mekkora fontosságot tulajdonít az Akadémia. Azt hiszem ennek a körülménynek betudásával meg kell állapítanunk, hogy az előadó úr az összes szempontokból igen sikerült és bennünket minden vonatkozásban tájékoztató előadást nyújtott, amelyért azt hiszem, mindkét osztály nevében kifejezhetem őszinte köszönetünket. Mindkét osztály reméli, hogy a most elkövetkezendő hozzászólások szintén a legkülönbözőbb szempontokból fogják a kérdést megvilágítani.

Itt pusztán csak azt a technikai kérelmet kell a felszólalókhoz intéznem, miután ilyen szerencsétlen terembe kerültünk ezzel az előadással, ahol dobogó nincs és ilyen zsúfoltságban ül a hallgatóság, amely között jóformán nem is vesszük észre, ki kíván felszólalni —, hogy a felszólalók sziveskedjenek a mikrofonhoz fáradni, nevüket pedig hangosan bemondani, hogy a jegyzőkönyvvezető azt tekintetbe vehesse. Ezek után kérem a jelentkezetteket, hogy kezdjék meg a felszólalásokat.

KOZMA LÁSZLÓ

Előljáróban megjegyzem, hogy az előadónak igaza van: az elektroncső számológépek céljaira előnyösebb, mint a jelfogó, de éppen ezért szükségtelen az összehasonlítást túlozni és eltorzítani, ahogyan azt az előadó tette. Mert ha a jelfogó ténylegesen százszor vagy ezerszer rosszabb volna az elektroncsőnél erre a célra, ahogyan TARJÁN elvtárs beállította, akkor fel sem merülhetne a jelfogó ilyen célra való felhasználási lehetőségének a kérdése. Már pedig nemcsak a második világháború előtt, hanem utána is terveztek jelfogós áramköröket tartalmazó számológépeket mind Amerikában, mind Európában. A Bell Laboratórium 4—5 évvel ezelőtt Philadelphiában üzembe helyezett egy teljesen automatikus — lyukasztott szalaggal dolgozó — telefon díjelszámoló berendezést. A gép a beszélgetési költségeket teljesen automatikusan számítja ki a szalagra felvett helyi- és interurbán beszélgetések adataiból, miközben figyelembe veszi a különböző tarifákat és beszélgetési időket. A berendezés a számlákat is automatikusan állítja elő olyan formában, hogy azok továbbíthatók az előfizetőkhöz. Ennek a gépi berendezésnek néhány fontos áramköre, így a kalkulátor is tisztán jelfogókból épül fel. Egy-egy ilyen áramkörben 800—1200 db jelfogó van. Minthogy itt díjelszámolásról van szó, természetes, hogy a megbízhatóság elsőrendű szempont volt. Nyilvánvaló, hogy a Bell Labóratóriumnak módjában lenne ilyen áramköröket fűtött csövekből, tranzisztorokból vagy más alkalmas elektronikus elemekből felépíteni, ha célszerűnek tartanák.

Tudomásunk van továbbá arról, hogy a háború után, az 50-es években, a jénai optikai művek ugyancsak ilyen — jelfogókból felépített — kalkulátor áramköröket terveztek. Ezek célgépek, lencsékkel kapcsolatos számítások elvégzése céljából. Jelfogós, hasonló berendezéseik vannak a svédeknek és az angoloknak is.

Mármost legyen szabad megmondanom, hogy hol túloz TARJÁN elvtárs. Először is a jelfogós kalkulátorban a különböző műveletek folyamán az egyes jelfogók nem mindig működnek, hanem csak egy bizonyos részük. A Műegyetemen most tervezünk egy jelfogós kalkulátort didaktikai és reprezentációs célokra. Az eddig elkészült áramkörök alapján meglehet állapítani előre a kb.-i számolási időket. Pl. egy másodfokú egyenlet megoldása 10—20 mp-t fog igénybe venni, amennyiben az egyenletben 8 jegyű decimális számok szerepelnek. Ez idő alatt a jelfogóknak csupán csak egy része működik, a legerősebben igénybe vett jelfogók sem működnek 80—100-nál többször. Ha folyamatos üzemeltetést tételezünk fel napi 8—10 órán át, a legerősebben igénybe vett jelfogók élettartama is 10 000 üzemóra felett van. Ez kb. megfelel a 100 000 000-s működési számnak, ahogy az előadó is állította.

Az elektronikus számológép természetesen ugyanezt a feladatot tized idő alatt tudja megoldani, de a kérdés az, hogy szükséges-e ez a nagy sebesség — legalábbis a mi hazai viszonyaink között. Ismerünk példákat arra, hogy egyes technikai megoldások jóval megelőzték koruk igényeit, így pl. a Virág—Pollák-féle gyorstávíró. Ez olyan gyors működésű volt, hogy nem jött össze annyi távirat, amennyinek közvetítésére képes volt. Kérdés, hogy nem ugyanez-e a helyzet most nálunk is az elektronikus számológépekkel kapcsolatban.

Kétségtelen, hogy az elektronikus kalkulátoroknál bizonyos aránytalanság észlelhető a berendezések ára és az azokat kiszolgáló személyzet költsége között. Tudtommal egy átlagos elektronikus számológép évi amortizációja 80 000 Ft körül van. Ugyanakkor a kiszolgálásához 8—12 személy szükséges: matematikus, aki a programot készíti elő, azután karbantartó műszerészek és üzemeltető személyzet. Ezeknek évi költségét 240 000 Ft-ra lehet becsülni; itt voltaképpen csak a nagyságrend érdekes. Úgy néz ki, hogy maga a kalkulátor csak harmadrész annyiba kerül, mint az azt kiszolgáló személyzet. Ebből logikusan arra lehet következtetni, hogy inkább a kalkulátort kellene drágítani és a kiszolgáló személyzetet csökkenteni. Ez a tendencia megmutatkozik a különböző kalkulátor konstrukciókban, amikor szubrutinokat építenek be. Ezek megdrágítják a kalkulátort, de alkalmazásuk révén csökken és egyszerűsödik a programozás. Érzésem szerint ezt addig kellene folytatni, amíg a személyzet kb. ugyanannyiba kerül, mint maga a kalkulátor.

A számológépek elkerülhetetlenül speciálizálódni fognak. Nem az univerzális számológépé a jövő, hanem a speciális célú kalkulátoroké. Ezek kétségtelenül egyszerűsödni fognak az univerzális gépek bonyolultságához viszonyítva. Pl. automata gépsorok vezérlésénél nincs szükség elektronikus sebességű működésekre, mert a berendezések nem mikroszekundumok, hanem másodpercek alatt dolgoznak. Különben is a tápláló és az eredményeket leolvasó berendezések sokkal lassabban működnek, mint maguk az elektronikus számológépek.

Úgy vélem, hogy a jelfogós megoldások számára még adódnak lehetőségek ott, ahol a jelfogók élettartam szempontjából kielégítők. Egyébként egyetértek TARJÁN elvtárssal, hogy a jövő számológépében sem jelfogó, sem cső nem lesz, hanem valószínűleg tranzisztor vagy még inkább valamilyen mágneses erősítő. A tárolás valamennyi számológépben nagy probléma. Az elektronikus berendezések számára valószínűleg a ferritgyűrű lesz a megoldás, ahogy az előadó is mondotta. Célgépek esetében a tárolás sokkal kisebb probléma, mert rendszerint sokkal kevesebb műveletet kell elvégezni, mint egy univerzális kalkulátorral. Azonkívül a berendezés ezáltal gazdaságosabbá válik.

Végül még egy kérdésem volna a neuronokkal kapcsolatban. Az előadó azt mondotta, hogy az emberi agyban 13 milliárd neuron van. Tavaly még csak 1,5 milliárdról olvastam valahol. (Derültség.) Mindenesetre az összehasonlítás a neuronok és a számológép bináris elemei között meglehetősen torz képet adhat, mert az előadó azt mondta, hogy ha az agyban levő neuronmennyiség szaporodik, ezzel megnövekedik az agy működési képessége is; továbbmenően ebből az következnék, hogy akinek nagy agya van, az okosabb, mint a kis agyú ember, holott ez nyilván nem áll fenn. (Derültség.)

*

EGERVÁRY JENŐ elnök: Az előadó a hallgatóságtól teszi függővé, egyenként vagy egyesítve válaszoljon-e a hozzászólásokra. Felkiáltások: „Egyenként!"

TARJÁN REZSŐ

Sajnálom, hogy amit itt a részletesen kidolgozott és nyomtatásban megjelenő anyagból rövidítve előadtam, a jelfogós és az elektronikus gépek közötti összehasonlítás terén félreértésre adott alkalmat. A jelfogós gépeknek ténylegesen az a sajátos területük, amelyekről KOZMA elvtárs beszélt, mint például a telefonok díjelszámolása stb. Előadásomnak célja a *fejlődés irányának* megvilágítása, ami az irodalomban is élénk vita tárgya.

Az univerzálisan felhasználható gépek jelenleg főként tudományos számításokat végeznek, ahol a számítások olyan méretűek, hogy abszolúte nem mindegy, hogy egy jelfogó, mondjuk, másodpercenként ezerszer húz-e meg — amit a mai jelfogók egyébként még nem tudnak teljesíteni — vagy pedig mikroszekundum tartamú impulzusokkal tudunk-e dolgozni. A meghúzási időt azért emeltem ki, mert a működési sebesség elbírálásánál ez látszott a legmegfelelőbb összehasonlítási alapnak. Abban ugyan igaza van KOZMA elvtársnak, hogy a számológépben nem minden jelfogó dolgozik állandóan, szemben az elektroncsövekkel, amelyek állandóan üzemben vannak, ez azonban *nem* döntő körülmény. A kalkulációnál ezt úgy vettem figyelembe, hogy az összes kerekítéseket a jelfogó javára végeztem el.

A döntő szempont egy-egy számítási munka elvégzésének a költsége. Ha azt számítjuk ki, hogy ugyanannak a munkának az elvégzése mibe kerülne a jelfogós, illetve az elektronikus gépekkel, akkor — mint R. K. RICHARDS „Arithmetic Operations in Digital Computers" c. éppen ma beérkezett könyvében írja — a jelfogó mindenképpen hátrányban van az elektroncsővel, és méginkább azokkal az eszközökkel szemben, amelyek az elektroncsöveket is kiszorítják és amelyek diszkutálása — mondom — az előadás fő tárgya volt.

Speciális célgépek esetén nem vonom kétségbe a jelfogók használhatóságát. A felszólaló a jénai Zeiss-művek jelfogós gépét említette, amelyet kifejezetten sugároptikai számítások elvégzésére készítettek. Hadd tegyem hozzá én, hogy a svéd Távíróigazgatóság *BARK* megjelöléssel kettes számrendszerű gépet épített, amely szintén jelfogókkal dolgozik. Ezenkívül azonban más európai jelfogós számológépről nem tudok. Ezzel szemben a legelső jelfogós számológépet, ti. a *Mark I-et* tavaly már lebontották, mert elavult. Kétségtelen, hogy ez a folyamat még folytatódni fog.

A jelfogós gépeknél éppen a memória megoldása a legnehezebb feladat, és a szűk memóriakapacitás az oka annak, hogy csak speciális célokra alkalmazzák őket. Jelfogós gépeket ugyanis csak ott lehet jól alkalmazni, ahol nincsen szükség nagy memóriakapacitásra. Azoknál a problémáknál viszont, amelyek az automatikus számológépek részére elsősorban figyelembe jönnek, legnagyobb részt olyan problémákról van szó, ahol *igen nagy* memóriakapacitásra van szükség, mint például az, a sajtóban is többször szerepelt 800 lineáris egyenletből álló rendszer, amelyet a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának BESZM jelű közismert nagy gépe nem egészen 20 óra alatt oldott meg.

Ami a napi 8—10 órás üzemidőt illeti, az összehasonlítással nem tudok egyetérteni. A kialakult nemzetközi gyakorlat azt mutatja, hogy az elektronikus gépek napi 24 órán át működnek, 7 napos munkahéttel, vagyis gyakorlatilag megszakítás nélkül. Ebben benne van a preventív karbantartás is, úgyhogy a gép 24 órából ténylegesen kb. 18 órát dolgozik. A gyorsasági igények tekintetében szintén nem értek egyet KOZMA elvtárssal. Ha két lehetőség között választhatunk, amelyek közül az egyik gyorsabb, tehát az elvégzett munkák értékét tekintve, nagyságrendileg olcsóbb, világos, hogy az utóbbi, korszerű megoldást kell választani. A működési sebességgel szemben támasztott igényeket egyébként lényegében véve a felhasználás szabja meg. Az, hogy egy számítás eredményét 20 óra vagy 100 óra alatt kapjuk meg — az arány 1 : 5 — többé-kevésbé önkényes kérdés. A valóságban azonban a működési sebességek aránya — amint azt előadásomban is kimutattam — ennél lényegesen nagyobb. Mint RÉNYI akadémikus egy beszélgetés során említette, a Moszkvában idén márciusban megtartott nemzetközi számológép-konferencián a felhasználók azt követelték a műszakiaktól, hogy a BESZM, amely jelenleg másodpercenként „mindössze" 7—8000 műveletet tud elvégezni, dolgozzék gyorsabban, mert ez a sebesség még nem kielégítő. (Zárójelben megjegyzem, hogy a gép Európában még így is a leggyorsabb.) Azt kívánták, hogy a berendezés másodpercenként legalább egymillió elemi műveletet végezzen, amire a műszakiak azt válaszolták, hogy a feladat rendkívül nehéz, de megoldható. Hogy egy egészen gyakorlati példát említsek, a bérszámfejtésnél sem mindegy, hogy mennyi ideig dolgozik a gép; így például az IMB 701 jelű gépén egy 8000 főből álló üzem teljes bérszámfejtését 24 perc alatt végzik el, emellett a gép még könyvelési feladatokat és tudományos számításokat is tud végezni. Világos, hogy az ilyen technikai lehetőségeket nem szabad kihasználatlanul hagyni.

Ami a gépek organizációját illeti, a tendencia valóban az, hogy a programozási komplikációkat szubrutinok és a programozás automatizálásának módszereivel lényegében a gépben koncentrálják. A karbantartási probléma nem olyan jelentős, mint amilyennek látszik. A karbantartási idő a kialakult gyakorlat szerint a teljes üzemidőnek mintegy 20%-a; emellett azonban külön 5%-ot fordítanak a rutinvizsgálatok ellenére is fellépő hibák elhárítására. A karbantartó személyzet például a BESZM-nél két mérnök és 2—3 technikus. A gép már több mint 3 éve dolgozik és az elvégzett munkákkal a beruházási költségeit már régen amortizálta.

Az univerzális vagy célgépek kérdése nem egyértelmű kérdés. A célgépek viszonylag egyszerű feladatokat olcsón oldanak meg, de ha megváltozik a feladat, az egész gépet ki kell cserélni. Az univerzális gép ugyan drágább, ezzel szemben hihetetlenül flexibilis; ha megváltozik a feladat, egyszerűen leveszik a programtekercset, — mint a gramofonlemezt a lemezjátszóról —, újat tesznek fel és a gép ezzel tulajdonképpen egy másik célgéppé alakult át. A programokat legnagyobbrészt a gép üzemeltetésének első időszakában kidolgozzák, úgyhogy kb. a második-harmadik üzemévtől kezdve a programozási munka jelentéktelenné válik. Kész gép vétele esetén a gyártó üzem a szubrutinokat úgy, ahogy kidolgozza, ugyanúgy küldi ki, mint például a rádiócső-gyárak az általuk gyártott rádiócsövek adatlapjait. Azt hiszem, ezzel nagyjában megválaszoltam az összes kérdéseket.

STRIKER GYÖRGY

Nem kívánok az előadás tudományos részéhez hozzászólni, hanem a most meginduló vitában, mint annak az intézetnek a vezetője, amely jelenleg részben felelős e téma továbbviteléért, tájékoztatni kívánom a hallgatóságot arról, hogyan állunk ma abban a témakörben, amelyet az előadó érintett, rövid visszapillantást vetek a jelenlegi helyzetben arra, hogyan jutottunk idáig, és mi a következő feladat. Azt hiszem, a mai előadás és vita nem volna teljes, ha a Magyarországon előttünk álló feladatokról nem esnék szó.

Mint az előadó is elmondotta, Magyarországon a matematikai gépek kérdésével hosszú évekkel ezelőtt már többen foglalkoztak. Számosan vannak itt a hallgatóságban olyanok, akiknek komoly érdemeik vannak abban, hogy a matematikai gépek ügyét egyik vagy másik részlet-területen rendelkezésre álló igen szűkös anyagi eszközeinkkel előbbre lehet vinni.

Sajnos, ilyen szerény eszközökkel ezt a kérdést a mai viszonyok és a korszerű méretek között megoldani nem lehet. Ezért az Akadémiai Matematikai Intézet vezetői és mások körülbelül két év óta szorgalmazzák, hogy sokkal nagyobb intenzitással foglalkozzunk ezzel a kérdéssel, találjunk ennek gazdát, otthont, pénzügyi alapot. Ez a kérdés nagyon lassan jutott előre. Kicsiny volt a megértés a kérdés jelentőségével kapcsolatban azokon a helyeken, ahol dönthettek volna. Körülbelül 1954 végén döntött az Akadémia elnöksége úgy, hogy a kérdésnek a Méréstechnikai és Műszerügyi Intézet keretében kíván otthont és gazdát biztosítani. Ezzel a döntéssel legalább a lehetősége megnyílt annak, hogy szervezetileg meginduljon a munka. Sajnos, kevéssel jutottunk túl az elvi döntésen. A legkülönbözőbb javaslatok, beadványok sokasága sem tudta biztosítani azokat a nagyon szerény anyagi és személyi kereteket, amelyekkel ez a munka érdemlegesen elindulhatott volna.

Időközben a híradástechnikai tanszéken megindult a párhuzamos munka a jelfogós gépek vizsgálatával kapcsolatban, amiről KOZMA elvtárs szólt, és hasonló párhuzamos munka folyik másutt is. Egészséges dolog a kis eszközöket is itt-ott fölhasználni a téma feldolgozásában. Körülbelül egy éve annak, hogy nálunk a Méréstechnikai Intézetben legalább egy laboratóriumot és kétháróm személyt tudtunk biztosítani arra, hogy elvi síkon tudományos munkatársak és nagyon csekély számú segéderők ezzel a témával foglalkozhassanak. Még mindig nem tudtuk azonban elérni a döntő minőségi változást a szemléletben, amelyet az elmúlt hónapok óta láttunk kialakulni, és amelyet a mostani nagygyűlés már meghozott. Az a tény, hogy a megnyitó előadás vitájában RÉNYI akadémikus, a műszaki osztály beszámolójával kapcsolatban BOGNÁR GÉZA lev. tag és a záróülésen BOGNÁR REZSŐ, az Akadémia főtitkára ilyen súlyt kölcsönzött a témának, jelét adja a változásnak, amely tudományos köreinkben tapasztalható.

Ezért, azt hiszem időszerű megemlíteni, mit tekintünk a következő teendőnek. Elsősorban azt szeretném előadni, hogy az elektronikus, gyorsműködésű számológépek területén a legsürgősebb teendő, RÉNYI akadémikus szovjetunióbeli útjának, az én utamnak és Kalmár akadémikus útjának tapasztalatai alapján a Német Demokratikus Köztársaságban — egy számológép behozatala a Szovjetunióból. Onnan behozható egy közepes nagyságú, nyolcszáz csöves ún. Urál digitálisz gép. Ezzel természetesen koránt sincs minden elintézve. Ennek a gépnek kiszolgálása nagyon jól tájékozott személyzetet igényel. Ennek előkészületeként és folytatásként jelentős csoportnak vagy osztálynak kell ezzel a kérdéssel foglalkoznia és azt megismernie. Ugyancsak szükséges és hasznos, hogy ne csak kész gépet várjunk sült galamb módjára, hanem megismerkedjünk ennek felépítésével, a mágnesdobbal, a memóriaelemek más formáival stb. kísérleti vonalon is, másküiönben nem lesz lehetséges a gép folyamatos üzemeltetése, továbbfejlesztése és a programadatok technikai alátámasztása.

Ezek tehát az előttünk álló legsürgősebb feladatok. Meg kell indítani az Akadémiai Matematikai Intézetnél a céltudatos munkát a programozás kérdéseivel foglalkozó munkatársak kiképzésére, mert máskülönben támasz nélkül marad a behozandó készülék. Meg kell indítani továbbá valamilyen szemináriumot az Akadémiai Matematikai Intézetnél vagy a Műegyetemen káderek képzésére, akik ezeknek a gépeknek matematikai vagy technikai-matematikai kérdéseivel megismerkednek. A Műszaki Egyetemen vagy másutt célszerű volna e gépek szerkesztésével kapcsolatban külön szemináriumot szervezni, mert ha támaszkodhatunk is a Német Demokratikus Köztársaságra vagy a Szovjetúnióra, nekünk számos munkatársat kell ezzel foglalkoztatnunk. Nem helytelen az, ha a kérdéssel több helyen foglalkoznak, ezeknek a munkáknak koordinálása azonban fokozottan szükséges. Meg kell találni az Akadémia harmadik és hatodik osztályának, részben pedig a műszaki területen dolgozó kartársaknak az együttműködését, hogy itt maximális hatékonysággal tudjuk a kérdéseket megoldani.

Az analóg gépek vonalán ajánlatosnak látszik, hogy pl. a Szovjetúnióban kidolgozott EMU 5 típusú gépet, amely egyes feladatoknak modell útján való megoldására rendkívül alkalmas — pl. villamoshálózati vagy vegyipari kérdések megoldására — mi magunk megépítsük. TRAPEZNYIKOV akadémikus, a szovjet szakintézet igazgatója, ehhez kész segítséget nyújtani és az iparra támaszkodva gyorsan tudunk ilyen kérdéseket megoldani.

Döntő változásnak kell végül a külföldi tanulmányutak vonalán bekövetkeznie. Nem elég, hogy KALMÁR akadémikus Drezdában két napig tanulmányokat végzett, RÉNYI akadémikus pedig egy-két hetes konferencián tudott a Szovjetúnióban megismerkedni az ottani intézettel, mert az iparra már nem terjedhetett ki a figyelmük. Itt nagyarányú tanulmányokra van szükség, hogy ezeket a kérdéseket helyszínen tanulmányozzák azok, akik a gépekkel majd dolgoznak és átvegyék a több éves, sőt Leningrádban már több évtizedes tapasztalatokat, amelyek rendelkezésükre állanak. Elhangzott az előadásban is, hogy a mostani nagygyűlés döntő fordulatot mutat az Akadémiának e kérdés értékelésével kapcsolatos magatartás terén. Merem remélni, a további események igazolni fogják, hogy ez a változás nemcsak előadások tartására és a szellemi előkészítésre fog szorítkozni, hanem tényleges operatív lépésekben is meg fog mutatkozni, mert ezzel a kérdéssel nekünk tovább kell foglalkoznunk. Súlyos mulasztása volna tudományos életünknek, sőt ipari fejlődésünknek is, ha ezt elhanyagolnók.

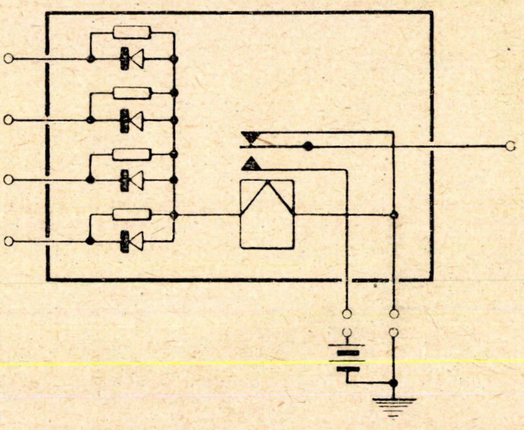
KALMÁR LÁSZLÓ

T. Akadémia, kedves Vendégeink! Legyen szabad a műszakiak után — és remélhetőleg még számos műszaki előtt — nekem, mint matematikai logikusnak is hozzászólnom az előadáshoz és az itt felvetődött kérdésekhez.

Mindenekelőtt helyesbíteni szeretném azt, amit TARJÁN elvtárs a szegediek munkájáról mondott. Igaz, Szegeden alakult egy kutatócsoport, amely céljául tűzte ki, hogy beletanul a számológépek tervezésének és programozásának a kérdéseibe. Azonban ennek a munkának még az elején vagyunk. Irodalom hiányában — mindössze 600 deviza-forintunk van ez évben az ilyen tárgyú könyvek beszerzésére — nagyon keveset tudtunk még tanulni. De ebben van valami jó is. Ugyanis, ha egy matematikus kénytelen aránylag kevés irodalommal a kezében töprengeni valamilyen kérdésről, természetes, hogy a legegyszerűbb problémákat kezdi megoldani az adott kérdés keretében. Így mi is olyan áramkörökkel kezdtünk foglalkozni, amelyekben semmi bonyolult alkatrész nincs, csak huzal és érintkező; de az érintkezőket nem jelfogók működtetik, hanem kézi működésű érintkezőkről van szó, olyanokról, mint pl. egy tumbler kapcsoló — mert a matematikusnak már a jelfogó is túlságosan bonyolult alkatrész. Kiderült, hogy bizonyos műszaki feladatokat, amiket mások jelfogók segítségével oldottak meg, már ilyen primitív eszközökkel is meglehet oldani.

Egyetértek STRIKER elvtárssal abban, hogy most a legsürgősebb feladat külföldről behozni gyorsműködésű számológépet; sőt egy gép nem is elég, már ma több ilyen gépet tudnánk foglalkoztatni. Azonban arra is sort kell keríteni, hogy mi magunk is építsünk matematikai gépeket, mert csak így tarthatunk lépést az e téren világszerte folytatott kutatásokkal. Mi szegediek ebből a munkából TARJÁN elvtárs tanácsára úgy szeretnők kivenni a részünket, hogy *logikai gépek* építésére profilírozzuk magunkat; reméljük, hogy az eközben szerzendő tapasztalatainkat fel lehet majd használni számológépek építése során is.

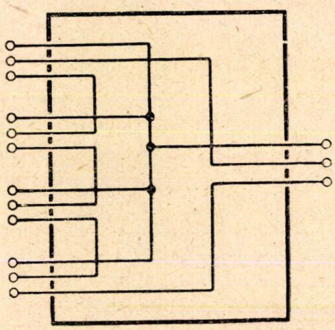
Első lépésként azt tervezzük, hogy megépítünk egy az ún. Ferranti-féle logikai géphez hasonló szerkezetet. Ez a gép arra szolgál, hogy valamely adott ítéletről, amely egyszerűbb „alapítéletekből“ az ítéletkalkulus (Aussagenkalkül) műveletei segítségével van összetéve, megállapítsa, hogy az alapítéletek igaz vagy hamis voltának mely variációinál lesz igaz. Evégett minden egyes logikai műveletet egy „műveleti doboz“ segítségével instrumentál. Vegyük szemügyre pl. a konjunkció nevű logikai műveletet. Ezt egy vagy több ítéleten lehet végrehajtani; a művelet eredménye akkor, és csak akkor igaz, ha a műveletben szereplő ítéletek mindegyike igaz. Ezt a műveletet a Ferranti-gép az 1. ábrán látható „konjukciós-doboz“ segítségével instrumentálja. A bemenő pólusok — egyszerűség kedvéért csak négyzetet rajzoltam — a konjukciós tagoknak felelnek meg; azt, hogy egy tag igaz, az jelzi, hogy a megfelelő pólus feszültség alatt van, azt, hogy hamis, a megfelelő pólus földelése. Ha a négy bemenő közül csak egy is földelve van (a megfelelő ítélet hamis), akkor a jelfogó tekercs mindkét vége földet kap (az egyik közvetlenül, a másik a megfelelő egyenirányítón át), tehát a jelfogó érintkezője alapállásban van és így a kimenő pólust földeli, annak megfelelően, hogy a konjunkció ekkor hamis. Ha azonban mind a négy bemenő feszültséget kap (azaz mind a négy ítélet igaz), vagy egyesek nincsenek bekapcsolva, de amelyik be van kapcsolva feszültség alatt van (amely esetben a be nem kapcsolt bemenők a shunt-ellenállásokon keresztül kapnak feszültséget), akkor a jelfogótekercs egyik vége feszültséget kap, a jelfogó működik és záróérintkezője feszülséget ad a kimenő pólusra is, annak megfelelően, hogy a konjukció akkor igaz.



1. ábra

Itt tehát egy-egy ítélet „logikai értékét“, azaz igaz vagy hamis voltát a megfelelő pólus *feszültségi állapotával* instrumentálják: a hamis logikai értéknek a földelés, az igaznak a (pozitív) feszültség felel meg. Mi Szegeden egészen másképp instrumentáltuk a logikai értékeket: az „igaz“-nak az felelt meg, hogy egy tumbler kapcsoló zárva van, a „hamis“-nak az, hogy nyitva van. Így azonban megakadtunk a negáció nevű logikai művelet instrumentálásánál, amelynek értéke igaz, ha a negált ítélet hamis, különben hamis az értéke. Ezen úgy segítettünk, hogy kivezettük a kapcsoló mozgó rugóinak azt a helyzetét is, amelyben a kapcsoló nyitva van, úgy hogy ekkor egy mellékáramkört zárt. Vagyis mi a logikai értékeket egy váltóérintkező *vezetési állapotával* instrumentáltuk: az igaz logikai értéknek azt feleltettük meg, hogy a mozgó rugó a főáramkört zárja, vagyis az alsó érintkezőrugóval van vezetőösszeköttetésben, a hamisnak azt, hogy a mellékáramkört zárja, vagyis a felső érintkezőrugóval van vezető kapcsolatban. A konjunkció instrumentálásának problémája ez esetben a következő. Adva van pl. négy bemenő pólushármas, amelyek középső pólusa vagy az alsóval, vagy a felsővel van vezető összeköttetésben (vagy közvetlenül egy váltóérintkezős kapcsoló segítségével vagy előző műveleti dobozokon át). Előállítandó egy további kimenő pólushármas, amelynek középső pólusa akkor, és csak akkor van vezető összeköttetésben az alsóval, ha mind a négy bemenő pólushármas középső pólusa az alsóval van vezető összeköttetésben; ellenkező esetben a kimenő pólushármas középső pólusa a felsővel legyen vezető összeköttetésben. Ez megoldható a 2. ábrán látható kizárólag huzalozást tartalmazó doboz segítségével.

Hasonló „huzalos dobozzal" instrumentálható a logikai művelet is. Felmerül azonban egy nehézség. A matematikus, ha azt akarja, hogy egy képletben több helyen szereplő betű ugyanazt a számot vagy logikai értéket jelentse, egyszerűen ugyanazzal a betűvel jelöli. Műszakilag azonban nem ilyen egyszerű a dolog: azt, hogy két váltóérintkező ugyanolyan állásban legyen, ha nem jelfogóval működtetjük őket, mechanikai összeköttetéssel kell biztosítani. Ez az eset fellép két logikai művelet: az ún. kizáró diszjunkció és az ekvivalencia instrumentálásánál. Célszerű tehát ezeket a műveleteket Ferranti-gép módjára, jelfogós dobozokkal instrumentálni, míg a többi műveletet huzalos dobozzal, így ugyanis jelfogókat, shuntöket stb. megtakaríthatunk. Ez nemcsak azért célszerű, mert a huzal működését könnyebb megérteni, elvégre még a matematikai logikus is meg tud barátkozni a jelfogóval, hanem mert a huzal olcsóbb és megbízhatóbban működik, mint a jelfogó.



2. ábra

Csakhogy ehhez a logikai értékek kétféle instrumentálási módja között műszakilag meg kell csinálni a „szótárt". Ez könnyen megoldható feladat. Ha egy pólushármas felső pólusára feszültséget adok, az alsót földelem, akkor a középső pólus feszültségi állapota a pólushármas vezetési állapotának felel meg. Fordítva, egyetlen jelfogó segítségével el lehet érni, hogy egy pólushármas középső pólusa aszerint legyen az alsóval vagy a felsővel vezető összeköttetésben, hogy egy bizonyos pólus feszültség alatt van-e, vagy pedig földelve van, (ti. annak a jelfogótekercsnek egyik vége, amely a pólushármassal kapcsolatban álló váltóérintkezőt működteti, s amelynek másik vége földelve van.).

Felmerül az a kérdés, nem lehet-e másféle jelfogós áramköröket is „huzalosítani", azaz huzalos dobozok segítségével megtakarítani belőle jelfogókat. Valószínűnek látszik, hogy ez pl. jelfogós számológépek esetében is lehetséges. Ugyanis bináris működésű számológép esetén a bemenő információsorozat minden tagja két értéket vehet fel (a 0 vagy az 1 értéket), a kimenő információsorozat tagjai szintén, s ezek a bemenő információsorozat tagjainak egyértékű függvényei. Már pedig az olyan függvény, amelynek független változói is két értéket vehetnek fel s értéke is csak kétféle lehet, kimeríti a logikai művelet fogalmát. Más szóval a számológépek is logikai műveleteket végeznek. Valóban sikerült — papiroson olyan bináris összeadót terveznünk az egyes logikai műveleteknek megfelelő huzalos dobozok segítségével, amely helyértékenként három jelfogót tartalmaz. A jelfogók számát még tudjuk csökkenteni, de nem a helyértékek számával arányosan; úgy látszik megközelítettük az elméleti minimumot.

A logikai értékek — vagy bináris számjegyek — kétféle, feszültségi vagy vezetési állapottal való jelzése közötti transzpozíció elvét valószínűleg lehet alkalmazni az elektronikában is. Ott is hasonló logikai tulajdonságú alkatrészekkel dolgozunk; pl. a váltóérintkezőnek a kettős dióda felel meg.

Az, hogy a logikai gépekre profilírozzuk magunkat, természetesen nem jelenti azt, hogy megállunk a primitív Ferranti-gépnél. Vannak távolabbi terveink is. Pl. olyan gép építése, amely, ha a bemenőjén betáplálunk egy matematikai bizonyítást, meg tudja állapítani, hogy az hibátlan-e vagy nem. Persze, ha akármilyen kis hézag van a bizonyításban, azt már hibának jelzi. Esetleg ilyenkor mód lesz a hézag kitöltésére, s a gép megállapítja, helyesen töltöttük-e ki, vagy van-e további kifogásolnivaló. Tréfásan opponens-gépnek neveztük ezt a gépet. Jól használhatja majd matematikai folyóirat szerkesztősége dolgozatok helyességének ellenőrzésére. Ez a gép elvileg megvalósítható, természetesen sok pénzbe kerülne, és megvalósításához súlyos memóriakapacitás-bővítési és redudancia-csökkentési problémákat kell megoldani.

Még távolabbi utópisztikus terv, de talán a jövő században megvalósítható olyan gép szerkesztése, amely, ha bezongorázzuk neki az axiómákat és feladunk egy problémát, „önállóan" elkezd „gondolkodni" rajta és — vagy megoldja, vagy nem. Mellesleg az ember is csak erre képes. (Derültség.) Persze, az lesz ennek a „puddingnak" a próbája, ha majd először old meg olyan matematikai problémát, amelyet a matematikusok nem tudtak megoldani. Ha még utópia is ez a terv, el lehet kezdeni a kísérleteket egyszerű axiómarendszerek esetén, és a közben felmerülő ötleteket esetleg számológépek szerkesztésénél lehet felhasználni. Természetesen viszont mi is szeretnők átvenni mások tapasztalatait, amelyeket számológépekkel kapcsolatban szereztek.

Néhány megjegyzésem van még az előadás egyes részleteihez. Nem értem miért mondja TARJÁN elvtárs, hogy az analógiás gépeknél a független változók mindig tér vagy időkoordináták. Tudtommal van olyan analógiás gép, amely pl. egy polinom értékeit a Horner-séma szerint számítja ki úgy, hogy a független változót áramintenzitással állítja elő.

Kívánatosnak tartanám a terminológia összeegyeztetését. Pl. helyes volna a „logikai művelet" elnevezése a konjunkcióra stb. fenntartani, nem pedig az olyan műveletekre, mint pl. a helyérték eltolásra — amelyről TARJÁN elvtárs is megmondta, hogy tipikusan aritmetikai művelet — vagy a diszkriminációra, amelyet sok publikáció úgy említ, hogy a gép gondolkodni tud, hiszen dönt, mit csináljon. Itt is aritmetikai műveletről van szó. Pl., ha a gép aszerint hajtja végre az n-edik lépésben az $f_{(n)}$-edik vagy $g_{(n)}$-edik utasítást, hogy két előzetesen kiszámított $h_{(n)}$ és $k_{(n)}$ függvényérték megegyezik-e vagy sem, akkor a gép tulajdonképpen az $e_{(n)}$-edik utasítást hajtja végre, ahol

$$e_{(n)} = \begin{cases} f_{(n)}, & \text{ha } h_{(n)} = k_{(n)} \\ g_{(n)}, & \text{ha } h_{(n)} \neq k_{(n)}. \end{cases}$$

Más szóval a gép azt a műveletet végzi el, amely négy függvényből: f-ből,

g-ből, h-ból és k-ból egy ötödiket csinál, az e függvényt. Hogy ez is aritmetikai művelet, azt világosan mutatja az

$$e_{(n)} = f_{(n)} \left(1 - \operatorname{sgn}(h_{(n)} - k_{(n)})\right) + g_{(n)} \operatorname{sgn}(h_{(n)} - k_{(n)})$$

képlet, hiszen $\operatorname{sgn} x$ és $1 - 1$ aritmetikai műveletek. (Ha $h_{(n)} = k_{(n)}$, akkor $h_{(n)} - k_{(n)} = 0$, $\operatorname{sgn}(h_{(n)} - k_{(n)}) = 0$, tehát $f_{(n)}$ 1-gyel, $g_{(n)}$ 0-val van megszorozva; ha $h_{(n)} \neq k_{(n)}$, akkor $h_{(n)} - k_{(n)} \neq 0$, $(h_{(n)} - k_{(n)}) > 0$, $\operatorname{sgn}(h_{(n)} - k_{(n)}) = 1$, tehát $f_{(n)}$ szorzója 0, $g_{(n)}$-é 1.)

Tarján elvtárs a szekvenciális logika keletkezését azzal indokolja, hogy a közönséges matematikai logika nem alkalmas olyan problémák megoldására, ahol az időfaktornak is szerepe van. Ekkor ugyanis nem olyan ítéletekről van szó, amelyek mindig igazak, vagy mindig hamisak, hanem olyanokról, amelyek az egyik időpontban igazak, a másikban hamisak. Gondoljunk pl. egy jelfogóra, amelynek érintkezője saját tekercsének áramkörét bontja, mint pl. a Neff-féle kalapács esetén. Tekintsük azt az ítéletet, hogy a jelfogó tekercsében van áram. Ha ez igaz, akkor a jelfogó működik, az érintkező pont, tehát a jelfogó tekercsében nincs áram, ha pedig hamis, akkor a jelfogó elenged, az érintkező zár, tehát a jelfogó tekercsében van áram. Vagyis az az ítélet, hogy a jelfogó tekercsében van áram, akkor és csak akkor igaz, ha nem igaz, — akár csak a krétai ember által kimondott ítélet, aki azt mondja, hogy „én most hazudok". Vagyis ha azt az ítéletet, hogy a Neff-féle kalapács jelfogó tekercsében van áram, az időtől független ítéletnek tekintjük, antinómiához jutunk. Ez jó példa arra, hogy a logikai antinómiák is a valóságról mondanak valamit: azt, hogy a valóságot rosszul tükrözik tudatunkban. Jelen esetben azért, mert elhanyagoltuk az időfaktort, a jelfogó érintkezőjének tehetetlenségét. Ha ezt figyelembe vesszük, nem antinómiához jutunk, hanem ahhoz az eredményhez, hogyha a Neff-kalapács jelfogó tekercsében a t időpontban van áram, akkor a $t+\tau$ időpontban nincs, a $t+2\tau$ időpontban ismét van stb., ahol τ jelenti a jelfogó működésének és elengedésének késleltetését (amelyeket egyszerűség kedvéért egyenlőknek vettünk, az elektronok mozgásának tehetetlenségét pedig elhanyagoltuk.) Ez helyesen tükrözi a valóságot.

Azt azonban nem mondhatjuk, hogy ez esetben a matematikai logika nem alkalmas a probléma megoldására. A matematikai logika ugyanis nem csak állandó logikai értékekkel foglalkozik, hanem olyanokkal is, amelyek függnek egy vagy több független változótól: logikai függvényekkel. A mondott esetben a független változó az idő. Ha τ késleltetést választjuk időegységnek és az időt egyszerűség kedvéért kvantáljuk (az idő csak τ többszöröse, vagyis csak egész szám lehet), továbbá a $t = 0$ időpontban zárjuk a Neff-kalapács tekercsét, akkor annak az ítéletnek, hogy a Neff-kalapács tekercsében van áram, a logikai értékét az a logikai függvény adja meg, amely igaz, ha t páros, hamis, ha t páratlan. Vagy másik példa: ha a Neff-kalapács bontó-érintkezője helyébe záró-érintkezőt teszünk s ezzel párhuzamosan egy kézi működésű érintkezőt, akkor, ha ez utóbbit egyszer zárjuk, attól kezdve lesz áram a jelfogótekercsben. Vagyis, ha $f_{(t)}$ annak az ítéletnek a logikai értéke a t idő függvényében, hogy a kézi érintkező zárva van, $g_{(t)}$ pedig azé, hogy a jelfogó tekercsében van áram, a g függvényt az ún. logikai függvénykalkulus következő formulája állítja elő:

$$g_{(t)} = \exists u\ (u \leqq t \wedge f_{(n)}),$$

ahol $\wedge$ a konjunkció jele, $\exists$ pedig az ekszisztenciális kvantoré ($\exists(u)$: "van oly u, amelyre"). Ez az „önzáró jelfogó" a legegyszerűbb példája olyan szerkezetnek, amelynek „memóriája" van: „emlékszik" rá, volt-e már zárva a kézi érintkező. Felmerül itt az a probléma, a logikai függvénykalkulus mely formuláit lehet hasonló értelemben instrumentálni: Pl. a

$$g_{(t)} = \exists u (u > t \wedge f_{(u)})$$

formuláit biztosan nem lehet: „memóriája" lehet egy gépnek, de „jóstehetsége" nem, hogy megérezze, zárva lesz-e a jövőben egy érintkező.

Véleményem szerint a szekvenciális logika nem azért keletkezett, mert a matematikai logika nem alkalmas az időfaktor figyelembevételére, hanem azért, mert a műszaki szakemberek nem ismerték a matematikai logikának azt az ágát, amelyet ilyen problémák esetén alkalmazni lehet: a logikai függvénykalkulust, és ehelyett ad hoc módszereket alkalmaztak. A logikai függvénykalkulus ilyenféle alkalmazását egy helyen láttam csak a szakirodalomban: RASHEWSKI: *Mathematical Biophysics* című könyvében, de ott sem áramkörös, hanem idegvezetéses problémákra alkalmazva.

Még két kisebb megjegyzés. A fordítógépek azért működnek lassan, mert ahelyett, hogy a fordításra célgépeket szerkesztettek volna, számológépeket kényszerítettek fordításra. A jövő itt a megfelelő célgépé; természetesen az is csak nyersfordítást fog csinálni, de olyat, amellyel kevesebb baja lesz a lektornak, mint az eleven fordítóval. Fontos kérdés a szótárból való keresés ügyes megoldása. A jelenlegi megoldás, amikor a szótár magnetofon-szalagon van és a gép ezt pörgeti, az emberi szótárforgatás túlságosan mechanikus utánzása. Véleményem szerint jobb megoldás ennél a telefonközpontban használatos választógép; persze nem 10 számjegyes tárcsával, hanem olyannal, amelyen az ABC betűit lehet tárcsázni, és hat számjegy helyett annyi betűt tárcsáz a gép, ahány betűből áll a szó. Persze, a mechanikus tárcsázás helyett elég, ha a megfelelő impulzusokat küldi a vonalra, ez mechanikai tehetetlenség nélkül is megoldható; és külön jelzi a szó végét, ezáltal összeköti a kereső szerkezetet a szótárban a megfelelő szóval (ha ez megvan a szótárban; ha nem, lenyesi a végét stb. mit a jelenlegi megoldásnál).

STRIKER elvtárs felvetette, hogy a mai programozási módhoz túl sok kiszolgáló személyzet kell, ezért a programozást kellene egyszerűsíteni. Ez igaz, van azonban egy másik megoldás is, ha ma még utópiának látszik is, de „a ma utópiája a jövő technikája". Vannak gépek, melyek a feltételes reflexeket utánozzák, sőt a tanulást is. Pl. van olyan gép, amely „megtanulja", a tíz számjegy közül melyiket kell jeleznie, ha a találomra jelzett számjegyre helyesléssel, vagy többé-kevésbé erős helytelenítéssel reagálok aszerint, milyen messze van a jelzendő számjegytől. Ez a gép mintegy „tűz—víz" játékot játszik. SHANNON leírta, hogyan lehet számológépet úgy programozni, hogy sakkozni tudjon — legfeljebb elveszíti a játszmát, ha erősebb ellenféllel kerül össze. Az ilyen kutatások folytatásaként esetleg el lehet majd érni, hogy a gép ne csak játszani tudjon valamely játékot, hanem „okulni is tudjon a tapasztalataiból", ha elveszti a játszmát, azaz úgy módosítja a saját programját, hogy legközelebb ugyanilyen ellenjáték esetében ne veszítse el. Hasonlóan az is elképzelhető, hogy a fordítógépnek majd betáplálják a lektorált fordítást, hasonlítsa össze az általa készített fordítással és sziveskedjék úgy módosítani a programját, hogy olyan hibákat, amelyeket csinált többé ne kövessen el. (Derültség). Az ilyen gépet úgy lehetne „megtanítani" valamely nyelvre, mint az iskolás gyereket: egy primitív kiinduló programhoz házi feladatot kap, amelyek megoldását kijavítjuk, betápláljuk a gépnek, mire az javítja programját, újabb házi feladatot kap stb. Persze ilyen gépnek csak akkor lenne értelme, ha ezen az úton kevesebb fáradtsággal meg lehetne „tanítani" valamilyen nyelvre, mint a kérdéses nyelvről való fordításra programot készíteni. RÉNYI elvtárs látta ilyen programnak dokumentációját, megmondhatja, milyen vastag. mennyi munka fekszik benne. Ha a fenti gép megvalósítása sikerül, annak sem lesz akadálya, hogy a gépet matematikai feladatok megoldására „tanítsuk meg", általános iskolai feladatokkal kezdve komoly felső matematikai feladatokig. (Derültség). Ennek persze matematikus célgépnek kell lennie. Az sincs kizárva, hogy a gép „megtanult" bizonyos feladatokat megoldani, meg lehet csapolni a közben kialakult programját, pl. magnetofon szalagra ereszteni és akkor másik gépnek betáplálhatjuk ugyanezt a programot. Az volna a nürnbergi tölcsér instrumentálása.

Mindez természetesen a jövő zenéje. Ma az a feladatunk, hogy a rendelkezésünkre álló anyagi erőket optimálisan osszuk meg a különböző irányú kutatások között: kész gépek behozatala, jelfogós, elektronikus, vagy más rendszerű univerzális gépek és célgépek tervezése és építése között. Talán megkönnyíti ezt a feladatot a szegedi kutatócsoport által kezdeményezett „huzalizációs mozgalom" is, amennyiben lehetővé teszi bizonyos esetben drágább és kényesebb alkatrészek kiküszöbölését és amelyek talán a nyomtatott áramkörök technikájával kapcsolatban is jelentősége lesz.

Elnök: Rényi Alfréd hozzászólása következik

RÉNYI ALFRÉD

Remélem, hogy a tények igazolni fogják STRIKER elvtársnak azt a megállapítását, hogy a matematikai gépek kérdésében nálunk az akadémiai nagygyűlés tényleg fordulatot jelent. Sajnos még ma is tapasztalható bizonyos ellenállás a matematikai gépek fejlesztésének ügyével szemben. Hallottam olyan véleményeket, hogy ezeket a gépeket nem fogjuk tudni kihasználni. Ezek az aggályok teljesen alaptalanok. Amikor ma azon gondolkozunk, hogy ha lesz egy matematikai gép az országban, azt mire fogjuk használni, az első pillanatban olyan feladatokra gondolunk, amelyeket ma is elvégez valaki, csak éppen kézi gépeken. Pedig ha lesz végre egy modern gyorsműködésű automatikus számológépünk, az munkaidejének túlnyomó részében olyan számításokat fog végezni, amelyhez ma hozzá sem kezdünk gépek hiányában, hiszen kézi számológépen ezekhez nem érdemes hozzákezdeni, mert mire elkészülnek, már régen aktualitásukat vesztették.

Van azután egy másik aggály, amelyet gyakran hallani, amikor a matematikai gépekre komoly összegeket kérünk, vegyük figyelembe, hogy van a hazai tudománynak egy sereg más igénye, egyéb műszerekre és berendezésekre, amelyekre ebben a pillanatban még nem jut pénz. Erre a válaszom a következő: a matematikai gépek behozatalát és építését nem más műszer rovására kell keresztülvinni, hanem abból a megtakarításból kell megoldani, amelyeket ezek a gépek a népgazdaság számára hozni fognak. Ezek a megtakarítások nem csekélyek. Viszont fel kell készülniök a matematikusoknak arra, hogy majd mire használják a gépet, fel kell továbbá készülni azzal is, hogy a legkülönbözőbb területeken, ahol a matematikai számítások eredményére szükség van, az ilyen igényeket már most összegyűjtsük.

Ma még az egész számológép-kérdés fejlődésének elején van. Ahogyan TARJÁN REZSŐ rámutatott, most kezd kibontakozni, hogy a következő években a gépépítés technikája hogyan fog átalakulni; átalakulóban van e gépek kihasználásának technikája is. A moszkvai kongresszuson elhangzott egy megjegyzés: ma a számológépeken elsősorban olyan számítási módszereket használnak, amelyeket túlnyomó többségben már előzőleg is használtak kézi számológépeken, a matematikai módszer megválasztása terén eddig nem történt más, mint az, hogy a meglevő és ismert módszerek közül kiválasztották azt, amely a gépen legjobban elvégezhető. Viszont eddig nem igen foglalkoztak új, sajátos módszerek kidolgozásával. Egyike a kevés kivételeknek az úgynevezett Monte Carlo-módszer, amellyel mi is elkezdtünk a Matematikai Kutató Intézetben foglalkozni. A Monte Carlo-módszer lényegében abban áll, hogy valamely numerikus probléma megoldása céljából egy olyan véletlen tömegjelenséget konstruálunk, amelynek törvényszerűségei a megadott matematikai problémára vezetnek, és a sztochasztikus modell realizálása és megfigyelése útján a keresett mennyiségre egy statisztikai becslést nyerhetünk. Az említett sztochasztikus modellt lehet magában a gépben realizálni; erre a célra a gépbe véletlen számtáblázatból megfelelő mennyiségű számot kell betáplálni és programozni, hogy a gép ezekkel a számokkal bizonyos műveleteket végezzen. Ez már tipikusan az elektronikus számológépek számára elgondolt módszer. Meg vagyok győződve arról, hogy idővel sok más új módszert is fognak találni a matematikusok. Helyes volna, ha nálunk is többet foglalkoznánk ezekkel a kérdésekkel. Általában azt hiszem, nem helyes, ha a matematikai gépek elméletének tanulmányozásának megkezdésével várunk addig, amíg az első gép nálunk működni fog, hanem ehhez már most hozzá kell látni. Ez komoly feladatot jelent a matematikusok és a műszaki tudomány kutatói, valamint gyakorlat szakemberei számára.

SZÉKELY-DOBI SÁNDOR

Nem tekinthetek túlzott matematikus multra vissza, hiszen a Műszaki Egyetemet végeztem. Így inkább műszaki vonatkozásban szeretnék néhány szót hozzátenni Kalmár professzor felszólalásához.

A logikai gépekre NEMES TIHAMÉR elvtárs igen értékes előadása hívta fel a figyelmemet s ennek kapcsán elkezdtem tanulmányozni a „logikai piano"-t. Ez áramkörileg elég egyszerűen realizálható jelfogós kapcsolással, szándékom is van ilyent — mihelyt időm engedi — összeállitani. A Beloiannisz gyártól némi biztatást kaptam arra, hogy ezt megvalósíthassam, gondolom KALMÁR professzor és munkatársai is bizalommal fordulhatnak a vállalathoz, hogy kísérleteikhez raktáron elfekvő jelfogókat, lámpákat stb. tudjanak beszerezni. Egzakt logikai ismereteink nem nagyok ugyan, de vállalatunknál akad egy-két lelkes, fiatal mérnök, aki szívesen foglalkoznék logikai gépek áramköreivel. A telefonközpontoknál szerzett tapasztalatainkra való tekintettel műszaki vonalon biztosan segítségére tudnánk lenni KALMÁR professzornak és munkatársainak.

KALMÁR professzor joggal kifogásolta TARJÁN elvtárs előadásában az aritmetikai és logikai műveletek közötti különbségtételt. A matematikus ugyanis igen egyszerűen vissza tudja vezetni a logikai műveleteket aritmetikai műveletekre, például úgy, hogy egy függvényt két tag összegeként állít elő, melyek közül az egyiknek együtthatója zérus, a másiké 1. A matematikus ezt könynyen megteheti: egy pillantás a zérus szorzóra s máris tudja, hogy a szóban forgó tag kiesik a számításból. Nem így a számológépnél, mely — adott esetben — effektíve akár 24 nullás számjeggyel végigszorozza a szorzandót s csak így deríti ki, hogy a szorzat zérus. A műszaki szakkifejezéseket tehát nem szabad matematikai precizitással boncolgatni, hiszen mindkét helyen mások az igények.

Nem tipikusan programozási feladat, csak mint könnyen követhető ad hoc példa gyanánt meg kívánom említeni a másodfokú egyenlet megoldásának programozását. Itt a számológép vezérlőegysége két, egymástól lényegesen eltérő program szerint vezérel attól függően, hogy a diszkrimináns negatív, vagy sem. Előző esetben külön kell közölnie a valós, és külön a képzetes részek számszerű értékét, bonyolultabb eredményközlő berendezés esetén az írógép esetleg még a plusz—mínusz előjelek és a képzetes egység nyomtatására is kap utasítást. Nem negatív diszkrimináns esetén a számítás menete eltérő, ebben az esetben a két valós gyököt kell nyomtatni.

A számológépekkel kapcsolatosan matematikusok és műszaki emberek szoros együttműködésére van szükség. A terminológia közös nevezőre hozása azonban meglehetősen nehéz probléma. A matematikai logikában és a műszaki életben máshonnan indult el a szaknyelv. A „plusz—mínusz“, „igaz-nem igaz“, „meghúz—elenged“, vezet—nem vezet“ fogalmak különböző helyekről erednek, ezeket egyértelműen öszehangolni szinte lehetetlen. A probléma megoldására előnyösebb útnak látszanék a matematikus és műszaki szakemberek egymáshoz minél közelebb hozása. A Műszaki Egyetem Híradástechnikai Tanszéke éppen erre a célra akarja jelfogós számológépét létrehozni. Tudjuk, hogy a szóban forgó gép nem elégíti ki a korszerű sebességigényeket, viszont ha elektronikus gépet kezdenénk építeni, az a rengeteg tanulmány, amelyet el kell végezni, hogy a gépnek csupán alapelveiről dönthessünk, még hosszú évekig elhúzódhatik. Arra a célra, hogy akár egy matematikus, akár egy műszaki egyetemi hallgatónak elképzelése legyen számológépről: azt hiszem hézagpótló lesz egy — kissé talán kezdetleges, nem túlságosan drága, de az alapelveket mégis igen jól tükröztető — gépnek a megépítése. Aki hallott valamit a matematika elemeiről és a számológépek alapelveiről, majd maga is megtanulhatja, hogyan kell egyszerű műveleteket, ill. műveletsorozatokat a számológépen programozni.

KOZMA professzor vezetésével magam is közreműködöm a szóban forgó gépnek a tervezésében és remélem, minél hamarább fel tudjuk építeni, ha a kellő támogatást megkapjuk. Reméljük, ez a gép hozzá fog járulni a közeli évek egyetemi hallgatóinak neveléséhez és azoknak a szakembereknek a kiképzéséhez, akiknek hivatása lesz a jövő elektronikus számológépének üzemben tartása.

KALMÁR LÁSZLÓ válasza

A Beloiannisz-gyár SZÉKELY-DOBI elvtárs által megígért segítségét hálásan köszönöm. Azt hiszem, a diszkriminációval kapcsolatban félreértettük egymást. Azt mondottam, hogy nem helyes a diszkriminációt logikai műveletnek nevezni, mert az nem más, mint összetett aritmetikai művelet. A „logikai művelet" elnevezést két okból is félrevezető alkalmazni ilyen esetben. Egyrészről erre az elnevezésre kétségtelenül szükség van olyan értelemben, mint ahogy a matematikai logika használja, másrészt azért félrevezető, mert a rossz népszerű publikációk abba szoktak belekapaszkodni, hogy a gép gondolkodik, mert logikai műveletet végez, amikor diszkriminál. A diszkriminációt összeadásra, kivonásra, szorzásra, előjel és abszolút érték képezésére visszavezető képletet azért írtam fel, hogy világos legyen itt nem a gép valamilyen önálló diszkrimináló képességéről van szó, hanem, végeredményben aritmetikai műveletről; azt természetesen tudom, hogy a gépben ez a művelet másképpen van istrumentálva, nem úgy, hogy ezekre a műveletekre vezetjük vissza.

FONÓ ERVIN

TARJÁN elvtárs említést tett arról, hogy egy számológéppel nyolcezer munkás bérszámfejtését 24 perc alatt végezték el. Magyarországon jelentős munkaerők foglalkoznak bérszámfejtéssel és egyéb, az ipari üzemeknél szükséges számítási munkákkal. Magyarország ipari nyersanyagban szegény ország, ezért ipari termelésünk jelentős részét exportálnunk kell. A világpiacon kiváló minőségű gyártmányokat kell elhelyeznünk és azok önköltsége nem közömbös, ha versenyképesek akarunk lenni. Termékeink árában jelentős összeget képvisel az adminisztrációs költség is. Még sokkal nagyobb veszteséget jelentenek az állásidők, melyek elsősorban az anyagellátás zavarai következtében keletkeznek. Vállalatunk kidolgozta az anyag- és bérnormák alapján történő, tehát a tudományosan megalapozott tervezés módszereit elektromos kártyalyukasztó-rendszerű gépekkel. Erre az Állami Ellenőrzési Központ lapja, az Ellenőrzési Szemle, 1954 decemberében felhívta az illetékesek és a minisztertanács figyelmét. Sajnos, ezen a téren nem történt sok előrehaladás. A számvitel területéről viszont ma már olyan igények jelentkeznek, amelyek messze túlhaladják Magyarország jelenlegi lyukkártya-gépeinek kapacitását. Felhívom az Akadémia figyelmét, vizsgálja felül ezt a kérdést, mert tudomásom szerint külföldön, TARJÁN elvtárs által a bérelszámolással kapcsolatban említett elektronikus számológépek kapacitásának 90 százaléka egyszerű ipari feladatok megoldását szolgálja. A többi a magasabbrendű matematikai munka. Ha itt lemaradunk, az egész ipar megsínyli, ezért erre ma már fel kell figyelni.

KOZMA LÁSZLÓ

Néhány adattal szeretném kiegészíteni az eddig elmondottakat. STRIKER elvárs azzal jött vissza néhány hónappal ezelőtt a Szovjetunióból, hogy ott van egy 1500 fővel dolgozó gyár, amely elektronikus számológépeket állít elő és hogy a dolgozók nagyobb része mérnök és technikus. Az Egyesült Államokban a rádiómérnökök egyesületének több különböző csoportja van, ezeknek egyike az elektronikus számológépekkel foglalkozó mérnökök csoportja. Ennek a csoportnak 1952-ben már 2000 tagja volt. Ezzel szemben nálunk három és fél fő foglalkozik számológépekkel: Tarján elvtárs és segítőtársa Sándor Ferenc az Akadémia keretén belül, továbbá az egyetemen másfél fő, ami voltaképpen nem másfél, hanem három fél fő. Nyilvánvalóan a mi eredményeink a közölt számok arányában fognak alakulni. Ez mutatja, hogy mit várhatunk e területen, ha nem történik valamilyen radikális változás.

Az előadó utalt arra, hogy a célgép csak korlátozott feladatokra alkalmas: én úgy vélem, hogy hengersorok vezérlésére pl. jelfogós berendezések igen célszerűen felhasználhatók. Végül még reflektálni szeretnék az előadónak arra a megjegyzésére, hogy a Bell-System automatikus díjelszámoló berendezésében azért használtak jelfogókat, mert azok ott logikusak, lévén telefonközpontokról szó. Ez a beállítás nem helyes, mert a díjelszámoló berendezés 20—25 telefonközpont számára centralizálva van egy külön önálló helyiségben, tehát ott ugyanolyan jól lehetne elektronikus berendezéseket is alkalmazni.

ÁNGYÁN ANDRÁS

Az egyik ismert pszichológus — LASHLEY — azt mondotta: az idegrendszerrel foglalkozó filozófusok és a paranoiások között az a hasonlóság van, hogy mindent arra vonatkoztatnak, ami éppen divatban van: az idegrendszert egykor a telefonközponttal, most pedig a számológéppel hasonlítják össze. Lehet, hogy a hasonlat sántít, azzal azonban tisztában kell lennünk: ma elérkeztünk a tudomány fejlődésének egy olyan fázisához, amelyben a mérnök és a fiziológus legszorosabb együttműködésére van szükség. Ott állunk, hogy aktuálisakká értek a biológus számára is azok a matematikai elvi kérdések, amelyekkel mérnökök foglalkoznak — és viszont. Mik itt a gyakorlati problémák a mérnökök és a matematikusok számára? Vannak fiziológiai és matematikai problémák. Még Amerikában is a fiziológusok, pszichológusok, mérnökök és kibernetikusok konferenciáján felmerültek olyan programok, olyan alapelvek — például a feltételes reflexek törvényeinek részletesebb ismerete — amelyeket azelőtt egyáltalában nem használtak fel, holott ezeket például egy fordítógép „betanításánál" sokkal jobban ki lehetne használni. Ezen az úton akartunk fiziológiai részről megindulni, amikor a Grey Walter-féle modellt akartuk tovább fejleszteni és mindjárt az elején kiderült, hogy nem fiziológiásan oldja meg a tanulást és az egyszerű élettani jelenségeket: a kioltást, a felejtést nem tudja jól reprodukálni. Idegélettani ismeretek birtokában azonban ezt a hiányosságot egyszerű, az agyműködés analógiájára tervezett kapcsolásokkal ki lehet küszöbölni a mérnök és fiziológus szoros együttműködésével.

Szeretném felhívni a figyelmet arra is, hogy igen nagy támogatásra van szükségünk a fiziológiai és idegrendszeri kutatás egyszerű gyakorlati problémáinál is mérnökök részéről, tudniillik gyakran rendkívül nehéz egyszerű dolgokat is megszerezni. Előfordult, hogy körülményes úton a Bizományi Áruházon keresztül próbáltunk egy kapcsolószerkezetet megvenni és akkor közlik velünk, hogy pl. éppen a Beloiannisz-gyárban tömérdek ilyen kapcsoló található, amelyhez viszont nem tudunk hozzájutni.

Az ipari fejlődésnek az orvos—biológiai vonalon is igen nagy gazdasági lehetőségei vannak. Az idegrendszert ma már tudjuk televíziós ernyőn is vizsgálni, és elektro-fiziológiai apparatúrára van szükségünk ahhoz, hogy belemélyedhessünk az idegrendszeri működés problémáiba. Egy dán fiziológiai laboratórium pl. a háború alatt nem tudott külföldi készülékeket kapni. Erre egy mérnöki csoport a fiziológiai intézetben elkezdett az agyműködés potenciáljait regisztráló készülékeket gyártani. Most ott tartanak, hogy — Németországot kivéve — az egész Európát ők látják el ilyen készülékekkel. Ma a televíziós technika igénybevételével egyszerre lehetne képet kapni az agyműködésről, és az ilyen olcsóbb, új, toposzkópos megoldásoknak óriási kutatási és klinikai jelentősége lenne. Szélesebb ipari megvalósítása azonban még külföldön is késik, pedig tervezése megoldható, kivitelezése pedig nem nehéz vagy drága feladat, hazai viszonylatban megoldható. Ezek az eszközök nélkülözhetetlenek lennének nemcsak a kutatáshoz, de az epilepsziás esetek és az agydaganatok diagnosztizálásához is, Magyarország teljes mértékben ellátatlan, e tekintetben pedig 40 000 epilepsziás van az országban. A külföld pedig biztosan örömmel venné át az ilyen új berendezéseket tőlünk.

Az orvosi kutatás és a technika közötti kapcsolatnak tehát már csak ezért is nagy jelentősége van, mind elméleti, mind gyakorlati síkon szorosabb, intézményesebb együttműködésre van szükségünk.

MADARÁSZ BÉLA

Az előadás néhány elvi pontjához szeretnék hozzászólni matematikai szempontból. Tapasztalatom, hogy mérnökeink, akik az elektronikus és digitális számológépekkel óhajtanak foglalkozni, matematikailag nincsenek eléggé felkészülve a feladatra. Olyan alapvető diszciplinákat kellene ismerni, mint például HENSELnek a p-adikus számokról szóló elmélete, amely nélkülözhetetlen a további fejlődéshez; HENSEL a kongruenciák segítségével építi fel a p-adikus számtestet és az ezen belüli problémákat, az egyenlőséget magát is kongruenciákkal értelmezi. Ennek alkalmazása a digitális gépek gyors fejlődése szempontjából nem teljesen érdektelen.

A gépsebesség kérdésben KOZMA elvtárssal értek egyet hazai viszonylatban. A jelenlegi fokon a jelfogós rendszerek tanulmányozására sokkal több lehetőség van. Egyelőre még megfelelő elektroncsöveket sem gyártunk erre a célra, nemhogy tranzisztorokat gyártanánk. Az előadó bejelentette igényét oly kalkulusra, mely aritmetikai képletek között is bizonyos algebrai összefüggéseket tud megállapítani, ami a rendszerek programozásának ökonómiáját nagymértékben elősegítené. Itt utalni szeretnék a matematikai logikának a rekurzív függvények keretében tárgyalt Ackermann-féle függvény-sorozatára, amelynek tanulmányozása ezt előreviheti. (Közbeszólás: Túlhaladja a gépeink kapacitását!) Ami az absztrakció kérdését illeti, a matematika szükségképpen jutott el a múlt század elején egy absztrakt matematikai fejlődés egy magasabb fokára. Gondoljunk ABEL csoportelméletének megalapozására. A csoportelmélet a permutációk tanulmányozásából nőtt ki. Az igényt a magasabbfokú egyenletek bizonyos megoldhatósági problémái támasztották, azonban a permutációkkal, tehát kombinatórikai eszközökkel lehetett ezt a kérdést megoldani. Nem lehetne-e ezt a fejlődést követni a gépesítés terén más úton? Visszanyúlva a permutációk tanulmányozásához, absztrakt matematikai kalkulusok gépesítésére gondolok, és közölhetem, hogy sikerült permutációs szorzógépet előállítanom. Ennek a gépnek programozása bonyolult, úgyhogy konkrét problémákra még nem tudom alkalmazni. Ehhez szükséges lenne a halmazelmélet és relációkalkulus néhány fogalmának és műveletének gépesítése, továbbá oly matematikai logikai bizonyító-egység beépítése, melynek teljesítménye lényegesen meghaladja a Ferranti-gép teljesítményét. Mint most értesültem, KALMÁR akadémikus és munkatársai hasonló problémák megoldásán dolgoznak. Ez olyan út, amelyen el lehet indulni.

Az előadó sűrűn hivatkozott biológiai analógiák felhasználásának előnyeire. Ilyen analógiák reprodukálása kétségtelenül nagyon hálás feladat, azonban pillanatnyilag a matematikai reprodukciót helyezem előtérbe.

TARJÁN REZSŐ válasza

KOZMA elvtársnak részben adós maradtam a válasszal a jelfogós gépek memória-kérdésében. A jelfogós gépeknél a memória rendkívül nehéz kérdés azért, mert azok az eszközök, amelyeket jelenleg memória-célokra felhasználhatunk, a jelfogók működési idejéhez képest túlnyomórészt túlságosan gyorsak, még a leglassúbb memória: a mágneses dob esetében is. Az amerikai jelfogós gépeknél memória-célokra kétféle módszert vettek igénybe: egyrészt a telefonközpontokban szokásos jelfogós regisztereket, amely esetben sokszor fantasztikusan nagyszámú jelfogóra van szükség. Lényegében ez az oka annak, hogy az Egyesült Államokban működő jelenlegi mintegy 4000 digitális számológépből alig néhány jelfogós kivitelű gép van. A másik instrumentálási módszernél a memória-célokra perforált szalagot használnak, amelyre a sokszor több ezer utasításból álló teljes programot belyukasztják. Ez a módszer — eltekintve a szalag sérülékenységétől — azért nem megfelelő, mert a leolvasási idő a jelfogók működési idejéhez képest túlságosan lassú. Ha sikerülni fog a jelfogók üzembiztos működését 5—6 milliszekundumra leszorítani, a jelfogós gépeket lehetséges volna a mágneses dobbal párosítani; ebben az esetben lehetséges, hogy újra tért fognak hódítani. Ami a Bell-féle, számlázási célokra használt számológépet illeti, azt hiszem, tisztán nomenklatúra-különbségről van szó. A felhasználás szempontjából elvileg teljesen irreleváns, hogy a számológép helyileg hol van elhelyezve. Az Egyesült-Államokban a Hudson-folyó bizonyos hidrológiai problémáival kapcsolatban — amelyek megoldására egyetlen digitális számológép nem volt elegendő — megcsinálták azt, hogy a két gépet, amelyek különböző városokban voltak elhelyezve, interurbán vonalak segítségével összekapcsolták. A működés során nem lehetett eldönteni, hogy melyik gép a „master" és melyik a „slave", azaz melyik a vezérelt és melyik a vezérlő gép, mert aszerint vette át a vezérlést az egyik vagy másik gép, ahogy a probléma részletei megkívánták.

Hasonló helyzet alakult ki a meteorológiai problémáknál. A prognózis kiszámítását megnehezíti az, hogy a légköri viszonyokat leíró és rendkívül bonyolult, igen sokváltozós differenciálegyenlet-rendszernél a határfeltételeket nem lehet eléggé egyértelműen megadni, annál az egyszerű oknál fogva, mert az atmoszférában nincsenek egymással nem közlekedő zárt tartományok.

Bizonyos célgépeknél és egyszerű problémáknál valóban elegendő a kis memória. De hangsúlyozni kívánom, hogy vannak olyan problémák, mint például a bérszámfejtés, vagy gépi fordítás, ahol speciális gép kell: a specialitás éppen az extrém nagy memóriakapacitás szükségletében nyilvánul meg. Ez az, ahol én a kémiai és részben organikus módszerektől várok változást.

KALMÁR akadémikus elvtárssal teljes mértékben egyetértek a terminológia kérdésében: azért használtam a szekvenciális logika kifejezést, mert az irodalomban jobb híján ez az elnevezés terjedt el. Természetesen helyes, hogy ha „logikai művelet" kifejezést a tényleges logikai műveletek részére tartjuk fenn.

MADARÁSZ elvtárs utalt arra, hogyha különböző szakmákból jövünk össze, sokszor szótárra van szükség, hogy például a matematikus megértse mondjuk a fiziológust. Kitűnő példa erre az, ahogy Angyán elvtárssal, aki fiziológus, és akivel a memória kérdésében dolgozunk együtt, hetekre volt szükség ahhoz, míg én a neurofiziológiai, ő pedig a számológép-technikai nomenklatúrát megtanultuk, míg a végén rájöttünk arra, hogy tulajdonképpen ugyanarról beszélünk.

KALMÁR akadémikus és közöttem egy ponton van félreértés. Előadásomban szó szerint pontosan a következőket mondottam: „Olyan fizikai rendszert építünk meg, amelynek kiválasztott paraméterei az idő- vagy térkoordináták függvényében ugyanolyan matematikai összefüggéseknek tesznek eleget, mint a megoldandó probléma". A függő változó lehet például az áramerősség, amit KALMÁR akadémikus említett. A független változó attól függ, hogy mikor, illetve a megépített rendszer melyik pontján mérünk. Az első esetben a független változó az idő: a mérés ilyenkor *egy ponton, különböző időben történik.* A második esetben a független változó a rendszer valamelyik térkoordinátája: ebben az esetben *a rendszer különböző pontjain egyidejűleg hajtunk végre méréseket.*

FONÓ elvtárs által elmondottakkal teljes mértékben egyetértek. Most van születőben a Minisztertanácsnak az államapparátus egyszerűsítéséről szóló elvi határozatához kapcsolódó részletes végrehajtási utasítás; remélem, hogy ez a hivatali munka gépesítésével is foglalkozni fog. A hivatali adminisztrációban a lyukkártya-rendszerű gépeknek és még inkább a korszerű elektronikus gépek alkalmazásának döntő fontossága van. BOWDEN a „Faster then Thought" c. könyvében megírja, hogy az 1950-es angol népszámlálás azt a megdöbbentő adatot hozta napvilágra, hogy az angol szigetvilág lakosságának több mint 10%-a „fehérgalléros" munkát végez, tehát fehér papírra fekete betűket ró. Nálunk ez az arány kb. hasonló lehet, vagy még rosszabb. Tény, hogy a hivatali adminisztrációban, az ügyviteli munkában hazánkban ma lényegében ugyanazokkal az eszközökkel dolgozunk, mint az 1930-as években: tehát telefonnal, írógéppel, asztali számológépekkel és kismértékben könyvelőgépekkel, holott ugyanez alatt az idő alatt az üzemi termelőmunka termelékenységét a gépesítés és az automatizálás nagyságrendileg növelte. Ezt az ellentmondást meg kell oldanunk.

MADARÁSZ elvtárssal egyetértek abban, hogy minél többen foglalkozunk ezekkel a gépekkel, annál jobb. Nagyon fontos, hogy a Vezetékes Híradástechnikai Tanszéken készülő jelfogós gép megvalósuljon, mert ezen is kitűnően lehet sokmindenfélét megtanulni és begyakorolni, sőt, bizonyos egyszerűbb esetekben a gép programozását is.

Nem értek egyet SZÉKELY-DOBI elvtárssal abban, hogy évtizedekig is elhúzódhatik az a „rengeteg tanulmány", amelyet el kell végezni ahhoz, hogy akár csak a gépek elvéről is dönthessünk. A digitális számológépek alapelvema már teljes mértékben tisztázottak és az irodalomban precízen megfogali mazott formában rendelkezésre állanak. Ahol döntésre van szükség, az elsősorban a konkrét szerkezeti elemek megválasztása abból a célból, hogy eleve korszerűtlen szerkezeti elemekkel dolgozó gépet ne építsünk. Ezzel a munkával szervezett formában most már közel egy éve foglalkozunk és a mai előadás is az itt felmerült elvi kérdések tisztázásához kíván hozzájárulni.

Nem értek egyet MADARÁSZ elvtárssal abban, hogy „egyelőre még normális elektroncsöveket sem gyártunk". Mint annyiszor, most is szidjuk ugyan a saját gyártmányú elektroncsöveinket, viszont amikor annak idején Svájcból egy mikrohullámú berendezés mintapéldányát megkaptuk és felbontottuk, nagy meglepetésünkre túlnyomórészt Budapestről exportált magyar csöveket találtunk benne. A magyar csövek tehát jók. A félvezetők tekintetében már a kísérleti gyártásnál tartunk, és remélem, hogy az egészen közeli jövőben már a tranzisztorok gyártása is megindul. E tekintetben hasonlít a helyzet az autóiparhoz. A felszabadulás előtt autóiparunk gyakorlatilag nem volt, ma viszont fejlett autóiparral rendelkezünk, amely a béketábor országai közötti munkamegosztás alapján jó minőségű teherautókat gyárt. Amikor a teherautógyártáshoz hozzákezdtünk, nem 20 évvel ezelőtti modellekkel indultunk, hanem mindjárt a legkorszerűbb gépek gyártásához kezdtünk hozzá, hogy lemaradásunkat behozzuk. A lemaradás egyébként előny is, és hátrány is. Maga a lemaradás ténye természetesen feltétlenül hátrány. Ez a helyzet azonban azzal az előnnyel is jár, hogy egy csomó fejlesztési munkát mások végeztek el bizonyos értelemben helyettünk és mi a legfejlettebb típusnál tudunk bekapcsolódni a munkába. Ugyanez a helyzet az elektronikus számológépek szerkezeti elemeit illetően is. Ha a germánium-diódákat és a tranzisztorokat, valamint a ferrit-gyűrűket hazai eszközökből meg fogjuk tudni kapni — és ebben semmi kétségem nincsen, — nincsen arra szükség, hogy a számológép építésénél ontogenetikusan megismételjük mindazt, amit a híradástechnikai ipar filogenetikusan végigcsinált; ez magyarul azt jelenti, hogy átugorhatjuk a jelfogós, sőt bizonyos mértékben az elektronikus gépeket is és közvetlenül a legkorszerűbb szerkezeti elemekre tervezhetünk.

KOZMA elvtárs kérdésére: Ángyán elvtárs, aki fiziológus, igazolhatja, hogy a legújabb adatok szerint az emberi agykéregben ténylegesen 10^9 nagyságrendű idegsejt van.

MADARÁSZ elvtárs felvetette a gépek absztraháló képességének kérdését. Ez rendkívül izgalmas és fontos elvi kérdés. Ebben a pillanatban azonban még nem tudjuk pontosan, hogyan emlékezünk, még kevésbé azt, hogyan absztrahálunk. A számológépeink lényegében véve logikai eszközökkel, úgynevezett bináris kifejtéssel dolgoznak. Az emberi agykéreg azonban nem bináris, tehát nem logikai eszközökkel, hanem frekvencia-modulációval dolgozik: valamely inger erősségét nem egy bináris szám, hanem a másodpercenként az idegroston végighaladó impulzusok száma reprezentálja. Ennek a módszernek a pontatlansága elég nagy. Ezzel szemben hihetetlenül biztonságos, mert igen nagy redundanciával dolgozik; az élő szervezet részére pedig a biztonságos működés a legfontosabb. Egy példa: ha valamely számot — mondjuk egymilliót — binárisan írunk fel, egyetlen egységnyi tévedés bármely helyértéken az egész eredményt meghamisítja (amint erre elsőnek NEUMANN JÁNOS mutatott rá) és a hiba annál nagyobb, minél magasabb helyértéken történik az egységnyi tévedés. A frekvencia-modulációs módszernél azonban nem *számolásról*, hanem *számlálásról* van szó. Ha ennél a módszernél egyetlen egységgel tévedünk, a hiba mindössze egy milliomod nagyságrendű lesz. A jelenlegi matematikai logika, illetve a klasszikus formális logika lényegében véve a kettes számrendszert tükrözi. A frekvencia-modulációs elvre logikát felépíteni még meg sem kíséreltek. Az absztrakció tekintetében komoly lehetőségeket nyújt az információ-elmélet. Amikor például a kocka, vagy a szék fogalmához kívánunk eljutni, lényegében az történik, hogy a konkrét szék, vagy a konkrét kocka képzeteiből elhagyunk minden egyedi jellemzőt (nagyság, szín stb. stb.), ami marad, az a kockának, vagy a széknek az absztrakt fogalma. Információ-elméleti szempontból az absztrakció minimális redundanciájú kódnak felel meg. Arra azonban e pillanatban nem mernék válaszolni, hogyan lehet ezeket a digitális számológépekben instrumentálni.

Végül megköszönöm az élénk és türelmes vitát, amely — visszatekintve — sokkal érdekesebb volt, mint maga az előadás. (Taps.)

HÁLÓK IDEÁLJAI ES KONGRUENCIARELÁCIÓI I.

GRÄTZER GYÖRGY ÉS SCHMIDT ELIGIUS

Bevezetés

Ismert gyűrűelméleti tétel, mely szerint az R gyűrű bármely faktorgyűrűje egy-egyértelműen meg van határozva R egy ideálja által. Hasonló tétel érvényes a csoport normálosztóira is. Hálók esetében azonban ezen alapvető tétel már nem érvényes. Előfordulhat ugyanis, hogy az L háló valamely ideálja több homomorfizmus magja, sőt az is, hogy egyáltalán nem létezik olyan homomorfizmus, melynek magja lenne az adott ideál. Így felmerülnek a következő kérdések: mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy L hálóban minden ideálhoz

1. legalább
2. legfeljebb
3. pontosan

egy osztályozás* tartozzék?

Az első, ill. harmadik kérdéssel (továbbá a harmadik kérdés egy általánosításával) foglalkozik a dolgozat I. része, a következő eredménnyel:

1. TÉTEL. *Egy L hálóban minden ideál akkor és csak akkor magja** valamely homomorfizmusnak, ha L disztributiv;* illetve

3. TÉTEL. *Az L hálóban akkor és csak akkor teljesül, hogy minden ideál pontosan egy homomorfizmus magja és minden homomorfizmushoz tartozik mag, ha L alulról korlátos, disztributív és relatív komplementumos.*

Látni fogjuk, hogy a fenti tételek bizonyításánál alapvető szerepet játszanak a minimális osztályozások. Disztributív hálóban a 2. tétel jellemzi a minimális osztályozásokat. A II. részben e vizsgálatokat kiterjesztjük tetszőleges hálókra és az 5. tétel segítségével áttekintést nyerünk a hálók minimális osztályozásairól. Az 5. tétel felhasználásával két feleletet is adunk a fent felvetett 2. kérdésre. (6. A és B tétel.)

* Osztályozáson itt és a továbbiakban is a kompatibilis osztályozást értjük.

** A homomorfizmus magja a homomorf kép 0 elemének ősei által meghatározott ideál.

A 3. kérdést BIRKHOFF vetette fel (GARRETT BIRKHOFF: Lattice Theory — ezentúl (LT) — Revised Edition, New York 1948. 161. o. 73. probléma) és a dolgozat lezárása után tudomásunkra jutott, hogy I. HASHIMOTO már megoldotta. (Lásd I. HASHIMOTO Ideal Theory for Lattices című cikkében, Mat. Jap. II. kötet 4. sz.) Bizonyítása azonban a dolgozatban adott bizonyítástól lényegesen eltér és bonyolultabb.* A 3. kérdéssel kapcsolatban részleteredményeket ért el G. J. ARESKIN (Dokladi Akad. Nauk SzSzSzR 1953. XC. kötet, 4. sz.), tételét a 2. és 6. *A* tételből egyszerűen kapjuk. (Lásd 6. *A* tétel 2. korolláriumát.)

A 3. tétel, ill. 4. tétel korolláriuma alapján egy hálóban akkor és csak akkor határoz meg minden ideál (sőt minden osztály) pontosan egy osztályozást, ha *L* relatív komplementumos disztributív háló. Ezekre a hálókra tehát érvényes a fentmondott gyűrűelméleti tétel hálóelméleti analogonja. Ismeretes, hogy egy korlátos disztributív, relatív komplementumos hálóba bevezethető gyűrűművelet. Ezt általánosítva a III. részben kimutatjuk, hogy tetszőleges relatív komplementumos disztributív hálóban is értelmezhető Boole-gyűrűművelet, mégpedig megadjuk az összes lehetséges ilyen műveletet, s e tételt részben meg is fordítjuk.

Itt mondunk köszönetet Dr. Fuchs László professzornak és aspiránsának Fried Ervinnek szíves segítségükért.

I.

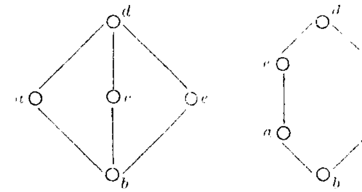
Célunk a bevezetésben felvetett 3. kérdést megválaszolni. Ehhez először szükséges a könnyebb 1. kérdés letárgyalása.

1. TÉTEL. *Az L hálóban minden ideál akkor és csak akkor magja valamely homomorfizmusnak, ha L disztributív.*

BIZONYÍTÁS: A feltétel elégségessége ismeretes (lásd pl. (LT) V. fej. 8. § 3. (*c*) és IX. fej. 6. § 2. gyakorlatok, vagy ezen dolgozat 5. tétel 2. korollárium). Igazoljuk a feltétel szükségességét. Ha az *L* háló nem disztributív,

* HASHIMOTO idézett cikkében hálók reprezentációit (halmazgyűrükre való homomorfizmusait) és különféle topológiákat vizsgál, melyeket speciális reprezentációkkal és inverzeikkel definiál. Ezen általános vizsgálatok alkalmazásaként előálló tételek között található ezen dolgozat 3. tétele. Ezzel magyarázható, hogy egyes tételek bizonyítása, ha dolgozatának többi részétől elszakítva nézzük, bonyolultnak tűnik. HASHIMOTO a 3. tétel bizonyításához felhasználja a kiválasztási axiómát, s talán az sem érdektelen, hogy bizonyításunknál ezt sikerült mellőzni.

akkor van az 1. vagy 2. ábrán látható részhálója. (Lásd (LT) IX. fej. 2. tétel.) Állítjuk, hogy az $[a]$ főideálhoz nem tartozik osztályozás.



1. ábra *2. ábra*

Ugyanis mindkét esetben $a \equiv b$-ből következik, hogy $d = c \cup a \equiv c \cup b = c$ és ezért $e = d \cap e \equiv c \cap e = b$, de $e \notin (a]$. Q. e. d.

A továbbiakban jelöljük $\Theta_{a,b}$-vel L-ben az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozást létesítő kongruenciarelációt. (Az, hogy $\Theta_{a,b}$ minimális osztályozást létesít, az azt jelenti, hogy ha $c \equiv d(\Theta_{a,b})$, akkor minden olyan Θ kongruenciarelációra, melyre $a \equiv b(\Theta)$, egyúttal $c \equiv d(\Theta)$ is fennáll.) $\Theta_{a,b}$ L bármely a és b eleme esetén létezik. Ezt könnyen beláthatjuk G. BIRKHOFF azon tétele alapján (lásd (LT) II. fej. 4. tétel), mely szerint az L háló kongruenciarelációinak halmazát komplett hálóvá tesszük, értelmezvén benne a rendezési relációt úgy, hogy $\Theta \leqq \Phi$ akkor és csak akkor, ha $x \equiv y(\Theta)$ maga után vonja $x \equiv y(\Phi)$-t. Ekkor L kongruenciarelációi valamely A részhalmazának ξ alsó és η felső határát a következőképpen adhatjuk meg: $x \equiv y(\xi)$ akkor és csak akkor, ha $x \equiv y(\Theta)$ minden $\Theta \in A$-ra; $x \equiv y(\eta)$ akkor és csak akkor, ha valamilyen véges $x = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = y$ sorozat választható úgy, hogy $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta_i)(i = 1, 2, \ldots, n)$ alkalmas $\Theta_i \in A$-val. Könnyű meggyőződni arról, hogy ξ és η kongruenciareláció s A-nak felső, ill. alsó határa.

Ezek után tekintsük azon kongruenciarelációk A halmazát, amelyekre $a \equiv b$. Ezen A halmaz ξ alsó határára $a \equiv b(\xi)$ (ξ definíciója miatt) s így ξ az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozást létesíti, azaz $\xi = \Theta_{a,b}$. Ezzel az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozás létezését és egyértelműségét beláttuk.

Vizsgáljuk meg, hogy egy disztributív hálóban mely elemek tartoznak egy osztályba a $\Theta_{a,b}$ által létesített osztályozásban. Ismeretes, hogy $x \equiv y(\Theta)$ akkor és csak akkor, ha $x \cup y \equiv x \cap y(\Theta)$ ezért ($x \cup y \geqq x \cap y$ miatt) elég összehasonlítható elempárok kongruenciájának szükséges és elegendő feltételét megadni (ami egyszerűbb alakú, mint az általános feltétel).

2. TÉTEL. *Legyen a, b az L disztributív hálónak két olyan (rögzített) eleme, melyre $a > b$ áll. A $c, d (\in L, c > d)$ elemekre $c \equiv d(\Theta_{a,b})$ akkor és csak akkor, ha*

(1) $$(a \cup d) \cap c = c$$

és

(2) $$(b \cup d) \cap c = d.$$

BIZONYÍTÁS: Definiáljuk L-ben a Θ relációt úgy, hogy $x \equiv y(\Theta)$ akkor és csak akkor, ha (rögzített $a > b$ mellett) $c = x \cup y$ és $d = x \cap y$-ra (1) és (2) fennáll. Ha igazoljuk, hogy $\Theta = \Theta_{a,b}$, akkor a 2. tétel állítása bizonyítva lesz. Lássuk be, hogy Θ kongruenciareláció. Nyilván a Θ reláció reflexív (mert $(a \cup b) \cap a = a$ és $(b \cup b) \cap a = b$, azaz (1) és (2) fennáll), továbbá szimmetrikus. Belátjuk, hogy a helyettesítési elv is érvényes, azaz, hogy $x \equiv y(\Theta)$-ból következik $x \cup t \equiv y \cup t(\Theta)$ és $x \cap t \equiv y \cap t(\Theta)$. Ezt a következő, (1) és (2), továbbá a disztributivitásból adódó egyenletek mutatják:

$$\{a \cup [(x \cup t) \cap (y \cup t)]\} \cap [(x \cup t) \cup (y \cup t)] = \{[a \cup (x \cap y)] \cup t\} \cap$$
$$\cap [(x \cup y) \cup t] = \{[a \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y)\} \cup t = (x \cup y) \cup t = (x \cup t) \cup (y \cup t);$$

s hasonlóan

$$\{b \cup [(x \cup t) \cap (y \cup t)]\} \cap [(x \cup t) \cup (y \cup t)] = (x \cup t) \cap (y \cup t),$$

illetve

$$\{a \cup [(x \cap t) \cap (y \cap t)]\} \cap [(x \cap t) \cup (y \cap t)] = \{[a \cup (x \cap y)] \cap (a \cup t)\} \cap$$
$$\cap [(x \cup y) \cap t] = [a \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y) \cap [(a \cup t) \cap t] = \{a \cup [(x \cap y)] \cap$$
$$\cap (x \cup y)\} \cap t = (x \cup y) \cap t = (x \cap t) \cup (y \cap t);$$

és ugyanígy

$$\{b \cup [(x \cap t) \cap (y \cap t)]\} \cap [(x \cap t) \cup (y \cap t)] = (x \cap t) \cap (y \cap t).$$

A Θ reláció tranzitivitását először az $u \equiv v(\Theta), v \equiv w(\Theta)$ $u > v > w$ esetben látjuk be. Θ definíciója miatt fennállanak a következő egyenletek:

(3) $$(a \cup v) \cap u = u,$$

(4) $$(b \cup v) \cap u = v$$

és

(5) $$(a \cup w) \cap v = v,$$

(6) $$(b \cup w) \cap v = w.$$

Igazoljuk, hogy

(7) $$(a \cup w) \cap u = u,$$

(8) $$(b \cup w) \cap u = w,$$

amely egyenletek Θ definíciója miatt épp a bizonyítandó $u \equiv w(\Theta)$-t jelentik. (5)-ből nyilván $a \cup w \geqq v$, ennek és $u \geqq v$-nek alapján (felhasználva a disztributivitást is)

$$(a \cup w) \cap u = [(a \cup w) \cap u] \cup v = (a \cup w \cup v) \cap (u \cup v) = (a \cup v) \cap u,$$

amiből (3) miatt azonnal adódik (7). $v \geqq w$ miatt $b \cup v \geqq b \cup w$ s így (4) és

(6) felhasználásával

$$(b\cup w)\cap u=(b\cup w)\cap(b\cup v)\cap u=(b\cup w)\cap v=w.$$

Ezzel (7) és (8) igazolását befejeztük.

Legyen másodszor tetszőleges u, v és w-re $u\equiv v(\Theta)$ és $v\equiv w(\Theta)$. A helyettesítési elv alkalmazásával $u\cup v=(u\cup v)\cup(v\cap w)\equiv(u\cup v)\cup(v\cup w)=$ $=u\cup v\cup w(\Theta)$, $u\cap v=(u\cap v)\cap(v\cup w)\equiv(u\cap v)\cap(v\cap w)=u\cap v\cap w(\Theta)$, azaz

$$u\cup v\cup w\equiv u\cup v(\Theta),$$
$$u\cup v\equiv u\cap v(\Theta),$$
$$u\cap v\equiv u\cap v\cap w(\Theta),$$

ami $u\cup v\cup w\geqq u\cup v\geqq u\cap v\geqq u\cap v\cap w$ miatt az előző eset kétszeri felhasználásával $u\cup v\cup w\equiv u\cap v\cap w(\Theta)$-t adja. Ennek alapján (a már bebizonyított helyettesítési elv alkalmazásával):

$$u\cup w=(u\cup w)\cup(u\cap w)=[(u\cup v\cup w)\cap(u\cup w)]\cup(u\cap w)\equiv[(u\cap v\cap w)\cap(u\cup w)]\cup$$
$$\cup(u\cap w)\equiv(u\cap v\cap w)\cup(u\cap w)=u\cap w(\Theta).$$

Ezzel a tranzitivitás bizonyítását befejeztük.

Mivel Θ — mint láttuk — reflexív, szimmetrikus, tranzitív és érvényes rá a helyettesítési elv, ezért kongruenciareláció. Továbbá $a\equiv b(\Theta)$, ezért $\Theta\geqq\Theta_{a,b}$ ($\Theta_{a,b}$ a legkisebb olyan kongruenciareláció, melyre $a\equiv b$). Viszont, ha $x\equiv y(\Theta)$, akkor $x\cup y=[a\cup(x\cap y)]\cap(x\cup y)$ és $x\cap y=[b\cup(x\cap y)]\cap(x\cup y)$. Nyilván $a\equiv b(\Theta_{a,b})$-ből a helyettesítési elv $t=x\cup y$ és $t=x\cap y$-ra való alkalmazásával $[a\cup(x\cap y)]\cap(x\cup y)\equiv[b\cup(x\cap y)]\cap(x\cup y)(\Theta_{a,b})$ adódik, ami az előbbi egyenletek figyelembevételével $x\cup y\equiv x\cap y(\Theta_{a,b})$-t adja. Tehát $x\equiv y(\Theta)$ maga után vonja $x\equiv y(\Theta_{a,b})$-t, azaz $\Theta\leqq\Theta_{a,b}$, s ezt a fenti egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk, hogy $\Theta=\Theta_{a,b}$, amint azt a 2. tétel állította.

A 2. tétel jó áttekintést ad a disztributív háló kongruencia viszonyairól, melyet — kissé részletesebben is, mint a továbbiakban erre szükségünk lenne — az alábbiakban megvizsgálunk.

1. KOROLLÁRIUM. *Ha az L disztributív hálóban $c\equiv d(\Theta_{a,b})$ $(a>b$ és $c>d)$, akkor $b\geqq c$, vagy $a\leqq d$ nem állhat fenn.*

Ugyanis $c\equiv d(\Theta_{a,b})$ az (1) és (2) egyenletek érvényességét jelenti. Ha most $b\geqq c$, akkor (2)-ből $d=(b\cup d)\cap c=c$, ami ellentmondás $c>d$-vel. Ugyanígy ellentmondásra vezet (1) miatt az $a\leqq d$ feltevés.

2. KOROLLÁRIUM. *Az L disztributív hálóban a $\Theta_{a,b}(a>b)$ által létesített osztályozásban csak az $[a, b]$ intervallum elemei kongruensek a-val.*

Tegyük fel ugyanis, hogy $c\equiv a\equiv b(\Theta_{a,b})$ ellenére $c\notin[a,b]$. Utóbbi miatt $c\cup a>a$, vagy $c\cap b<b$ közül legalább az egyik teljesül. De $a<a\cup c$ az $a\equiv c(\Theta_{a,b})$-ből adódó $a\equiv a\cup c(\Theta_{a,b})$, $b>c\cap b$ pedig a $c\equiv b(\Theta_{a,b})$-ből adódó $b\equiv c\cap b(\Theta_{a,b})$ miatt ellentmondana az 1. korolláriumnak.

3. KOROLLÁRIUM. *Az L hálóban minden zárt intervallum akkor és csak akkor osztály L alkalmas osztályozásánál, ha L disztributív.*

Ugyanis az állítás elégségességét a 2. korollárium, szükségességét pedig az 1. tétel (az ottani $[a, b]$ intervallumra alkalmazva) bizonyítja.

4. KOROLLÁRIUM. *Az L nullelemű disztributív hálóban az I ideálhoz tartozó minimális osztályozásban $a \equiv b\,(a > b, a, b \in L)$ akkor és csak akkor, ha van olyan $v \in I$, hogy*

$$(v \cup b) \cap a = a. \tag{9}$$

Jelölje Θ az I-hez tartozó minimális osztályozást létesítő kongruenciarelációt. Könnyű belátni, hogy $\Theta = \bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0}$. Ugyanis $\Theta \geqq \Theta_{u,0}$, ha $u \in I$, tehát $\Theta \geqq \bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0}$. Viszont az $\bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0}$ kongruenciareláció magja az I ideál, mert $x \not\equiv 0\,(\bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0})$, $x \in I$ ellentmond $\bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0} \geqq \Theta_{x,0}$-nak s így $\Theta = \bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0}$, amint azt állítottuk. Mivel $a \equiv b(\Theta)$, ezért léteznek olyan $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ és $u_i \in I(i = 1, 2, \ldots, n)$ elemek, hogy $x_i \equiv x_{i-1}(\Theta_{u_i,0})$, azaz $a \equiv b(\bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0})$. Legyen $v = \bigcup_{i=1}^{n} u_i$. Nyilván $\Theta_{v,0} \geqq \Theta_{u_i,0}$, s ezért $x_i \equiv x_{i-1}(\Theta_{v,0})$, azaz $a \equiv b\,(\Theta_{v,0})$. v definíciójából látható, hogy $v \in I$, továbbá $a \equiv b(\Theta_{v,0})$, ami (1) és (2) miatt éppen (9) fennállását jelenti. [(9) az (1)-ből az $a = v$, $b = 0$, $c = a$, $d = b$ helyettesítéssel adódik; a (2) egyenlet a triviális $(0 \cup b) \cap a = b$ egyenletbe megy át.] Tehát, ha $a \equiv b(\Theta)$, akkor van olyan $v \in I$, mely (9)-et kielégíti. Megfordítva, ha létezik (9)-et kielégítő v eleme I-nek, akkor $v \equiv 0(\Theta)$ és így $a = a \cap (b \cup v) \equiv a \cap (b \cup 0) = a \cap b = b(\Theta)$. Ezzel a 4. korollárium bizonyítását befejeztük.

Az 1. korollárium — szemléletesen szólva — azt fejezi ki, hogy a kongruencia (az a-nál nagyobb és b-nél kisebb elemek között) disztributív hálóban „függőlegesen" nem terjed, a második korollárium pedig kimondja, hogy minden zárt intervallum osztály alkalmas kongruenciarelációnál.

Az 1. és 2. tétel áttekintést adott azon hálók minimális osztályozásairól, melyekben minden ideálhoz legalább egy osztályozás tartozik. Ennek segítségével már könnyen adhatunk választ az ezen rész elején felvetett kérdésre.

3. TÉTEL. *Az L hálóban akkor és csak akkor teljesül, hogy minden ideál pontosan egy homomorfizmus magja és minden homomorfizmushoz tartozik mag,* ha L alulról korlátos,** disztributív és relatív komplementumos.*

* G. Birkhoff Lattice Theory c. könyvében a 73. problémánál az „ideálok és homomorfizmusok közötti egy-egyértelmű megfeleltetésről" ír, ezalatt nyilván a 3. tételben pontosan megfogalmazott egy-egyértelműséget érti.

** Az „alulról korlátos" kifejezés, a „0 elemmel rendelkezik", szinonimája.

BIZONYÍTÁS:

Szükségesség. L-ben lennie kell 0-elemnek, különben az identikus osztályozáshoz nem tartoznék mag; a disztributivitás szükségességét az 1. tétel biztosítja. Legyen L a továbbiakban nullelemes disztributív háló és $a, b\,(a>b)$ az L két, tetszés szerinti eleme. Tekintsük azon u elemek alkotta ideált — jelöljük $V_{a,b}$-vel — melyekre $u\equiv 0(\Theta_{a,b})$. Minden ideálhoz, így a $V_{a,b}$ ideálhoz is csak egyetlen osztályozás tartozik. Ez egyrészt ($V_{a,b}$ definíciója miatt) a $\Theta_{a,b}$ által létesített osztályozás, másrészt, mivel egyetlen, melynek $V_{a,b}$ magja, ezért a $V_{a,b}$-hez tartozó minimális osztályozás. Kell tehát, hogy a $V_{a,b}$-hez tartozó minimális osztályozásban $a\equiv b$ fennálljon. A 2. tétel 4. korolláriuma miatt tehát létezik olyan v elem, mely (9)-et kielégíti. Továbbá, mivel $v\equiv 0(\Theta_{a,b})$, ezért (1) és (2) miatt ($c=v, d=0$ helyettesítéssel)

(10) $$a\cap v=v$$

és

(11) $$b\cap v=0$$

egyenletek is fennállnak. (9)-ből folyólag $v\cup b\geqq a$, de $b<a$ és (10)-ből $v\leqq a$ s így $b\cup v\leqq a$, azaz

(12) $$b\cup v=a.$$

(10) és (12) együtt éppen azt jelenti, hogy $[0, a]$-ban b relatív komplementuma v.

Ezzel kimutattuk, hogy L-ben minden $[0, a]$ intervallum komplementumos részháló. J. von NEUMANN azon tételéből, mely szerint egy korlátos és komplementumos háló, amely moduláris, egyúttal relatív komplementumos is, a fentiek alapján rögtön adódik a $[0, a]$ komplementumos részháló és ezzel együtt L relatív komplementumossága.

Elégségesség. Az 1. tétel miatt minden ideálhoz tartozik osztályozás, de a $[0, a]$ intervallumok komplementumossága miatt ez az osztályozás egyértelmű, mert ha v a $[0, a]$ intervallumban b komplementuma, akkor $a\equiv b\,(\Theta)$ ekvivalens $v\equiv 0(\Theta)$-val, ugyanis $a\equiv b(\Theta)$ esetén $v=a\cap v\equiv b\cap v=0(\Theta)$ és megfordítva $v\equiv 0(\Theta)$ maga után vonja $a=v\cup b\equiv 0\cup b=b(\Theta)$ fennállását. Q. e. d.

Érdemes megjegyezni, hogy a $V_{a,b}$ ideál főideál, mert $a\equiv b$ ekvivalens $V_{a,b}\equiv 0$-val és $a\equiv b$ ekvivalens $v\equiv 0$-val is, ezért $V_{a,b}\equiv 0$ akkor és csak akkor, ha $v\equiv 0$, viszont a feltételek miatt a $V_{a,b}$ és a $[v, 0]$ ideálhoz is tartozik osztályozás, kell tehát, hogy $V_{a,b}=[v, 0]$ legyen, amint azt állítottuk.

Ezután rátérünk a 3. tétel egy általánosítására. Nevezetesen érvényes a következő

4. TÉTEL. *Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az L háló valamely rögzített „a" elemét tartalmazó minden konvex részhálójához pontosan*

egy osztályozás tartozzék L disztributív és összes $[a, b]$ $(a > b$ vagy $b > a)$ intervallumának, mint részhálóknak komplementumos volta.

BIZONYÍTÁS:

Szükségesség. Először belátjuk, a disztributivitás szükségességét. Tegyük fel hogy L nem disztributív. Ezen esetben van olyan (páronként különböző) x, y, z elemhármasa, melyre

(13) $$x \cup z = y \cup z \text{ és } x \cap z = y \cap z.$$

A $z = a$ esetben, mivel az a elemhez, mint konvex részhálóhoz is egyetlen osztályozás tartozik (mégpedig a triviális), ezért minden más osztályozásban az a-t tartalmazó osztálynak van legalább egy további eleme, sőt — a kompatibilitás folytán — olyan eleme is, amely összehasonlítható a-val (mert $a \equiv x$ maga után vonja $a \cup x \equiv a$ és $a \cap x \equiv a$-t is). Eszerint, mivel $x \cap y \neq x \cup y$ (tehát $\Theta_{x \cup y, x \cap y}$ biztosan nem a triviális osztályozás) van olyan $c \gtrless a$ elem, hogy

(14) $$c \equiv a(\Theta_{x \cup y, x \cap y}).$$

Ekkor viszont aszerint, hogy $c > a$ vagy $c < a$ az $[a, x \cap y \cap a]$, ill. $[x \cup y \cup a, a]$ konvex részhálóhoz nem tartozik osztályozás; mert pl. a $c > a$ esetben $a \equiv x \cap y \cap a(\Theta)$-ból (hasonlóan az 1. tétel bizonyításához) bármely Θ-ra következik $x \equiv y(\Theta)$, tehát $x \cup y \equiv x \cap y(\Theta)$, azaz $\Theta \geqq \Theta_{x \cup y, x \cap y}$, s így $c \equiv a(\Theta)$ (lásd (14)-et), de ez $c \notin [a, x \cap y \cap a]$ miatt éppen azt jelenti, hogy $[a, x \cap y \cap a]$ egyetlen kongruenciareláció szerinti osztályozásban sem osztály, vagyis a $c > a$ feltevés ellentmondásra vezetett. Ugyanígy vezet ellentmondásra a $c < a$ feltevés is. E kettő együtt egyrészt azt jelenti, hogy $z \neq a$, másrészt, hogy $x \cup a = y \cup a$ és $x \cap a = y \cap a$ egyszerre nem állhat fenn. Ezért a hálóelméleti dualitásra való tekintettel ((LT) I. fej. 2. tétel), az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x \cup a \not\equiv y \cup a$. Állítjuk, hogy ez esetben az $[y \cup a, y \cap z \cap a] (\ni a)$ konvex részhálóhoz nem tartozik osztályozás. Ugyanis $y \cup a \equiv y \cup z \cup a$ esetén ((13)-ra tekintettel)

$$z = z \cup (y \cap z \cap a) \equiv z \cup (y \cup a) = (z \cup y) \cup a = z \cup x \cup a,$$

s ebből $x \cap z \equiv x \cap (z \cup x \cup a) = x$.

(13) miatt tehát $x \equiv y \cap z$, ez azonban $y \cup a \geqq y \cap z \geqq y \cap z \cap a$ és $x \notin [y \cup a, y \cap z \cap a]$ miatt éppen azt jelenti, hogy legutóbbi állításunk helyes. Összefoglalva, a (13) feltevés mindenképpen ellentmondást ad azzal a feltétellel, hogy minden, az a elemet tartalmazó konvex részháló osztály legyen pontosan egy kompatibilis osztályozásnál, tehát a disztributivitás szükséges. Másodszor bizonyítjuk, hogy szükséges az $[a, b]$ intervallumok $(b \lesseqgtr a)$ komplementumossága. Legyen $b_1 > b_2 > a$. Mivel az osztályozásnak az a elemre — mint konvex részhálóra — is egyértelműnek kell lennie, ezért van olyan a-tól

különböző és vele összehasonlítható c ($c \gtrless a$), hogy $a \equiv c(\Theta_{b_1, b_2})$. A 2. tétel 1. korolláriuma miatt $c < a$ nem lehetséges, mert $b_1 > b_2 > a > c$ állana fenn (azaz a kongruencia a $[b_1, b_2]$ intervallumról „függőlegesen leterjedt" volna $[a, c]$-re), ezért $c > a$, azaz $b_1 \equiv b_2$-ből következőleg a-val kongruens elemek is az $[a)$ duális főideálban vannak. Ezért az $[a)$ duális főideálban (és duális módon az $(a]$ főideálban) ugyanazok a kongruencia viszonyok uralkodnak, mint amelyeket a 3. tétel megkíván. Így a 3. tételből adódik minden $[a, b]$ ($a \gtrless b$) intervallum relatív komplementumossága, azaz a tétel szükségességét bizonyítottuk.

Elégségesség. Először belátjuk, hogy a feltételek teljesülése esetén az L hálóban a disztributivitásból folyólag minden konvex részhálóhoz (s így minden az a elemet tartalmazóhoz is) tartozik osztályozás. Ez azonnal adódik abból a tényből, hogy minden konvex részháló egy ideál és egy duális ideál metszete s az ezekhez tartozó osztályozások (pontosabban a hozzájuk tartozó kongruenciarelációk) metszete nyilván a kívánt tulajdonságú osztályozást létesíti. Másodszor belátjuk, hogy az a elemet tartalmazó D konvex részháló pontosan egy osztályozásnál lép fel osztályként. Legyen $x > y (x, y \in L)$ és $a \cup x > a \cup y$ ($a \cup x = a \cup y$ esetén $a \cap x > a \cap y$-ra folytatjuk az okoskodást; $a \cup x = a \cup y$ és $a \cap x = a \cap y$ egyszerre a disztributivitás miatt nem állhat fenn), továbbá $[a, a \cup x]$-ben $a \cup y$ relatív komplementuma c. $x \equiv y$ esetén $a \cup x \equiv a \cup y$ s ebből $c = c \cap (a \cup x) \equiv c \cap (a \cup y) = a$, s így az a egyelemű konvex részháló csak a triviális osztályozásnál alkot osztályt (azaz a hozzátartozó kongruenciareláció egyértelmű). Tegyük fel, hogy D több kongruenciarelációnál osztály. Tekintsük azon minimális kongruenciareláció szerinti homomorf képét L-nek, melynél D osztály. Ez a faktoráló szintén disztributív és minden $(\bar{b}, \bar{D})$ $(\bar{b} \gtrless \bar{D})$ intervalluma relatív komplementumos ($\bar{D}$ D homomorf képe, nyilván $\bar{D} = \bar{a}$). Így a fentiek szerint egyetlen kongruenciarelációja van csak L-nek, melyben D osztály, ellentétben a feltevéssel. Q. e. d.

A tétel bizonyításából látható, hogy a 4. tétel azon feltételéből, mely szerint „az »a« elemet tartalmazó minden konvex részhálóhoz pontosan egy osztályozás tartozzék" csak annyit használtunk fel, hogy minden, az a elemet tartalmazó zárt intervallumhoz tartozzék pontosan egy osztályozás.

Hogy a 4. tétel feltételeit kielégítő háló minden $[x, y]$ intervallumának relatív komplementumossága nem szükséges, arra példát szolgáltat a 3 elemű lánc, ha a-nak választjuk a hálónak 0 és I-től különböző elemét; ily módon a háló nyilván eleget tesz a 4. tétel feltételeinek, viszont a $[0, I]$ intervallum nem komplementumos.

KOROLLÁRIUM. *Az L hálóban akkor és csak akkor tartozik minden konvex részhálóhoz pontosan egy osztályozás, ha L disztributív és relatív komplementumos.*

A korollárium a 4. tétel közvetlen folyománya.

II.

A 2. tétel szerint valamely disztributív hálóban a $\Theta_{a,b}$ kongruenciarelációnál azok és csak azok a $c, d (c > d)$ elempárok kongruensek, amelyekre fennáll az $(a \cup d) \cap c = c$ és $(b \cup d) \cap c = d$ egyenlet. A továbbiakban ennek a tételnek az általánosítását vizsgáljuk tetszőleges hálók esetére.

Nyilvánvaló, hogy bármely hálóban $c \equiv d(\Theta_{a,b})$, ha c és d eleget tesznek az

$$(15) \qquad \{\ldots/[/(a \cup b) \cup x_1/\cap x_2] \cup x_3/\cap \ldots\} \cup x_n = c \cup d,$$

$$(16) \qquad \{\ldots/[/(a \cap b) \cup x_1/\cap x_2] \cup x_3/\cap \ldots\} \cup x_n = c \cap d$$

egyenleteknek a háló alkalmas $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ elemeivel. A továbbiakra nézve megállapodunk a következőkben:

DEFINÍCIÓ. *Az L hálóban a c, d elempárt az a, b elempárhoz hozzárendeltnek nevezzük $(a, b, c, d \in L)$ — jelben $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ — ha a, b, c, d elemekhez léteznek L olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemei, amelyek kielégítik a fenti* (15) *és* (16) *egyenleteket.*

A definíció segítségével könnyen megadhatjuk azon u, v elemeket, amelyekre $u \equiv v(\Theta_{a,b})$.

5. TÉTEL. *Az L hálóban az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozásban $u \equiv v$ akkor és csak akkor, ha léteznek L-nek olyan*

$$(*) \qquad y_0 = u \cup v \geqq y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_k = u \cap v \text{ elemei, hogy } \overline{a, b} \to \overline{y_{j-1} y_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

BIZONYÍTÁS: Ha a tétel feltevése teljesül, akkor nyilván $u \equiv v(\Theta_{a,b})$ s így elég kimutatni, hogy Θ L egy osztályozását létesíti, ha $u \equiv v(\Theta)$ ekvivalens a $(*)$ feltétel fennállásával. Előrebocsátjuk, hogy $c \equiv d(\Theta)$ akkor és csak akkor, ha $c \cup d \equiv c \cap d(\Theta)$, mint az a definícióból közvetlenül leolvasható. A Θ reláció nyilván reflexív és szimmetrikus. Bizonyítjuk a helyettesítés elvét. Legyen *először* $u > v$ és $u \equiv v(\Theta)$ azaz $\overline{a, b} \to \overline{y_{j-1}, y_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Nyilván $t \cup u = t \cup y_0 \geqq t \cup y_1 \geqq \ldots \geqq t \cup y_k = t \cup v$ és $\overline{a, b} \to \overline{t \cup y_{j-1}, t \cup y_j} (j = 1, 2, \ldots, k)$ és így $t \cup u \equiv t \cup v(\Theta)$, hasonlóan $t \cap u \equiv t \cap v(\Theta)$. Speciálisan $u > w > z$, $u \equiv v(\Theta)$ esetén $w \equiv u(\Theta)$ $(t = w$ eset) azaz a Θ reláció konvex.* Legyen *másodszor* u és v tetszőleges, továbbá $u \equiv v(\Theta)$. Mivel az első eset következtében $t \cup (u \cup v) \equiv t \cup (u \cap v)(\Theta)$ és $t \cup (u \cup v) \geqq (t \cup u) \cap (t \cup v) \geqq t \cup (u \cap v)$ ezért a konvexitás miatt $(t \cup u) \cap (t \cup v) \equiv t \cup (u \cup v) = (t \cup u) \cup (t \cup v)(\Theta)$, ami éppen a bizonyítandó $t \cup u \equiv t \cup v(\Theta)$-t jelenti.

* Egy tetszőleges Γ relációt konvexnek nevezünk, ha $a \Gamma b$ és $a > c > b$ esetén $a \Gamma c$, és $c \Gamma b$.

A Θ reláció tranzitivitása az $u \equiv v(\Theta)$ és $v \equiv w(\Theta)$, $u > v > w$ esetben triviális. Az általános esetben $u \equiv v(\Theta)$ és $v \equiv w(\Theta)$-ból adódik $u \cup v \equiv \equiv u \cap v(\Theta)$, $v \cup w \equiv v \cap w(\Theta)$, továbbá $u \cup v = (u \cup v) \cup (v \cap w) \equiv (u \cup v) \cup (v \cup w) = = u \cup v \cup w(\Theta)$ és $u \cap v = (u \cap v) \cap (v \cup w) \equiv (u \cap v) \cap (v \cap w) = u \cap v \cap w(\Theta)$, s mivel $u \cup v \cup w \geqq u \cup v \geqq u \cap v \geqq u \cap v \cap w$, ezért ezekből $u \cup v \cup w \equiv u \cap v \cap w(\Theta)$ adódik. Viszont $u \cup v \cup w \geqq u \cup w \geqq u \cap w \geqq u \cap v \cap w$, ami a konvexitás miatt a bizonyítandó $u \cup w \equiv u \cap w(\Theta)$-t adja. Ezzel beláttuk, hogy Θ kongruencia-reláció, s így L-nek egy osztályozását, mégpedig az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozást létesíti.

1. KOROLLÁRIUM. *Az L hálóban akkor és csak akkor létezik olyan homomorfizmus, melyben osztály egy adott J részhalmaza L-nek, ha $a, b, c \in J$ és $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ esetén $d \in J$.*

BIZONYÍTÁS: A „csak akkor" állítás (15), (16)-ból azonnal adódik. Az „akkor" állításhoz elég belátnunk, hogy a feltétel teljesülése esetén a $\Theta = \bigcup_{a, b \in J} \Theta_{a, b}$ kongruenciarelációnál a J részhalmaz osztály; ezt pedig éppen a korollárium feltétele biztosítja.

2. KOROLLÁRIUM. *Egy disztributív hálóban minden ideál magja valamely homomorfizmusnak.*

BIZONYÍTÁS: Legyen J egy tetszőleges ideál. Azt kell belátnunk, hogy bárhogyan választjuk J-ben az $\overline{a > b}$ elempárt, nincs a hálónak olyan $v \in J$ és $u \notin J$ eleme$(u > v)$, hogy $\overline{a, b} \to \overline{u, v}$ (lásd az előző korolláriumot). A hozzárendelt elempár azonban — mint azt a 2. tételben bizonyítottuk — disztributív hálóknál az $(a \cup v) \cap u = u$ és $(b \cup v) \cap u = v$ egyenletek teljesülésével ekvivalens. Ez azonban már rögtön igazolja állításunkat, hiszen $a, v \in J$ s így $(a \cup v) \cap u = u$ is eleme J-nek.

3. KOROLLÁRIUM. *Egy L háló akkor és csak akkor egyszerű, ha bármely $a, b, c, d \in L$-hez találhatók olyan $z_0 = c \cup d \geqq z_1 \geqq z_2 \geqq \ldots \geqq z_n = c \cap d$ elemek $(z_i \in L)$, hogy $\overline{a, b} \to \overline{z_{i-1}, z_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

A 3. korollárium nem szorul bizonyításra.

Az 5. tétel segítségével már választ tudunk adni a bevezetőben felvetett 2. kérdésre. Feleletként a következő két tétel adódik.

6. *A* TÉTEL. *Az L hálóban akkor és csak akkor határoz meg minden homomorfizmus egy magot és minden mag egyetlen homomorfizmust, ha*

(a) L alulról korlátos;

(b) L bármely $a, b (a \neq b)$ elempárjához található olyan $c (\neq 0)$ elem, hogy $\overline{a, b} \to \overline{c, 0}$;

(c) *L minden homomorf képére fennáll* (b).

6. B TÉTEL. *Az L hálóban akkor és csak akkor határoz meg minden homomorfizmus egy magot és minden mag egyetlen homomorfizmust, ha*

(a) *L alulról korlátos;*

(b) *L bármely* $a, b (a \neq b)$ *elempárjához található olyan* $c (\neq 0)$ *elem, hogy* $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, 0}$;

(c′) *L tetszőleges* $a, b (a \neq b)$ *elempárjához léteznek L olyan* $y \in V_{a,b}$ *és* $a \cup b = d_0 > d_1 > \ldots > d_n = a \cap b$ *elemei, hogy* $\overline{y, 0} \rightarrow \overline{d_{i-1}, d_i} (i = 1, 2, \ldots, n)$, *ahol* $V_{a,b}$ *jelöli az* $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, 0}$ *hozzárendelésben szereplő c elemek által generált ideált.*

MEGJEGYZÉS. A 6. *B* és 6. *A* tételben csak a (c) illetve (c′) feltételek különböznek. Éppen ezért, ha a továbbiakban az (a) vagy (b) feltételek szerepelnek, az mindkét tételre vonatkozik. (Nyilván 6. *A*-ban a (b) feltétel csak a szimmetria miatt szerepel.)

A 6. *A* tétel bizonyításához szükséges a következő

SEGÉDTÉTEL. Egy alulról korlátos *L* hálóban akkor és csak akkor tartozik egyetlen osztályozás a 0 ideálhoz (mint maghoz), ha (b) teljesül.

BIZONYÍTÁS: Ha (b) teljesül akkor a 0 ideálhoz valóban csak a triviális osztályozás tartozik, mert minden más kongruenciareláció esetén található olyan $a \equiv b (\Theta)$ elempár, hogy $a \neq b$; ebből viszont a(b) feltétel miatt olyan $c (\neq 0)$ egzisztenciája következik, melyre $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, 0}$, s így $c \equiv 0 (\Theta)$, tehát Θ magja különbözik a 0 ideáltól. Megfordítva, tegyük fel, hogy (b) nem teljesül valamely $a, b (a \neq b)$ elempárra. Tekintsük a $\Theta_{a,b}$ osztályozást. Ebben az osztályozásban 0 a mag, mert $c \equiv 0 (\Theta_{a,b})$ $(c \neq 0)$ esetén az 5. tétel miatt olyan c_1 létezése következnék, melyre $0 < c_1 \leqq c$ és $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c_1, 0}$ (c_1 az 5. tételben szereplő y_r-nek felel meg, melyre $y_r > y_{r+1} = y_k$). Ezzel kimutattuk, hogy ha a (b) feltétel nem teljesül, akkor a 0 ideálhoz, mint maghoz legalább két osztályozás (az egyik a $\Theta_{a,b}$, a másik a triviális osztályozás) tartozik.

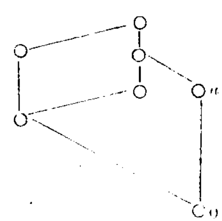
6. *A* tétel bizonyításához tekintsük *L*-nek egy olyan *J* ideálját, melyhez legalább egy osztályozás tartozik és legyen L/Θ *L* azon faktorhálója, melyben az elemek a *J*-hez tartozó minimális osztályok.* *L*-ben minden *J*-hez tartozó osztályozás osztályai minimális osztályok egyesítéseképp állnak elő. Ezért *L*-ben *J*-hez akkor és csak akkor tartozik pontosan egy osztályozás, ha L/Θ-ban a 0 ideálhoz egyetlen osztályozás tartozik, s ez a segédtétel miatt éppen (c) teljesülését jelenti. Q. e. d.

* *J*-hez tartozó minimális osztályozás a *J* maggal rendelkező kongruenciarelációk metszetéhez tartozó osztályozás.

6. B TÉTEL BIZONYÍTÁSA: (a), (b) szükségességét már beláttuk. Lássuk be (c') szükségességét. Tegyük fel, hogy (c') nem teljesül valamely a, b elempárra. Állítjuk, hogy ekkor $V_{a,b}$ legalább két homomorfizmus magja. Tekintsük az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozást. Itt a mag a $V_{a,b}$ ideál s így tartozik $V_{a,b}$-hez legalább egy osztályozás (melyben $a \equiv b$), tehát $V_{a,b}$-hez tartozik minimális osztályozás is, melyben állítjuk, hogy $a \not\equiv b$. Ugyanis, ha $V_{a,b} \equiv 0$-ból következnék $a \equiv b$, ez éppen (c') fennállását jelentené a feltevéssel ellentétben (hasonlóan az 5. tétel 3. korolláriumához).

Az (a), (b) és (c') feltételek elégségessége azonnal adódik abból, hogy ezek teljesülése esetén $a \equiv b(\Theta)$ akkor és csak akkor, ha $V_{a,b} \subseteq J_\Theta$. ($J_\Theta$ azon u elemek halmaza, melyekre $u \equiv 0(\Theta)$.) Ez pedig a következőképp látható be: $V_{a,b}$ definíciója és (b) miatt $a \equiv b(\Theta)$-ból következik olyan $c(\neq 0)$ létezése, hogy $c \equiv 0(\Theta)$ (ti. az a c, melyre $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, 0}$) s ebből $V_{a,b} \subseteq J_\Theta$ adódik; ha $J_\Theta \supseteq V_{a,b}$ akkor, a (c') feltétel miatt $y \equiv 0(\Theta)$ s ez éppen az 5. tétel miatt $a \equiv b(\Theta)$-t jelenti.

MEGJEGYZÉS. A 6. A tételnek (b) feltétele nem vonja maga után a (c) feltétel teljesülését, azaz a (b) tulajdonság nem homomorf invariáns. Ennek illusztrálására szolgáljon a következő példa:



3. ábra

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a 3. ábrán látható hálóban bármely a, b elempárjához van olyan $c(\neq 0)$, hogy $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, 0}$ viszont az $(u]$ főideálhoz tartozó minimális osztályozásban — amelyhez tartozó faktorháló a 3 elemű lánccal izomorf — a (b) feltétel nyilván nem teljesül.

1. KOROLLÁRIUM. *Ha egy alulról korlátos L hálóban bármely $[0, a]$ intervallum komplementumos részháló, akkor a mag egyértelműen meghatározza a homomorfizmust* ((LT) 23. old. 3. tétel).

Az 1. korollárium a 6. B tételből adódik. Legyen ugyanis $a, b(a \neq b)$ az L háló két tetszőleges eleme s tekintsük a $(0, a \cup b)$ intervallum azon c elemét, mely az $a \cap b$ komplementuma ebben az intervallumban. Ekkor $[(a \cup b) \cup 0] \cap c = c(= c \cup 0)$ és $[(a \cap b) \cup 0] \cap c = 0(= c \cap 0)$ miatt $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, 0}(c \neq 0)$, tehát (b) teljesül és $c \in V_{a,b}$, továbbá $(c \cup 0) \cup (a \cap b) = a \cup b$ illetve $(c \cap 0) \cup (a \cap b) =$

$= a \cap b$ ($x_1 = a \cap b$-vel (15), (16)-ban) azt jelenti, hogy $\overline{c, 0} \to \overline{a, b}$, ebből pedig valóban a 6. B tétel (c) feltételének teljesülése következik.

2. KOROLLÁRIUM. (ARESKIN *tétele*) *Az L alulról korlátos disztributív hálóban akkor és csak akkor van egy-egyértelmű megfeleltetés az ideálok és osztályozások között, ha L minden homomorf képe gyengén komplementumos.**

Ugyanis a 6. A tétel $\overline{a, b} \to \overline{c, 0}$ feltétele disztributív hálóban (lásd I. rész (10) és (11) egyenleteit, c-nek megfelel az ottani v) ekvivalens a gyengekomplementumossággal.

III.

A 3. tétel és a 4. tétel korolláriuma előtérbe helyezi az egyértelmű osztályozás vizsgálatánál a relatív komplementumos disztributív hálókat. Ezen hálótípus és a Boole-gyűrűk kapcsolatával kívánunk a következőkben foglalkozni. Mindenekelőtt egy fontos tételt fogunk igazolni, mely számunkra majd lehetővé teszi bizonyos egyenlőségek egyszerű igazolását.

Legyenek

$$f_i(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m)$$
és
$$\psi_i(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

tetszés szerinti háló polinomok.

7. TÉTEL. *Az L relatív komplementumos disztributív hálóban az*

$$f_i = \psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{17}$$

egyenletrendszernek akkor és csak akkor van tetszésszerinti

$$u_1 = a_1, \ldots, u_n = a_n (a_j \in L, j = 1, 2, \ldots, n)$$

értékrendszer esetén megoldása, ha (17)*-nek bármely*

$$u_1 = b_1, \ldots, u_n = b_n (b_j \in \mathbf{2}^{**} j = 1, 2, \ldots n),$$

értékrendszer esetén **2***-ben van megoldása.*

Megjegyezzük, hogy ha $m = 0$ (azaz a keresendő x_i-k halmaza üres), akkor (17) azonosságot jelent. A 7. tétel bizonyításához előrebocsátjuk a következőt:

* Az L hálót gyengén komplementumosnak nevezzük, ha bármely $a > b$ elempárjához található olyan c, hogy $a \cap c \neq 0$ és $b \cap c = 0$. (Lásd ISEKI KIYOSI Portugaliae Math. 9. 1950. 169—170. o.) Más, a fentivel ekvivalens definícióra nézve lásd még ISEKI KIYOSI előbbi dolgozatát, továbbá SZÁSZ GÁBOR kandidátusi disszertációját.

** **2** a kételemű hálót — mely izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott — jelöli.

SEGÉDTÉTEL. *Legyen L relatív komplementumos disztributív háló és $u_1, \ldots, u_n \in L$. L-nek van olyan B_n véges részhálója, mely Boole-algebra és $u_1, \ldots, u_n \in B_n$. Érvényes $O(B_n) \leqq 4^n$.*

BIZONYÍTÁS: A segédtétel állítása $n = 1, 2$-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy az $u_1, \ldots, u_{n-1}$-et elemeként tartalmazó B_{n-1} véges Boole-algebra létezik és $O(B_{n-1}) \leqq 4^{n-1}$. B_{n-1} alsó, ill. felső határa legyen O_{n-1}, I_{n-1}. Tekintsük az $(O_{n-1}, u_n \cup I_{n-1})$ intervallumban I_{n-1} komplementumát I'_{n-1}-t és legyen A_1 az O_{n-1} és I'_{n-1}-t tartalmazó, legfeljebb két elemű részhálója L-nek, A_2 pedig az $u_n \cup I_{n-1}$ és u_n elemeket tartalmazó, szintén legfeljebb kételemű részháló. A $B_n = (B_{n-1} X A_1) \check{X} A_2$ [$\check{X}$ itt duális direkt szorzatot jelöl, ahol az $(x_1, x_2) \longleftrightarrow x_1 \cap x_2$ megfeleltetéssel képezzük a direkt szorzatot] részhálója L-nek véges Boole-részhálója, mert három véges Boole-háló direktszorzata. Végül nyilván (mert $u_n \in A_2$) $u_1, \ldots, u_n \in B_n$ és $O(B_n) = O(B_{n-1}) \cdot O(A_1) \cdot O(A_2) \leqq 4^{n-1} \cdot 2 \cdot 2 = 4^n$. Ezzel a segédtétel bizonyítását befejeztük.

Rátérünk a 7. tétel BIZONYÍTÁSÁRA.

Szükségesség. Tekintsük a B_{n+m} véges Boole-algebrát, amely tartalmazza az $a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m$ elemeket. B_{n+m}-ben fennáll (17), tehát (17) igaz B_{n+m} minden homomorf képére is, így **2**-re is. $b_i = \bar{a}_i$-ok (a_i-k homomorf képei) **2**-ben való tetszőleges választhatóságát biztosíthatjuk a_i-k egy adott primideálon (a homomorfizmus magján) belül, ill. kívül való felvételével.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy **2**-ben kielégíthető (17). Nyilván (17) kielégíthető kételemű hálók véges direkt szorzatában (ugyanis komponensenként kielégíthető (17)), s mivel minden véges Boole-algebra előállítható kételemű háló direkt szorzataként, ezért minden véges Boole-algebrában is. Legyen $B_n L$ azon részhálója, mely véges Boole-algebra és $a_1, \ldots, a_n \in B_n$. B_n-ben (17) kielégíthető, tehát L-ben is. Q. e. d.

1. MEGJEGYZÉS. A bizonyításból az is kiderül, hogy $x_1, \ldots, x_m$ az $a_1, \ldots, a_n$ által meghatározott véges Boole-algebrából választható.

2. MEGJEGYZÉS. Láthatjuk, hogy relatív komplementumos disztributív hálóban (17) kielégíthetőségét elég az $a_{i_1} = \cdots = a_{i_v} > a_{i_{v+1}} = \cdots = a_{i_n}$ esetben belátni, ahol $i_1, \ldots, i_n$ befutja $1, 2, \ldots, n$ összes permutációját.

Érvényes a 7. tétel megfordítása is.

8. TÉTEL. *A (17)-nek valamely L hálóban való teljesülése akkor és csak akkor ekvivalens a **2**-ben való teljesüléssel, ha L disztributív és relatív komplementumos.*

A 8. tétel „akkor" állítását a 7. tétel bizonyítja, a „csak akkor" pedig abból adódik, hogy az

$$a_1 \cup (a_2 \cap a_3) = (a_1 \cup a_2) \cap (a_1 \cup a_3)$$

egyenlőség (disztributivitás) és az

$$\begin{aligned} &a_1 \cap a_2 = a_1, a_1 \cap a_3 = a_1, a_2 \cap a_3 = a_2, \\ &a_2 \cup x = a_3, \\ &a_2 \cap x = a_1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer (relatív komplementumosság) 2-ben kielégíthető.

A 7. tétel már elég erős ahhoz, hogy segítségével megvizsgálhassuk a relatív komplementumos disztributív hálók és a Boole-algebrák kapcsolatát.

9. TÉTEL. *Az L disztributív hálóban akkor és csak akkor értelmezhető Boole-algebra művelet* (amelyet véges sok paraméter és egyenlet segítségével az $\cup$ és $\cap$ műveletekkel definiálunk), ha L relatív komplementumos. Az összes ily módon bevezethető művelet megadható L egy rögzített a elemével, a következőképp:*

$$x \cdot y = (a \cap x) \cup (x \cap y) \cup (a \cap y)$$
(18) *és $x + y$ az $x \cdot y$ relatív komplementuma az $(a \cup x \cup y, a \cap x \cap y)$ intervallumban.*

BIZONYÍTÁS: Legyen L relatív komplementumos disztributív háló. Bizonyítjuk, hogy (18) Boole-gyűrűműveletet definiál. A 7. tétel miatt elég ezt a 2 hálóra belátni (2 elemeit O, I-vel jelöljük). (Itt látható, milyen hasznos a 7. tétel; anélkül a (18) alatti műveletekkel definiált struktúra gyűrű voltának közvetlen igazolása nagyon nagy nehézségeket okozna.)

2-ben a (18) alatt definiált művelet a következő művelettáblával adható meg:

$$(19) \qquad a = 0 \qquad \begin{array}{c|cc} + & 0 & I \\ \hline 0 & 0 & I \\ I & I & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & I \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I \end{array}$$

A művelettáblából látható, hogy 2-ben (18) Boole-gyűrűműveletet definiál. Az $a = I$ eset az előbbi duálisa.

Kimutatjuk továbbá, hogy ha L relatív komplementumos disztributív háló, akkor (18) az összes bevezethető Boole-gyűrűműveletet kimeríti. Kételemű Boole-gyűrű 0 és I elemmel nyilván csak kétféle van, az 1. típust a (19) művelettábla adja meg, és a 2. típus belőle 0 és I felcserélésével adódik. Mivel minden véges Boole-algebra kételemű Boole-algebrák direkt szorzata, ezért a véges Boole-algebrában bevezetendő műveletet teljesen meghatározza hány 1. és hány 2. típusú kételemű Boole-gyűrűt szoroztunk össze. Mivel a 2^n Boole-algebrának n kételemű direkt faktora van, és mindegyik két típusú lehet, ezért 2^n féle művelet vezethető be (ezek mind különbözők, mert más a 0 elemük), mivel (18) is 2^n különböző műveletet ($a\, 2^n$ féle lehet) ad meg,

* Azaz 2 karakterisztikájú gyűrűművelet.

ezért (18) kimeríti az összes bevezethető műveletet. Ezzel beláttuk, hogy véges Boole-háló esetén (18) az összes lehetséges Boole-gyűrűműveletet megadja. Ezek után tekintsük L két elempárját x, y és u, v-t és jelölje B_{xy}, ill. B_{uv} azokat a véges rész Boole-algebráit L-nek (7. tétel), melyek x, y-t, ill. u, v-t, továbbá a műveleteket definiáló paramétereket elemként tartalmazzák. Tudjuk, hogy B_{xy} és B_{uv}-ben (mivel végesek) van olyan rögzített a, ill. b elem, melyek a műveletet meghatározzák (18) szerint B_{xy}, ill. B_{uv}-ben. Ha nem volna igaz, hogy L-ben a művelet (18) alapján definiálható, akkor lenne olyan x, y és u, v, hogy B_{xy}, B_{uv}-ben a rögzített a és b elemek különbözők, azaz $a \neq b$. Tekintsük egy $s \in B_{xy} \cap B_{uv}$ elemet (a $\cap$ itt halmazelméleti metszetet jelöl). $B_{xy} \cap B_{uv}$ nem üres, mert a műveletet definiáló paramétereket tartalmazza, viszont $s + s = a$, ha a műveletet B_{xy}-ban, ill. $s + s = b$, ha a műveletet B_{uv}-ben tekintjük, kell tehát, hogy $a = b$ legyen. Ezzel beláttuk, hogy relatív komplementumos disztributív hálóban Boole-gyűrűműveleteket csak (18)-cal definiálhatunk.

Szükségünk lesz a következő megjegyzésre: ha L disztributív és $x_1, \ldots, x_n \in L$, akkor L-nek van olyan L_n véges részhálója, hogy $x_1, \ldots, x_n \in L_n$. Ezt n-re vonatkozó teljes indukcióval láthatjuk be. $n = 1, 2$-re az állítás nyilvánvaló, tegyük fel, hogy $x_1, \ldots, x_{n-1} \in L_{n-1}$ és L_{n-1} L véges részhálója. Az $x_n \cup u, x_n \cap u$ elemek összessége, ahol u végigfut L_{n-1} összes elemén L_{n-1} és x_n-nel együtt a disztributivitás miatt részhálót alkotnak: L_n-et.

Ezt felhasználva végül bizonyítanunk kell, hogy ha egy L disztributív hálóban értelmezhető egy Boole-gyűrűművelet, akkor L relatív komplementumos. Legyen L-be bevezetve Boole-gyűrűművelet, és L_{xy} legyen L-nek egy véges, x, y-t és a műveleteket definiáló paramétereket tartalmazó részhálója. L_{xy} kételemű hálók szubdirekt szorzata (ahol a szubdirekt tényezők L_{xy} homomorf képei, tehát szintén Boole-algebrák) s így a fentiek miatt L_{xy}-ban is a művelet (18)-cal van definiálva. A műveletekre való zártságból viszont már adódik L_{xy} és így L relatív komplementumossága. Ezzel a 9. tétel bizonyítását befejeztük.

(18)-ból rögtön látható, hogy L ideáljai akkor és csak akkor lesznek a Boole-algebrának is ideáljai, ha $a = 0$ azaz, ha az L háló kielégíti a 3. tétel feltételeit. Ez a mélyebb oka a 3. tétel fennállásának.

Eötvös Loránd Tud. Egyetem
II. mat.-fiz. szak.

KÖNYVISMERTETÉSEK

W. J. Whitehouse, J. L. Putman: „Radioaktív izotópok" című könyvének ismertetése

1955. év végén jelent meg magyar fordításban W. J. WHITEHOUSE és J. L. PUTMAN „Radioaktív izotópok" című könyve az Akadémiai Kiadónál. A könyv segítséget akar adni mindazoknak, akik kutató munkájukban, a gyógyászatban, vagy a termelés valamely ágában alkalmazzák az izotópokat. A fenti célt a szerzők úgy kívánják elérni, hogy könyvükben széles tárgykört dolgoznak fel. Ezt találják alkalmasnak arra, hogy a fizika területén kevéssé jártas szakemberek is teljes képet alkothassanak az izotópokról, az izotópokkal való munkáról és azok alkalmazási lehetőségeiről. A feldolgozott terület nagyságából következik, hogy a könyv nem nagyon tartalmaz részletekbe menő levezetéseket és számításokat, hanem inkább csak a felhasználandó végeredményeket, definíciókat, általános elvi megállapításokat, működési elveket szögezi le. Ez alkalmassá teszi arra, hogy a nem fizikával foglalkozó szakemberek is eredménnyel használhassák. A könyv a bevezetés után 8 fejezetre oszlik és a függelékkel fejeződik be. A fejezetek végén a fejezetben tárgyalt anyag elég bő irodalma található, ami nagyon alkalmas arra, hogy ha az olvasót valamelyik rész bővebben érdekli, könnyebben utána nézhet. Ezen általános megjegyzések után rátérek a könyv részletesebb ismertetésére.

A könyv a bevezetésben rövid áttekintést ad az izotópia fogalmának kialakulásáról és a radioaktív izotópok felfedezéséről. Érinti néhány lényeges alkalmazási terület rövid elvi leírását. Utal arra, hogy a radioaktív anyagokkal történő kísérletek világos megértéséhez szükség van bizonyos magfizikai alapfogalmakra. Éppen ezért a könyv még a bevezető részében foglalkozik ezekkel a fogalmakkal. Definiálja a rendszám (Z), neutronszám (N), tömegszám (A), izotópszám (I) fogalmakat. Foglalkozik az atommag súlyával, méreteivel. A magmodellek közül a folyadékcsepp modellt említi meg röviden, majd a kötési energiával, ennek $\Delta A/A = f(A)$ függvény szerinti ábrázolásával, a neutronoknak és a protonoknak a magban levő arányával, a magok stabilitásának feltételével, a magok energia szintjeinek meghatározásával folytatja és a magreakcióknál fellépő energiaváltozások kiszámításával fejezi be.

Az első fejezetet a mesterséges radioaktív izotópok előállításának szentelik a szerzők. Általános szempontokat adnak a legmegfelelőbb magreakciók kiválasztásához. Végigvezetik az olvasót a magreakció lejátszódásának folyamatán és eközben megismertetnek az átmeneti mag fogalmával. A MATTAUCH által 1945-ben felsorott 14 csoportba tartozó reakciót kiegészítik egy 15.-kel.

Ezután kerül szó ezen magreakciók végbemenetelének valószínűségéről, illetve a hatáskereszmetszetekről (σ). Itt a σ definíciója után a teljes és részleges hatáskeresztmetszetek közötti különbséget domborítja ki, majd a hatáskeresztmetszetnek az energiával való összefüggését, illetve változását ábrázolja. A fejezet végén a bomlást kifejező $N = N_0 e^{-\lambda t}$ exponenciális egyenlet segítségével összefüggést állapít meg a bomlási állandó és a felezési idő, illetve átlagos idő között a $T_{1/2} = 0{,}693/\lambda = 0{,}693\ \tau$ alakban. Ezekután egy három tagú radioaktív bomlássor leírásához szükséges exponenciális egyenlet levezetését adja meg az

$$N_c = \frac{N_0}{\lambda_B - \lambda_A} [\lambda_B(1 - e^{-\lambda_A t}) - \lambda_A(1 - e^{-\lambda_B t})]$$

alakban. Ez megadja a módszert, hogy több bomlássor esetén hogyan kell eljárnunk, ami persze bonyolult matematikai számításhoz vezet. Felírja végül az állandó és szabálytalan sebességgel előállított radioaktív izotópok termelési hozamának kiszámításához szükséges egyenleteket is.

A második fejezetben kerül sor az atommag bomlásmódjainak tárgyalására. Ezt a neutronemisszióval kezdi, majd ábrázolja a gerjesztett magból kibocsátott neutronok energiaeloszlását. Az α bomlásánál a λ bomlási állandó és az alfarészecske energiája között fennálló $\ln \lambda = A + B \cdot \ln E$ empirikus szabályt ismerteti, amely az irodalomban Geiger-Nuttal szabály néven szerepel. Foglalkozik még töltött részecskéknek a magból való kilépésének valószínűségével, ill. a potenciálfal szerepével az atommagreakció végbemenetelének szempontjából.

A következő bomlási mód, amellyel foglalkozik a bétabomlás. Itt a β átalakulási, majd a héj-elektron előfordulásokat említi meg a β-spektrumokkal való foglalkozás előtt. Magyarázatot ad a folytonos spektrumra és a kísérő X és gammasugarakra, majd néhány bomlási sémával ismerkedhetünk meg. Az izomér átalakulásokat az előzőhöz hasonló sémákkal szemlélteti. Utolsó bomlási módként, a hasadást ismertetik a szerzők. Röviden foglalkoznak a hasadás elmélet ábrázolásával és az U^{235} hasadási termékeinek eloszlásával a tömegszám függvényében. Ebből jól látható, hogy egy uránmáglyából milyen izotópok kerülnek ki jó hatásfokkal, mint hasadási termékek.

A harmadik fejezet a sugárzásnak az anyaggal való kölcsönhatások útján létrejövő tulajdonságaival foglalkozik. Azaz azokat a jelenségeket taglalja, amelyek az anyagon áthaladó sugárzásokat és részecskéket kísérik. Ezt két részre választja, töltöttrészecskékre és elektromágneses sugárzásra. Az előző részben alfa és bétasugárzásokra megadja az ionizáció nagyságát, a maximális hatótávolságot, valamint a részecskéknek a közeg atomjain való szóródásának a mértékét. Az utóbbira leírja azt a három effektust (fotoeffektus, Compton-szóródás, párkeltés), amely az anyaggal való kölcsönhatásnál fellép, és lényegében ennek segítségével megadja az abszorpciót leíró képletet. Külön megemlíti még a hasadványok tulajdonságait, mivel ez a fentiektől eltérő.

A negyedik fejezet a radioaktív izotópok gyakorlati előállításával foglalkozik. Ismerteti a reaktorok általános elveit, szerkezeti sajátságait, az izotóp termelés alkalmasságának feltételeit, a k_∞ reprodukciós állandó, a reflektor, és a termikus oszlop szerepét. Előállítható izotópokról és a keletkezett hasadási termékekről is nyújt rövid tájékoztatást. Ugyancsak tárgyal egy modulált frekvenciájú ciklotron működési elvet, továbbá a ciklotronokban előállítható izotópokat sorolja fel.

Az ötödik fejezetben a nukleáris mérőműszerekről, számlálócsövekről (GM-cső, szcintillációs számláló), a mérések alkalmával figyelembeveendő tényezőkről és a korrekciókról kap az olvasó részletes tájékoztatást, és a mérésekhez oly sokszor szükséges Standardok készítéséről.

A hatodik fejezet a harmadikhoz hasonlóan a sugárzások hatásaival foglalkozik, továbbá ebben a fejezetben a sugárzás ionizációja valamint ezek következményei kerülnek disszkusszió alá. Itt kerül sor az ionizáción, illetve az elnyelt energián alapuló radiológiai dózisegységek definiálására, illetve néhány példán keresztül az elnyelt dózisok számítására. Majd ionizációs kamrákban lejátszódó folyamatokkal és felépítésükkel ismerkedhetünk meg. Ezután kerül sor néhány elektrométer típus leírására és működésének rövid ismertetésére. Ezt néhány tipikus mérőeszköz ismertetése követi (alfa ionizációs kamra, béta elektroszkóp, neutronkamra), végül befejeződik a γ- és β-sugárzás abszolút, illetve relatív mérésére szolgáló sugárzásmérő, kaloriméter és kémiai sugárdózis mérés ismertetésével.

A hetedik fejezetben néhény jól megválasztott alkalmazást öt főcsoportra osztva ismertetnek a szerzők (nyomjelző, ionizátor, sugárzás abszorpció és szóródás, a bomlási sebesség felhasználása, aktiválási elemzés). A nyomjelző módszer elve érvényességének megadása és a preparálás általános szempontjai után a következő néhány típussal foglalkozik: márkázás, fizikai keveredés, kémiai láncfolyamatok vizsgálata, surlódással és keveréssel kapcsolatos vizsgálatok és autóradiográfia. A második csoportot a sugártherápia ismertetésével kezdi, majd a gázok ionizációinak alkalmazásával folytatja, ahol példának a sztatikus eliminátor alkalmazását ismerteti. A sugárabszorpció és szóródásra vonatkozó példáit a vastagságmérés és az ipari radiográfia területéről veszi. A bomlási sebesség felhasználásával főleg régészeti leletek korának meghatározását végzik és erre ad egy példát. Az ötödik csoport, vagyis az aktiválási elemzés lényege abban áll, hogy 10^{-10} grammnyi, vagy még ennél is kisebb szennyeződéseket is ki lehet vele mutatni.

A nyolcadik fejezet a radioaktív izotópok helyes kezeléséhez nyújt értékes tanácsokat, főként a laboratóriumok felosztására, a radióaktív izotóp szennyeződések szétszóródásának megakadályozására vonatkozóan. Ismerteti továbbá a sugárzásnak az emberi testre gyakorolt általános hatását. Táblázatban ismerteti három csoportra osztva az emberi szervezetbe jutás szempontjából különböző veszélyességű izotópokat. A megengedhető sugárzási szintek felsorolása következik ezután. Majd szennyezettségmérő műszerek, csipeszek, távfogók, pipetták és egyéb speciális laboratóriumi felszerelések rövid leírása található. A fejezet a radioaktív hulladékok elhelyezésével, a radioaktív anyagok szállításával kapcsolatos főbb szempontok ismertetésével zárul.

A szerzők a függelékekben a fizikai állandók közül néhány fontosabbat említenek meg, továbbá megadják az elemekre termikus neutron befogási hatáskeresztmetszetüket. Az utolsó táblázat tartalmazza az izotópok rövidített táblázatát feltüntetve többek között a sugárzás nemét, energiáját, felezési idejét és egyéb fontos adatait.

Mindent összefoglalva az Akadémia a könyv magyar nyelven való megjelentetésével különösen nagy segítséget nyújt a radioaktív izotópok legkülönbözőbb területen való alkalmazásának elterjedéséhez és reméljük, hogy ez mind a tudomány, mind a termelés különböző ágaiban értékes eredmények eléréséhez fog vezetni.

Veres Árpád

Sz. V. Vonszovszkij: Korszerű mágnességtan című könyvének ismertetése

Napjainkban a fizikában a legnagyobb figyelem az atommag fizika mellett a szilárd testek fizikájára és azon belül a félvezető kutatásra és a mágnességre irányul. Ez a nagyarányú érdeklődés érthető is, mert éppen ezeken a területeken elért eredmények azok, melyek szinte forradalmasítják a modern technikát, új iparágak születnek meg e kutatások eredményeként. Gondoljunk csak az atomvillanytelepekre, a félvezetők sokoldalú ipari felhasználására. A mágnesség területén elért új eredmények igen sokoldalú alkalmazásra találtak, a korszerű rádióvevő készülékeket ferrit-antennával építik, a rádiólokációs technika pótolhatatlan anyagai a ferritek, használják őket a modern gyorsító berendezésekben, az elektronikus számológépekben és a technika számtalan más területén. A mágnesség területén a tudomány és a technika szinte naponta veti fel az újabb problémákat.

Éppen ezért nagy jelentőségű, hogy a világszerte ismert szovjet magnitológus, Sz. V. Vonszovszkij a mágnesség korszerű elméletét és gyakorlati kérdéseit tárgyaló összefoglaló műve magyar nyelven is megjelent. E könyv fordítása igen nagy hiányt pótol, eddig nem volt egyetlen szakkönyv sem magyar nyelven, mely összefoglalta volna a mágneses kutatások terén elért eredményeket. Nagyon jól választotta meg a Kiadó, hogy épp Sz. V. Vonszovszkij „Korszerű mágnességtan" c. könyvét fordíttatta le magyar nyelvre, mert ez a külföldi irodalomban megjelent egyik legújabb könyv, mely a mágnességtan korszerű kérdéseinek elvi problémáit kellő alapossággal és tudományos színvonalon tárgyalja úgy, hogy nemcsak a magnitológus fizikusok, hanem a műszaki szakemberek is, akiket a mágnesség gyakorlati szempontból érdekel, eredményesen felhasználhatják. A szerző az elméleti kérdések kifejtése mellett ismerteti a kísérleti vizsgálatok eredményeit és megemlíti a gyakorlati alkalmazásokat is.

A könyv három részből áll. Az első rész az atomi mágnességgel foglalkozik. A szerző ebben a részben röviden összefoglalja ismereteinket az elemi részecskék, elektronok és nukleonok mágnességéről, valamint az atommagok és az elektronhéj mágneses tulajdonságairól.

A második rész elején a szerző röviden ismerteti az anyag mágneses tulajdonságainak fenomenologikus leírását és a mágneses anyagok osztályozását adja. Majd a diamágnesség kvantummechanikai elméletét tárgyalja a szerző, alaposan értékelve a kapott eredményeket a kísérleti adatok alapján. Ezután a szupravezetők mágneses tulajdonságait ismerteti. A továbbiakban a paramágnesség jelenségével foglalkozik, röviden kifejti az atomok, ionok, molekulák, sók és fémek paramágnességének kvantummechanikai elméletét és ismerteti a kísérleti eredményeket. Ezután kerül röviden tárgyalásra a diszperzió és az abszorpció paramágneses anyagokban, majd a mágneses hűtés módszerével — igen alacsony hőmérséklet előállítása — foglalkozik a szerző. A második részt a magneto-optikai jelenségek tárgyalása zárja be.

A harmadik részben a szerző tömören, de mégis igen érthetően, könynyed stílusban foglalja össze ismereteinket a ferromágneses anyagokról és a ferromágnességről. Ez egyben a legalaposabban és a legkörültekintőbben megírt rész, mely a könyvnek körülbelül a felét tölti be. Először a spontán mágnesezettség elméletével foglalkozik, mely a ferromágnesség természetét van hivatva tisztázni. A molekuláris tér fenomenologikus elmélete és a ferromágneses átalakulás LANDAU és LIFSIC által kidolgozott termodinamikai elméletének ismertetése után a spontán mágnesezettség kvantummechanikai elméleteit ismerteti igen jól, szemléletesen, nem elveszve a számítások matematikai részleteiben. Ezután kerül sor a ferritek egy ma már túlhaladott elméletének tárgyalására, majd a ferromágneses ötvözetek, az antiferromágnesség és a metamágnesség elméletét tárgyalja a szerző, kísérleti adatokkal bőven illusztrálva. Ezután rátér a mágnesezés technikai görbéje elméletének a tárgyalására, ahol részletesen foglalkozik az energia anizotrópia problémával, ismerteti a domen szerkezettel foglalkozó kísérleti és elméleti munkákat, a kis ferromágneses részecskék és vékony lemezek mágneses tulajdonságait. Majd a mágnesezés folyamatának két típusát, a faleltolódást és a forgást vizsgálja, részletesen tárgyalja a hiszterézis jelenségét. Ezután a leginkább elterjedt ferromágneses anyagok fizikai és technikai sajátságaival, jellemzőivel foglalkozik, ismerteti előállításuk és megmunkálásuk néhány új fizikai módszerét is (mágneses hőkezelés, termomechanikai megmunkálás, pormágnesek előállítása).

A szerző meglehetősen röviden ismerteti a mágneses permeabilitás diszperziójának jelenségét és a ferromágneses rezonanciát, majd a mágneses viszkozitás vizsgálata terén elért eredményeket. A könyv végén a szerző a ferromágneses anyagok nem mágneses sajátságaival foglalkozik: a termokalorikus jelenségekkel, a magnetostrikcióval és magnetoelasztikus jelenségekkel, majd pedig a ferromágneses anyagokban fellépő elektromos, galvanomágneses, termomágneses és optikai jelenségek ismertetésével fejezi be a ferromágnesség tárgyalását.

A könyv használhatóságát nagymértékben elősegíti a részletes, bár természetszerűleg nem teljes, bibliográfia.

A könyv olvasásakor egyes helyeknél figyelembe kell venni, hogy a könyv első kiadása 1952-ben jelent meg és ezért nem tükrözhet néhány nagyon lényeges, azóta elért új eredményt. Gondolunk itt elsősorban az antiferromágnesség kvantumelméletére, melyet nemrégiben TYÁBLIKOVnak és iskolájának sikerült lényegesen továbbfejlesztenie. Igen hiányos a könyvben a ferritek elméletének tárgyalása is, melyet szintén az utóbbi időben sikerült csak kidolgozni. Meg kell jegyezni, hogy a ferritek mágneses tulajdonságainak ismertetésével nem foglalkozik kellő részletességgel a szerző, valószínűleg azért, mint azt PÁL LÉNÁRT is megjegyzi a könyvhöz írt előszavában, mert a ferritek kérdése ma a legvitatottabb. Azonban a ferritek sokoldalú gyakorlati felhasználása miatt feltétlen szükség lenne egy jó összefoglaló mű megjelentetésére magyar nyelven is.

Külön meg kell emlékezni arról a nehéz munkáról, melyet a fordító és lektor végeztek. Sok kifejezést a fordítás közben kellett megalkotniuk, mert a ferromágnességgel eddig mint fizikai diszciplinával Magyarországon eddig alig foglalkoztak, és így a megfelelő szaknyelv sem volt kellően kialakulva hazánkban. Ezt a nagy munkát a fordító és a lektor igen jól végezték el. Némely kifejezés fordításával lehetne vitába szállni (pl. mágneses intenzitás vagy mágnesezettség), de erre majd az idő ad választ.

A könyv olvasása nem kíván speciális előismereteket, de a korszerű atomfizika ismeretét természetszerűleg feltételezi. A könyvet igen nagy haszonnal forgathatják a fizikusok éppúgy, mint a mágnességgel gyakorlati vonatkozásokban foglalkozó szakemberek, mérnökök, kohászok, vegyészek.

Siklós Tivadar

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Szendrei János kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1955. október 1-én a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében rendezte meg a Tudományos Minősítő Bizottság SZENDREI JÁNOS *„Gyűrűk Schreier-féle bővítéseiről"* c. kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját. Az értekezés opponensei FUCHS LÁSZLÓ és KERTÉSZ ANDOR voltak.

A bírálóbizottság elnökének, KALMÁR LÁSZLÓnak megnyitó szavai, valamint a jelölt életrajzának és tudományos munkásságának rövid ismertetése után SZENDREI JÁNOS előadta értekezésének téziseit.

Az értekezés tárgya néhány gyűrűelméleti kérdés vizsgálata, különös tekintettel a gyűrűk (Schreier-féle) bővítéselméletére. Ezen elmélet alapproblémája a következő: adott R és P gyűrűk esetén meghatározandók mindazon $\mathfrak{R}$ gyűrűk, amelyeknek P kétoldali ideálja és $\mathfrak{R}/P \approx R$ izomorfia teljesül. (A P neve maggyűrű, az R-é faktorgyűrű.) A problémát, mely a SCHREIER által felvetett és megoldott csoportelméleti probléma gyűrűelméleti analogonja, 1942-ben C. J. EVERETT oldotta meg. A dolgozat hat paragrafusra tagolódik, melyek közül az első kettő egyrészt áttekinti a tárgyalt problémák történetét, másrészt ismerteti a gyűrűk (Schreier-féle) bővítésének EVERETT-től származó alaptételét a Rédei-féle ferdeszorzatos alakban.

A 3. § a jelölt azon eredményeit foglalja magában, amelyeket a gyűrű bővítésének zérusosztómentességével és egységelemével kapcsolatosan nyert. Ezen § és egyben az egész értekezés egyik legnevezetesebb tétele azt mondja ki, hogy bármely zérusosztómentes gyűrűnek van (izomorfiától eltekintve) egyértelműen meghatározott, minimális, egységelemes, zérusosztómentes (Schreier-féle) bővítése. Ugyanebben a §-ban egy-egy szükséges és elégséges feltétel is található a gyűrű bővítésének zérusosztómentességére, illetve az egységelem létezésére.

A csoport holomorffogalmának gyűrűelméleti analogonját RÉDEI LÁSZLÓ vezette be, és ezzel megalapozta a gyűrűk holomorfelméletét. Ezen most kialakulóban lévő elmélethez értékes adalékokkal járul hozzá az értekezés 4. §-a. Egyrészt a gyűrű holomorfjainak egy új, fogalmilag igen egyszerű definícióját adja meg SZENDREI, másrészt kimutatja, hogy kommutatív, zérusosztómentes gyűrűnek egyetlen holomorfja van, és ez kommutatív. Figyelemre méltó a következő (részben új) tétel is: Egy gyűrű akkor és csak akkor direkt összeadandó bármely (Schreier-féle) bővítésében, ha egységelemes.

Az 5. rövidebb §-ban SZENDREInek a gyűrű centrumára vonatkozó apróbb, de érdekes eredményei találhatók.

Végül az értekezés 6. §-ában feleletet kapunk arra az érdekes kérdésre, hogyan határozható meg egy gyűrű (Schreier-féle) bővítésének Jacobson-féle radikálja a maggyűrű és a faktorgyűrű radikáljainak segítségével. Ezen eredmény következményeiként SZENDREI számos ismert tételre kap új, egyszerű bizonyítást.

A jelölt előadásának elhangzása után FUCHS LÁSZLÓ és KERTÉSZ ANDOR ismertették opponensi véleményüket. FUCHS először kifejtette arra vonatkozó elvi álláspontját, hogy milyen esetekben látja célszerűnek a Schreier-féle bővítéselmélet használatát. Véleménye szerint tulajdonképpen az értekezésnek csak a 3. és 4. §-a tárgyal valóban a Schreier-féle bővítéselmélet körébe vágó kérdéseket, s éppen ezért nem tartja szerencsésnek az értekezés címének megválasztását. Az opponens megállapította, hogy a dolgozat részeinek felépítése logikus és áttekinthető, s az értekezésben szereplő tételeknek a régebbi eredményekkel való kapcsolatát helyesen látta a szerző. A továbbiakban több olyan problémát vetett fel FUCHS, amelyeknek kidolgozása szorosabb kapcsolatot teremthetett volna a dolgozat egyes paragrafusai között. FUCHS opponensi véleményében kiemelte SZENDREI legértékesebb eredményeit és hangsúlyozta az értekezés példás kiállítását.

KERTÉSZ opponens először is leszögezte, hogy SZENDREI témaválasztását helyesnek és időszerűnek tartja, majd az egyes paragrafusok eredményeit ismertette és részletesen értékelte. Ezután arra vonatkozóan tett elvi észrevételt, hogy milyen esetekben látja indokoltnak a Schreier-féle bővítéselmélet terminológiájának használatát és melyekben nem. Végül megállapította, hogy a dolgozat megfogalmazása tömör, de mindamellett világos.

Mindkét opponens a disszertáció elfogadására tett javaslatot.

SZENDREI az opponensi véleményekre adott válaszában rámutatott az egyes paragrafusok közötti kapcsolatokra, válaszolt a FUCHS által felvetett problémákra, majd kijelentette, hogy a Schreier-féle bővítések alkalmazhatósági területeit illetően az opponensek *egyesített* véleményével egyetért. Végül hangsúlyozta, hogy az egységes tárgyalásmód érdekében látta szükségesnek a Schreier-féle bővítéselmélet terminológiájának használatát ott is, ahol arra egyébként nem lett volna feltétlenül szükség. Indokolását a matematika más területéről vett példával is alátámasztotta.

A disszertáció vitája során több hozzászólás hangzott el arra vonatkozóan, hogy indokolt volt-e az egységes tárgyalásmód érdekében mindenütt a Schreier-féle bővítéselmélet terminológiáját használni. Egyesek a tárgyalás egy-két részletének tömörségét, mások az illusztráló példák kevés voltát kifogásolták. KALMÁR LÁSZLÓ néhány megoldásra váró, a tárggyal kapcsolatos problémára hívta fel a figyelmet. KERTÉSZ ANDOR egy ötletet vetett fel a gyűrű holomorfjainak egy új definiálására és egy érdekes gyűrű- és csoportelméleti hármas analógiára mutatott rá.

Miután a jelölt válaszolt a felvetett kérdésekre és problémákra, a bírálóbizottság határozathozatalra vonult vissza. A határozat megállapította, hogy SZENDREI JÁNOS értekezésében a gyűrűelmélet több érdekes területével foglalkozott és ért el eredményeket, melyek közül kiemelendő a zérusosztómentes gyűrűk egységelemes, minimális, zérusosztómentes bővítéseire vonatkozó tétele, a gyűrűk holomorfelméletéhez való hozzájárulása és a Schreier-féle bővítés Jacobson-féle radikáljára vonatkozó eredménye. A határozat szerint nem volt szerencsés, hogy a szerző az összes eredményeit a Schreier-féle bővítéselmélet segítségével tárgyalta. A dolgozat megfogalmazása tömör, de nagyon világos, kiállítása példás. Ennek alapján a bizottság *egyhangúan* javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy SZENDREI JÁNOSt a matematikai tudományok kandidátusává nyilvánítsa.

Steinfeld Ottó
a matematikai tudományok kandidátusa

Nagy Elemér doktori értekezésének nyilvános vitája

A doktori értekezés megvédése 1956. április 6-án volt az Eötvös Loránd Fizikai Társulat előadótermében.

NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus, a vita elnöke megnyitja az ülést, majd BOROS JÁNOS, a bíráló bizottság titkára ismerteti a jelölt életrajzát és eddigi tudományos működését.

A jelölt 1920-ban született, egyetemi tanulmányait a budapesti Műegyetem Gépészmérnöki Karán végezte. 1943 óta működik az Egyesült Izzó Kutatólaboratóriumában, illetve a laboratórium utódjánál. 1952 óta tanszékvezető tanár a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Fizikai Intezeténél. A lumineszcencia jelenségek területén végzett vizsgálatai hazai és külföldi folyóiratokban jelentek meg.

Ezután NAGY ELEMÉR ismerteti a doktori értekezés téziseit. Az értekezés címe: „Elektrolumineszcens jelenségek".

Az elektrolumineszcencia jelensége szilárd anyagokban jön létre azáltal, hogy az elektromos tér hatása alatt felgyorsított töltéshordozók az aktivátor centrumoknak adják át energiájukat. A jelenség értelmezésére kidolgozott elméletek nem fogadhatók el. Az elektrolumineszcencia néhány 10 000 V/cm elektromos terekben jön létre, amely terekben az elektronok sebességeloszlása nem írható le a fémeknél használatos Lorentz-közelítéssel. Az elektronok sebességeloszlása ilyen térben közelítőleg úgy tárgyalható, mintha az elektrongáz a rács hőmérsékleténél magasabb hőmérsékletnek megfelelő Maxwel-Boltzmann eloszlással bírna.

A magasabb hőmérséklet oly módon határozható meg, hogy több különböző folyamat által meghatározott relaxációs idő mekkora hőmérsékleten lesz azonos a pusztán akusztikus rácsrezgésekkel meghatározott relaxációs idővel. Az így meghatározott külön elektron-hőmérséklet a térerősséggel csak akkor növekszik, amikor a rács optikai rezgései is már gerjesztve vannak. Megadható ilyen meggondolással a fényerősség függése az elektromos tértől. Ez a lumineszcencia folyamat hatásfokától, a foton energiájától, az elektron mozgékonyságától, az optikai rácsrezgések Debye-hőmérsékletétől függ. Az elektrolumineszcens fényáramnak a térerősségtől való függése elég jó közelítéssel a következő formulával adható meg:

$$\log F = a - \frac{b}{(1+cE)^2} \, .$$

F a fényáram, E az elektromos térerősség, a, b, c állandók, amelyek más mérésekből is meghatározhatók. E formula helyességét a jelölt saját kísérleteivel igazolta. A számítások csak arra az esetre érvényesek, amikor a lumineszcens anyag tiltott sáv szélessége lényegesen nagyobb, mint a lumineszcens átmenet energiája. Tehát olyan esetre, amikor töltéshordozó lavina még nem lép fel.

A jelölt véleménye szerint a jelenségnek az az elmélete, amelyet PIPER és WILLIAMS adott, lényeges ellentmondásokat tartalmaz.

Az értekezés húsz oldal terjedelmű; a jelölt az értekezés végén összefoglalja a kérdés irodalmát, valamint elméletének kísérleti igazolását.

GOMBÁS PÁL akadémikus opponensi véleményében rámutat a jelölt által választott téma elméleti és gyakorlati fontosságára. Kiemeli azt, hogy a jelenségekre új elméletet ad DESTRIAU alapgondolatából kiindulva SCHOCKLEY nyomán, aki az elektronoknak egy, a rácsnál magasabb „elektronhőmérsékletet" tulajdonít. A dolgozat az elektrolumineszcencia egyik alapvető kérdésének értékes magyarázatát adja és ezért doktori disszertációként való elfogadásra melegen javasolja.

GYULAI ZOLTÁN akadémikus, opponens, szintén kiemeli a kérdés megoldásának fontosságát és az elért eredményt. Véleménye szerint a dolgozat megfogalmazásában bizonyos sietség látszik, továbbá a dolgozat külső kiállításában is maradt kívánnivaló. A részletes megjegyzésekben rámutat arra, hogy egyes kérdéseket célszerű lett volna kimerítőbben tárgyalni. Így pl. említi azt, hogy DESTRIAU adott egy egyenletet az ütközéssel való gerjesztésre. Továbbá adott egy formulát CURIE is. A két egyenlet egyidejűleg nem állhat fenn. Ezt tüzetesebben kellett volna indokolni. A gázokkal való ütközésnél az egyes szabad úthosszban felvett energiák összegeződnek; ez valószínűleg így van az elektrolumineszcenciánál is. Erre is ki kellett volna térnie. Célszerű lett volna a kristályok elektromos vezetőképességét is mérni és ezzel is mintegy ellenőrízni a jelenség mechanizmusának magyarázatát. Kívánatos lett volna a végső nyert egyenletet az F és E-re úgy átalakítani, hogy az direkt az E-t tartalmazza.

Összefoglalásképpen azután rámutat arra, hogy a levezetett formula a jelenségeknek törvényszerűségét adja és ezáltal a fontos kérdést előrevitte. Ez a formula nemzetközi eredményeket is jól ad vissza. A disszertációt szóbeli megvédés alapjául elismeréssel elfogadja.

Ezután NOVOBÁTZKY KÁROLY elnök bejelenti, hogy SZIGETI GYÖRGY lev. tag külföldön tartózkodik s opponensi véleményét BOROS JÁNOS, a Bizottság titkára olvassa fel.

Az opponensi vélemény ismételten kiemeli a téma jelentőségét s rámutat arra, hogy a jelenségek komplikáltak s eddig az értelmezésük nem sikerült. Szintén kívánatosnak tartotta volna a DESTRIAU és CURIE által levezetett egyenletek közötti ellentmondást részletesebben taglalni.

A dolgozat érdemei mellett néhány fogyatékosságot is meg kell említeni. Így pl. a tárgyalás módja nem elég világos. Azután nem aknázza ki az új összefüggésben rejlő problémákat; nem ellenőrzi pl. a lumineszcencia temperatúrafüggését a kísérleti és számított eredmények alapján. Nem tárgyalja kellő alapossággal a töltéshordozóknak a határrétegeken való keletkezésének módját. Nem helyénvaló az sem, hogy a disszertációhoz minden további nélkül angolnyelvű ábrákat használ fel. Az értekezést — felsorolt hiányosságok ellenére — megvitatásra és sikeres megvitatás esetén a doktori cím elnyerésének alapjául javasolja.

NAGY ELEMÉR az opponenseknek adott válaszában elismeri azt, hogy az értekezés gyorsan készült el. Ennek az az oka, hogy a kérdéssel már külföldön is foglalkoznak és a prioritás miatt is szükégesnek látszott az eredményeket minél hamarabb közzétenni.

Rámutatott arra, honnan származik az ellentmondás DESTRIAU és CURIE egyenletei között. ZnS egykristályokon nem tudott méréseket végezni, tekintettel arra, hogy ezek nem állnak rendelkezésre.

SZIGETI lev. tag kérdéseivel kapcsolatosan rámutatott arra, hogy az elmélet a kék és zöld színváltozást nem tudja megmagyarázni. A jelölt válaszát az opponensek kielégítőnek találják.

A vita alapján a bíráló bizottság egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy NAGY ELEMÉR kandidátust nyilvánítsa a fizikai tudományok doktorává.

Dr. Boros János
a fizikai tudományok kandidátusa

Nagy László aspiráns „Vizsgálatok a Rossi-görbével kapcsolatban" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A vita 1956. április 24-én zajlott le.

Az értekezés opponensei: SZAMOSI GÉZA, a fizikai tudományok doktora és ORBÁN GYÖRGY, a fizikai tudományok kandidátusa.

A Bizottság elnöke KOVÁCS ISTVÁN, az MTA lev. tagja. A megnyitás és a jelölt eddigi munkásságának ismertetése után NAGY LÁSZLÓ előadja az értekezés téziseit. Munkája a kozmikus sugárzás zápor jelenségeinek tanulmányozásával kapcsolatos. ROSSI megvizsgálta, hogyan függ az abszorbensben kiváltott záporok számlálócsövekkel regisztrált száma az abszorbens vastagságától.

A Rossi-összefüggéssel kapcsolatos vizsgálatokat egy koincidencia-berendezés elkészítésével kezdte és ennek segítségével elvégezte a már klasszikus Rossi-mérést.

A fenti berendezéssel megvizsgálta, hogyan függ a Rossi-görbe menete az abszorbens anyagától. Abszorbensül alumíniumot, vasat, rezet és ólmot alkalmazott. Mérése szerint kis vastagságoknál a különböző abszorbensekben kiváltott záporok regisztrált száma közel egy egyenesen fekszik. Nagyobb vastagságoknál a görbék szétválnak és annál magasabban fekszenek, minél nagyobb az abszorbens rendszáma.

A fotonok, elektronok és μ-mezonok által keltett záporokat antikoincidencia-berendezés segítségével szétválasztotta, és mérte az ionizáló és nemionizáló primérek (fotonok) által keltett záporokat. Az ionizáló részecskék és a fotonok által kiváltott záporok Rossi-görbéinek maximumai nem estek egybe. A maximumok helyei közti különbség:

$$X_{\text{foton}} - X_{\text{ionizáló}} = (0{,}6 \pm 0{,}09)\ \text{cm}.$$

Ez a tény összhangban van a kaszkádelmélettel és annak egy igazolását szolgáltatja. További feladatként jelentkezett, hogy külön-külön megkapja a fotonok, elektronok és μ-mezonok Rossi-görbéit. Azt tapasztalta, hogy a μ-mezonok Rossi-görbéjének 2—3 cm ólomvastagságnál maximuma van. Ezt a maximumot a mezonokkal együtt érkező lágy részecskék záporainak gondolta tulajdonítani. Az átalakított berendezés módot nyújtott arra, hogy a fotonok és az elektronzáporok maximumainak a helyét hasonlítsa össze.

Nem sokkal a Rossi-görbe felfedezése után cikkek jelentek meg arról, hogy a görbének második, sőt a későbbi cikkek szerint további maximumai is vannak. BOTHE és munkatársai az utóbbi időben több mérést publikáltak, amelyek eredményei szerint igen kifejezett maximumok jelentkeznek nagy ólomvastagságok mellett. Megismételte BOTHE és munkatársainak mérését, mégpedig teljesen azonos geometriával. A nagy ólomvastagságoknál mérési pontjainak hibája 0,5% volt. Nem mutatkozott semmiféle második vagy további maximum.

SZAMOSI GÉZA opponensi véleményében kifogásolja, hogy a mérésnél az ólomvastagságok változtatása éppen a maximumok környékén előnytelen, s ugyancsak nem indokolt a dolgozat első részében és utolsó részében végrehajtott mérés-sorozatoknak a referátumban történő szétválasztása. Értékesnek jelöli meg a második maximum hiányának bizonyítását, újabban lezajlott viták NAGY LÁSZLÓ eredményeit igazolják. Véleménye szerint a kis abszorbens vastagságoknál a Rossi-görbék együttfutása nem meggyőző. A komponensek szétválasztására vonatkozó méréseit a jelölt igen alaposan, részletesen és meggyőzően ismerteti.

ORBÁN LÁSZLÓ opponensi véleményében NAGY LÁSZLÓ értekezéséről megállapítja, hogy a Rossi-görbe kísérleti vizsgálataira felépített több elektronikus berendezéssel értékes vizsgálatokat végzett a kozmikus sugárzás területén. Munkájában módszeresen haladt egyre pontosabb eredmények felé, úgyhogy a maximumok világirodalmilag vitatott kérdésében indokolt véleményt nyilváníthatott. Fontosak és értékesek a Rossi-görbe mezon-, foton- és elektronkomponensére vonatkozó kísérletei is.

Megjegyzéseiben kisebb kifogásokat emel pl., nem taglalja, miért előnyösebb öt cső, mint a ROSSI által eredetileg alkalmazott háromszöges elrendezés.

A második fejezet a Rossi-görbe első szakaszának menetéről szól különböző abszorbensek esetében. Itt hiányolja, hogy a görbe kezdeti szakaszára, ahol a különböző abszorbensek Rossi-görbéi együtt futnak, nem esik vasra és ólomra vonatkozó észlelési adat.

A foton és az ionizáció, ill. elektron-komponensekre vonatkozó Rossi-görbék maximumainak abszcissza-különbségére vonatkozólag megadott

$$0{,}6 \pm 0{,}09 \text{ cm, ill. } 0{,}43 \pm 0{,}08 \text{ cm}$$

értéket csak kvalitatív, nagyságrendű értékűnek tartja.

Megítélése szerint csak a simuló görbe egyenletére tett részben önkényes előfeltevéssel lehet maximum-eltolódást 0,09 cm pontossággal két olyan görbére vonatkozólag megadni, amelyekre vonatkozó észlelési pontok éppen a maximum környezetében egymástól 0,5 cm távolságra vannak. Meggyőzőbbnek vélte volna, ha az észlelési adatok 0,25 cm-ként változtak volna.

Ezen túlmenően a kaszkádelmélet igazolására a kozmikus sugarak nem monoenergetikus és az abszorbensre különböző irányokból beeső részecskéi főleg csak hozzávetőleges összehasonlításképpen alkalmasak.

NAGY LÁSZLÓ a fotonok által kiváltott záporok és az elektronok által kiváltott záporok arányára $f/e = 0{,}41$ értéket nyert, míg FRANCHETTI 2,0, MILONE pedig 1,84-t. Mivel magyarázható, hogy e szerzők ötször akkora értéket kaptak, az értekezésben említett okokon felül? Vannak-e időközi újabb adatok?

NAGY LÁSZLÓ válaszában megjegyzi, hogy mindkét opponens az abszorbens vastagság változásának lépcsőit kérdezte. Ennek oka, hogy a 0—10 mm-es tartományban több mérésre volt szüksége nem az adott mérésnél, hanem a II. fejezetben leírt mérésnél. Természetes azonban, hogy a II. fejezethez szükséges adatokat már az I. fejezetben is felhasználta.

SZAMOSI GÉZA opponens megjegyzésére válaszolva kifejti, hogy a Rossi-görbére vonatkozó két rész szétválasztása annak ellenére, hogy szorosan öszszetartoznak azért történt, mert az utolsó rész méréseinél felhasznált berendezés teljesen különbözik az első fejezetben leírttól és az első fejezetben leírt berendezés továbbfejlesztését használta fel a mérések sorrendjében leírt kísérletekben.

ORBÁN GYÖRGY opponensnek válaszként megköszöni a sajtóhibákig terjedő lektorálást, majd kifejti, hogy az ötös koincidencia alkalmazása a következő okokból előnyösebb a hármas koincidenciánál: a) kevesebb a véletlen koincidenciák száma, b) a Rossi-görbe maximuma jobban kiemelkedik a háttérből. Az opponens elvtárs felveti, hogy a maximumeltolódásra vonatkozó értékek nagyságrendje és nem pontos értéke fogadható el. Ez teljesen igaz és ezt az értekezésben is hangoztatta. FRANCHETTI és MILONE eredményei az f/e értékre vonatkozólag eltérnek az ő általa kapottól. Valószínűleg az eltérésnek geometriai okai vannak. Berendezéseit 2 ionizáló részecske is meg tudja szólaltatni. Egyébként a fenti szerzők eredményeit azzal magyarázzák, hogy az alacsony energiatartományban foton-többlet van.

A Bíráló Bizottság tagjai közül PÁL LÉNÁRD a fizikai tudományok kandidátusa kérdést intézett a jelölthöz, hogy a mezon görbében mutatkozó kis maximum nem tulajdonítható-e a mezonnal az abszorbensre együtt érkező lágy részecskéknek? Igaz, hogy a lágy részecskék nagy részét az oldalt elhelyezett antikoincidencia csövek kiszűrik, mégis lehetséges, hogy az abszorbensre lágy részecske esik a mezonnal együtt.

NAGY LÁSZLÓ szerint valóban lehetséges, ugyanis az oldalt elhelyezett antikoincidencia csövek jelenléte nem zárja ki, hogy az abszorbensre egynél több részecske esik, ugyanakkor az antikoincidencia csövekre egy sem. Hogy ez így van, azt hodoszkóppal történt mérések igazolják.

A Bíráló Bizottság megállapította, hogy a tárgyválasztás feltétlenül helyes, mert olyan témát választott, amelynek érdekessége és aktualitása egyaránt van.

Körültekintő és igen alapos vizsgálatai a kozmikus sugárzás irodalmában évtizedek óta számos kutatót érdeklő, sok energiát emésztő vitás kérdés megnyugtató lezárásához igen értékes adatokkal járulnak hozzá. A jelölt meggyőző módon bizonyította be, hogy a Rossi-görbe további maximumai létezésével kapcsolatos állítások, melyeket többek között BOTHE és iskolája is többször hangoztattak, minden alapot nélkülöznek. A kozmikus sugárzást alkoló záporok komponensenkénti szétválasztásával az irodalomban szereplő adatoknál biztosabb és jobban kontrollált méréseket végzett. Ez munkája legértékesebb része.

Ennek alapján a Bizottság egyhangúlag javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy NAGY LÁSZLÓT nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává.

Pócza Jenő

Csada Imre kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A Tudományos Minősítő Bizottság 1956. június 20-ra tűzte ki CSADA IMRE „A csillagok tengelyforgásának és mágneses terének elmélete" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját. A disszertáció opponensei DEZSŐ LORÁND a fizikai tudományok kandidátusa és FÖLDES ISTVÁN a matematikai tudományok kandidátusa voltak.

A bíráló bizottság tagjaiul a Tudományos Minősítő Bizottság a következőket kérte fel: elnöknek: DETRE LÁSZLÓ levelező tagot, titkárnak: BARTA GYÖRGYöt, a műszaki tudományok kandidátusát, tagoknak: JÁNOSSY LAJOS akadémikust, KESZTHELYI LAJOSt, a fizikai tudományok kandidátusát és ERŐ JÁNOSt, a fizikai tudományok kandidátusát.

CSADA IMRE eddigi tudományos munkásságának ismertetése után CSADA előadta disszertációja téziseit.

CSADA IMRE dolgozatában a hidrodinamika Euler-féle egyenletéből s a Maxwell-féle egyenletekből levezetett magneto-hidrodinamikai alapegyenletekből indult ki. Ezekből az egyenletekből felállította a magneto-hidrodinamikának gáz- és mágneses turbulenciák esetére is érvényes első közelítésű alapegyenleteit:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}, \operatorname{grad}) \mathfrak{v} - \frac{1}{\varrho} (\mathfrak{H}, \operatorname{grad}) \mathfrak{H} =$$

$$- \operatorname{grad} \nu = \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} \left(p + \frac{1}{2} \mathfrak{v}'^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{H}'^2 \right) + \nu \Delta \mathfrak{v},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\mathfrak{v}, \mathfrak{H} + D_1 \operatorname{rot} \mathfrak{v}] = J(\varkappa \mathfrak{H} + \nu \operatorname{rot} \mathfrak{v}).$$

Az alapegyenletek közelítő jellegét az képviseli, hogy a keveredési távolságok vektorai helyett — általában használt eljárással — CSADA két olyan skaláris mennyiséget vezetett be, amelyek a viszkozitási együttható és az elektromos ellenállás, turbulencia következtében előálló, növekményeinek felelnek meg. Ezzel elérte azt, hogy a továbbiakban mindig csak a teljes, tehát a nem turbulens és turbulens eredetű viszkozitási együtthatók, illetve elektromos ellenállások összegével dolgozhatott.

CSADA célkitűzése az volt, hogy meghatározza a mágneses tér és a sebesség eloszlását a csillag belsejében és a csillag felületén. Ezt a problémát az egyenletek felhasználásával sikerült is megoldania. A számítás meglepő eredménye az volt, hogy a csillagok általános mágneses terét kifejező formulának tartalmaznia kell egy domináló, ún. oktopólus tagot. CSADA levezetése szerint a csillagok mágneses tere egyedül ettől a tagtól származik, a dipólus tag pedig identikusan zérus. Valószínű azonban, hogy a dipólus tag eltűnése a kényszerű egyszerűsítések rovására írható.

Az oktopólus tér létezését elméleti úton először CSADA igazolta. Ezt az elméleti eredményt sikerült alátámasztania a Mount Wilson obszervatórium által a közelmúltban publikált napmagnetogrammokról leolvasható adatsorokkal is. Az észlelési anyag azt mutatja, mintha a Napnál a dipólus térre egy nagyobb oktopólus tér szuperponálódnék.

A mágneses térhez hasonlóan CSADA kiszámította a csillagok belsejére és felületére a sebesség eloszlását is, és megkapta a napfelület jól ismert ún. differenciális rotációs örvényének formuláját.

A differenciálegyenletekben paraméterekként szereplő ν és $\varkappa$ viszkozitási együtthatók és elektromos ellenállás nagyságrendjét észlelési adatok felhasználásával CSADA jól meg tudta becsülni. A ν-re nyert numerikus érték jól egyezik régebbi, mások által más úton megállapított adattal. A $\varkappa$-ra nyert érték pedig jól egyezik SWEET teljesen más eljárás alapján becsült értékével.

DEZSŐ LORÁND opponens véleményében kifejtette, hogy az újabb statisztikai vizsgálatok szerint a napfoltok határozott egy irányú meridionális mozgást nem mutatnak, tehát a dolgozatnak ezzel kapcsolatos részeit hipotézisként kell kezelni. Felveti továbbá a kérdést, hogy a turbulenciák esetére is érvényes első magneto-hidrodinamikai alapegyenletben szereplő $\overline{(\mathfrak{H}', \mathrm{grad})\,\mathfrak{H}'}$ kifejezés miért hanyagolható el, végül, hogy lehetne-e a vektorpotenciálra a közöltnél általánosabb megoldást találni.

FÖLDES ISTVÁN opponensi véleményében hiányolta a kiindulási pontul szolgáló magneto-hidrodinamikai egyenletek kiterjesztésével kapcsolatos számításokat, vagy utalást azokra a korábbi dolgozatokra, amelyekben ez a számítás részletezve van. FÖLDES második ellenvetésének lényege: ha ALVÉN tételét, mint posztulátumot elfogadjuk, következik-e belőle a $\mathfrak{H}_\varphi$ eltűnése. A disszertációból levont következtetések ugyanis szigorúan csak akkor helyesek, ha ez a feltétel teljesül.

CSADA DEZSŐnek adott válaszában kifejtette, hogy dolgozatában sehol részletesebb utalást nem tett arra vonatkozólag, hogy a meridionális áramlás sebessége milyen észlelési adatokból vezethető le, sőt néhány szóval célzást tett arra, hogy az erre vonatkozó észlelési adatok annyira bizonytalanok, hogy azokat nem szokták teljes jogú észlelési adatoknak tekinteni.

A $\overline{(\mathfrak{H}', \mathrm{grad})\,\mathfrak{H}'}$ tagról bebizonyította, hogy zérus, tehát elhanyagolható.

A differenciálegyenletek általánosabb megoldásával kapcsolatban pedig kimutatta, hogy az összes kívánt feltételeket kielégítő függvények egymástól csak egy identikus állandóban különbözhetnek, ez pedig a megoldást nem teszi általánosabbá.

FÖLDES ISTVÁN opponensi véleményére válaszolva CSADA megemlítette, hogy a szükséges irodalmi utalásokat pótolni fogja.

A $\mathfrak{H}_\varphi$ eltűnésével kapcsolatban utalt FERRARÓnak 1937-ben megjelent cikkére (Montly Notices of Roy, Ast. Soc. 97,458), amely alapján a szükséges feltételezés elfogadható, azonban véleménye szerint is ALVÉN tételének végleges tárgyalásához FERRARO tételének egyszerű átvétele nem elegendő, a jövőben még ezzel a kérdéssel foglalkozni kell.

Az opponensek a felvetett kérdésekre adott válaszokat kielégítőnek találták.

A bíráló bizottság a vita alapján megállapította, hogy a szerző a turbulenciák esetére felállított magneto-hidrodinamikai egyenletek alapján — megengedettnek látszó elhanyagolások mellett — vizsgálta a csillagok mágneses terének és a csillagok gázáramlásainak sebesség eloszlását. Ezen a téren figyelemre méltó új kutatási eredményeket ért el, amelyek közül a bizottság azt az elméleti megállapítást tartja legkiemelkedőbbnek, hogy a csillagok általános mágneses terében létezhetik egy dominens oktopólus tag. Ezt az eredményt alátámasztotta a rendelkezésre álló legújabb napmegfigyelési adatokkal is.

Ennek alapján a bizottság egyhangúlag javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy CSADA IMRÉT nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává.

Barta György
a műszaki tudományok doktora

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1956. IX. 13. — Terjedelem: 11 (A/5) ív. 6 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 56-3711 Felelős vezető: Vincze György

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK

FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

Kutató fizikusok számára önálló eredményeket tartalmazó és összefoglaló jellegű fizikai, csillagászati dolgozatokat, könyvismertetéseket, laboratóriumi fogásokat és ma már klasszikussá vált dolgozatokat közöl hazai és külföldi szerzőktől.

Évenként 1 kötet (kb. 36 ív) jelenik meg 6 számban.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 42 forint, külföldi címre 60 forint.

Belföldi megrendeléseket az *Akadémiai Kiadó,*
Budapest V. Alkotmány utca 21.
(Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05—915—111—44)
teljesít.

Külföldi megrendelések
a *„Kultúra“* Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,
Budapest VI. Magyar Ifjúság Útja 21.
(Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43—790—057—181)
útján eszközölhetők.

Ára: 24,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

KÖNYVISMERTETÉSEK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

1778

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VII. KÖTET 2. SZÁM

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST

1957

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

VII. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest V. Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V. Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI. Népköztársaság Útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

SZÉNHAMUK RADIOAKTIVITÁSÁNAK VIZSGÁLATA FOTOEMULZIÓS MÓDSZERREL

BUJDOSÓ ERNŐ, MEDVECZKY LÁSZLÓ és SZALAY SÁNDOR

Jelen vizsgálataink láncszemként kapcsolódnak ahhoz a széles arányú kutató munkához, amely egyikünk (SZALAY) vezetése alatt a *Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében*, majd az újabban létesült *Magyar Tudományos Akadémia Atommag Kutató Intézetében* hazai szenekben felfedezett urán tartalommal kapcsolatban hosszabb ideje folyik [1—11].

Az eddig alkalmazott kutatási módszerekkel szemben cikkünkben a fotoemulziós módszerrel történt vizsgálatainkról számolunk be. E módszernek bizonyos szempontból igen nagy előnye van, amelyet itt szerencsésen használhatunk fel. A fotoemulzióba ágyazott radioaktív nyomokat tartalmazó anyagból kiinduló minden egyes α-sugárrészecske pályája a mikroszkóp alatt láthatóvá válik. Ha a beágyazás után néhány hetet várunk és a lemezt csak azután hívjuk elő, akkor — amint azt könnyen beláthatjuk — az α-részecskék individuális észlelése miatt a módszer érzékenysége rendkívül nagy. A mikroszkóp alatt nemcsak a pálya, hanem az a szemcse is látható, amelyből a pálya kiindult, így arra nézve morfológiai megállapítások is lehetségesek.

E vizsgálatok célja az volt, hogy ha egy urán tartalmú szenet finom porrá őrölve tüzelnek el, akkor a kapott finom szemcséjű hamu (pernye) individuális és mikroszkóp alatt jól megkülönböztethető szemcséiben az urán tartalom egyenletesen oszlik-e meg, vagy pedig bizonyos morfológiailag leírható szemcsetípusban nagyobb koncentrációban van-e jelen.

Vizsgálati anyagunk porszéntüzelésből származó ajkai pernye volt. A pernye-szemcséket mikroszkóppal nézve két nagy csoportra oszthatjuk: szabálytalanok és gömb alakúak. Utóbbiak olvadáspontja a kazán tűzterének hőmérsékleténél alacsonyabb, ezért olvadtak gömbbé.

A pernye magfizikai emulzióba ágyazását az autóradiográfiás technikából ismeretes kettősrétegű eljárással oldottuk meg, azzal a különbséggel, hogy a fedőréteg folyékony emulzió volt. Az emulziókat a Forte Fotokémiai Ipari Kutató Laboratórium készítette [12, 13].

100 μ vastag, üveglemez hordozóval ellátott, vízszintesen fekvő emulziókra duzzasztás után ráhintettük a vizsgálati pernyét. Ezután, az előzőleg kb.

5 C°-on tárolt emulziót felmelegítve ráöntöttük kb. 40—50 μ rétegvastagságban, majd hideg légáramban megszárítottuk. Ezt a készítményt (szendvics) 100 nap mulva hívtuk elő ID 19 hívóban. Ilyen hosszú besugárzási idő alatt az ezüstszemcsék elhalványodása (fading) igen jelentős, ezért találtunk különböző szemcsesűrűségű pályákat.

A szendvicsek kiértékelése C. Zeiss LgOG mikroszkóppal történt 200x nagyítással.

Mikroszkópos vizsgálatok a következő adatok meghatározására irányultak:

1. melyek a pernye radioaktív szemcséi,
2. az össz-aktivitásnak hány százaléka van átlagosan egy bizonyos típusú pernye-szemben,
3. az egyes pernye-szemeknek mennyi az urán tartalma, illetve koncentrációja.

Az aktív pernye-szemekről szín, alak és a kilépő pályák száma szerint statisztikát készítettünk. A megállapított pályák száma alsó határt jelent, mivel az átlátszatlan szemcsék a pályák egy részét eltakarják, valamint nagyobb szemcsék esetén előfordulhat, hogy az alfa-részecske egész útját a szemcsében teszi meg. Megkülönböztettünk gömb és szabálytalan szemcséket, ezeken belül áttetszőt és átlátszatlant. Az alak szerinti osztályozás szigorú volt, és csak a határozottan kör keresztmetszetűeket soroltuk a szabályosak közé, mert a szabálytalan aktív szemek között jelentős számban fordult elő részben megolvadt, ill. olyan gömbbé olvadt szemcse, amelyhez kisebb vagy nagyobb szabálytalan tapadt hozzá. Ezen vizsgálat a szemcsék aktivitásának megoszlására ad felvilágosítást (1. tábla).

1. TÁBLA

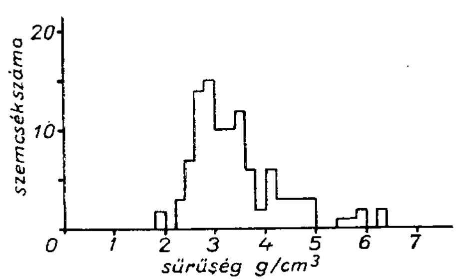
Pernye-szem		Megvizsgált szemcsék száma	Pernye-szemekből kiinduló összes pályaszám	Átlagos pályaszám (pálya/szemcse)	Aktivitás % $\left[\frac{\text{pályaszám}}{\text{össz-pályaszám}}\right]$
Gömb	átlátszatlan	723	3658	5,05	66,23
	áttetsző	37	241	6,51	4,36
Szabálytalan	átlátszatlan	332	1552	4,67	28,10
	áttetsző	15	72	4,80	1,30

Aktivitás megoszlása a pernye szemekben 100 nap expoziciós idő alatt

Az össz-aktivitás jelentős részének (70,59 %) a gömbbé olvadt szemcsék a hordozói, és az egy szemcséből kiinduló átlagos pályaszám is 9,6 %-kal nagyobb. Az össz-aktivitásnak 66,23 %-a az átlátszatlan gömbökben található, ami a gömbök által hordozott aktivitásnak 93,82 %-a.

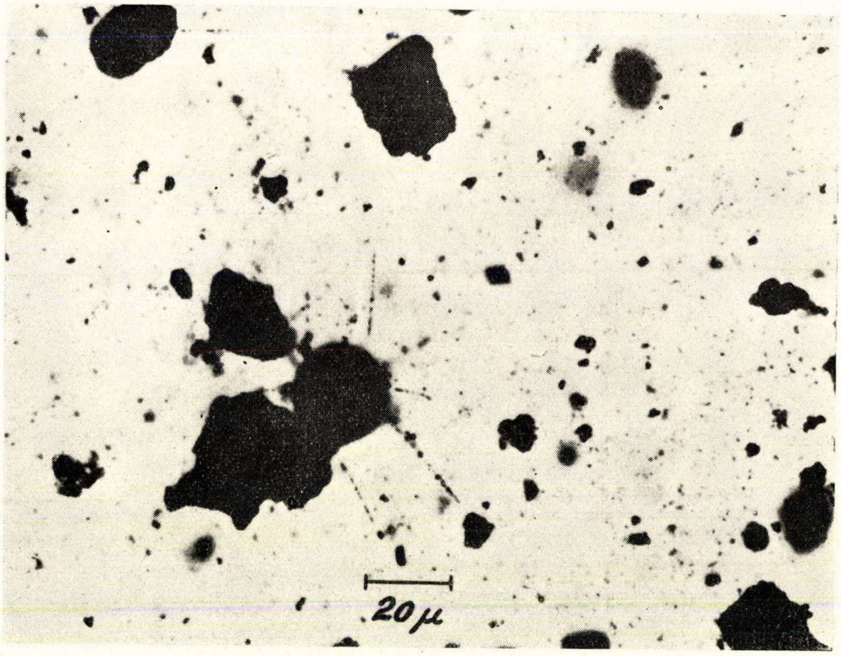
Vizsgálatokat végeztünk arra vonatkozólag, hogy az összes gömbbé olvadt szemcsék közül hány százalék mutat aktivitást. 330x nagyítással 500 mikroszkóp látótérben az okulárba helyezett négyzetes hálózat alatt 828 db olvadt szemcsét figyeltünk meg. Ezek közül 621 db-nál észleltünk aktivitást. A 100 nap besugárzási idő alatt ezek alapján az aktivitást nem mutató szemcsékben levő uránmennyiség — feltételezve, hogy az urán, bomlástermékeivel radioaktív bomlási egyensúlyban van — $1{,}15.10^{-12}$ g-nál kisebb, illetve a gömbbé olvadt szemcsék 75 %-ának urán tartalma ennél magasabb.

Méréseink szerint az aktivitás nagy részét az olvadt szemcsék hordozzák. Vizsgálataink további célja, ezek uránkoncentrációjának meghatározása, amelyhez ismernünk kell a szemcsék sűrűségét. Első tájékozódáshoz bromoformban végeztünk ülepítést mikroszkóp alatt függőcseppes tárgylemezen. A gömb alakú szemcsék többsége lesüllyed a bromoformban, tehát sűrűségük 2,9 g/cm³-nél nagyobb. A felszínen maradóknál sokszor meg lehetett állapítani a bennük levő gázbuborékokat, vagy a kisebb sűrűségű szabálytalan szemcsékkel való összetapadásukat. A 2,9 g/cm³-nél nagyobb sűrűségű gömb alakú szemcsék sűrűségének mérése csak Stokes törvény alapján, tiszta glicerinben a szemcsék süllyedés-sebességének meghatározásával történt. A glicerin viszkozitása 18 C°-on 12 Poise volt. A süllyedés sebességének, valamint az átmérőnek a meghatározását vízszintesen elhelyezett 216x nagyítású mikroszkóppal olvastuk le, az e célra készült mikroszkóp fedő lemezzel határolt speciális küvettában. A hiba aránylag nagy (15 %) a szemcsék szélén fellépő diffrakció, valamint a mozgásuk közben történő átmérő-meghatározás nehézsége miatt. Ugyanezen okokból méréseinkben reális értéket csak 25 μ-nál nagyobb átmérőjű szemcsék esetében kaphattunk. 100 db szemcsén végzett mérés eredményét az 1. ábrán tüntettük fel. A gömbbé olvadt szemcsék zömének sűrűsége 2,6 — 3,6 g/cm³ értékek között van.

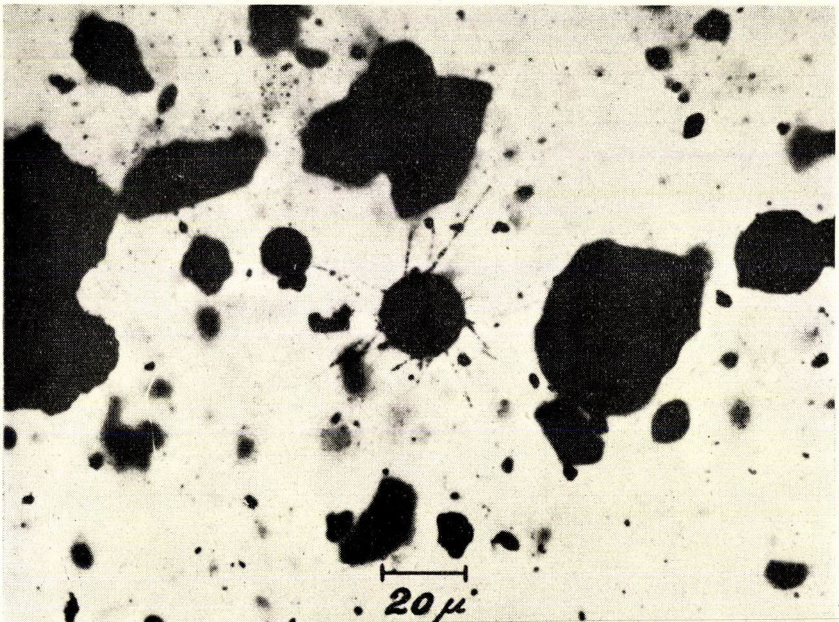


1. ábra
A gömbbé olvadt szemcsék sűrűség eloszlása

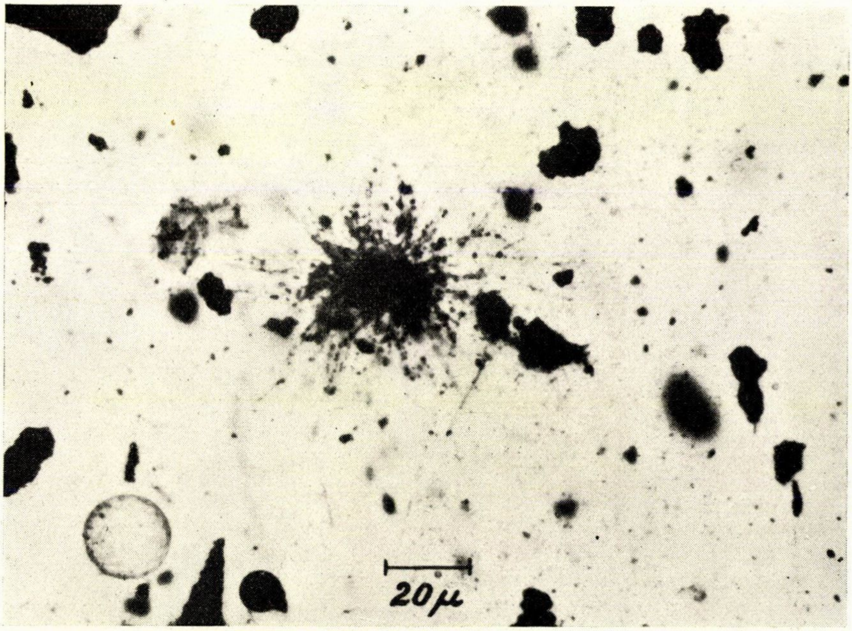
A 2. a—c. ábrák aktív pernye-szemekről készült mikrofelvételek. Jól megfigyelhető rajtuk, hogy a szabálytalan szemcsék nagy része inaktív. Az alfapályák száma alapján becsléseket végezhetünk a szemcsék urán tartalmára. (A felvételen a mikroszkóp-optika kis mélységélessége miatt, nem látható az összes pálya.) A mikroszkóp alatt megszámolt pályák száma minimális érték, — a már említett okok miatt — így a belőlük meghatározott urán mennyiség pesszimális érték lesz. Az ábrákon látható szemcsék átmérője, tömege (3 g/cm³ átlagsűrűséggel számolva) és urán koncentrációja a 2. táblán van feltüntetve.



2a ábra



2b ábra



2c ábra. A *2a—c* ábrák atommagfizikai emulzióba ágyazott pernye-szemekről készült mikrofelvételek

Az analitikai vizsgálatok [10] azt bizonyítják, hogy a szénhamuk aktivitása urántól származik, thórium tartalmuk vagy egyáltalán nincs, vagy legfeljebb 10^{-4} %. Utóbbi is igen ritka eset. Számításainkban ezek alapján a thóriumot figyelmen kívül hagytuk.

Az urán koncentráció értékére két adatot adunk meg. Minimális értéket kapunk akkor, ha feltételezzük, hogy a szemcsében jelenlévő urán bomlási egyensúlyban van és a leszámolt alfa-pályák az UI, UII, Io, Ra, Rn, RaA, RaC',

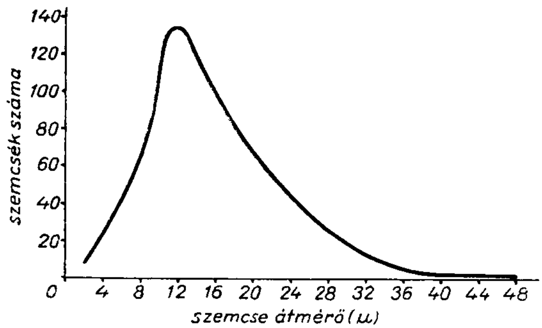
2. TÁBLA

Ábra	Pályák száma	Szemcse-átmérő μ-ban	Szemcse-tömeg 10^{-9} g	Tiszta U esetén: U mennyiség 10^{-9} g	Tiszta U esetén: U kon-centráció %	Bomlási egyensúlyban: U mennyiség 10^{-9} g	Bomlási egyensúlyban: U koncent-ráció %
2 a	13	23	19,1	0,060	0,31	0,015	0,08
2 b	24	19	10,7	0,108	1,01	0,027	0,25
2 c	>50	12	2,7	>0,228	>8,44	>0,057	>2,11

2a—c ábrákon lévő aktív pernye-szemek urán koncentrációja

RaF tagoktól származnak. Maximális értéket kapunk ha feltételezzük, hogy nincs bomlási egyensúly és csak az UI és UII alfa-pályák szerepelnek.

Becsléseket végezhetünk továbbá a gömb alakú szemcsék átlagos U koncentrációjára. Az átmérő eloszlást 828 db szemcsén végzett mérésből állapítottuk meg (3. ábra). A leggyakrabban előforduló átmérő 12 μ körül van.



3. ábra. A gömbbé olvadt szemcsék átmérő eloszlása

Az egy szemcséből átlagosan kiinduló pályák száma 5,13 (1. tábla). Figyelembe véve, hogy a szemcsék 25 %-ának urán tartalma elhanyagolható (kisebb mint $1{,}15 \cdot 10^{-12}$ g) és a számításokat 3,0 g cm^{3} átlagsűrűséggel végrehajtva, a gömb alakú szemcsék átlagos urán koncentrációja, tiszta uránt feltételezve 0,65 %, bomlási egyensúly esetén 0,16 %, az itt leírt vizsgálati anyagunkban.

SZALAY és ALMÁSSY [10,11] megállapították, hogy az urán rádióaktív egyensúlyban van a szénben, feltehető tehát, hogy a pernyében is, így a közölt urán koncentrációknál a bomlási egyensúlyra vonatkozó adatok a valószínűbbek.

Összefoglalásképpen megállapíthatjuk, hogy a porszén fűtéssel elfűtött urán tartalmú szén hamujában az urán nagyrészben a gömbbé olvadt, azaz alacsonyabb olvadáspontú pernye-szemcsékben található. Legközelebbi feladatunkat ezen pernye-szemcsék kémiai és ásványtani meghatározása fogja képezni.

*

A szerzők köszönetüket fejezik ki dr. POLSTER ALFRÉDnak (FORTE Fotokémiai Ipari Kutató Laboratórium), aki a szükséges emulziókat készítette, továbbá JOST FRANCISKÁnak és MEDVECZKY LÁSZLÓNÉnak, a mikroszkópos munkákban nyújtott segítségükért.

MTA ATOMMAG KUTATÓ INTÉZETE DEBRECEN.

IRODALOM

[1] SZALAY S.: *Magyar Állami Földtani Intézet Évi Jelentése* **10** (1948) 5.
[2] FÖLDVÁRI A.: *Magyar Állami Földtani Intézet Évi Jelentése* **10** (1948) 35.
[3] SZALAY S.: *Nature* **162** (1948) 454.
[4] SZALAY S., FÖLDVÁRI A: *MTA. Matematikai és Természettud. Oszt. Közl.* **1** (1951) 60.
[5] FÖLDVÁRI A.: *MTA. Műszaki Tudományok Osztálya Közleményei* **5**, **3** (1952) 11.
[6] SZALAY S.: *MTA. Műszaki Tudományok Osztálya Közleményei* **5** (1952) 167.
[7] SZALAY S.: Acta Geológica **2** (1954) 300.
[8] SZALAY S.: *MTA. III. Matematikai és Fizikai Oszt. Közl.* **4** (1954) 327.
[9] SZALAY S.: *Magyar Kémikusok Lapja* **11** (1956) 203.
[10] ALMÁSSY GY.: *Magyar Kémikusok Lapja* **11** (1956) 206.
[11] SZALAY S., ALMÁSSY GY.: *MTA. Kémiai Oszt. Közl.* **8** (1956) 33.
[12] POLSTER A.: *Magyar Kémikusok Lapja* **11** (1956) 109.
[13] MEDVECZKY L., POLSTER A.: *MTA. III. Matematikai és Fizikai Oszt. Közl.* **7** (1957). 145.

(Beérkezett: 1956. X. 5.)

PRECIZIÓS AUTOMATIZÁLT EXPANZIÓS KÖDKAMRA

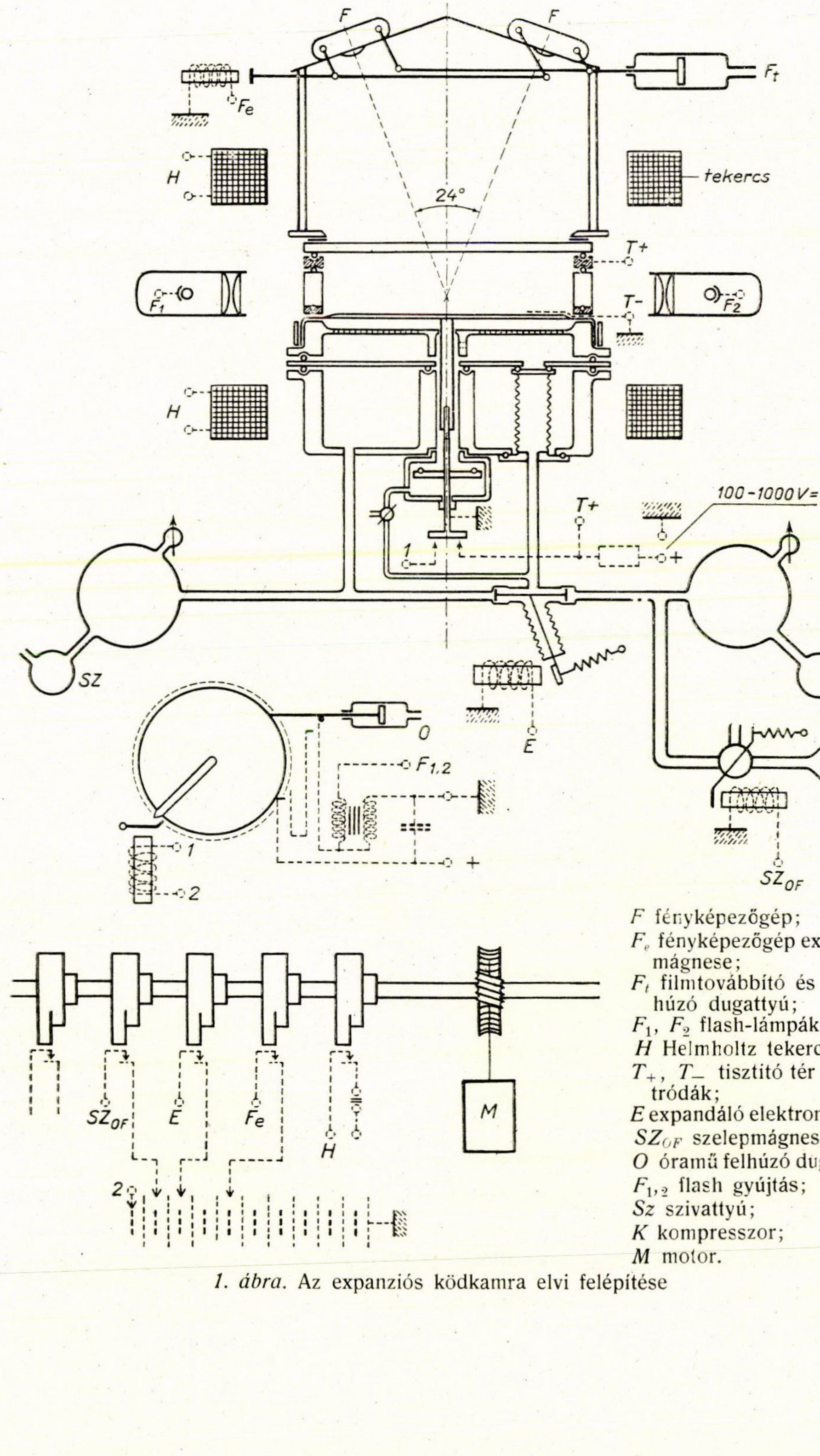
CSIKAI GYULA, HREHUSS GYULA és dr. SZALAY SÁNDOR

Fundamentális atommagkutatás céljaira a debreceni Atommag Kutató Intézetben építettünk egy precíziós mérésekre alkalmas expanziós ködkamrát. A ködkamrák konstrukciója többnyire a megoldandó különleges probléma természetétől függ. Célunk az volt, hogy olyan ködkamrát építsünk, amely nemcsak egy speciális feladat megoldására alkalmas, hanem a fundamentális atommagkutatás széles területén — kivéve a kozmikus sugárzással kapcsolatos vizsgálatokat — felhasználható legyen. Az ilyen célra épült ködkamra munkaterében a gáznyomásnak lehetőleg széles intervallumban változtathatónak kell lenni.

Az Intézetben épített ködkamra membrándugattyús, térfogatexpanziós típusú. A dugattyú 2 mm vastag 250 mm átmérőjű bronzkorong, melynek mindkét oldalán gumibevonat van. A dugattyú vezetését és vízszintes síkban való tartását egy — a membránhoz középen mereven rögzített — rúd biztosítja. A dugattyú mozgatása pneumatikusan történik, a dugattyú alatt összenyomott levegő zárt, evakuált edénybe áramlik, így 760 Hg mm-nél alacsonyabb nyomás esetén is lehet expandáltatni a munkateret. A kamra érzékeny térfogatát egy 280 mm átmérőjű és 50 mm magas üveghenger, az elektromos tisztítótér gyűrűelektródjai, valamint az üvegfedőlap és a dugattyú definiálják. A fedőlap 20 mm vastag, csiszolt belga tükörüvegből készült, ezen keresztül fényképezzük a pályanyomokat. A sötét hátteret és a kondenzáns folyadékkeveréket a dugattyú felületére öntött, feketére festett zselatinréteg biztosítja. A kamra örvénycsökkentő szűrőlap nélkül is örvénymentesen működik, ezért a kamrában nincsen porforrás. Lassú expanziókra a gyors expanzió után nincsen szükség, csupán összerakás után kell egyszer letisztítani.

A kamra automatikus vezérlésének megoldásánál az egyszerűségre és megbízhatóságára törekedtünk, ezért pneumatikus és elektromechanikus rendszert terveztünk, amely az eddigi tapasztalataink szerint jól bevált. Működését az 1. ábra szerint követhetjük végig:

A *K* kompresszor és az *Sz* szivattyú állandóan üzemben van, valamint az *M* gramofon motor is, amelyik 1 : 1400 áttétellel egy bütykös tárcsarendszert hajt. A kompresszorhoz csatlakozó pufferedényből kettős tányérszelepen



F fényképezőgép;
F_e fényképezőgép exponáló mágnese;
F_t filmtovábbító és zárfelhúzó dugattyú;
F_1, *F_2* flash-lámpák;
H Helmholtz tekercspár;
T_+, *T_-* tisztító tér elektródák;
E expandáló elektromágnes
SZ_{OF} szelepmágnes;
O óramű felhúzó dugattyú;
$F_{1,2}$ flash gyújtás;
Sz szivattyú;
K kompresszor;
M motor.

1. ábra. Az expanziós ködkamra elvi felépítése keresztül levegőt komprimálunk a dugattyú és az expandáló szelep alá. A csőmembránból készült expandáló szelep felemelkedve elzárja a dugattyú alatti teret az evakuált tértől. A dugattyú alá beáramló levegő mennyiségét egy — a dugattyúrúddal vezérelt — önzáró szelep szabályozza, ezzel elérjük, hogy a beállított expanzió-viszonynak megfelelő magasságig felemelkedve elzárja a további levegőbeáramlás útját, így a könnyű membrándugattyú a túlnyomás miatti deformációnak nincs kitéve.

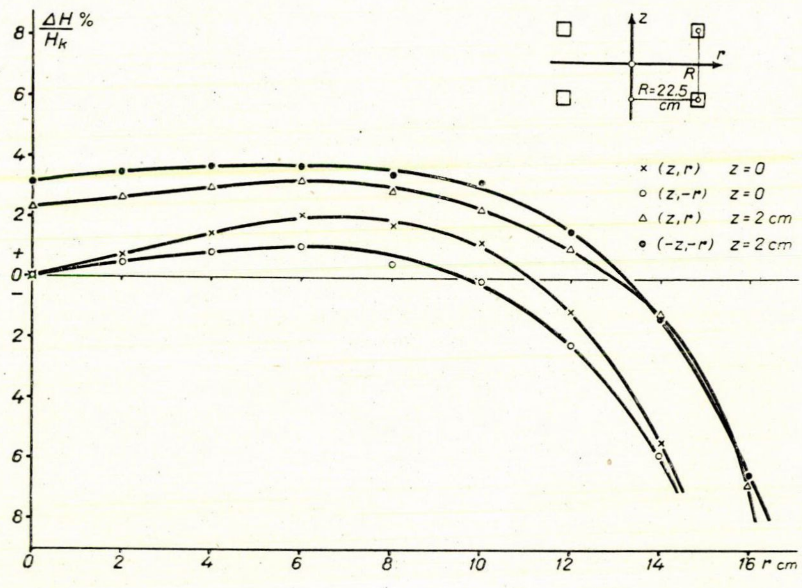
A forgó bütykös tárcsák higanykapcsolókat kapcsolnak be a megfelelő időpontban, a szükséges időtartamra. A kezdeti időpillanatban záródik a mágneses teret előállító Helmholtz tekercs áramköre. Röviddel később egy elektromágnes segítségével nyitjuk a fényképezőgépek zárját, és ugyanakkor egy másik elektromágnes a kettős tányérszelepet ellenkező helyzetébe rántja át. Ekkor ez elzárja a komprimált levegő útját, és összenyitja az expandáló szelep alatti teret az evakuált pufferedénnyel. A dugattyú alatti komprimált levegő lenyomja az expandáló szelepet, és a 60 mm átmérőjű nyíláson átáramlik az evakuált térbe, a nyomások kiegyenlítődnek. A két tér térfogatviszonya olyan, hogy 40 Hg mm-es munkatér nyomáson is biztosítja még a kamra jó működéséhez szükséges dugattyúsebességet. A dugattyú mozgásának ideje 1,30-as expanzió-viszonynál 0,002 sec., ha a nyomáskülönbség 1 atm. A dugattyú mozgása közben egy állítható kontaktust zár, amivel az elektromos tisztító teret a megfelelő időpontban megszüntetheti. A tisztító teret két 7mm vastag rézgyűrű (T_+, T_-) segítségével a vezetővé tett zselatinrétegre kapcsolt 100—1000 V-ig változtatható egyenfeszültség állítja elő. A dugattyúrúd végén lévő tárcsa legalsó helyzetében egy kontaktust kapcsolva változtatható körülfutási idejű óraszerkezetet indít el — egy elektromágnes segítségével — melynek forgó karja egyszer körbefutva a kísérletileg megállapított legjobb időpontban begyújtja a fényforrásként használt flash-lámpákat. Mivel a fényképezőgép zárja nyitva van, a felvétel megtörténik.

A flash-lámpákat az Intézetben készítjük* razoterm üvegből, nikkel elektródokkal, xenon gáztöltéssel. A világító gázoszlop 3 mm átmérőjű és 30 cm hosszú, az alkalmazott energia lámpánkint 100 Joule (50 μF, 2000 V). A villanó lámpákat plexiüvegből készült hengerlencse rendszer fókuszába helyeztük ($f = 6$ cm) a lencséket szintén az Intézetben készítették. A lámpákat egy autótranszformátorról vett nagyfeszültségű impulzussal gyújtjuk úgy, hogy a transzformátor primér tekercsén egy 200 V-ra töltött 16 μF kapacitású kondenzátort sütünk ki. A fényképezést két egymáshoz 24° sztereoszögbe állított TAXONA fényképezőgép végzi. A tárgytávolság 47 cm, az objektív TESSAR F = 1:3,5/50.

* Csikai Gy. Magy. Fiz. Foly. III. 4. 1955.

Az expanzió után a Helmholtz tekercs, a fényképezőgépeket nyitó és a tányérszelepet mozgató elektromágnesek áramát a bütykös tárcsák megszakítják, ezáltal a kamra visszaáll eredeti helyzetébe. A negyedik bütykös tárcsa egy szelepet nyitó elektromágnest (SZ_{OF}) bekapcsol, a szelep komprimált levegőt ad a fényképezőgépek filmtovábbítását és az óraszerkezet felhúzását végző dugattyúkba. Miután ez megtörtént, a bütykös tárcsa megszakítja a kontaktust, és a felhúzó dugattyúk visszaállnak nyugalmi helyzetükbe. Az egész folyamat 45 másodpercenként automatikusan ismétlődik.

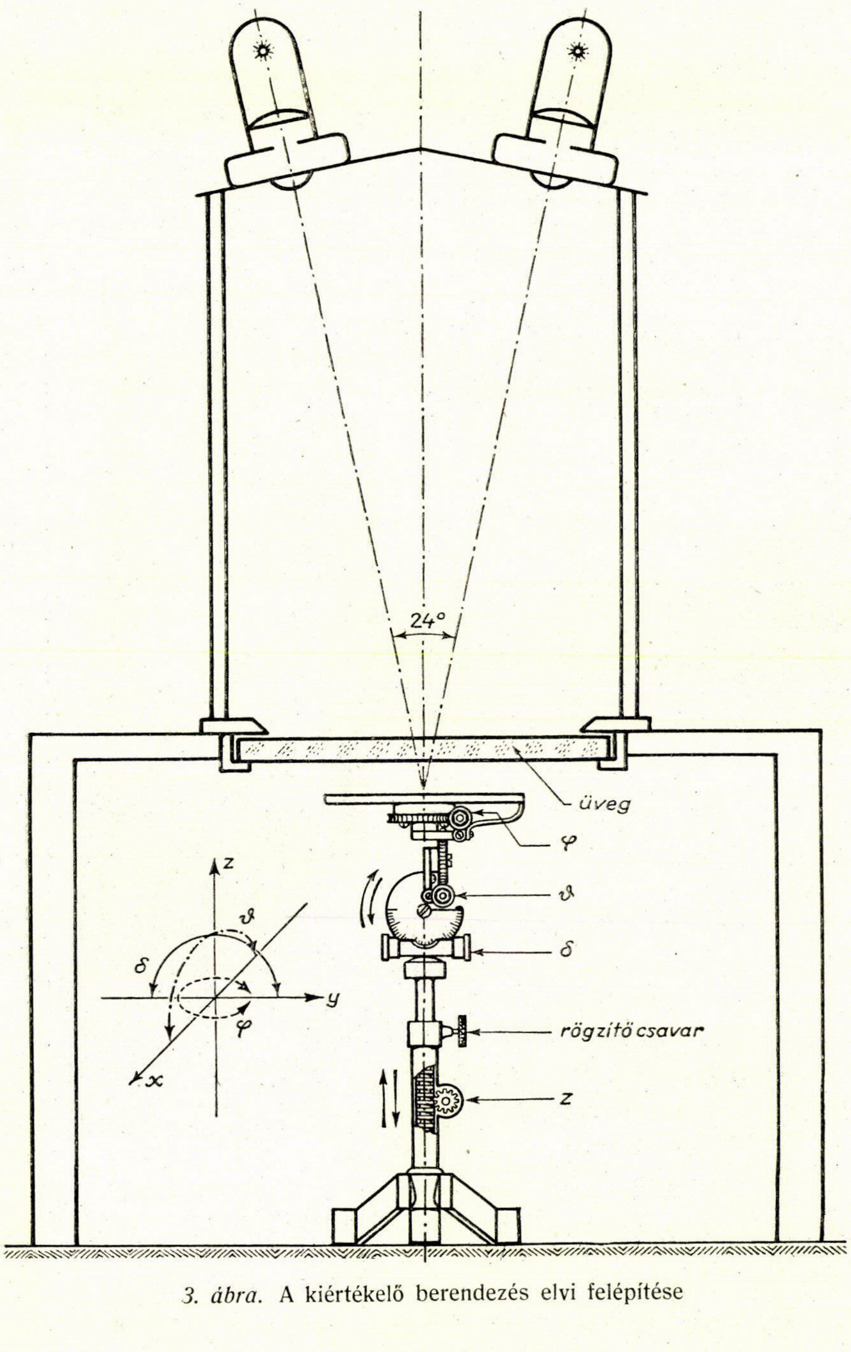
A β-részek energiáját a mágneses térben való pályagörbület alapján határozzuk meg, a teret Helmholtz tekercspárral állítjuk elő, melynek középsugara $\bar{R} = 22{,}5$ cm. A tér inhomogénitása a munkatérfogaton belül 5% alatt van, az eloszlást a 2. ábra mutatja.



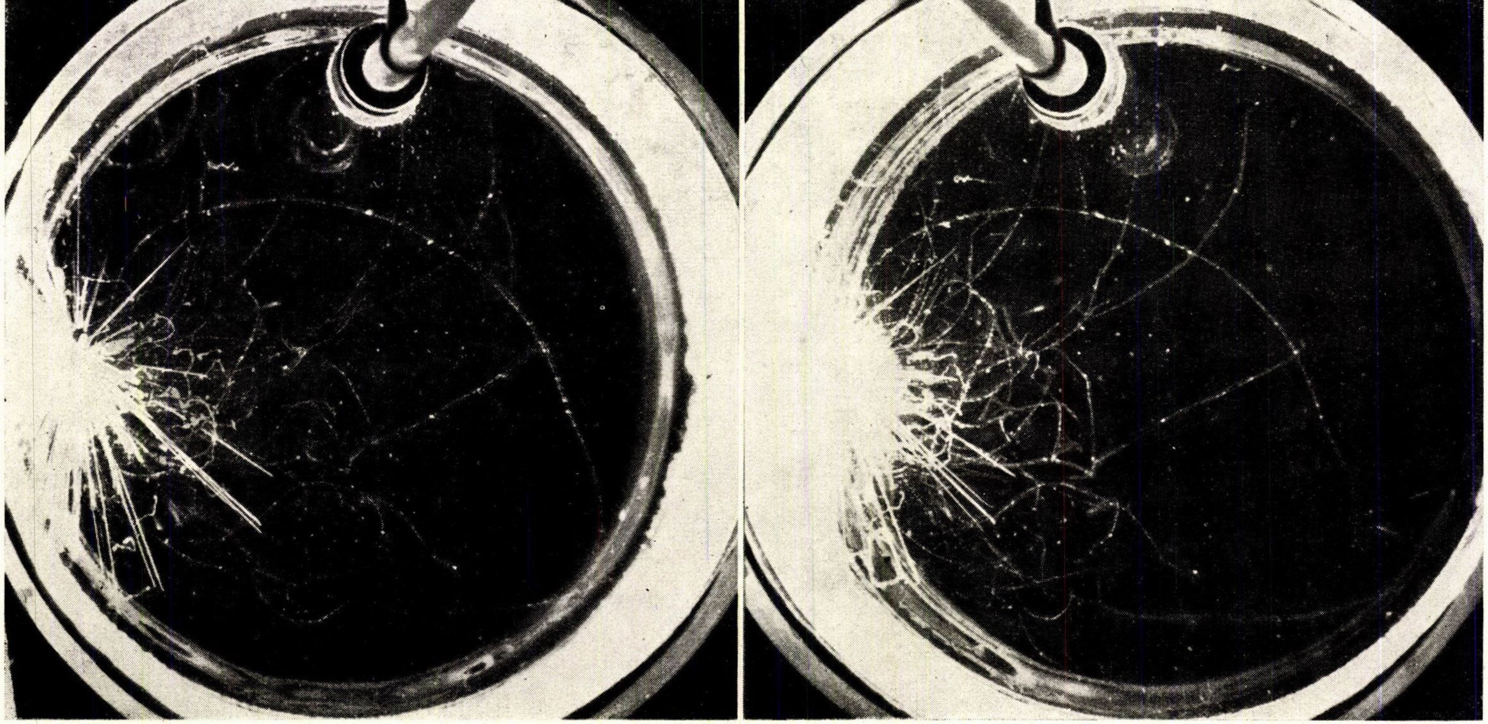
2. ábra. A mágneses térerősség eloszlása a kamra térfogatán belül

A térerő abszolút értéke H (oersted) $= 15{,}1$ i. (amp) $\pm$ 0,6% alakban írható a középpontban, tekercspárunknál. A maximálisan megengedhető áramerősség, ami még nem okoz olyan melegedést, amely a kamra működését zavarná, 70 amper, expanziónkénti bekapcsolás esetén. Így az elérhető térerősség közel 1000 oersted, ami néhány MeV energiájú β-részek esetén is jól mérhető pályagörbületet eredményez.

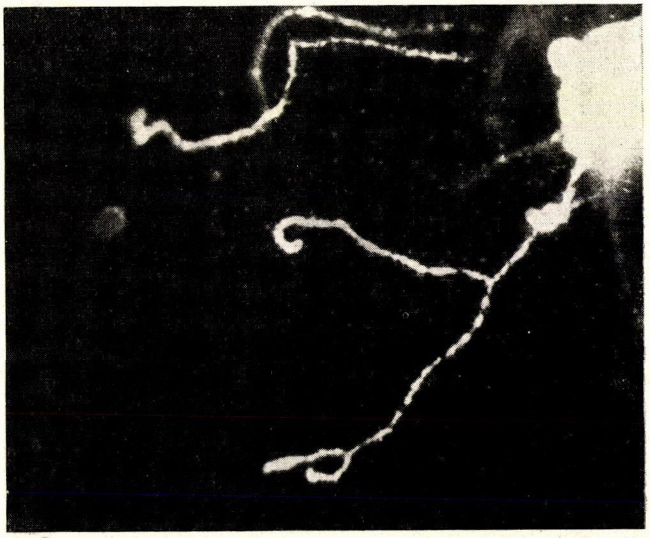
A felvételeket visszavetítés módszerével értékeljük ki. Ezzel a módszerrel minden szisztematikus leképezési hiba automatikusan korrigálódik. A kamra fedő üveglemezét leszorító gyűrű és a fényképezőgépek mereven vannak



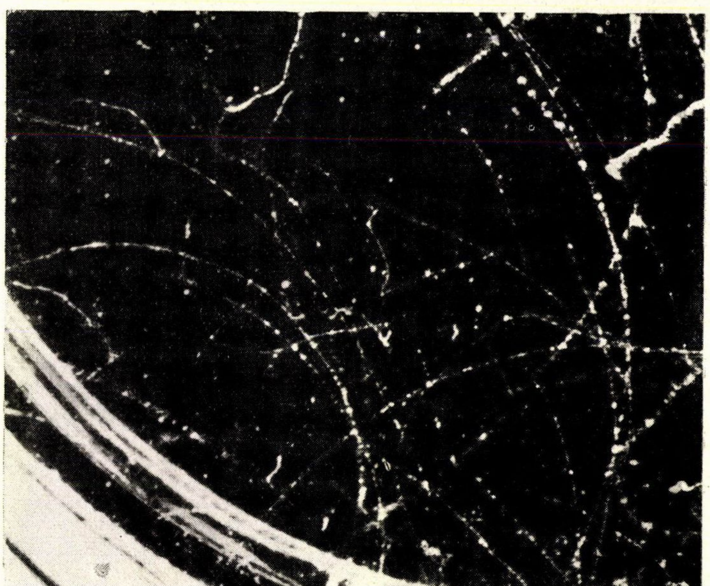
3. *ábra.* A kiértékelő berendezés elvi felépítése



4. ábra. Sztereoszkópikus felvételpár $Th(B+C)$ α- és β-részecskéinek nyomairól
Levegő, víz + etilalkohol 760 Hg mm nyomáson



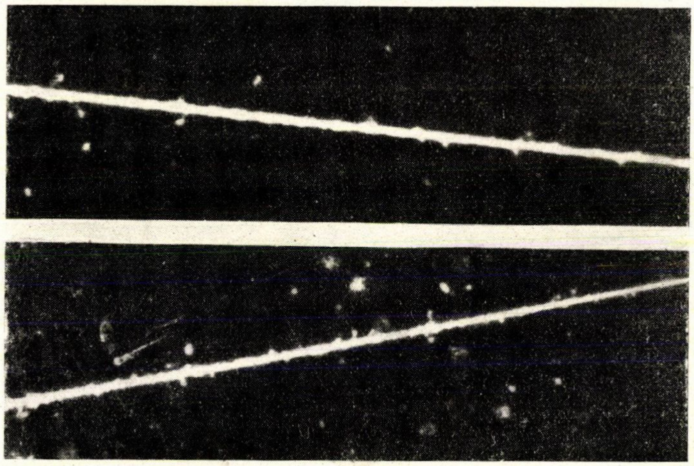
5. *ábra.* J^{131} által kibocsátott β-részecske pályanyoma. Levegő, víz 760 Hg mm nyomáson



6. *ábra.* *Ra* γ-sugarai által kiváltott elektronnyomok mágneses térben Levegő, víz 760 Hg mm nyomáson

összeépítve, így a kiértékelésnél a fedőlemezt és a fényképezőgépeket megfelelő állványra helyezzük át, ahol a kiértékelés könnyen elvégezhető.

A fényképezőgépek hátlapjai levehetők és helyükre kondenzorral és megvilágító lámpákkal felszerelt hátlap tehető. Az előhívott filmeket visszahelyezve a gépekbe az üveglap alatt egy ernyőn a két képet összehozzuk, és ekkor az ernyő síkja a pályanyomok síkjába esik. A nyomok térbeli adatai az asztalka helyzetét változtató korongokon lévő fokbeosztás segítségével határozhatók meg. Az asztalkán lévő szögbeosztás segítségével a pályanyomok közötti szögek közvetlenül leolvashatók.



7. *ábra.* δ-elektronok α-részek pályája mentén
Levegő, víz + etilalkohol 50 Hg mm teljes nyomáson, $H = 300$ oersted

Az eddigi tapasztalataink szerint a kamra megbízhatóan működik és magfizikai mérésekre alkalmas. A 4., 5., 6., és 7. ábrán a kamrával készített felvételek láthatók.

Végül köszönetet kell mondanunk az Intézet műhelyvezetőinek és dolgozóinak a kamra kivitelezésében végzett lelkiismeretes és pontos munkájukért.

AZ MTA ATOMMAG KUTATÓ INTÉZETE
DEBRECEN.

(Beérkezett: 1956. X. 5.)

ÚJ ATOMMAGFIZIKAI EMULZIÓ (FORTE P 22) ELŐÁLLÍTÁSA ÉS TULAJDONSÁGAI

MEDVECZKY LÁSZLÓ
MTA. Atommag Kutató Intézete
Debrecen

POLSTER ALFRÉD
Forte Fotokémiai Ipari Kutató
Laboratórium, Vác

Az atommagfizikai fotoemulzió elsősorban C. F. POWELL és munkatársainak munkája eredményeképpen a magfizika kvantitatív mérőműszerei sorába lépett. Alkalmazható úgyszólván mindazon mérésekre, amelyekre a többi magfizikai metódus, de különösen előnyös azon esetekben, amikor

a) a lejátszódott események időbeli egymásutánja nem képezi a megfigyelés tárgyát;

b) a sugárzás intenzitása igen kicsi és ezért hosszú expozíciós idő szükséges (pl. kozmikus sugárzás);

c) kis helyen elférő és kistömegű nagyon érzékeny térfogat szükséges, így elsősorban az igen nagy energiájú részecskéken végzett vizsgálatoknál;

d) a részecske által leirt pálya helyzetének pontos ismerete szükséges (pl. neutron energiamérés visszalökött protonok segítségével, radioaktív elem lokalizációjának megállapítása stb.).

Hazánkban a módszer — intézetünkben végzett vizsgálatoktól eltekintve — a legutóbbi időkig mindössze egy-két esetben, szinte kivételesen került csak alkalmazásra. Ennek egyik okát kétségen kívül az emulzió külföldről való beszerzésének nehézkes volta képezte. A magfizikai emulziók hazai előállítása az autoradiográfiához — különösen, ha gél formában történik az alkalmazás [1] — szinte nélkülözhetetlen.

A magfizikai emulzió lényegesen különbözik a normál optikai fotoemulziótól és annak előállítása nem egyszerű feladat a fotokémikus részére. W. HÄLG és L. JENNY [2], L. JENNY [3], továbbá P. DEMERS [4] eredményei egyaránt ismeretesek voltak előttünk munkánk kezdetén, de az idézett eljárások egyike sem bizonyult minden további nélkül reprodukálhatónak, ezért az egész témakört szisztematikusan megvizsgáltuk és ezen vizsgálatok eredményén alapuló új eljárás kidolgozása vált szükségessé.

A normál fotoemulziókat a következő értékek jellemzik legjobban:

a) R érték, az ezüst mennyiségének viszonya a zselatinhoz;

b) halogén felesleg, amelynek jelenlétében az ezüsthaloid képzés történik;

c) A fényérzékeny rendszer rétegvastagsága (μ);

d) ezüst mennyisége (g/m^2).

Az I. táblázatban feltüntettük ezen értékeket néhány normál fotoemulzióra és az általunk készített magfizikai emulzióra. A különbség a magfizikai emulzió és az optikai emulziók adatai között szembeötlő és ebből is nyilvánvaló, hogy magfizikai folyamatok vizsgálatára szolgáló emulziók készítése új feladatot jelent.

I. TÁBLÁZAT

Emulzió tipus	R érték	Halogén felesleg %	Réteg-vastagság μ	Ezüst g/m^2 20μ
Negatív film	0,335	32,60	18	5,5
Röntgen diagnosztikai	0,400	16,25	20+20	8,91
Röntgen ipari	0,470	61,30	20+20	8,32
Spektrál lemez	0,457	43,00	18	9,65
Kino pozitív	0,365	18,62	15	6,40
P/22 magfizikai emulzió	3,210	2,00	100	30,00

A magfizikai emulziók legjellemzőbb tulajdonságai, amelyeket előállításuknál meg kell valósítani, a következők:

1. igen finom, egyenletes nagyságú ezüsthaloid szemcsézet;

2. a szemcsék nagy belső érzékenysége, mely szűk határon belül egyforma;

3. egyenletes szemcseeloszlás, azaz a szemcséket elválasztó közök egyformák és lehetőleg igen kis méretűek (nagy ezüsthaloid tartalom).

A magfizikai emulziós rendszerünk kialakítása a *Forte Fotokémiai Ipari Kutató Laboratóriumban* (Vác), a kísérletek kiértékelése és az emulziók magfizikai tulajdonságainak megállapítása pedig az *MTA Atommag Kutató Intézetében* (Debrecen) történt.

Zselatin

Magemulziós rendszerünk tulajdonképpen nem szigorúan vett emulzió, hanem ezüsthaloid kristályok diszperziója védő hatású kolloidban, zselatinban.

A zselatinok három részből állnak, ezek közül legnagyobb az ún. alapzselatin, amelyet hosszú szénláncú, nagy molekulasúlyú vegyületek alkotnak (glicin, prolin, oxiprolin stb.) ez a rész kölcsönzi a zselatinnak a fizikai tulajdonságokat (védőhatás, viszkozitás stb.). A második része rövidebb szénláncú vegyületekből áll (tiokarbamid, aldehidek), ezek érlelő hatást fejtenek ki, rendszerint az emulzió termikus kezelésével egyidejűleg (II. érlelés alatt). A harmadik rész szintén rövidebb szénláncú vegyületekből áll (cisztin), ez a zselatin érlelést gátló, inaktív része.

Optikai fotoemulzióknál az alapzselatinnak az ezüsthaloidok lecsapásánál van szerepe, a zselatin másik két vegyületcsoportja az I., de még inkább a II. érlelésnél fejti ki hatását megfelelő hőkezeléssel együtt.

Magemulzióknál az ezüsthaloidok készítése a lecsapásnál befejeződik, elmarad az I. és II. érlelés a szemcsenagyság egyenlő mértékének betartása miatt, ezért a magemulziók készítésénél csak a zselatin alap-zselatin része lényeges.

II. TÁBLÁZAT

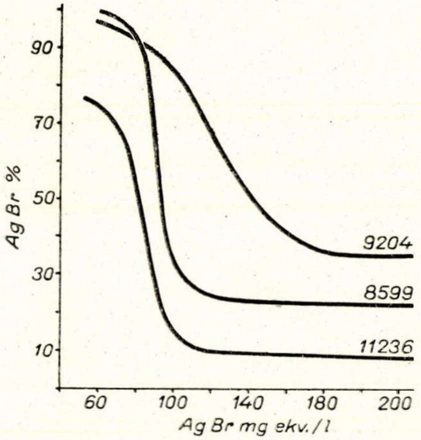
Zselatin		11236	8599	9204
Hamu %		1,02	1,48	1,24
Nedvesség %		12,35	12,03	13,67
p_H		6,86	6,53	6,18
Viszkozitás		9,70	7,12	5,79
Dermedés °C		17	16	15
Olvadás °C		29	25	25
Titrálás ml	a.	3,3	2,9	5,9
Cserzés	b.	1,65	2,72	3,10
Labilis kén	c.	11,2	52,8	16,0
Duzzadás	d.	15,8	18,0	11,4
Védőhatás	e.	15,0	35,0	85,0

a. 50 ml 6%-os zselatin oldat semlegesítése n 20 NaOH-val ml
b. 100 g 10%-os zselatin által fogyasztott 5%-os káliumkrómtimsó ml
c. mg S/kg zselatin
d. ml víz/g zselatin
e. 5 g zselatin 100 mg ezüstbromidból hány százalékot tart szolban.

A magemulziók érzékenységének kialakítása nem kémiai érleléssel, hanem szenzibilizátorokkal történik és ezért a zselatin érlelő hatású vegyületei nem jönnek számításba, sőt kísérleteink szerint ezek magas fátyolértéket eredményeznek, amelyek a magfizikai kiértékelést — különösen vastagabb rétegben — nagymértékben megnehezítik. Sok zselatinnal végeztünk kísérletet, az alkalmazott zselatinok három csoportját mutatja a II. táblázat és az 1. ábra.

Labilis kén-érték a zselatinok aktív, érlelést elősegítő részét fejezi ki, de ez egyáltalában nem mutat rá — ellentétben az irodalomban található adatokkal [5—6] — arra, hogy a zselatin magfizikai emulziókhoz alkalmas.

Vizsgálataink szerint magfizikai emulziókhoz elsősorban magas védő hatású zselatinra van szükség, hogy az alkalmazott minimális mennyiségű zselatin a nagy mennyiségű ezüstbromid diszperzióját biztosítsa. Védőhatás megállapítására nem elégséges a Zsigmondy-féle szám [7] meghatározása. Sokkal jobb eredményt nyújtott EVVA FERENC vizsgálata [8], amelynél a szolban maradt ezüstbromid mennyiségének százalékos meghatározása (adott zselatin és ezüst-bromid mg ekv/l menynyiségekre) ad számszerű felvilágosítást a védőhatásra. Vizsgálatainknál a 11236 számú zselatin teljesen alkalmatlan, míg a 9204 számú zselatin igen alkalmas magfizikai emulziók készítésére, a 8599 típusnál a védő hatás megfelelő, de a magas labilis kéntartalom miatt a fátyol-érték emelkedett és $1{,}20/\mu$ szemcseszámnál magasabb szemcsesűrűséget nem tudunk elérni a ThC'α részecske pályájában a kiértékelésnél használt előhívással.



1. ábra. Zselatinok védő hatása

Itt említjük meg, hogy az emulziós kísérleteink eredményéről első tájékozódást a ThC'α nyomának vizsgálatával nyertük. Ez természetesen csak akkor vehető alapul, ha az emulziókezelés körülményei (Th-val való telítés, előhívás módja stb.) mindig szigorúan ugyanazok és a szemcseszámolás is hasonlóan mindig azonos feltételekkel történik. Ezzel egyidejűleg figyelemmel kísértük, hogy a β-részek nyoma milyen mértékben észlelhető. A megoldást nagy energiájú sugárforrás hiányában elsősorban idő és munka megtakarítás céljából választottuk. A dolgozatban szereplő szemcseszám/mikron érték mindig a ThC'α pályán végzett mérés eredményét adja meg, a fentiek szerint.

Kísérleteink alapján megállapítottuk, hogy a normál fotozselatinok közül magfizikai emulzióhoz magas védő hatású, lehetőleg inert zselatinok használhatók, amelyek a megfelető pBr (pAg) érték beállítása után szenzibilizációra is alkalmasak.

Ezüsthaloidok kialakítása

Az emulziókészítés legfontosabb fázisa az ezüsthaloidok lecsapása zselatinos közegben. Az ezüsthaloid szemcsék közepes szemcsesűrűsége ZSDANOV [9] szerint

$$\frac{dn}{dx} = \frac{3}{2} \frac{cP}{\varrho d}$$

egyenesen arányos a koncentrációval (1 ml emulzióban levő ezüstbromid mennyisége grammban), a *P* értékkel, amely az a valószínűség, amellyel egy meghatározott energiájú részecske előhívhatóvá teszi az ezüsthaloid szemcsét, a szemcsesűrűség fordítottan arányos a szemcse átmérőjével (d) és az ezüstbromid sűrűségével (ϱ). Azonban a p és d értékek között összefüggés van, mert minél nagyobb a szemcse, annál nagyobb a valószínűség, hogy a gyengén ionizáló részecskéket regisztrálni lehessen, ezért kompromisszumot kell létesíteni a fenti faktoroknál.

Magemulziós rendszerünk kialakítására végzett kísérleteinkben azonos emulziókezelés mellett a szemcseszámot bizonyos mértékig az ezüstbromidnak a zselatinhoz való aránya (AgBr/zselatin) szabja meg (III. táblázat).

III. TÁBLÁZAT

Kísérlet jelzése	AgBr/zselatin	Ezüst g/m² 100 μ	Szemcse-szám μ
A/34	3,16	106	1,31
A/35	3,78	126	1,57
A/36	4,25	142	1,68
A/39	5,62	188	1,88

Az ezüsthaloid szemcsék kialakulása függ az ezüstnitrát és a káliumbromid oldatok összefolyatási sebességétől is. A gyors befolyatás és az emulziós közeg gyors keverése nem vezet nagy szemcsesűrűséghez, a befolyatás egyenletességét és ezzel a szemcsenagyság egyenletességét nehezebb biztosítani, ha az ezüsthaloidot képező oldatok összefolyatása bizonyos határon túl van. (IV. táblázat.)

IV. TÁBLÁZAT

Kísérlet	Összefolyatás perc	Szemcse-szám μ
B/10	6,5	0,93
B/12	8,5	1,09
B/13	16,0	1,60
B/15	30,0	1,72

Az összefolyatási sebesség további csökkentése nem vezetett nagyobb szemcsesűrűséghez.

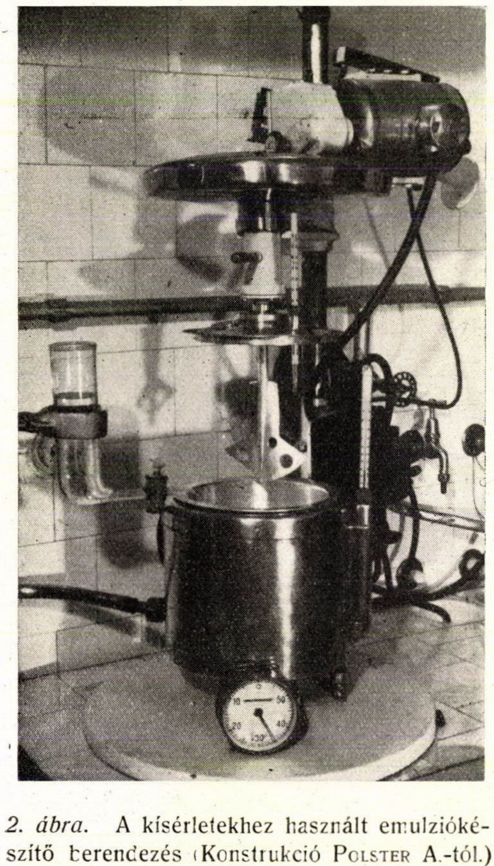
Az ezüsthaloid képzésnél alkalmazott hőmérséklet nem okoz nagyobb különbségeket, legalkalmasabb az ezüstbromid képzést 40-42 C°-nál végezni, magasabb hőmérséklet szemcsenagyobbodást, magasabb fátyolértéket eredményez.

Az emulziós közeg p_H értékének beállítása kísérleteink szerint igen lényeges. Irodalmi adatok szerint [3] ammóniát adnak az emulzióhoz az érlelés fokozására, ezzel a közeg p_H értékét emelik meg lényegesen. Magemulziós kísérleteink reprodukálásánál legjobb eredményt akkor értünk el, ha a zselatinos közeg p_H értékét 7,10—7,20-ra állítottuk be. Alacsony p_H-jú (5,4—5,8) közegben, a lecsapás többi faktorainak változatlanul hagyásával, fokozott ezüstbromid kristályos kiválást észleltünk, a közeg p_H értékének 7,50-on felüli emelésével az alapfátyol-érték emelkedett.

Az ezüsthaloid szemcseszám kialakításánál a fenti szempontok figyelembevételével a szemcseszámot 1,60—1,80/μ értéknél tovább fokozni nem lehet, mert

a) igen nehéz olyan zselatint találni, amely adott mennyiségű Ag/Br zselatin mellett megfelelő védő hatású legyen;

b) fátyolérték nő, és ezzel a kiértékelés megnehezül.



2. ábra. A kísérletekhez használt emulziókészítő berendezés (Konstrukció POLSTER A.-tól.)

Az ezüsthaloidok képzésénél nemcsak a szemcseszám, hanem a szemcsenagyság és szemcseköz egyenletessége, valamint a szemcsék nagy belső érzékenysége is igen lényeges. Ezeknek a kialakítása függ a zselatin mennyiségétől és a lecsapásnál alkalmazott haloid feleslegtől. A zselatin mennyiségének szabályozását a III. táblázat mutatja. Haloid felesleg kizárását úgy érjük el, ha a lecsapásnál az ezüstnitrát és a haloidsó oldatokat egyszerre ekvivalens mennyiségben adagoljuk a védő hatású kolloid oldatba. A fátyolt okozó $(AgBrAg)^+$ komplex ion keletkezésének megakadályozására a zselatin oldatot 1-2 ml haloid oldattal látjuk el. Ha az ezüstbromid képzést haloid feleslegben végezzük el, az ezüstbromid rekrisztallizációja következik be, amelynél a kisebb szemcsék rovására a nagy szemcsék megnőnek, ezzel a magfizikai emulziók egyik alapfeltétele, a szemcsenagyság egyenletessége erősen veszélyeztetve van.

Az ezüsthaloid képzés technikája elég körülményes. Biztosítani kell az ezüstnitrát és a haloidsó oldatok egyenletes összefolyatását. Különösen fontos, hogy Ag^+ ionok feleslegben ne legyenek. Nagyon lényeges, hogy az ezüsthaloidok képzése zselatin jelenlétében történjék, kerülni kell a befolyatásnál a zselatin-szegény helyeket (a keverő holttere, az emulziós edény fala) (2. ábra). Az ilyen helyeken képződött ezüstbromid kiválik és ezüst rögöket eredményez. A keverés egyenletessége fontos, de a fordulat/perc érték (120—150 fordulat/perc) nem lényeges.

A magemulzió mosása

Mosással a cserebomlásnál képződött K^+ és NO_3^- ionokat, valamint a csekély feleslegben levő Br^- ionokat kell eltávolítani. Ezeknek az ionoknak relatív ionsebessége közel egyforma, ezért az emulziós rendszerből egyszerre távoznak.

Irodalmi adatok [4, 2] minden különösebb indokolás nélkül 8, ill. 16 órában állapítják meg ilyen emulziós rendszerek mosási idejét. Vizsgálataink szerint műszeres ellenőrzéssel lehet a mosás befejezését megállapítani. Az emulzióban levő szabad ionok mennyiségére ad felvilágosítást a vezetőképességi érték, amely magemulzióknál mosás előtt $48{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot \Omega^{-1} \cdot cm^{-1}$. Ez az érték $3—3^1/_2$ órai mosás után $1400—1500 \cdot 10^{-6} \cdot \Omega^{-1} \cdot cm^{-1}$ értéknél megnyugszik és csak nagyon meghosszabbított mosási idő után csökken lényegesen tovább. Ez az érték jelzi a mosási idő végét és ez rendszerint összeesik a pBr értéknek 4,40—4,50-re való beállásával.

Ez a pBr érték, illetve ehhez az értékhez tartozó pAg érték a szenzibilizálásra legalkalmasabb szabad Br^-, illetve szabad Ag^+ ion mennyiségét fejezi ki anélkül, hogy a fátyolérték a szabad Ag^+ ionok mennyiségével, az $(AgBrAg)^+$ komplex képződésével emelkednék. A magas pBr értéknél sok a szabad Ag^+ ion, ezért labilis kötésű ezüst-zselatin komplex képződik, amely a fátyolérték emeléshez vezethet.

Az érzékenység kialakítása

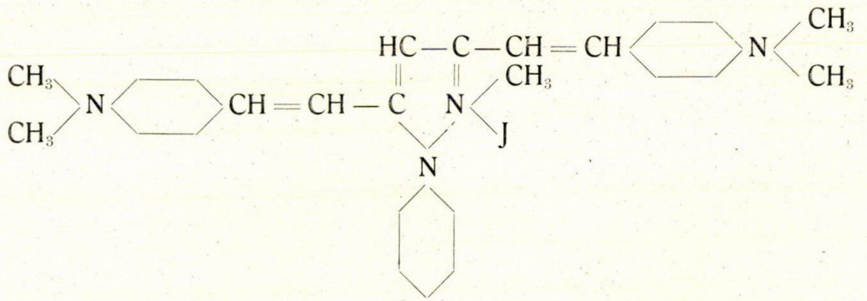
Magemulzióknál alacsony hőmérsékleten (40—42°C) haloid felesleg nélkül történik az ezüstbromid szemcsék kialakítása. A lecsapás után a szemcsenagyság nem változik, elmarad a hőkezeléses érlelés és a hőkezeléses kémiai érzékenyítés. A zselatin aktív vegyületei nem képeznek az ezüstbromid kristályban érzékenységet fokozó zavarhelyeket. Az érzékenység kialakítása és fokozása abban áll, hogy az érleléssel szubcsírákból alcsírákat, előhívható gócokat képezünk.

Magemulzióknál igen fontos, hogy a szemcsék egyforma nagyságúak és egyformán érzékenyek legyenek. A hőkezeléses és a kémiai érzékenyítéssel a szemcsenagyság változik, az érzékenység a szemcséken nem oszlik el egyenletesen és ezért a szemcsepálya magfizikai folyamatok kiértékelésére nem alkalmas. Ezért célszerű az érzékenység kialakítását szenzibilizátorokkal végezni.

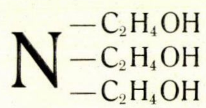
A szenzibilizátorok az ezüsthaloid kristály szabad Ag^{+}, illetve szabad Br^{-} ionjához kötődnek aszerint, amint a gerjesztett szenzibilizátor kapcsolódó része negatív, illetve pozitív töltésű. Ezért lényeges a mosási pBr(pAg) értéknek pontos beállítása minden fotoemulziónál, de különösen a magfizikai emulziónál, ahol az érzékenység kialakítására kizárólag a szenzibilizáció szolgál.

Magfizikai emulziók szenzibilizálására L. JENNY [3] szerint azok a zárt szénláncú vegyületek alkalmasak, amelyek elektron-donator gyökökkel (NH_2, NR_2, NRH, OH) rendelkeznek.

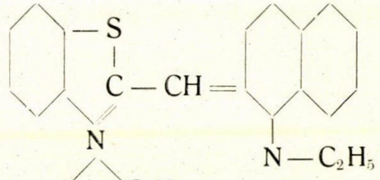
Ezek a vegyületek szerkezetileg igen hasonlítanak a fotokémiai előhívókhoz, azonban lényeges eltérést mutatnak a redox potenciál-értékben. A fotokémiai előhívók redox potenciálja 700—800 mV között van, a magfizikai emulziók szenzibilizátorainak redox potenciálja 800 mV felett van, de kísérleteink szerint csak abban az esetben szenzibilizálnak, ha a közeg p_H értéke 9,0-nál kevesebb, mert p_H 9,5-nél ezek a vegyületek redukálják az összes ezüsthaloidokat. Kísérleteinkben a következő szenzibilizátorokat alkalmaztuk:



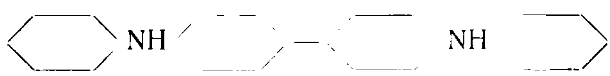
1 fenil, 2 metil, 3—5 bisdimetil aminostirilpirazolin-jodid



trietanolamin



benztiopseudocianin



4,4′ fenilamino difenil

A kiértékelés szerint legjobb eredményt kaptunk az 1 fenil, 2 metil, 3—5 bisdimetil aminostirilpirazolin-jodid színezéknek trietanolamin oldattal való kombinálásával, ez a szenzibilizáció szerepel a közepes érzékenységű magemulzióra vonatkozó kísérleteink utolsó tagjánál, a P 22-es emulziónál. Az alkalmazott szenzibilizátor mennyisége 6,5—6,7 mg/g ezüst volt.

Magemulziós rendszer összetétele és jellemzői

A szenzibilizált emulzió leginkább hordozó anyagon (üveg) kerül forgalomba. Az emulziót megfelelő vegyületekkel (triazoindolizin) kezelni kell, hogy az emulzió jellemző értékeit stabilizálni lehessen. Különösen fontos ez a kifáradás (fading) jelenség miatt. Timollal, vagy fenollal védjük az emulzió zselatinját a bomlás ellen, glicerin hozzáadásával pedig a teljes kiszáradás ellen, krómtimsó adagolásával az emulzió dermedését, kezelhetőségét könnyítjük meg. Az eddig készített rétegvastagság 20—200μ volt.

Az emulziós réteget védőréteggel kell ellátni, mert a készítésnél alkalmazott zselatin nem védi meg az ezüsthaloid szemcséket a külső fizikai behatásoktól (dörzsölés, karcolás stb.). A védőréteg vastagsága 1,5μ alatt van.

Az emulzió jellemzői

zselatin lecsapás előtt	10,31 %
zselatin lecsapás után	3,01 %
ezüst	9,22 %
haloid-felesleg	2,00 %
R érték	3,22
ezüstbromid/zselatin	5,62
szenzibilizátor mg/g ezüst	6,71

emulzió sűrűsége (50% rel. nedvesség) 3,7471 g/cm^3

1 ml emulzió súlya öntés előtt 1,210 g, megszárítva 0,274 g.

P/22 emulzió súlyszázalékos összetételét (száraz állapotra vonatkoztatva) összehasonlítva Agfa K2 [15] és a *Fotokémiai Kutató Laboratoriumban* kidolgozott Röntgen (diagnosztikai) emulzióval az V. táblázatban közöljük.

V. TÁBLÁZAT

%	P/22	Agfa K2	Röntgen diagnosztikai
Ag	46,69	45,83	24,24
Br	34,59	33,59	17,13
J	—	1,30	0,78
C	7,47	7,55	22,85
H	1,44	1,56	4,40
N	2,43	1,82	7,43
O	7,12	7,81	21,78
S	0,47	0,52	1,43

P/22 emulzió összetétele (légszáraz állapotban, rel. nedv. 50%).

Ezüstbromid	80,65%	Glicerin	2,86%
Zselatin	14,65%	Nedvesség	2,35%

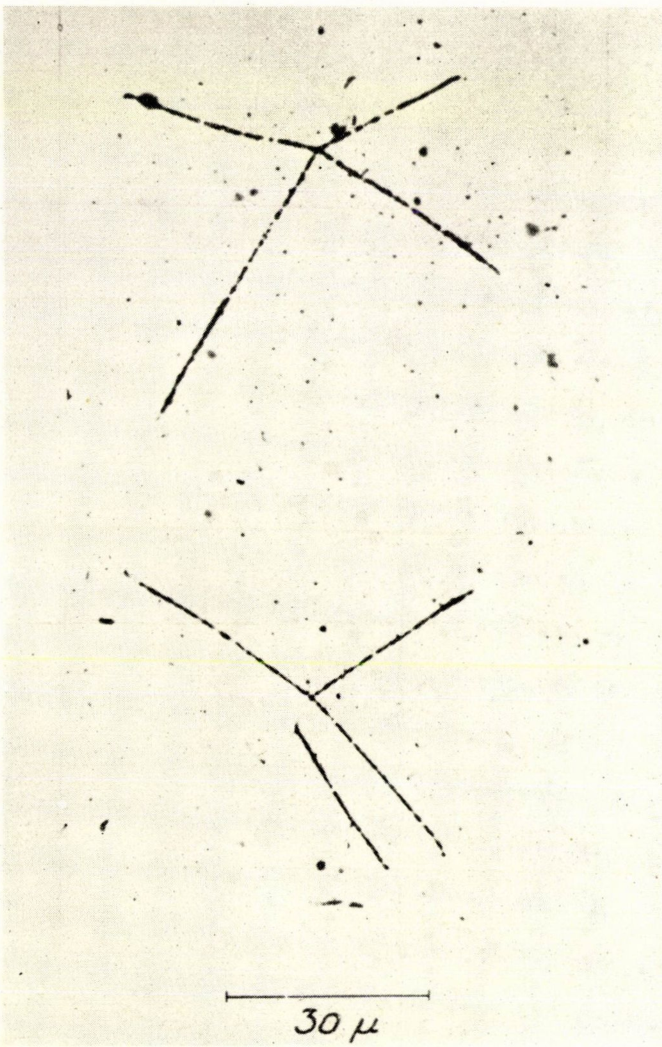
Atommagfizikai szempontból jellemző tulajdonságok vizsgálata

A magfizikai emulzió teljes jellemzését atommagfizikai szempontból az alábbi adatokkal adhatjuk meg:

1. hatótávolság-energia összefüggés;
2. érzékenység, azaz mi az a maximális energia, amit elektron, proton, α vagy más részecskék esetén még regisztrálni tud az emulzió;
3. szemcsesűrűség-energiacsökkenés viszonya;
4. szemcse mérete: méretének és eloszlásának egyenletessége; az előhívatlan és előhívható szemcsék számának viszonya;
5. elhalványodási koefficiens (fading).

A P/22 jelű emulzióra vonatkozólag a jellemző tényezők 1—3 pont alatt felsorolt tulajdonságait már megmértük. A szemcseméret vizsgálat elektronmikroszkópos munkát igényel. Az utolsó, kevésbé jellemző tényező vizsgálata még folyamatban van.

A magfizikai fotoemulziók kiértékelése meglehetősen lassú. Nagy energiájú és nagy intenzitású sugárzás nem állt rendelkezésünkre. A lemezekről minél hamarabb kívántunk tájékozódást nyerni — mint előbb már említettük — ezért a thórium rádióaktív bomlási sorból származó α-nyomokat vizsgáltuk meg először (3. ábra). Ha e tájékozódásnál nyert eredmény a külföldi emulzióknál kapott adatokat megközelítette, akkor további vizsgálatokhoz Ra-Be neutronforrás által hoztunk létre proton nyomokat az emulzióban. Így is csak maximálisan 13 MeV energiájú proton nyomokat nyerhettünk, ezért nagy energiájú részekkel való besugárzáshoz a Kékestetőn, illetőleg Bulgáriában a Sztálin csúcson levő obszervatóriumban (2925 m) helyeztük el vizsgálati anyagunkat. Ez utóbbi vizsgálatokhoz 200, ill. 300 μ vastag réteget használ-

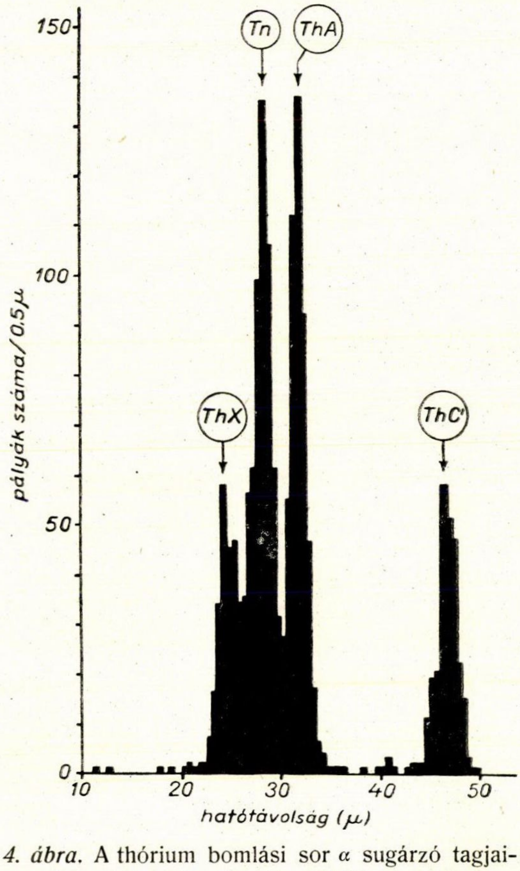


3. ábra. Thórium csillagok P/22 emulzióban

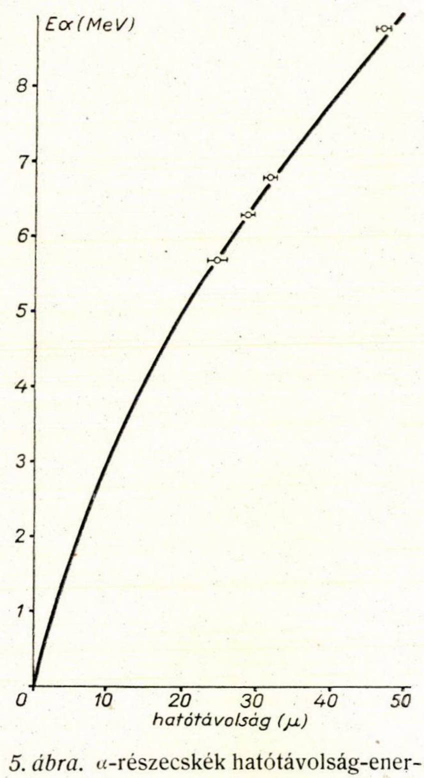
tunk, melynek előhívását amidolos eljárással [10] végeztük. Az egyébként alkalmazott standard előhívás ID 19 előhívóval történt az általában szokásos módon [11], 100 μ rétegvastagságnál 20 perc előhívási idővel.

A magfizikai emulziók hatótávolság-energia viszonya — mivel a különböző emulziók összetételében csak igen kis különbség van — legfeljebb pár százalékban különbözik. E különbség legtöbbször a mérési hibahatáron belüli és sokszor az emulziókban kötött nedvességtartalom miatt mutatkozik.

A hatótávolság-energia viszonyról való tájékozódáshoz a thórium rádióaktív sorból származó α-részek pályáit mértük meg. Az 1600 db pálya méréséből kapott hisztogrammot 4. ábrán láthatjuk. A mérésnél a pontosság növelése érdekében csak igen kis dőlési szögű, csillagban levő pályákra szorítkoztunk, és igen nagy nagyítást használtunk (1900×). A hatótávolság-energia összefüggést α-részekre a 10 MeV alatti energia tartományban az 5. ábra



4. ábra. A thórium bomlási sor α sugárzó tagjainak hatótávolság eloszlása P/22 emulzióban



5. ábra. α-részecskék hatótávolság-energia összefüggése magfizikai emulzióban. Kihúzott görbe C. M. G. LATTES, P. H. FOWLER és P. CUER, ILFORD emulziókra vonatkozó közléséből [12]. Mérési pontok P/22-re 4. ábra alapján

mutatja. A kihúzott görbe C. M. G. LATTES, P. H. FOWLER és P. CUER, ILFORD emulziókra vonatkozó eredménye [12], amelybe a P/22 emulzión nyert mérési pontjaink jól beleillenek.

Az emulzió feloldóképességét, amit a szemcsék sűrűsége és érzékenysége szab meg, α-részekre a hatótávolság szórásával, a maximumok felezési magasságának fél szélességével adhatjuk meg. A VI. táblázat mutatja a 4. ábrából számolt hatótávolság, ill. energia szórás értékeket. Ez utóbbit a hatótávolság szórásának a hatótávolság kitevővel való szorzása útján nyertük.

VI. TÁBLÁZAT

α energia MeV	Hatótávolság $R(\mu)$	$\frac{\Delta R}{R}$ %	$\frac{\Delta E}{E}$ %
5,68	24,5	~5,1	~3,7
6,28	28,5	2,6	1,9
6,78	31,5	2,3	1,7
8,78	46,5	1,6	1,1

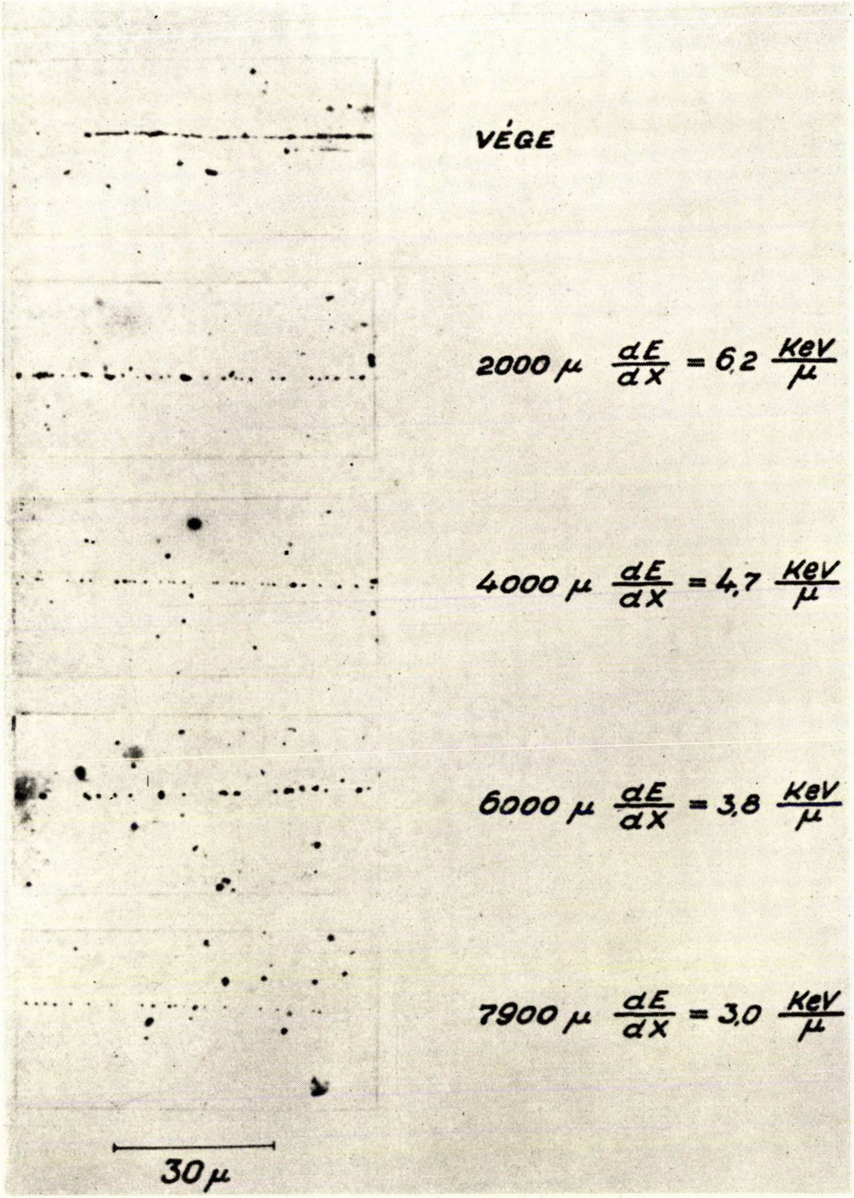
Összehasonlítva J. ROTBLATnak [13] ILFORD C2 emulzióban mért szórás értékeivel az eredmény kielégítő, bár a kapott érték a P/22 emulziónál alacsony energiáknál valamivel nagyobb.

Az emulziók érzékenységét elektronok és nagy energiájú kozmikus eredetű protonok nyomából állapítottuk meg. A Sztálin csúcson besugárzott emulziókban pár ezer mikron hosszú nyomot többet is észleltünk. Köztük egy 7910 μ hosszút is (6. ábra), amely a hatótávolság-energia összefüggés alapján 45,9 MeV energiának felel meg.

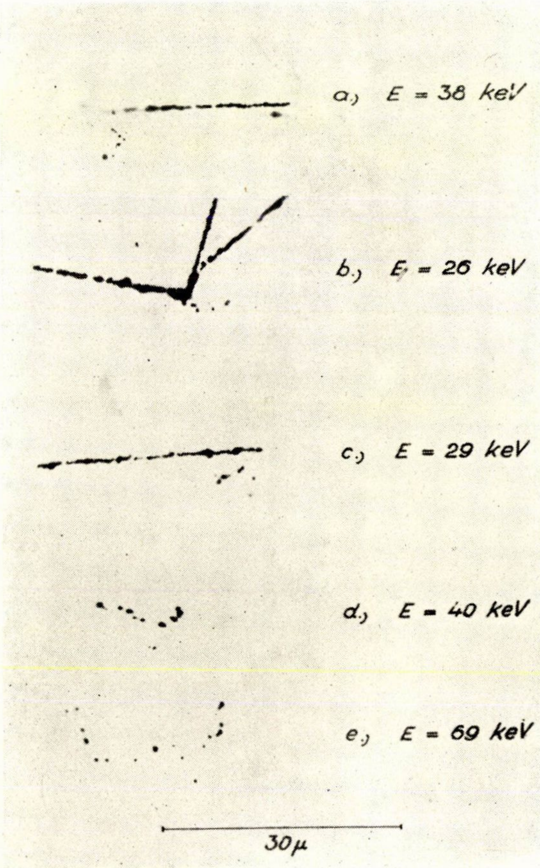
Az elektron érzékenység vizsgálatához a thórium sorozatból származó, illetve J^{131} izotóp bomlásakor keletkezett β-részek nyomain végeztünk méréseket. Mindkét esetben számos 10—12 μ hosszú nyomot észleltünk (7. ábra). Az észlelt pályák hosszának felső határa 25 μ, átlagos szemcsesűrűségük 0,8 szemcse/μ. R. H. HERZ által közölt [17] hatótávolság-energia összefüggés alapján az utóbbi 69 keV-nak felel meg.

Az emulzióra legjellemzőbb, és az érzékenység szempontjából is legdöntőbb a szemcsesűrűség-energiacsökkenés viszonya. A P/22 emulzióban ezt a fentebb említett 7910 μ hosszú pályán kívül még egy másik 5154 μ hosszú proton nyomából állapítottuk meg. Természetesen mindkét pálya az emulzióban végződött. A szemcseszámolás 70 μ hosszú szakaszon történt 1680$\times$ nagyítással. A pályák lassú végén levő első szakaszt a szemcsézet egybeolvadása miatt kihagytuk.

Méréseink eredményét a 8. ábrán mutatjuk be. Összehasonlítva a P/22 emulzióra nyert adatokat az Ilford C2, Agfa K2 és a magas érzékenységű Kodak NT4 emulziókra vonatkozó, az irodalomból vett görbékkel [14, 15, 16].



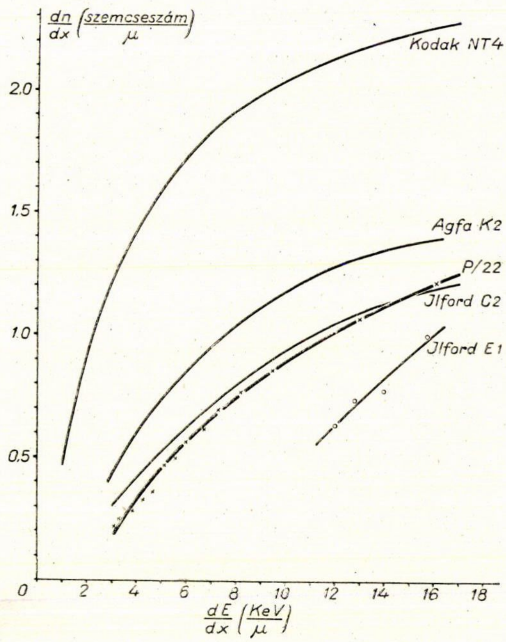
6. ábra. 7910μ hosszú proton nyom ($E_p = 45{,}9$ MeV) különböző szakaszairól készült mikrofelvétel. A részfelvételek melletti értékek a pálya lassú végétől számított távolság a megfelelő specifikus energiacsökkenés értékkel



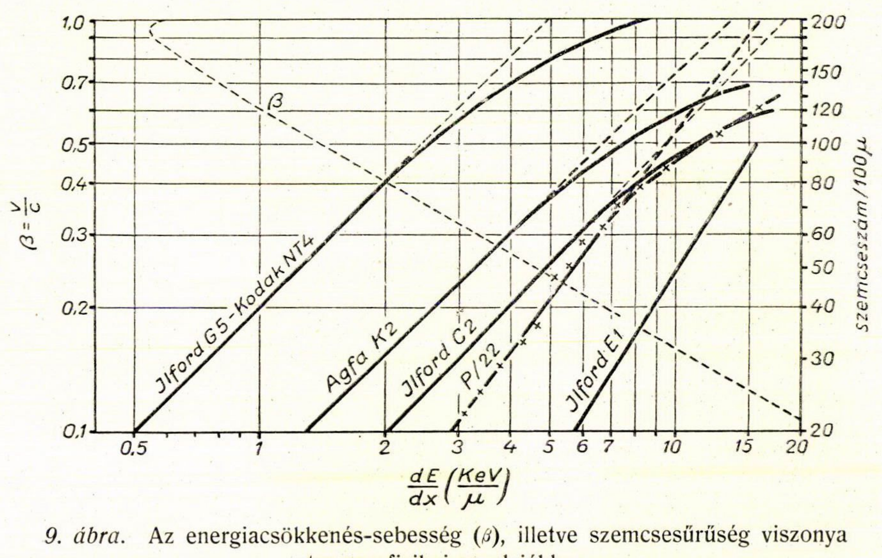
7. ábra. Néhány elektron nyom mikrofelvétele
a—d thóriummal, *e* J^{131} izotóppal telített P/22 emulzióban

Feltüntettük ugyanezen az ábrán az Ilford E1 emulzión végzett ide vonatkozó mérésünk eredményét is. Mint látható a P/22 emulzión végzett mérések eredményei az Ilford C2 emulzió görbéjét közelítik meg legjobban és a protonokat 20 MeV energiáig regisztráló Ilford E1 emulzióra kapott szemcsesűrűség-energiacsökkenés görbéjének adatainál lényegesen magasabb értékeket mutat.

Az érzékenységi határ számszerűleg is meghatározható ugyanezen mérési eredmények logaritmikus ábrázolásával. Ez alapján megállapíthatjuk az emulzió által regisztrálható részecskék maximális sebességét, az észlelhetőség feltételéül azt szabva meg, hogy pályájukban 100 μ hosszon 20 előhívható szemcsét hoznak létre. A 9. ábrán a specifikus energiacsökkenés függvényében a részecskék sebességét $\left(\beta = \frac{v}{c}\right)$ és a 100 μ útszakaszon létrehozott szemcsék



8. ábra. Szemcsesűrűség-energiacsökkenés viszonya atommagfizikai emulziókra



9. ábra. Az energiacsökkenés-sebesség (β), illetve szemcsesűrűség viszonya atommagfizikai emulziókban számát tüntettük fel különböző emulzió típusoknál. A P/22 emulzióban 2,9 keV/μ-nál kapunk 20 szemcsét 100 μ pályahosszon, amihez tartozó β érték 0,32. Ezek szerint a P/22 emulzió

elektront	0,03 MeV
μ mezont	5,5 MeV
protont	50 MeV
deuteront	100 MeV
α-részt	1500 MeV

energiáig tud rögzíteni, amely adatokat az elektron érzékenységre vonatkozó méréseink is alátámasztanak. Irodalmi adatok szerint az Ilford C2 érzékenységi határa ugyanez, de mint az ábrából látható, ezen érték megállapítása elég óvatosan történt.

A P/22 emulzió kialakításával a közepes érzékenységű magfizikai emulzió előállításának kérdése rendeződött. További kísérleteinkben a szenzibilizátorok mennyiségének emelésével, illetve a szenzibilizáló vegyület elektrondonátor gyökei számának növelésével fokozzuk az emulzió érzékenységét, és minimális ionizációra érzékeny magfizikai emulzió előállítását kívánjuk megvalósítani.

* * *

Köszönetünket fejezzük ki SZALAY SÁNDOR akadémikusnak és KEIPERT MIKLÓS osztályvezetőnek, hogy a téma megoldásához lehetőséget adtak. A Ra-Be neutronforrás használatának megengedésével IMRE LAJOS professzor nyújtott számunkra segítséget, amit e helyen is megköszönünk. Az emulzió előállításában KORDA SZABOLCS és MARAFFKÓ MIKLÓS, a kiértékelés teendőiben pedig BUJDOSÓ ERNŐ kollégánk, illetve JOST FRANCISKA és MEDVECZKY LÁSZLÓné volt segítő társunk.

IRODALOM

[1] BUJDOSÓ E., MEDVECZKY L., SZALAY S. *MTA. III. Matematikai és Fizikai Oszt. Közl.* **2** (1957). 129.
[2] W. HÄLG, L. JENNY: *Helv. Phys. Acta,* **21** (1948) 131.
[3] L. JENNY: Fundamental Mechanisms of Photographic Sensitivity, 259. o. *Butterworths, Scientific Publications,* 1951. London.
[4] P. DEMERS: *Canad. J. Research* A **25** (1947) 233.
[5] P. DEMERS: *Canad. J. Phys.* **32** (1954) 538.
[6] J. KUBAL: *Czechosl. Journ. Phys.* **5** (1955) 49.
[7] A. KUHN: *Kolloidchemische Taschenbuch,* 1948, 272. o. Springer, Wien.
[8] EVVA FERENC magánközlés.
[9] A. ZSDANOV: *J. Phys. Rad.* **6** (1935) 223.

[10] E. BUJDOSÓ, L. MEDVECZKY: Acta Phys. Hung. VII. 135 (1957).
[11] H. YAGODA: Radioactive Measurements with Nuclear Emulsions 58. o. John Wiley and Sons, 1949. New York.
[12] C. M. G. LATTES, P. H. FOWLER, P. CUER: *Proc. Phys. Soc*, **59** (1947) 883.
[13] J. ROTBLAT: *Nature* **165** (1950) 387.
[14] R. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. MUIRHEAD, C. F. POWELL, D. M. RITSON: *Nature* **163** (1949) 47.
[15] K. LANIUS: *Zs. f. wiss. Phot.* **48** (1953) 243.
[16] G. P. S. OCCHIALINI: *Nuovo Cimento* **6** Suppl (1949) 413.
[17] R. H. HERZ: *Phys. Rev.* **75** (1949) 478.

(Beérkezett: 1956. X. 12.)

MEGMARADÁSI EGYENLETEK A RAYSKI-FÉLE BILOKÁLIS TÉRELMÉLETBEN

PÓCSIK GYÖRGY

A LAGRANGE-sűrűség invariancia-tulajdonságai alapján a megmaradási tételeket bilokális hullámterekben fogalmazzuk meg. Rámutatunk arra, hogy a bilokalitás hogyan módosítja a megmaradási törvényeket és hogyan interpretálhatjuk eredményeinket.

Példaként a szabad bilokális bozon- és spinor-teret tárgyaljuk.

Bevezetés

A lokális térelméletben a megmaradási egyenletekhez a NOETHER-tétel felhasználásával jutunk el. Mint ismeretes [1], differenciális megmaradási törvényeket kapunk.

Jóval bonyolultabb a helyzet a nem-lokális térelméletben, a relativisztikusan invariáns alakfaktor bevezetése ui. azt eredményezi, hogy az integrációs tartományt határoló térszerű felületek távolsága nem tetszőleges, hanem az alakfaktor természetétől függ. Ebből következik, hogy a NOETHER-tétel felhasználásával csak integrális megmaradási törvények adódnak [2].

Integrális megmaradási törvények érvényesek a YUKAWA által megalapozott bilokális térelméletben is [3]. Ennek az elméletnek téregyenleteit és megmaradási egyenleteit 1950-ben BLOCH dedukálta egy általános variációs elvből [4]. Hasonló eredményeket ért el GREGORY általános operátor-téregyenletek variációs elvből való származtatásával [5]. Ugyancsak integrális megmaradási törvényeket nyert SCHULZ is, aki bilokális skalár- és lokális spinor-tér kölcsönhatását vizsgálta [6].

Különösen fontos a bilokális térelmélet RAYSKI által kifejlesztett formája [7], amely alkalmas az elemi részecskék familiákba való elrendezésére. Az elmélet alapegyenletét — bozon-terek esetében — variációs elvből HORVÁTH származtatta 1955-ben [8]. A problémával RAYSKI 1956-ban újra foglalkozott [9]. BLOCH felfogásával szembehelyezkedve megállapította, hogy ha a hatásintegrált a kanonikus transzformációval szemben szimmetrikus másodrendű spinornak, a LORENTZ-transzformációval szemben skalárnak tekintjük, akkor a tér alapegyenlete és a két kiegészítő feltétel (szerinte téregyenletek) szimultán dedukálható.

Ehhez csak annyit akarunk megjegyezni, hogy mégis helyesebb egy téregyenletről és két kiegészítő feltételről beszélni, mert a megfelelő lokális téregyenletet általánosítva csupán egy téregyenletet kapunk és csakis ekkor van értelme a kanonikus energia-impulzus tenzor stb. megkonstruálásáról beszélni.

RAYSKI — bozon-terek esetében — a megmaradási egyenletekkel is foglalkozott [10]. A téregyenletekből kiindulva a tradicionális megmaradási egyenleteket nyerte.

Ez helyes, azonban meggondolandó, hogy így nem szembetűnő a bilokalitás hatása. Következésképpen arra kell törekednünk, hogy bilokális mennyiségekre írjunk fel szokásos alakú differenciálegyenleteket.

Ebben a dolgozatban, az előbbiek figyelembevételével, az eddigi eredményeket a megmaradási egyenletek problémájának diszkussziójával egészítjük ki.

Látni fogjuk, hogy léteznek differenciális megmaradási törvények, ezek azonban a tradicionális egyenletektől bizonyos kölcsönhatási tagokban különböznek; továbbá mind a külső, mind a belső térben kapunk egyenleteket, melyek interpretálásának lehetőségére is rámutatunk.

I.

ÁLTALÁNOS MEGMARADÁSI EGYENLETEK

1. §. Variációs elv és téregyenletek

A bilokális térelméletben a hullámteret $\psi(x^\mu, r^\mu)$ komplex hullámfüggvénnyel jellemezzük, melynek transzformációs karaktere lehet tenzor, spinor stb. ψ komplex konjugáltját ψ^*-gal jelöljük.

A tér LAGRANGE-sűrűsége $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\psi, \nabla_\mu \psi, a\overline{\nabla}_\mu \psi; \psi^*, \nabla_\mu \psi^*, a\overline{\nabla}_\mu \psi^*)$, ahol definíció szerint

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \overline{\nabla}_\mu = \frac{\partial}{\partial r^\mu} \qquad (\mu = 1, \dots, 4) \tag{1.1}$$

és a részecske-familiánként változó állandó. Ha a lokális térelméletet $(r_\mu = 0)$ az $a = 0$-val jellemezzük, akkor bilokális elméletben feltehető, hogy $a > 0$.

Téregyenleteket az

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{a} \iint\limits_{\Omega} d^4x\, d^4r\, \mathfrak{L} \qquad (a > 0) \tag{1.2}$$

hatásintegrál ψ, ill. ψ^* szerinti variációjával nyerünk; ezek

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi} = \nabla_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \nabla_\mu \psi} + \overline{\nabla}_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \overline{\nabla}_\mu \psi}, \qquad \text{k. k.}^{1} \tag{1.3}$$

((1.3) bizonyításánál [8] fel kell tenni, hogy $|r_\mu \cdot r^\mu|^{1/2} \ll 1$, ezért $\mathfrak{I}$ csak ilyen térpontokra van értelmezve.)

[1] k. k. itt és a továbbiakban konjugált komplex.

A továbbiak szempontjából célszerű bevezetni azt a 8-dimenziós teret, amelynek vektorai

$$\xi_i = \left(x_1, \ldots, \frac{r_4}{a}\right) \qquad (i=1, \ldots, 8) \tag{1.4}$$

alakúak. Ez a V-tér hasonló a RAYSKI által bevezetett absztrakt HILBERT-térhez [7]. Utóbbi operátor-tér dimenzió-száma redukálható; rész-terei között fennáll a

$$[\mathbf{d}_\mu, \mathbf{x}_\nu] = \delta_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

reláció, ahol $\mathbf{d}_\mu$ eltolódási operátor.

Az elméletben megköveteljük a BORN-invarianciát is, más szóval érvényes a reciprocitási elv, azaz invariancia az $\mathbf{x}^\mu \to \mathbf{d}^\mu$, $\mathbf{d}^\mu \to -\mathbf{x}^\mu$ kanonikus transzformációval szemben.

Az O-tér dimenziószám redukciója következtében a V-tér dimenziószáma 2-vel redukálható. Mindenesetre mi a teljes V-térrel dolgozunk. E tér rész-terei azonosan kielégítik az

$$\left[\frac{r_\mu}{a}, x_\nu\right] = 0 \tag{1,6}$$

relációt.

Látni fogjuk, hogy beszélhetünk $x^\mu \to \frac{r^\mu}{a}$, $\frac{r^\mu}{a} \to x^\mu$ „értelemben vett" reciprocitásról is, ui. több olyan mennyiséget fogunk definiálni, amelyek egymásba mennek át az előbbi transzformáció végrehajtásánál. Itt nem a BORN-invarianciáról van szó.

A V-tér bevezetésével azt értük el, hogy $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{J}$ egy 8-dimenziós lokális tér függvényeiként kezelhetők és ennek következtében (1.3) így alakul:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi} = D_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial D_i \psi}; \text{ k. k. } \qquad \left(D_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right). \tag{1.7}$$

Mostmár csak az a feladatunk, hogy a lokális térelmélet megfelelő eredményeit a V-térben felírjuk, azután rész-terekre szétbontsuk és fizikailag értelmezzük.

2. §. Transzformációs tulajdonságok, általános megmaradási törvény

Tekintsük a V-tér egy zárt Ω tartományát és képezzük az (1.2) hatásintegrált:

$$\mathfrak{J} = \int_\Omega \mathfrak{L}(\xi) d\xi \qquad \left(d\xi = \frac{1}{a} d^4x d^4r\right). \tag{2.1}$$

A bilokális térelméletben is elfogadjuk $\mathfrak{J}$ tetszőleges infinitézimális (V-ben értelmezett) koordináta-transzformációval szembeni invarianciáját. Ez a

$$\delta\mathfrak{J} \equiv \int_{\Omega'} \mathfrak{L}'(\xi')d\xi' - \int_{\Omega} \mathfrak{L}(\xi)d\xi = \int_{\Omega} \delta^*\mathfrak{L}d\xi + \int_{\Omega'} \mathfrak{L}(\xi')d\xi' - \int_{\Omega} \mathfrak{L}(\xi)d\xi = \int_{\Omega} (\delta^*\mathfrak{L} + D_k(\mathfrak{L}\,\delta\xi^k))d\xi = 0 \tag{2. 2}$$

egyenletre vezet, ahol $\delta^*\mathfrak{L}$ valódi variációt jelent, vagyis definíció szerint

$$\delta^*\mathfrak{L}(\xi) = \mathfrak{L}'(\xi) - \mathfrak{L}(\xi). \tag{2. 3}$$

Definiáljuk a lokális variációt is:

$$\delta\mathfrak{L}(\xi) = \mathfrak{L}'(\xi') - \mathfrak{L}(\xi). \tag{2. 4}$$

A kétféle variáció között kapcsolat van; ez (a hullámfüggvényt variálva):

$$\delta\psi = \delta^*\psi + D_k\psi\cdot\delta\xi^k. \tag{2. 5}$$

Megemlítjük még a következő két (V-térben érvényes) egyszerű relációt:

$$[\delta^*, D_k]\psi = 0, \tag{2. 6}$$

$$[\delta, D_k]\psi = D_l\psi\cdot D_k\delta\xi^l. \tag{2. 7}$$

Foglalkozzunk most kissé $\delta\xi_l$-lel. $\delta\xi_l$ a külső és belső tér szimultán variálását jelenti. Mivel mindkettő metrikus tér, nyilván V is metrikus és G_{ik} metrikus alaptenzora szimbolikusan a

$$G_{ik} = \begin{Bmatrix} g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{Bmatrix} \tag{2. 8}$$

alakba írható. Itt $g_{\mu\nu}$ a rész-terek metrikus alaptenzora.

Hajtsunk végre a rész-tereken infinitézimális LORENTZ-transzformációt. Ha ennek mátrixa $(\delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu})$, akkor ξ_l infinitézimális megváltozása V-ben

$$\delta\xi_l = E_{ls}\xi^s, \tag{2. 9}$$

ahol

$$E_{ls} = \begin{Bmatrix} \omega_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \omega_{\mu\nu} \end{Bmatrix}. \tag{2. 10}$$

(2. 9) infinitézimális rotáció következtében ψ megváltozása szimbolikusan a

$$\delta\psi = \frac{1}{2} E^{ls}\mathfrak{T}_{ls}\psi \tag{2. 11}$$

alakba írható. Az itt szereplő

$$\mathfrak{T}_{ls} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{T}^{(1)}_{\mu\nu} & \dots \\ \dots & \mathfrak{T}^{(2)}_{\mu\nu} \end{Bmatrix} \tag{2. 12}$$

operátor tértípusonként megkonstruálható. (2. 11)-ből látjuk, hogy ψ megváltozása az x- és r-tér variálása folytán fellépő tagok összege, más szóval a lokális elméletben szereplő $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ operátor helyébe $(\mathfrak{T}^{(1)}_{\mu\nu}+\mathfrak{T}^{(2)}_{\mu\nu})$ lép, tehát

$$\delta\psi=\frac{1}{2}\,\omega^{\mu\nu}(\mathfrak{T}^{(1)}_{\mu\nu}+\mathfrak{T}^{(2)}_{\mu\nu})\psi. \tag{2.13}$$

A továbbiakban (2. 2) általános megmaradási egyenletből vonunk le következtetéseket az x- és r-térre.

3. §. Kanonikus energia-impulzus tenzor

Amint szokásos, a (2. 2) egyenletből indulunk ki. Tekintsünk V-ben egy infinitézimális transzlációt; (2. 5)-ben $\delta\psi=0$ írható. Képezzük most $\delta^*\mathfrak{L}$-et. A téregyenletek és (2. 5) figyelembevételével (2. 2) így alakul

$$\int\limits_{\Omega} d\xi D_k\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D_k\psi}D^i\psi\cdot\delta\xi_i+\text{k. k.}-\mathfrak{L}\,\delta\xi^k\right)=\int\limits_{\Omega} d\xi D_k(\mathfrak{T}^{ik}\delta\xi_i)=0, \tag{3. 1}$$

ahol a $\mathfrak{T}^{ik}$ kanonikus energia-impulzus tenzor definíciója

$$\mathfrak{T}^{ik}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D_k\psi}D^i\psi+\text{k. k.}-\mathfrak{L}\,G^{ik}. \tag{3. 2}$$

Mivel V-ben $\delta\xi_i$ tetszőleges konstans, (3. 1) integrális megmaradási egyenletből következik a

$$D_k\mathfrak{T}^{ik}=0 \qquad (i,k=1,\dots,8) \tag{3. 3}$$

differenciális megmaradási törvény. Azt mondhatjuk, hogy V-ben tradicionális megmaradási egyenletet kaptunk, azonban éppen emiatt a megmaradási törvények száma megduplázódott. Nevezetesen az x-térben $(i=1,\dots,4)$, de az r-térben is $(i=5,\dots,8)$ nyertünk egyenleteket. Ezek nem kontinuitási egyenletek, mert — amint (3. 3)-ból látható — additív divergenciák is fellépnek.

Írjuk $\mathfrak{T}^{ik}$-t szimbolikusan a

$$\mathfrak{T}^{ik}=\begin{Bmatrix}\mathfrak{T}^{\mu\nu} & \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_1)}\\ \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_2)} & \overline{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\end{Bmatrix} \tag{3. 4}$$

alakba, akkor definíció szerint

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^{\mu\nu}&=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\nabla_\nu\psi}\nabla^\mu\psi+\text{k. k.}-\mathfrak{L}g^{\mu\nu};\; \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_1)}=\frac{1}{a}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\overline{\nabla}_\nu\psi}\nabla^\mu\psi+\text{k. k.};\\ \overline{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}&=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\overline{\nabla}_\nu\psi}\overline{\nabla}^\mu\psi+\text{k. k.}-\mathfrak{L}g^{\mu\nu};\; \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_2)}=a\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\nabla_\nu\psi}\overline{\nabla}^\mu\psi+\text{k. k.}\end{aligned} \tag{3. 5}$$

(3. 3)-ból következik, hogy V rész-tereiben fennállnak a

$$\begin{aligned}&\nabla_\nu\mathfrak{T}^{\mu\nu}+a\overline{\nabla}_\nu\mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_1)}=0 \qquad (x\text{-tér}),\\ &\overline{\nabla}_\nu\overline{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}+\frac{1}{a}\nabla_\nu\mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_2)}=0 \qquad (r\text{-tér})\end{aligned} \tag{3. 6}$$

megmaradási egyenletek.

Eredményeinket a következőképpen interpretálhatjuk. $\mathfrak{T}^{\mu\nu}(x, r)$ a szokásos alakú kanonikus energia-impulzus tenzor az x-térben. Lokális elméletben $\mathfrak{T}^{\mu\nu}(x)$-be megy át. A másik három tenzornak nincs megfelelője a lokális elméletben, ezért azokat az elemi részecske „struktúrája" megnyilvánulásának tekinthetjük. Különös figyelmet érdemel $\mathfrak{T}^{\mu\nu}(x, r)$.

Ha arra gondolunk, hogy a bilokális térelméletben az elemi részecske tömegét úgy fogjuk fel, mint belső mozgás, belső impulzus eredményét [10], akkor plauzibilis feltenni, hogy az r-tér pontjaihoz bizonyos „feszültségi" állapot is tartozik, sőt az r-tér energiájáról (belső energia) is beszélhetünk. Mindez arra mutat, hogy célszerű a belső teret is egy energia-impulzus tenzorral jellemezni, s éppen ez adódik ki jelen formalizmusból is. Az így bevezetett $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ reciprok vonatkozásban van (1. §-ban említett értelemben) $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$-vel.

Végül $\mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_1)}, \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_2)}$ a két tér kölcsönhatásáról ad számot. Az a tény, hogy erről beszélhetünk, a bilokalitás következménye. Lokális térelméletben a kölcsönhatáshoz legalább külső elektromos tér kell, azonban jelen formalizmus egyik következménye éppen az, hogy enélkül is — csupán az elemi részecske belső állapotainak következtében — fellép kölcsönhatás. Ez módosítja a megmaradási egyenleteket is.

Ha az r-teret nem variáljuk, akkor az x-tér eltolása (részecske súlypontjának eltolása) a $-a\overline{\nabla}_\nu\mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_1)}$ kölcsönhatási erőt eredményezi. Ha az x-teret nem variáljuk, akkor az r-tér eltolása (a két térpont relatív távolságának megváltoztatása) a $-\frac{1}{a}\nabla_\nu\mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_2)}$ kölcsönhatási erőt eredményezi. A V-tér eltolásakor a két erő szimultán lép fel. Később majd látjuk, hogy emellett járulékos momentumok is fellépnek.

4. §. Teljes impulzusmomentum-sűrűség-tenzor

Tegyük (2. 2)-be a

$$\delta^*\mathfrak{L} = D_k\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D_k\psi}\delta\psi - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D_k\psi}D_i\psi\cdot\delta\xi^i + \text{k. k.}\right) \tag{4. 1}$$

egyenletet, akkor az

$$\int_\Omega d\xi D^i\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D^i\psi}\delta\psi + \text{k. k.} - \mathfrak{T}_{ki}\delta\xi^k\right) = 0 \tag{4. 2}$$

egyenletre jutunk. Hajtsunk végre V-ben egy infinitézimális (2. 9) LORENTZrotációt. Tekintettel ψ (2. 11)-ben megadott változására, (4. 2) az

$$(4.3)\qquad \int_{\Omega} d\xi D^i \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial D^i \psi} \mathfrak{T}_{jl} \psi + \text{k. k.} + \xi_j \mathfrak{T}_{li} - \xi_l \mathfrak{T}_{ji} \right) E^{jl} = \int_{\Omega} d\xi D^i \mathfrak{J}_{jli} E^{jl} = 0$$

alakba írható, ahol

$$(4.4)\qquad \mathfrak{M}_{jli} = \xi_j \mathfrak{T}_{li} - \xi_l \mathfrak{T}_{ji}$$

a pálya-impulzusmomentum-sűrűség-tenzor,

$$(4.5)\qquad \mathfrak{S}_{jli} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial D^i \psi} \mathfrak{T}_{jl} \psi + \text{k. k.}$$

a spin-impulzusmomentum-sűrűség-tenzor és

$$(4.6)\qquad \mathfrak{J}_{jli} = \mathfrak{M}_{jli} + \mathfrak{S}_{jli}$$

a totális-impulzusmomentum-sűrűség-tenzor.

(4. 3)-ból következik, hogy V-ben teljesül a

$$(4.7)\qquad D^i \mathfrak{J}_{jli}(\xi) = 0$$

megmaradási egyenlet. Nyilvánvaló, hogy a rész-terekben nem teljesülnek kontinuitási egyenletek, hanem csak additív divergenciákat is tartalmazó megmaradási egyenletek.

Könnyű látni, hogy (4. 4) definíció ekvivalens az

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu\sigma} = x_\mu \mathfrak{T}_{\nu\sigma} - x_\nu \mathfrak{T}_{\mu\sigma};\ \overline{\mathfrak{M}}_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{a}(r_\mu \overline{\mathfrak{T}}_{\nu\sigma} - r_\nu \overline{\mathfrak{T}}_{\mu\sigma});$$

$$(4.8)\qquad \mathfrak{M}_{(k_1)\mu\nu\sigma} = x_\mu \mathfrak{T}_{(k_1)\nu\sigma} - x_\nu \mathfrak{T}_{(k_1)\mu\sigma};\ \mathfrak{M}_{(k_2)\mu\nu\sigma} = \frac{1}{a}(r_\mu \mathfrak{T}_{(k_2)\nu\sigma} - r_\nu \mathfrak{T}_{(k_2)\mu\sigma});$$

$$\mathfrak{M}_{(V_1)\mu\nu\sigma} = x_\mu \mathfrak{T}_{(k_2)\nu\sigma} - \frac{r_\nu}{a} \mathfrak{T}_{\mu\sigma} = -\mathfrak{M}_{(V_4)\nu\mu\sigma};\ \mathfrak{M}_{(V_2)\mu\nu\sigma} = x_\mu \overline{\mathfrak{T}}_{\nu\sigma} -$$

$$- \frac{r_\nu}{a} \mathfrak{T}_{(k_1)\mu\sigma} = -\mathfrak{M}_{(V_3)\nu\mu\sigma}$$

pálya-impulzusmomentum-sűrűség-tenzorok definiálásával.

Az $\mathfrak{M}_{\mu\nu\sigma}$ tradicionális momentum-tenzor (x-tér); reciproka az $\overline{\mathfrak{M}}_{\mu\nu\sigma}$ belső momentum-tenzor (r-tér);

$$(4.9)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}_{(k_1)\mu\nu\sigma} &= \frac{1}{a} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \overline{\nabla}^\sigma \psi} (x_\mu \nabla_\nu - x_\nu \nabla_\mu)\psi + \text{k. k.}, \\ \mathfrak{M}_{(k_2)\mu\nu\sigma} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \nabla^\sigma \psi} (r_\mu \overline{\nabla}_\nu - r_\nu \overline{\nabla}_\mu)\psi + \text{k. k.} \end{aligned}$$

kölcsönhatási momentum-tenzorok; a többi négy vegyes momentum-tenzornak nincs közvetlen jelentése és megmaradásuk a (4. 3) integrális törvényben nem is szerepel.

Hasonlót mondhatunk $\mathfrak{S}_{jli}$-ről is. Ebből következik, hogy (4. 7) szétesik a

$$\nabla^{\sigma}\mathfrak{J}_{\mu\nu\sigma}+a\overline{\nabla}^{\sigma}\mathfrak{J}_{(k_1)\mu\nu\sigma}=0 \qquad (x\text{-tér}),$$

(4. 10)
$$\overline{\nabla}^{\sigma}\overline{\mathfrak{J}}_{\mu\nu\sigma}+\frac{1}{a}\nabla^{\sigma}\mathfrak{J}_{(k_2)\mu\nu\sigma}=0 \qquad (r\text{-tér}),$$

$$\nabla^{\sigma}\mathfrak{J}_{(V_1)\mu\nu\sigma}+a\overline{\nabla}^{\sigma}\mathfrak{J}_{(V_2)\mu\nu\sigma}=0,$$

$$\overline{\nabla}^{\sigma}\mathfrak{J}_{(V_3)\mu\nu\sigma}+\frac{1}{a}\nabla^{\sigma}\mathfrak{J}_{(V_4)\mu\nu\sigma}=0$$

megmaradási egyenletekre. A harmadik és negyedik egyenletnek nincs fizikai jelentése. Egyenleteink általában függetlenek, kivéve a

(4. 11)
$$\mathfrak{T}_{jl}\equiv 0\,;\; \mathfrak{T}_{jl}=\begin{vmatrix}\mathfrak{T}^{(1)}_{\mu\nu} & \mathfrak{T}_{\mu\nu}\\ \mathfrak{T}_{\mu\nu} & \mathfrak{T}^{(2)}_{\mu\nu}\end{vmatrix} \qquad (\mathfrak{T}_{\mu\nu}=-\mathfrak{T}_{\nu\mu})$$

eseteket, amikor (4. 10) utolsó két egyenlete azonos. Amint látni fogjuk az első esetben skalár, a második esetben (ha még $\mathfrak{T}^{(1)}_{\mu\nu}=\mathfrak{T}^{(2)}_{\mu\nu}=\mathfrak{T}_{\mu\nu}$) spinor hullámtérről van szó. Mindkét esettel részletesen foglalkozunk a II. részben.

5. §. Szimmetrikus energia-impulzus-tenzor

Ebben a §-ban $\mathfrak{T}^{ik}$ szimmetrizációjával foglalkozunk.

(3. 2)-ből látható, hogy $\mathfrak{T}^{ik}$ általában nem szimmetrikus, azaz általában nem teljesülnek a

(5. 1)
$$\mathfrak{T}^{\mu\nu}=\mathfrak{T}^{\nu\mu},\; \overline{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}=\overline{\mathfrak{T}}^{\nu\mu},\; \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_1)}=\mathfrak{T}^{\nu\mu}_{(k_2)}$$

feltételek. Kimutatható azonban, hogy van olyan Θ_{ik}, amely (5. 1) tipusú feltételeknek tesz eleget.

$\mathfrak{T}^{ik}$ szimmetrizálását abban az általános esetben hajtjuk végre, amikor V-ben sem adódnak differenciális megmaradási egyenletek, hanem csak az integrális

(5. 2)
$$\int\limits_{\Omega} d\xi D^k\mathfrak{T}_{ik}=0, \qquad \int\limits_{\Omega} d\xi D^i\mathfrak{J}_{jli}=0$$

megmaradási törvények teljesülnek.

A szimmetrikus energia-impulzus tenzort

(5. 3)
$$\Theta_{ij}=\mathfrak{T}_{ij}+D^k S'_{ijk}$$

alakban vesszük fel. Az

(5. 4)
$$\int\limits_{\Omega} d\xi D^j\Theta_{ij}=0$$

egyenlet teljesítése céljából feltesszük, hogy

(5. 5)
$$S'_{ijk}+S'_{ikj}=0.$$

(5. 2)-ből és $\mathfrak{J}_{jli}$ definíciójából

(5. 6) $$\int_{\Omega} d\xi(\mathfrak{T}_{lj}-\mathfrak{T}_{jl}+\xi_j D^i\mathfrak{T}_{li}-\xi_l D^i\mathfrak{T}_{ji}+D^i\mathfrak{S}_{jli})=0,$$

vagyis (5. 4) teljesül, ha

(5. 7) $$\Theta_{lj}=\mathfrak{T}_{lj}+\xi_j D^i\mathfrak{T}_{li}+D^i S_{lji}.$$

(5. 7)-ben

(5. 8) $$\mathfrak{S}_{jli}=S_{lji}-S_{jli}$$

és (5. 3)-ban

(5. 9) $$D^k S'_{ljk}=\xi_j D^k\mathfrak{T}_{lk}+D^k S_{ljk}.$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldását írjuk az

(5. 10) $$S'_{ljk}=S_{ljk}+Q_{ljk}$$

alakba, ahol Q_{ljk} kielégíti a

(5. 11) $$D^k Q_{ljk}=\xi_j D^k\mathfrak{T}_{lk}$$

differenciálegyenletet.

Jelöljük $\mathfrak{J}'_{jli}$-vel Θ_{jl} momentumát, amelyet a

(5. 12) $$\mathfrak{J}'_{jli}=\mathfrak{J}_{jli}+D^k\mathfrak{F}_{jlik}$$

alakban veszünk fel. Az

(5. 13) $$\int_{\Omega} d\xi D^i\mathfrak{J}'_{jli}=0$$

feltételi egyenlet teljesítése céljából feltesszük, hogy

(5. 14) $$\mathfrak{F}_{jlik}+\mathfrak{F}_{jlki}=0.$$

Mivel pedig

(5. 15) $$\mathfrak{J}'_{jli}=\mathfrak{M}_{jli}+D^k(\xi_j S'_{lik}-\xi_l S'_{jik})+S'_{jli}-S'_{lji},$$

nyilván

(5. 16) $$D^k\mathfrak{F}_{jlik}=D^k(\xi_j S'_{lik}-\xi_l S'_{jik})+S'_{jli}-S'_{lji}-\mathfrak{S}_{jli}.$$

(5. 16) divergenciáját képezve

(5. 17) $$\mathfrak{S}_{jli}=S'_{lji}-S'_{jli}$$

következik, ebből pedig $Q_{lji}=Q_{jli}$. (5. 17) és (5. 5) meghatározza S'_{lji}-t

(5. 18) $$S'_{lji}=\frac{1}{2}(\mathfrak{S}_{jli}+\mathfrak{S}_{ilj}+\mathfrak{S}_{jil}).$$

Ezekután S_{lji}-t (5. 10)-ből nyerhetjük; (5. 16) és (5. 17)-ből

(5. 19) $$\mathfrak{F}_{jlik}=\xi_j S'_{lik}-\xi_l S'_{jik}.$$

A dolgozatban előforduló esetben a helyzet jóval egyszerűbb, ui. (3. 3) miatt $Q_{lji}=0$ és $S'_{lji}=S_{lji}$.

6. §. Négyes áram

Hajtsunk végre V-ben egy tetszőleges infinitézimális

$$\delta\psi = ie\psi\delta\alpha, \qquad \delta\psi^* = -ie\psi^*\delta\alpha \tag{6.1}$$

mértéktranszformációt, ahol α tetszőleges állandó. Általában az e konstans ψ komponenseivel változhat. $\mathfrak{J}$ hatásintegrál invarianciájából következik, hogy

$$\delta\mathfrak{J} = \int_\Omega d\xi\,\delta\mathfrak{L} = 0. \tag{6.2}$$

Képezzük $\delta\mathfrak{L}$-et és vegyük figyelembe (6.1)-et, akkor (6.2):

$$ie\int_\Omega d\xi\left[D^i\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D_i\psi}\cdot\psi - \psi^* D_i\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D_i\psi^*} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D_i\psi}D_i\psi - D_i\psi^*\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D_i\psi^*}\right]\delta\alpha = 0, \tag{6.3}$$

másképpen

$$D_i j^i(\xi) = 0, \tag{6.4}$$

ahol a bilokális-áram

$$j^i(\xi) = ie\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D_i\psi}\psi - \psi^*\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial D_i\psi^*}\right). \tag{6.5}$$

A bilokális térelméletben tehát a szokásos

$$j^\mu(x,r) = ie\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\nabla_\mu\psi}\psi - \psi^*\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\nabla_\mu\psi^*}\right) \tag{6.6}$$

négyes áram mellett a

$$\bar{j}^\mu(x,r) = \frac{ie}{a}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\overline{\nabla}_\mu\psi}\psi - \psi^*\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\overline{\nabla}_\mu\psi^*}\right) \tag{6.7}$$

belső áram- és töltéssűrűséget is definiálni kell. Ezek a

$$\nabla_\mu j^\mu + a\overline{\nabla}_\mu\bar{j}^\mu = 0 \tag{6.8}$$

egyenletet elégítik ki.

A bilokális tér fentiekben vázolt elmélete a megmaradási egyenletek, s az azokkal kapcsolatos mennyiségek tekintetében két irányban általánosítja a lokális térelmélet megfelelő eredményeit.

Egyrészről mind az x-, mind az r-térben kapunk egyenleteket, másrészről minden egyes egyenletben is additív divergenciák lépnek fel, melyek fellépte a bilokalitásnak tulajdonítható.

Más szóval a tradicionális tenzorok mellett újabb tenzorokat is kell definiálni. Ezek egy része az r-tér tulajdonságairól ad számot, másik része pedig a kölcsönhatást jellemzi.

Úgy látszik, hogy a szabad részecske bilokális térelméletében az (x, r) térben igazak a tradicionális eredmények, azonban rész-terenként már másképpen kell azokat megfogalmazni.

Végül megjegyezzük, hogy lokális térelmélethez úgy jutunk, ha $\mathfrak{L}$-ben csak az x^μ szerinti differenciálhányadosokat tekintjük ($a = 0$) és ψ-ben $r^\mu = 0$-t írunk.

II.

SPECIÁLIS BILOKÁLIS TEREK

7. §. A szabad bozon-tér

Első példaként a bozon-részecskék esetét tárgyaljuk. Ezeket a részecskéket másodrendű hullámegyenlettel, a RAYSKI-féle általánosított KLEIN-GORDON egyenlettel írjuk le [7].

A komplex bozon-tér LAGRANGE-sűrűségét az

$$\mathfrak{L} = D^k \psi^* D_k \psi + \varkappa^2 \psi^* \psi \tag{7. 1}$$

alakban vesszük fel, ahol $\varkappa$ állandó természetes fizikai egységrendszerben ($\hbar = c = l = 1$) tömeget jelent.

Ha (7. 1)-et (1. 7)-be tesszük, akkor a RAYSKI-féle

$$(D_k D^k - \varkappa^2)\psi \equiv (\nabla_\mu \nabla^\mu + a^2 \overline{\nabla}_\mu \overline{\nabla}^\mu - \varkappa^2)\psi = 0, \text{ k. k.} \tag{7. 2}$$

hullámegyenletet nyerjük. (7. 2) igen lényeges a tömegkvantálás gyakorlati véghezvitele szempontjából.

Most felírjuk a bozon-térre jellemző mennyiségeket. Először is tekintsük $\mathfrak{T}^{ik}$-t. Definíciós egyenletéből kapjuk, hogy

$$\mathfrak{T}^{ik} = D^i \psi^* \cdot D^k \psi + D^k \psi^* \cdot D^i \psi - G^{ik} \mathfrak{L}, \tag{7. 3}$$

azaz

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^{\mu\nu} &= \nabla^\mu \psi^* \cdot \nabla^\nu \psi + \nabla^\nu \psi^* \cdot \nabla^\mu \psi - g^{\mu\nu} \mathfrak{L}, \\ \overline{\mathfrak{T}}^{\mu\nu} &= a^2 (\overline{\nabla}^\mu \psi^* \cdot \overline{\nabla}^\nu \psi + \overline{\nabla}^\nu \psi^* \cdot \overline{\nabla}^\mu \psi) - g^{\mu\nu} \mathfrak{L}, \\ \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_1)} &= a (\nabla^\mu \psi^* \cdot \overline{\nabla}^\nu \psi + \overline{\nabla}^\nu \psi^* \cdot \nabla^\mu \psi), \\ \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_2)} &= a (\overline{\nabla}^\mu \psi^* \cdot \nabla^\nu \psi + \nabla^\nu \psi^* \cdot \overline{\nabla}^\mu \psi), \end{aligned} \tag{7. 4}$$

Amint látjuk T^{ik} szimmetrikus és közvetlenül (7. 4)-ből is adódik (3. 6). Tekintettel (5. 1)-re, (3. 6)-ból kapjuk a

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \mathfrak{T}^{\mu\nu} = a^2 \overline{\nabla}_\mu \overline{\nabla}_\nu \overline{\mathfrak{T}}^{\mu\nu} \tag{7. 5}$$

érdekes részleteredményt. (Általában teljesül a

$$\nabla_\nu (\mathfrak{T}^{\mu\nu} + \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_2)}) = -a \cdot \overline{\nabla}_\nu (\overline{\mathfrak{T}}^{\mu\nu} + \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_1)}) \tag{7. 6}$$

megmaradási egyenlet is.)

$\mathfrak{T}^{ik}$ szimmetrikusságából következik $\mathfrak{S}_{jli}$ zérus volta, ezért (4. 10) a pálya-impulzusmomentum tenzorra vonatkozik. (7. 4) alapján (4. 8) bozonokra azonnal felírható. A kapott tenzorok (4. 10)-et azonosan kielégítik.

Megemlítünk két érdekes megmaradási egyenletet, melyek (4. 10)-ből az első és utolsó két egyenlet összeadásával nyerhetők:

$$\nabla^{\sigma}\left[x_{\mu}\mathfrak{T}_{\nu\sigma}-x_{\nu}\mathfrak{T}_{\mu\sigma}+\frac{1}{a}(r_{\mu}\mathfrak{T}_{(k_2)\nu\sigma}-r_{\nu}\mathfrak{T}_{(k_2)\mu\sigma})\right]+$$

$$+a\overline{\nabla}^{\sigma}\left[x_{\mu}\mathfrak{T}_{(k_1)\nu\sigma}-x_{\nu}\mathfrak{T}_{(k_1)\mu\sigma}+\frac{1}{a}(r_{\mu}\overline{\mathfrak{T}}_{\nu\sigma}-r_{\nu}\overline{\mathfrak{T}}_{\mu\sigma})\right]=0, \tag{7. 7}$$

$$\nabla^{\sigma}\left[\frac{1}{a}(r_{\mu}\mathfrak{T}_{\nu\sigma}-r_{\nu}\mathfrak{T}_{\mu\sigma})+x_{\mu}\mathfrak{T}_{(k_2)\nu\sigma}-x_{\nu}\mathfrak{T}_{(k_2)\mu\sigma}\right]+a\overline{\nabla}^{\sigma}\left[\frac{1}{a}(r_{\mu}\mathfrak{T}_{(k_1)\nu\sigma}-\right.$$

$$\left.-r_{\nu}\mathfrak{T}_{(k_1)\mu\sigma})+x_{\mu}\overline{\mathfrak{T}}_{\nu\sigma}-x_{\nu}\overline{\mathfrak{T}}_{\mu\sigma}\right]=0.$$

Tehát a megfelelő tagokban ugyanannak a tenzornak más résztérben vett momentuma szerepel.

A V-térben az áramsűrűség nagysága

$$j^{i}(\xi)=ie(D^{i}\psi^{*}\cdot\psi-\psi^{*}\cdot D^{i}\psi). \tag{7. 8}$$

Ez a

$$j^{\mu}=ie(\nabla^{\mu}\psi^{*}\cdot\psi-\psi^{*}\cdot\nabla^{\mu}\psi) \tag{7. 9}$$

és a

$$\bar{j}^{\mu}=iea(\overline{\nabla}^{\mu}\psi^{*}\cdot\psi-\psi^{*}\cdot\overline{\nabla}^{\mu}\psi) \tag{7. 10}$$

komponensből áll.

A most nyert eredmények egyezésben vannak PAULI-tételével, amely szerint bozon-terekben az energiasűrűség pozitív definit, a töltéssűrűség pedig indefinit. Ennél többet is mondhatunk, ui. a

$$-\mathfrak{T}_{44}=\nabla_0\psi^{*}\cdot\nabla_0\psi+\mathrm{grad}_x\psi^{*}\cdot\mathrm{grad}_x\psi+\varkappa^2\psi^{*}\psi+a^2\,\mathrm{Grad}_r\psi^{*}\cdot\mathrm{Grad}_r\psi \tag{7. 11}$$

$$(|\mathrm{grad}_r\psi|^2\geqq|\overline{\nabla}_0\psi|^2)$$

energiasűrűségen kívül pozitív definit a

$$-\overline{\mathfrak{T}}_{44}=a^2\overline{\nabla}_0\psi^{*}\cdot\overline{\nabla}_0\psi+a^2\,\mathrm{grad}_r\psi^{*}\cdot\mathrm{grad}_r\psi+\varkappa^2\psi^{*}\psi+\mathrm{Grad}_x\psi^{*}\cdot\mathrm{Grad}_x\psi \tag{7. 12}$$

$$(|\mathrm{grad}_x\psi|^2\geqq|\nabla_0\psi|^2)$$

energiasűrűség és a

$$-\mathfrak{T}_{(k_1)44}=a(\nabla_0\psi^{*}\cdot\overline{\nabla}_0\psi+\overline{\nabla}_0\psi^{*}\cdot\nabla_0\psi)=-\mathfrak{T}_{(k_2)44} \tag{7. 13}$$

kölcsönhatási energiasűrűség is, továbbá a

$$\frac{j_4}{i}=\frac{e}{i}(\nabla_0\psi^{*}\cdot\psi-\psi^{*}\cdot\nabla_0\psi) \tag{7. 14}$$

töltéssűrűségen kívül indefinit a

$$\frac{\bar{j}_4}{i} = \frac{ea}{i}(\overline{\nabla}_0\psi^* \cdot \psi - \psi^* \cdot \overline{\nabla}_0\psi) \tag{7. 15}$$

belső-töltéssűrűség is. Teljesség kedvéért felírjuk a (7. 4)-ből nyerhető

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{J}} &= -(\mathrm{grad}_x\psi^* \cdot \nabla_0\psi + \nabla_0\psi^* \cdot \mathrm{grad}_x\psi), \\ \bar{\bar{\mathfrak{J}}} &= -a^2(\mathrm{grad}_r\psi^* \cdot \overline{\nabla}_0\psi + \overline{\nabla}_0\psi^* \cdot \mathrm{grad}_r\psi) \end{aligned} \tag{7. 16}$$

tér-impulzussűrűségeket és a

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{J}}_{(k_1)} &= -a(\mathrm{grad}_x\psi^* \cdot \overline{\nabla}_0\psi + \overline{\nabla}_0\psi^* \cdot \mathrm{grad}_x\psi), \\ \bar{\bar{\mathfrak{J}}}_{(k_2)} &= -a(\mathrm{grad}_r\psi^* \cdot \nabla_0\psi + \nabla_0\psi^* \cdot \mathrm{grad}_r\psi) \end{aligned} \tag{7. 17}$$

kölcsönhatási-impulzussűrűségeket.

(7. 13) és (7. 17) alapján azt mondhatjuk, hogy a rész-terek variációjakor fellépő kölcsönhatások energiái egyenlők, de az impulzusok nem.

8. §. A szabad spinor-tér

A bilokális spinor-teret ψ négyes-spinor hullámfüggvénnyel írjuk le, melynek adjungáltja ψ^+. Jelöljük γ^μ-vel a DIRAC-féle mátrixokat, mint ismeretes

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}. \tag{8. 1}$$

Ha definiáljuk $\gamma^{\mu\nu}$-t

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -\gamma^{\nu\mu}, \tag{8. 2}$$

akkor nyilván

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}. \tag{8. 3}$$

Innen következik, hogy $\mu \neq \nu$-re

$$\gamma^{\mu\nu} = \gamma^\mu\gamma^\nu. \tag{8. 4}$$

Bevezetjük a $\gamma^i = (\gamma^\mu, \gamma^\mu)$ vektort. A téregyenleteket az

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}(\psi^+\gamma^i D_i\psi - D_i\psi^+ \cdot \gamma^i\psi) + \varkappa\psi^+\psi \tag{8. 5}$$

LAGRANGE-sűrűség felhasználásával (1. 7)-ből nyerjük:

$$\begin{aligned} (\gamma^i D_i + \varkappa)\psi &\equiv \gamma^\mu(\nabla_\mu + a\overline{\nabla}_\mu)\psi + \varkappa\psi = 0, \\ D_i\psi^+\gamma^i - \varkappa\psi^+ &\equiv (\nabla_\mu + a\overline{\nabla}_\mu)\psi^+\gamma^\mu - \varkappa\psi^+ = 0. \end{aligned} \tag{8. 6}$$

Ha (8. 6) teljesül, akkor $\mathfrak{L} \equiv 0$, ezt tekintetbevéve a kanonikus energia-impulzus tenzor

$$\mathfrak{T}^{ik} = \frac{1}{2}(\psi^+\gamma^k D^i\psi - D^i\psi^+\cdot\gamma^k\psi), \tag{8.7}$$

vagy részletesebben

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^{\mu\nu} &= \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_1)} = \frac{1}{2}(\psi^+\gamma^\nu\nabla^\mu\psi - \nabla^\mu\psi^+\cdot\gamma^\nu\psi) \\ \overline{\mathfrak{T}}^{\mu\nu} &= \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(k_2)} = \frac{a}{2}(\psi^+\gamma^\nu\overline{\nabla}^\mu\psi - \overline{\nabla}^\mu\psi^+\cdot\gamma^\nu\psi) \end{aligned} \tag{8.8}$$

Ezek a tenzorok eleget tesznek a

$$\begin{aligned} (\nabla_\nu + a\overline{\nabla}_\nu)\mathfrak{T}^{\mu\nu} &= 0, \\ (\nabla_\nu + a\overline{\nabla}_\nu)\overline{\mathfrak{T}}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \tag{8.9}$$

és a

$$(\nabla_\nu + a\overline{\nabla}_\nu)(b\mathfrak{T}^{\mu\nu} + c\overline{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}) = 0 \tag{8.10}$$

egyszerű típusú megmaradási egyenleteknek (b és c konstans).

Rátérünk $\mathfrak{T}_{ik}$ szimmetrizálására. Megmutatjuk, hogy

$$\Theta_{ik} = \frac{1}{2}(\mathfrak{T}_{ik} + \mathfrak{T}_{ki}). \tag{8.11}$$

Elegendő megmutatni, hogy $\mathfrak{S}_{kil} = 2S_{ikl}$, ui. ekkor (5. 7)-ből

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{T}_{ki} - \mathfrak{T}_{ik}) = D^l S_{ikl}, \tag{8.12}$$

ahonnan (8. 11) már következik.

Írjuk (8. 7)-be a téregyenletekből nyert

$$\begin{aligned} D^k\psi &= \frac{1}{2}(\gamma_i\gamma^k D^i - \gamma^k\varkappa)\psi, \\ D^k\psi^+ &= \frac{1}{2}(D^i\psi^+\gamma^k\gamma_i + \varkappa\psi^+\gamma^k) \end{aligned} \tag{8.13}$$

kifejezéseket és képezzük $D^l\mathfrak{S}_{kil}$-et:

$$D^l\mathfrak{S}_{kil} = \mathfrak{T}_{ki} - \mathfrak{T}_{ik} = \frac{1}{4}D^l(\psi^+(\gamma_i\gamma_l\gamma_k - \gamma_k\gamma_l\gamma_i)\psi). \tag{8.14}$$

Ezzel megkaptuk a spin-impulzusmomentum-sűrűség-tenzort

$$\mathfrak{S}_{kil} = \frac{1}{4}\psi^+(\gamma_i\gamma_{lk} - \gamma_{kl}\gamma_i)\psi, \tag{8.15}$$

azonkívül

$$S_{ikl} = \frac{1}{8}\psi^+(\gamma_i\gamma_{lk} - \gamma_{kl}\gamma_i)\psi \tag{8.16}$$

bármely két indexében antiszimmetrikus. Következésképpen (8. 11)-et bebizonyítottuk.

(8. 14) és (8. 16) alapján látjuk, hogy (4. 7) teljesül, tehát érvényes (4. 10), azonban jóval egyszerűbben írható. Ui. nyilván igazak az alábbi összefüggések:

$$\begin{gathered}\mathfrak{M}_{\mu\nu\sigma}=\mathfrak{M}_{(k_1)\mu\nu\sigma},\ \overline{\mathfrak{M}}_{\mu\nu\sigma}=\mathfrak{M}_{(k_2)\mu\nu\sigma},\ \mathfrak{M}_{(V_1)\mu\nu\sigma}=\mathfrak{M}_{(V_2)\mu\nu\sigma},\\ \mathfrak{S}_{\mu\nu\sigma}=\overline{\mathfrak{S}}_{\mu\nu\sigma}=\mathfrak{S}_{(k_1)\mu\nu\sigma}=\mathfrak{S}_{(k_2)\mu\nu\sigma}=\mathfrak{S}_{(V_1)\mu\nu\sigma}=\cdots=\mathfrak{S}_{(V_4)\mu\nu\sigma},\\ \mathfrak{J}_{\mu\nu\sigma}=\mathfrak{J}_{(k_1)\mu\nu\sigma},\ \overline{\mathfrak{J}}_{\mu\nu\sigma}=\mathfrak{J}_{(k_2)\mu\nu\sigma},\ \mathfrak{J}_{(V_1)\mu\nu\sigma}=\mathfrak{J}_{(V_2)\mu\nu\sigma};\end{gathered}\tag{8. 17}$$

eszerint (4. 10) független egyenletei:

$$\begin{gathered}(\nabla^\sigma+a\overline{\nabla}^\sigma)\mathfrak{J}_{\mu\nu\sigma}=0,\\ (\nabla^\sigma+a\overline{\nabla}^\sigma)\overline{\mathfrak{J}}_{\mu\nu\sigma}=0,\\ (\nabla^\sigma+a\overline{\nabla}^\sigma)\mathfrak{J}_{(V_1)\mu\nu\sigma}=0.\end{gathered}\tag{8. 18}$$

Foglalkozzunk kissé a totális spin-impulzusmomentum-sűrűség-tenzorral. Definíciója:

$$\mathfrak{S}'_{jli}=\mathfrak{S}_{jli}+D^k(\xi_j S_{lik}-\xi_l S_{jik}).\tag{8. 19}$$

Egyszerű számítással beláthatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}'_{jli}=\frac{1}{4}\Big[&\psi^+(\gamma_l\gamma_{ij}-\gamma_{ji}\gamma_l)\psi+\frac{1}{2}D^k(\psi^+(\xi_j[\gamma_l\gamma_{ki}-\\ &-\gamma_{ik}\gamma_l]-\xi_l[\gamma_j\gamma_{ki}-\gamma_{ik}\gamma_j])\psi)\Big].\end{aligned}\tag{8.20}$$

Írjuk $\mathfrak{S}'_{jli}$-t szimbolikusan:

$$\mathfrak{S}'_{jli}=\begin{Bmatrix}\mathfrak{S}'_{\mu\nu i} & \mathfrak{S}'_{(V)\mu\nu i}\\ -\mathfrak{S}'_{(V)\nu\mu i} & \overline{\mathfrak{S}}'_{\mu\nu i}\end{Bmatrix}.\tag{8. 21}$$

Itt

$$\mathfrak{S}'_{\mu\nu i}=\mathfrak{S}_{\mu\nu i}+(\nabla^\sigma+a\overline{\nabla}^\sigma)(x_\mu S_{\nu i\sigma}-x_\nu S_{\mu i\sigma})\tag{8. 22}$$

a tradicionális momentumot adja az $a=0$ esetben és

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{S}}'_{\mu\nu i}&=\mathfrak{S}_{\mu\nu i}+\frac{1}{a}(\nabla^\sigma+a\overline{\nabla}^\sigma)(r_\mu S_{\nu i\sigma}-r_\nu S_{\mu i\sigma}),\\ \mathfrak{S}'_{(V)\mu\nu i}&=\mathfrak{S}_{\mu\nu i}+(\nabla^\sigma+a\overline{\nabla}^\sigma)\left(x_\mu S_{\nu i\sigma}-\frac{r_\nu}{a}S_{\mu i\sigma}\right)\end{aligned}\tag{8. 23}$$

momentumok a bilokalitás következtében lépnek fel.

A bilokális spinor térre jellemző tipikus megmaradási egyenlet ((8. 9), (8. 18)) négyes áramra is felírható, ti. (6. 5)-ből

$$j^\mu=\overline{j}^\mu=ie\psi^+\gamma^\mu\psi,\tag{8. 24}$$

vagyis a külső és belső négyes áramok értéke azonos. Következésképpen

$$(\nabla_\mu + a\overline{\nabla}_\mu) j^\mu = 0. \tag{8.25}$$

Erre az egyenletre jutott MINARDI [11] is, aki spinor-részecske és elektromágneses tér kölcsönhatását vizsgálta.

A spinor-térre nyert eredményeink egyezésben vannak a PAULI-féle tétellel, nevezetesen

$$\begin{aligned} -\Theta_{44} &= -\mathfrak{T}_{44} = \frac{1}{2i}(\nabla_0\psi^*\cdot\psi - \psi^*\cdot\nabla_0\psi), \\ -\overline{\Theta}_{44} &= -\overline{\mathfrak{T}}_{44} = \frac{a}{2i}(\overline{\nabla}_0\psi^*\cdot\psi - \psi^*\cdot\overline{\nabla}_0\psi) \end{aligned} \tag{8.26}$$

indefinit;

$$\begin{aligned} \vec{\mathfrak{j}} &= \frac{1}{2i}(\psi^*\cdot \mathrm{grad}_x\psi - \mathrm{grad}_x\psi^*\cdot\psi) \\ \vec{\overline{\mathfrak{j}}} &= \frac{a}{2i}(\psi^*\cdot \mathrm{grad}_r\psi - \mathrm{grad}_r\psi^*\cdot\psi) \end{aligned} \tag{8.27}$$

indefinit és

$$j_0 = \overline{j}_0 = e\psi^*\psi \tag{8.28}$$

pozitív definit.

IRODALOM

[1] W. PAULI, *Rev. Mod. Phys.* **13** (1941) 203.
[2] J. RZEWUSKI, *Acta P. Pol.* **12** (1953) 14.
[3] H. YUKAWA, *Phys. Rev.* **77** (1950) 219; **80** (1950) 1047; **91** (1953) 415, 416.
[4] C. BLOCH, *Kgl. D. Vid. Sel. Mat. Fys. Medd.* **26** (1950) 5.
[5] C. GREGORY, *Phys. Rev.* **78** (1950) 67, 479.
[6] W. D. SCHULTZ, *Phys. Rev.* **99** (1955) 290.
[7] J. RAYSKI, *Acta P. Pol.* **14** (1955) 107, 337; **15** (1956) 89
Nuovo Cim. **3** (1956) 126.
—W. HANUS, *Acta P. Pol.* **15** (1956) 117.
[8] J. HORVÁTH, Acta Phys. et Chem. Szeged **1** (1956) 25.
[9] J. RAYSKI, *Acta P. Pol.* **15** (1956) 123.
[10] J. RAYSKI, *Nuovo Cim.* **2** (1955) 255.
[11] E. MINARDI, *Nuovo Cim.* **3** (1956) 968.

(Beérkezett: 1957. III. 27.)

A LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓK ÚJ, EGYSZERŰ LEVEZETÉSE

KOMJÁTHY ALADÁR

Ebben a dolgozatban a Lorentz-transzformációk új, egyszerű levezetését adjuk, olyanformán, hogy először levezetjük a Lorentz-kontrakció és az Einstein-dilatáció formuláit, s ezek felhasználásával azután a Lorentz-transzformációkat. Egyben kimutatjuk, hogy az $1-\beta^2$ kifejezés a Lorentz-tranformációkban szükségképpen az $\frac{1}{2}$ hatványon szerepel, vagyis a Lorentz-transzformációk ebben az irányban nem általánosíthatók.

Tekintsünk a nyugalomban levő K inerciarendszerhez képest v egyenletes sebességgel egyenes vonalban mozgó K' másik inerciarendszert, ebben egy nyugvó rudat, melynek hosszúsága a K rendszerből mérve legyen l. A rúd végpontjában helyezzünk el egy tükröt, s a K rendszerben nyugvó fényforrásból küldjünk fénysugarat a tükörre.

Kérdés, hogy a rúd kezdőpontjától a fénysugár mekkora t_0 idő alatt éri el a rúd végén elhelyezett, előle v sebességgel hátráló tükröt, s a tükörről visszavert fénysugár mekkora t_1 idő alatt jut el a rúd v sebességgel eléje siető kezdőpontjáig.

Világos, hogy fennállanak az alábbi egyenletek:

$$l+vt_0=ct_0, \tag{1}$$

$$l-vt_1=ct_1, \tag{2}$$

ahol c a fénysebesség.

(1) és (2) alapján

$$t=t_0+t_1=\frac{2l}{c(1-\beta^2)}, \tag{3}$$

ahol $\beta=\frac{v}{c}$.

Helyezzünk el most a K' rendszerben egy nyugvó megfigyelőt. Mivel hozzá képest a rúd nyugalomban van, számára a fénysugár ugyanannyi idő alatt jut el a rúd kezdőpontjától a végpontjáig, mint a rúd végpontjától a kezdőpontjáig. Ha ezt az összidőtartamot t'-vel jelöljük, akkor mivel a fénysebesség K'-ben is c, a rúd hosszúsága K'-ben csak olyan l' érték lehet, hogy fennálljon a következő egyenlet:

$$c = \frac{2\,l'}{t'}. \tag{4}$$

Ha a (3) alatti egyenletben $\frac{1}{c}$ helyébe (4) alapján $\frac{t'}{2\,l'}$ értéket írjuk, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\frac{l}{t} = \frac{l'(1-\beta^2)}{t'}. \tag{5}$$

Mivel

$$\frac{l'(1-\beta^2)}{t'} = \frac{l'(1-\beta^2)^k(1-\beta^2)^{1-k}}{t'} = \frac{l'(1-\beta^2)^k}{\dfrac{t'}{(1-\beta^2)^{1-k}}} = \frac{l'(1-\beta^2)^{1-k}}{\dfrac{t'}{(1-\beta^2)^k}}, \tag{6}$$

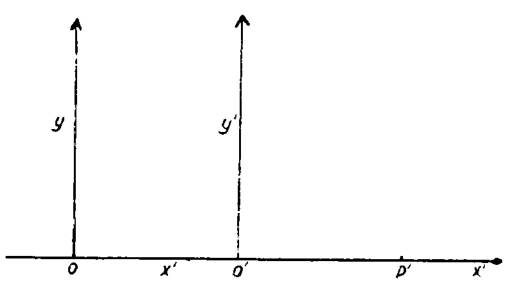
ahol $0 \leq k \leq 1$, a (6) alatti egyenlet matematikailag végtelen sok lehetséges esetet foglal magában.

Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor

$$l = l'(1-\beta^2)^k \quad \text{és} \quad t = \frac{t'}{(1-\beta^2)^{1-k}}. \tag{7}$$

A K illetőleg K' rendszer koordinátatengelyeit jelöljék x, y, z, illetőleg x', y', z', a két rendszer kezdőpontjait pedig O, illetve O'. A K' rendszer mozogjon a K rendszer x tengelye mentén v egyenletes sebességgel úgy, hogy az x' tengely állandóan egybeessék az x tengellyel.

Tegyük fel, hogy a K rendszerben nyugvó megfigyelő attól a pillanattól kezdi számítani az időt, amikor O' egybeesik O-val. Ekkor tehát $t = 0$. Egy későbbi t időpillanatban egyidejűleg megfigyeli az O' pont vt és az $O'x'$ tengely mentén fekvő valamely P' pont x koordinátáját. Számára tehát az $\overline{O'P'}$ távolság hossza $x - vt$. A K' rendszerben nyugvó megfigyelő az $\overline{O'P'}$ távolságot a szokásos módon mérőrúddal határozza meg, s megállapítja, hogy az $\overline{O'P'}$ távolság hossza x'. A K-ban nyugvó megfigyelő számára azonban a K'-ben nyugvó megfigyelő által mért x' távolság értéke a távolságok megrövidülése miatt $x'(1-\beta^2)$. Felírja tehát a következő egyenletet:[1]



[1] L. DE BROGLIE: Éléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire, Paris, 1955, 25—26 és 29. o.

$$x - vt = x'(1-\beta^2)^k. \tag{8}$$

Ha most a K' rendszert tekintjük nyugvónak (8)-ban v helyett $-v$-t kell írni és x, x'-t valamint t, t'-t fel kell cserélni. Így nyerjük, hogy

$$x' + vt' = x(1-\beta^2)^k. \tag{9}$$

Térjünk most már rá az idők transzformációját kifejező Lorentz-transzformáció levezetésére.

Ha a K' rendszer O' pontjában nyugvó megfigyelő szinkronizálni akarja a P' pontban elhelyezett órát a $t=0$ időpillanatban fényjelet küld a P' pontban elhelyezett másik megfigyelőnek, aki óráját a $t' = \frac{x'}{c}$ időpontra állítja be, ahol x' a P' pont koordinátája.

A K rendszerben nyugvó megfigyelő számára azonban az $\overline{O'P'}$ szakaszt a fény csak $c-v$ sebességgel futja be, mert a K' rendszer K-hoz képest v egyenes vonalú egyenletes sebességgel mozog. Másrészt a Lorentz-kontrakció miatt számára az $\overline{O'P'}$ távolság nem x', hanem $x'(1-\beta^2)^k$, tehát az ő rendszerideje szerint az $\overline{O'P'}$ távolság befutásához szükséges idő

$$t = \frac{x'(1-\beta^2)^k}{c-v} = \frac{\frac{x'}{c}(1-\beta^2)^k}{1-\beta} = \frac{\frac{x'}{c}(1+\beta)(1-\beta^2)^k}{1-\beta^2} = \frac{t' + \frac{\beta}{c}x'}{(1-\beta^2)^{1-k}}. \tag{10}$$

(8)-ból és (10)-ből azt nyerjük, hogy

$$t' = t(1-\beta^2)^{1-k} - \frac{\frac{\beta}{c}(x-vt)}{(1-\beta^2)^k} = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{(1-\beta^2)^k}. \tag{11}$$

(8)-ból és (9)-ből viszont azt kapjuk, hogy

$$t' = \frac{x(1-\beta^2)^k - x'}{v} = \frac{x(1-\beta^2)^k - \frac{x-vt}{(1-\beta^2)^k}}{v} = \frac{t - \frac{x}{v}\left[1-(1-\beta^2)^{2k}\right]}{(1-\beta^2)^k}. \tag{12}$$

(11) akkor lesz azonos (12)-vel, ha

$$\frac{1-(1-\beta^2)^{2k}}{v} = \frac{\beta}{c}, \tag{13}$$

azaz, ha

$$1-\beta^2 = (1-\beta^2)^{2k}, \tag{14}$$

s innen $k = \frac{1}{2}$.

Hasonló eredményre jutunk, ha a másik feltevést fogadjuk el, amely szerint

$$l = l'(1-\beta^2)^{1-k} \quad \text{és} \quad t = \frac{t'}{(1-\beta^2)^k},$$

vagyis (7)-ben k-t és $(1-k)$-t kölcsönösen felcseréljük.

Ha ezt a felcserélést (14)-ben is végrehajtjuk, azt nyerjük, hogy

$$1-\beta^2 = (1-\beta^2)^{2(1-k)},$$

amiből ismét $k = \frac{1}{2}$.

A Lorentz-transzformációk ebben az irányban tehát nem általánosíthatók.

Az előzők alapján (8)-ból és (11)-ből azt kapjuk, hogy

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{15}$$

(15)-ből pedig, ha v helyett $-v$-t írunk és az x, x' valamint t, t' kölcsönös felcseréléseket végrehajtjuk, azt nyerjük, hogy

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

A Lorentz-kontrakcióra és az Einstein-dilatációra a (7) kifejezésből az adódik, hogy

$$l = l'\sqrt{1-\beta^2}, \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{16}$$

A kontrakciót, valamint a dilatációt a K és K' inerciarendszerekben nyugvó megfigyelők egymás mérőrúdjairól és óráiról kölcsönösen megállapítják.

Ha ugyanis a K' rendszert tekintjük nyugvónak, a K rendszer a K' rendszerhez viszonyítva $-v$ sebességgel mozog. Ekkor (16)-ban $\sqrt{1-\beta^2}$ változatlan marad, míg l és l'-t, illetőleg t és t'-t kölcsönösen fel kell cserélni.

(Beérkezett: 1957. III. 26.)

BIZONYOS VÁRAKOZÁSI IDŐ PROBLÉMÁRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

Sajátos várakozási idő problémák lépnek fel egy vagy több kezelő felügyeletére bízott több termelő gép kiszolgálásával kapcsolatban. Jelenleg csupán az egy kezelő esetével foglalkozunk.

A jelenséget leíró modell. Tekintsünk m számú termelő gépet, amelyek egy kezelő felügyeletére vannak bízva. A gépek a $0 \leq t < \infty$ időközben folyamatosan termelnek, de előfordulhat, hogy véletlen hibák következtében automatikusan leállnak és mindaddig állva maradnak, amíg a hibát a kezelő ki nem javította. Tegyük fel, hogy minden egyes gépre $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben leáll, feltéve, hogy t időpontban működik és ez az esemény független minden egyéb körülménytől. Tegyük fel, hogy a kezelő leállás sorrendjében javítja ki a gépeket (bár ez a feltevés mellőzhető) és ha van álló gép, akkor a kezelő okvetlenül javít. Feltesszük, hogy az egyes javítási idők egymástól független pozitív valószínűségi változók ugyanazon $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen

$$\alpha = \int_0^\infty x\,dF(x) \tag{1}$$

és

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x-\alpha)^2\,dF(x). \tag{2}$$

Továbbá jelölje $F(x)$ Laplace-Stieltjes transzformáltját

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x), \tag{3}$$

amely konvergens, ha $\Re(s) \geqq 0$.

Gyakorlati alkalmazások. A fenti modellel leírható jelenség lép fel például több szövőgép vagy más automatikusan gyártó gép egyidejű működésénél vagy várakozásos telefonrendszereknél. Utóbbi esetben a hívások felelnek meg a leállásoknak és a beszélgetések a javításoknak. Mi az előző terminológiát fogjuk használni. Több gép egyidejű működésénél fontos kérdés annak megállapítása, hogy adott idő alatt mennyi a termelés, a kezelő mennyi időt tölt javítással, hány gépet ökonomikus egy kezelőre bízni, továbbá, főleg telefonközpontoknál, a várakozási idő meghatározása. A következőkben megadjuk mindazon alapvető mennyiségeket, amelyek alapján a fenti kérdésekre válasz adható.

Jelölések és fogalmak. Jelölje $\eta(t)$ valószínűségi változó a t időpontban egyidejűleg működő gépek számát. Ha $\eta(t)=k$ $(k=0, 1, 2. \ldots, m)$, akkor azt mondjuk, hogy E_k állapotban van a rendszer. Jelölje rendre $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ azokat az időpontokat, midőn a kezelő befejez egy javítást és legyen $\eta(\tau_n-0)=\eta_n$. Továbbá legyen $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0, 1,2, \ldots, m)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k(k=0, 1, 2, \ldots, m-1)$. Jelölje $\chi(t)$ valószínűségi változó a t időpontban (esetleg) folyamatban levő javításnak a t időponttól a javítás befejezéséig tartó időtartamának a hosszát. Legyen $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t)\leqq x \mid \eta(t)=k\}= =F_k^*(x), (k=0, 1, 2, \ldots, m-1)$.

Az általunk vizsgált folyamat Markov-folyamatként kezelhető, ha az állapot leírására az $\{\eta(t), \chi(t)\}$ változópárt használjuk. Mint látni fogjuk, a kezdeti értékektől vagy kezdeti eloszlásoktól függetlenül léteznek az $\{\eta(t), \chi(t)\}$ változók $t\to\infty$-re vett határeloszlásai. Ezek szerint definiálhatjuk a *stacionárius folyamat* fogalmát, mégpedig azáltal, hogy feltesszük, hogy $\eta(0)$ eloszlása $\{P_k^*\}$ és $\chi(0)$ eloszlásfüggvénye $\eta(0)=k(k=0, 1, 2, \ldots, m-1)$ feltétel mellett $F_k^*(x)$. Jelölje a stacionárius folyamatnál egy gép leállásától a javítás megkezdéséig eltelt időtartamnak az eloszlásfüggvényét $G_m(x)$ és legyen

$$\Gamma_m=\int_0^\infty x\,d\,G_m(x). \tag{4}$$

A szakirodalom áttekintése. A fenti folyamat vizsgálatával tudomásunk szerint először A. J. HINCSIN [6] foglalkozott. HINCSIN a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás (illetve az ezzel egyenértékű $\pi_k=P_{m-1-k}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, m-1)$ eloszlás) meghatározására felír egy egyenletrendszert, amelyet azonban nem old meg. A következőkben megadjuk ennek az egyenletrendszernek explicit megoldását. Továbbá HINCSIN meghatározza Γ_m-t, a várakozási idő várható értékét P_{m-1} (illetve π_0) segítségével, de, mint látni fogjuk, ez a képlet általában nem helyes (csak exponenciális eloszlású $F(x)$-re ad helyes eredményt). A következőkben megadjuk Γ_m explicit alakját. R. KRONIG [10], valamint R. KRONIG és H. MONDRIA [11] a Γ_m explicit meghatározásának kérdésével foglalkoznak, de ugyanazt a hibát követik el, mint HINCSIN. A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás várható értékét az eloszlás ismerete nélkül rekurzív képletek segítségével

H. ASCHCROFT [1] határozta meg. Exponenciális eloszlású javítási idők esetére a $\{P_k^*\}$ eloszlást TH. FRY [5] és C. PALM [13] határozta meg. Exponenciális és állandó javítási idők esetére bizonyos eredményeket szerző [14] dolgozata is tartalmaz. Jelenleg nem teszünk említést a várakozási idő egyéb kérdéseit tárgyaló számos más dolgozatról.

A feladat kitűzése. A következőkben explicit alakban meghatározzuk a $\{P_k\}$ és $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlást, valamint ezek binomiális momentumait, továbbá stacionárius esetre a várakozási idő $G_m(x)$ eloszlásfüggvényét és Γ_m várható értékét.

1. §. A $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

1. TÉTEL: *Az $\eta(0)$ változó kezdeti eloszlásától függetlenül létezik a $\{P_k\}$ határeloszlás és fennáll*

$$(5)\qquad P_k=\sum_{r=k}^{m-1}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}B_r,$$

ahol B_r a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentuma, amelynek értéke

$$(6)\qquad B_r=C_r\frac{\sum\limits_{j=r}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}},$$

ahol $C_0=1$ és $r=1,2,\ldots$-re

$$(7)\qquad C_r=\prod_{i=1}^{r}\frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)}.$$

BIZONYÍTÁS: Könnyen látható, hogy az $\{\eta_n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ valószínűségi változók sorozata Markov-láncot alkot $\mathbf{P}\{\eta_{n+1}=k\,|\,\eta_n=j\}=p_{jk}$ átmenetvalószínűségekkel, ahol $j=0,1,\ldots,m-2$-re

$$(8)\qquad p_{jk}=\binom{j+1}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\,dF(x)$$

és

$$(9)\qquad p_{m-1,k}=p_{m-2,k}.$$

Esetünkben a Markov-lánc ergodikus; tehát az η_1 változó kezdeti eloszlásától függetlenül léteznek a $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k$ $(k=0,1,\ldots,m-1)$ határvalószínűségek, éspedig a

$$(10)\qquad P_k=\sum_{j=k-1}^{m-1}p_{jk}P_j\qquad(k=0,1,\ldots,m-1)$$

egyenletrendszer

$$\sum_{k=0}^{m-1} P_k = 1 \tag{11}$$

feltételnek eleget tevő egyértelműen meghatározott megoldásai (vö. W. FELLER [4] p. 325.).

A (10) és (11) egyenletrendszer megoldására vezessük be az

$$U(z) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k z^k \tag{12}$$

generátorfüggvényt. Erre (10) alapján a következő integrálegyenlet írható fel:

$$\begin{aligned} U(z) &= \int_0^\infty (1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,dF(x) + \\ &+ (1-z)P_{m-1}\int_0^\infty e^{-\mu x}(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})^{m-1}\,dF(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Vezessük be most a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás

$$B_r = \sum_{k=r}^{m-1} \binom{k}{r} P_k \tag{14}$$

binomiális momentumait. Könnyen belátható, hogy

$$B_r = \frac{1}{r!}\left(\frac{d^r U(z)}{dz^r}\right)_{z=1}. \tag{15}$$

Most (11) szerint $B_0 = 1$ és (13)-ból r-szeres differenciálással azt kapjuk, hogy

$$B_r = \left[B_r + B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1}P_{m-1}\right]\int_0^\infty e^{-r\mu x}\,dF(x), \quad (r = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{16}$$

Legyen rövidség kedvéért

$$\varepsilon_r = \varphi(r\mu) = \int_0^\infty e^{-r\mu x}\,dF(x).$$

Ekkor (16) a következő alakban írható

$$B_r = \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1}\frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}B_{m-1}, \tag{17}$$

ugyanis $P_{m-1} = B_{m-1}$. A (17) egyenletrendszer a B_r ismeretlenekre egyszerűen megoldható. Gondoljuk egy pillanatra B_{m-1}-et adottnak, ekkor (17) a B_r ismeretlenekre változó együtthatós lineáris differenciaegyenlet, amely könnyen megoldható (vö. CH. JORDAN [8], p. 583). A megoldás

$$B_r = C_r \left[1 - B_{m-1} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}\right],$$

ahol $C_0 = 1$ és

$$C_r = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} \cdots \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}.$$

Ha most a fenti egyenletben $r = m-1$, akkor azt nyerjük, hogy

$$B_{m-1} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}$$

és így végül

$$B_r = C_r \frac{\sum_{j=r}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{18}$$

ami megegyezik (6)-tal.

A P_k ismeretleneket

$$P_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0}$$

szolgáltatja. $U(z)$ deriváltjai a $z = 1$ helyen ismeretesek. Ezek segítségével minden nehézség nélkül előállíthatók $U(z)$ deriváltjai a $z = 0$ helyen, azaz a P_k értékek is felírhatók. Célszerűbb azonban JORDAN KÁROLY képlete, amely a valószínűségeket közvetlenül a binomiális momentumokkal fejezi ki. Eszerint

$$P_k = \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r, \tag{19}$$

ami bizonyítja (5)-öt. A (19) képlet könnyen nyerhető (14)-ből, ha annak mindkét oldalát $(-1)^{r-k}\binom{r}{k}$-val szorozzuk és a kapott egyenleteket összegezzük.

2. §. A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

2. TÉTEL: *Ha $\alpha < \infty$ akkor az $\eta_i(0)$ valószínűségi változó kezdeti eloszlásától függetlenül létezik a $\{P_k^*\}$ határeloszlás, éspedig fennáll*

$$P_k^* = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r^*, \tag{20}$$

ahol B_r^* a $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentuma, amelyre fennáll $B_0^* = 1$ és $r = 1, 2, \ldots, m$-re

$$B_r^* = \frac{m C_{r-1}}{r} \frac{\sum_{j=r-1}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{1 + m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{21}$$

ahol C_j jelentése a (7) szerinti.

BIZONYÍTÁS: Néhány segédtételre lesz szükségünk.

1. SEGÉDTÉTEL: *Jelölje $M^*(t)$ a $(0, t)$ időközben előforduló $E_{m-1} \to E_m$ átmenetek várható számát. Tetszőleges $h > 0$-ra fennáll*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M^*(t+h) - M^*(t)}{h} = \frac{m\mu}{1 + m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}. \tag{22}$$

Ez a következőképpen igazolható. Tekintsük az $\{\eta_n\}$ Markov-láncnál az E_{m-1} állapotot. Az E_{m-1} állapot visszatérő állapot és a visszatérésig megtett lépések számának várható értéke $1/P_{m-1}$ (vö.: W. FELLER [4], 325.). Két egymást követő $E_{m-1} \to E_m$ átmenet között eltelt időtartam összetevődik a kezelő szempontjából egy szünetből és egy javítási periódusból. A szünet hosszának várható értéke $1/\mu m$ és a javítási periódus hosszának várható értéke α/P_{m-1}, ugyanis egy javítás átlagos időtartama α és az előzőek szerint egy javítási periódusban végzett javítások várható száma $1/P_{m-1}$. Az egymást követő $E_{m-1} \to E_m$ átmenetek között eltelt időtartamok, mint könnyen belátható, egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Közös várható értékük a fentiek szerint

$$\frac{1}{m\mu} + \frac{\alpha}{P_{m-1}} = \frac{1}{m\mu} \left[1 + m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}\right],$$

$P_{m-1} = B_{m-1}$ (6) alakjának figyelembevételével. Most (22) baloldala egyenlő ennek a várható értéknek reciprok értékével, mégpedig J. L. DOOB [3] tétele szerint, ha az $E_{m-1} \to E_m$ átmenetek között eltelt időtartamok eloszlása nem szinguláris eloszlás, vagy D. BLACKWELL [2] tétele szerint, ha a szóban forgó eloszlás nem rácsos eloszlás. Esetünkben mindkét feltétel teljesül és így fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M^*(t+h) - M^*(t)}{h} = \frac{m\mu P_{m-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}},$$

amely megegyezik (22)-vel.

2. SEGÉDTÉTEL: *Jelölje $M(t)$ a $(0, t)$ időközben előforduló τ_n időpontok várható számát, azaz a $(0, t)$ időközben befejeződő javítások várható számát.*

Tetszőleges $h>0$-ra fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+h)-M(t)}{h}=\frac{m\mu\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{1+m\alpha\mu\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{23}$$

Jelölje $M_n(t)$ a $(0,t)$ időközben befejeződő olyan javítások várható számát, amelyek egy javítási periódus n-edik javítását követik. Ekkor felírható, hogy

$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}M_n(t). \tag{24}$$

Foglalkozzunk most $M_n(t)$-vel. Az említett feltételeknek megfelelő időpontoknak egymástól való távolságai egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Közös eloszlásfüggvényük kielégíti J. L. DOOB [3] és D. BLACKWELL [2] feltételeit és így a $\lim\limits_{t\to\infty}[M_n(t+h)-M_n(t)]/h$ határérték létezik. Ha pedig ez a határérték létezik, akkor nyilvánvalóan megegyezik a $\lim\limits_{t\to\infty}M_n(t)/t$ határértékkel. Ezen utóbbi pedig könnyen kiszámítható. Jelölje ugyanis Q_n annak a valószínűségét, hogy egy javítási periódus legalább n javításból áll. Ennek segítségével felírható, hogy

$$Q_nM^*(t)\leqq M_n(t)\leqq Q_n[M^*(t)+1].$$

Innen

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_n(t)}{t}=Q_n\lim_{t\to\infty}\frac{M^*(t)}{t}=Q_n\frac{m\mu P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}},$$

ugyanis a $\lim\limits_{t\to\infty}M^*(t)/t$ határérték megegyezik a (22) kifejezéssel. Így tehát

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_n(t+h)-M_n(t)}{h}=Q_n\frac{m\mu P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}}. \tag{25}$$

Most, mivel egy javítási periódusban végzett javítások várható száma

$$\sum_{n=1}^{\infty}Q_n=\frac{1}{P_{m-1}},$$

tehát (24) szerint

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+h)-M(t)}{h}=\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n(t+h)-M_n(t)}{h}=\frac{m\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}. \tag{26}$$

A (26) kifejezésben a határérték tagonként képezhető, ugyanis a fentiek és $M^*(t+h)-M^*(t)\leqq 1+M^*(h)$ következtében fennáll $\frac{M_n(t+h)-M_n(t)}{h}\leqq$ $\leqq Q_n\frac{M^*(t+h)-M^*(t)+1}{h}\leqq Q_n\frac{2+M^*(h)}{h}$ és így a (26) sor egyenletesen konvergens.

3. SEGÉDTÉTEL: *Jelölje* $M_k^*(t)(k=0,1,2,\ldots,m-1)$ *a* $(0,t)$ *időközben előforduló* $E_k \to E_{k+1}$ *átmenetek várható számát. Tetszőleges* $h>0$*-ra fennáll, hogy*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_k^*(t+h)-M_k^*(t)}{h} = \frac{\mu m P_k}{m\alpha\mu+P_{m-1}}. \tag{27}$$

Az 1. SEGÉDTÉTEL az állítást $k=m-1$-re bizonyítja. A (27) baloldalán álló határérték létezését J. L. DOOB [3] és D. BLACKWELL [2] tétele biztosítja, ugyanis az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek között eltelt időtartamok egyforma eloszlású független valószínűségi változók, amelyek eloszlása kielégíti az említett tételek feltételeit. Ha a (27) határérték létezik, úgy nyilvánvalóan megegyezik a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_k^*(t)}{t}$$

határértékkel. Ezen utóbbi határérték pedig könnyen láthatóan P_k-szorosa a $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t}$ határértéknek, amely utóbbi megegyezik (23)-mal.

Most rátérünk a 2. TÉTEL bizonyítására, vagyis a $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás meghatározására. Tekintsük először a P_m^* valószínűséget. Egyszerűen felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=m\} = \int_0^t e^{-m\mu(t-x)}\, dM^*(x).$$

Ennek alapján (22) felhasználásával kimutatható, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=m\} = P_m^*$ létezik és fennáll

$$P_m^* = \frac{P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}} = \frac{1}{1+m\alpha\mu \sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}. \tag{28}$$

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény R. E. A. C. PALEY és N. WIENER [12] (p. 59.) tétele alapján is belátható, ugyanis a $\mathbf{P}\{\eta(t)=m\}$ valószínűségre, mint t függvényére felírható egy Volterra-féle integrálegyenlet és a megoldás aszimptotikus értékénének megállapítására alkalmazható az említett tétel.

Jelölje most $N_m(t)$ a $(0,t)$ időközben előforduló $E_m \to E_{m-1}$ átmenetek várható számát. Erre fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} N_m'(t) = m\mu P_m^*, \tag{29}$$

ugyanis nyilvánvalóan fennáll $N_m(t+\Delta t)=N_m(t)+\mathbf{P}\{\eta(t)=m\}\, m\mu\Delta t+o(\Delta t)$ és mint láttuk $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=m\}=P_m^*$ létezik.

Most $k=0, 1, \ldots, m-1$-re felírható, hogy

$$(30) \qquad P_k^* = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \sum_{j=k}^{m-1} p_{jk}^* P_j,$$

ahol $j=0, 1, \ldots, m-2$-re

$$(31) \qquad p_{jk}^* = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}[1-F(x)]\,dx$$

és

$$(32) \qquad p_{m-1,k}^* = p_{m-2,k}^*.$$

(30) fennállása a következőképpen indokolható: az $\eta(t)=k$ esemény több egymást kizáró módon jöhet létre, $t-x$ időpontban, (ahol $0<x<t$) történik egy $E_j \to E_{j+1}$ átmenet $(j=1, 2, \ldots, m-2)$ és a $t-x$ időpontban kezdődő javítás x időtartamnál tovább tart és t időpontig leáll még $j+1-k$ gép, vagy $t-x$ időpontban történik egy $E_{m-1} \to E_m$ átmenet és az ezen időpontban kezdődő javítás x időtartamnál tovább tart és t időpontig leáll még $m-k-1$ gép. Felírva ilyen módon a $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}$ valószínűséget (27) és (29) felhasználásával nyerhető (30). Így a P_k^* valószínűségeket kifejeztük a $\{P_j\}$ valószínűségeloszlás segítségével. Látni fogjuk, hogy ez még egyszerűbben is megtehető.

Most bevezetjük a $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás

$$(33) \qquad B_r^* = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} P_k^*$$

binomiális momentumait. (30) alapján (16)-hoz hasonlóan felírható, hogy

$$(34) \quad B_r^* = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \left[B_r + B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} B_{m-1}\right] \int_0^\infty e^{-r\mu x}[1-F(x)]\,dx.$$

Most, mivel

$$\int_0^\infty e^{-r\mu x}[1-F(x)]\,dx = \frac{1-\varepsilon_r}{r\mu},$$

(16) tekintetbevételével azt nyerjük, hogy $r=1, 2, \ldots, m-1$-re

$$B_r^* = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \frac{1-\varepsilon_r}{r\mu\varepsilon_r} B_r$$

és $B_0^*=1$ valamint $B_m^*=P_m^*$ szerint

$$B_m^* = \frac{P_{m-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}}.$$

Így igazoltuk a (21) helyességét. (20) pedig minden további nélkül következik (21)-ből.

KOROLLÁRIUM. *A $\{P_k^*\}$ és $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás a következő egyszerű kapcsolatban áll egymással*

$$P_k^* = \frac{m P_{k-1}}{k[m\alpha\mu + P_{m-1}]} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{35}$$

és

$$P_0^* = 1 - \frac{m}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{P_{k-1}}{k}. \tag{36}$$

BIZONYÍTÁS: A (17) és (34) képlet segítségével felírható, hogy

$$B_r^* = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \left[B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} B_{m-1}\right] \qquad (r = 1, 2, \ldots, m-1),$$

míg $B_0^* = 1$ és $B_m^* = P_m^*$. Ennek figyelembevételével (20) alapján adódik $\{P_k^*\}$ fenti alakja.

MEGJEGYZÉS: A fenti eredmény könnyen belátható abból, hogy adott idő alatt előforduló $E_{k-1} \to E_k$ és $E_k \to E_{k-1}$ átmenetek száma legfeljebb 1-gyel különbözhet egymástól. Ugyanez érvényes természetesen a várható értékekre is. Ha $N_k(t)$ jelöli a $(0, t)$ időközben előforduló $E_k \to E_{k-1}$ átmenetek várható számát, akkor felírható, hogy $|M_{k-1}^*(t) - N_k(t)| \leqq 1$.

(27) szerint fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_{k-1}^*(t)}{t} = \frac{m\mu P_{k-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}}. \tag{37}$$

$N_k(t)$-re felírható, hogy

$$N_k(t + \Delta t) = N_k(t) + \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} k\mu \Delta t + o(\Delta t)$$

azaz

$$\frac{dN_k(t)}{dt} = k\mu \mathbf{P}\{\eta(t) = k\}$$

és így

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dN_k(t)}{dt} = k\mu P_k^* \tag{38}$$

vagy még inkább

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_k(t)}{t} = k\mu P_k^*. \tag{39}$$

(37) és (39) megegyezéséből következik (35).

3. §. A stacionárius folyamat

Mindenekelőtt a $\chi(t)$ valószínűségi változó határeloszlását vizsgáljuk meg, Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be.

3. TÉTEL. *Jelölje $\chi(t)$ valószínűségi változó a t időpontban (esetleg) folyamatban lévő javításnak a befejezéséig eltelt időtartamát. Ha α véges, akkor léteznek a következő határeloszlások*

(40) $$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x \mid \eta(t) = k\} = F_k^*(x), \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1),$$

ahol $k = 1, 2, \ldots, m-2$ esetén

$$F_k^*(x) = \frac{k\mu}{P_{k-1}} \sum_{j=k}^{m-1} \binom{j+1}{k} P_j \int_0^\infty e^{-k\mu y}(1-e^{-\mu y})^{j+1-k}[F(y+x)-F(y)]\,dy.$$

és

$$F_{m-1}^*(x) = \frac{(m-1)\mu P_{m-1}}{P_{m-2}} \int_0^\infty e^{-(m-1)\mu y}\,[F(y+x)-F(y)]\,dy.$$

BIZONYÍTÁS: Nyilvánvalóan felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x, \eta(t) = k\} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{m-1} \binom{j+1}{k} \int_0^t e^{-k\mu(t-u)}(1-e^{-\mu(t-u)})^{j+1-k}[F(t-u+x)- \\ \qquad -F(t-u)]\,dM_j^*(u), \quad \text{ha } k = 0, 1, \ldots, m-2, \\ \int_0^t e^{-(m-1)\mu(t-u)}[F(t-u+x)-F(t-u)]\,dN_m(u), \\ \qquad \text{ha } k = m-1. \end{cases}$$

Ugyanis a szóban forgó esemény úgy jöhet létre, hogy u időpontban (ahol $0 \leqq u \leqq t$) vagy $E_j \to E_{j+1}$ átmenet jön létre (ha $k = 0, 1, \ldots, m-2$) vagy $E_m \to E_{m-1}$ átmenet (ha $k = m-1$) és az ebben a pillanatban kezdődő javítás $(t, t+x)$ időközben fejeződik be és (u, t) időközben leáll $j+1-k$ gép illetve nem áll le újabb gép. Most (27) és (38) tekintetbevételével meghatározhatjuk a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x, \eta(t) = k\}$ határértéket. Mivel $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P_k^*$, tehát (40) a következőképpen adódik:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x \mid \eta(t) = k\} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x, \eta(t) = k\}}{\mathbf{P}\{\eta(t) = k\}}.$$

MEGJEGYZÉS: A fentiek alapján könnyen nyerhető, hogy

(41) $$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x \mid \eta(t) < m\} = F^*(x),$$

ahol

$$F^*(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x [1-F(y)]\,dy.$$

A stacionárius folyamat. Ha feltesszük, hogy az előző fejezetekben vizsgált folyamat kezdeti eloszlását $\mathbf{P}\{\eta(0)=k\}=P_k^*$ és $\mathbf{P}\{\chi(0)\leqq x\,|\,\eta(0)=k\}=F_k^*(x)$ $(k=0,1,\ldots,m-1)$ valószínűségek határozzák meg, akkor érvényes lesz, hogy az $\{\eta(t),\chi(t)\}$ változópár eloszlása minden időpontban megegyezik a kezdeti eloszlással, továbbá fennáll, hogy a $(0,t)$ időközben előforduló $E_k\rightarrow E_{k+1}$ átmenetek várható száma

$$M_k^*(t)=\frac{m\mu P_k}{m\alpha\mu+P_{m-1}}\,t \tag{42}$$

és a $(0,t)$ időközben előforduló $E_k\rightarrow E_{k-1}$ átmenetek várható száma

$$N_k^*(t)=\frac{m\mu P_{k-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}}\,t. \tag{43}$$

A fenti tulajdonságokkal rendelkező $\{\eta(t),\chi(t)\}$ folyamatot *stacionárius folyamat*nak nevezzük. A legtöbb gyakorlati alkalmazásnál a stacionárius folyamat játszik fontos szerepet, azaz olyan folyamat, amelynél a kezdeti eloszlás hatása már kiküszöbölődik és időben változatlan törvények lesznek érvényben. Most néhány tételt bizonyítunk be a stacionárius folyamatra nézve.

4. TÉTEL. *Az össztermelés várható időtartama* $(0,T)$ *időközben stacionárius folyamat esetén*

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T\eta(t)\,dt\right\}=T\,\frac{m\sum\limits_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{1+m\alpha\mu\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{44}$$

BIZONYÍTÁS: Esetünkben fennáll, hogy

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T\eta(t)\,dt\right\}=\int_0^T\mathbf{M}\{\eta(t)\}\,dt$$

és $\mathbf{M}\{\eta(t)\}=B_1^*$, ahol B_1^*-ot (21) szolgáltatja.

Ezután definiáljuk a $\xi(t)$ valószínűségi változót a következőképpen

$$\xi(t)=\begin{cases}1, & \text{ha}\quad \eta(t)<m\\ 0, & \text{ha}\quad \eta(t)=m.\end{cases}$$

5. TÉTEL. *Stacionárius folyamat esetén a kezelő* $(0,T)$ *időközben javítással töltött idejének várható értéke*

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T\xi(t)\,dt\right\}=T\,\frac{m\alpha\mu\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{1+m\alpha\mu\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{45}$$

BIZONYÍTÁS: Fennáll, hogy

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T \xi(t)\,dt\right\} = \int_0^T \mathbf{M}\{\xi(t)\}\,dt$$

és $\mathbf{M}\{\xi(t)\} = \mathbf{P}\{\xi(t) = 1\} = \mathbf{P}\{\eta(t) < m\} = 1 - P_m^*$, ahol P_m^*-t (28) szolgáltatja.

6. TÉTEL. *Jelölje stacionárius folyamat esetén egy leálló gép várakozási idejének eloszlásfüggvényét $G_m(x)$ és várható értékét Γ_m. Ezekre fennáll, hogy*

$$G_m(x) = \sum_{k=1}^{m-1} P_{k-1} F_{k-1}^*(x) * F_{m-k-1}(x) + P_{m-1} F_0(x), \tag{46}$$

ahol $F_n(x)$ jelöli az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolucióját ($F_0(x) = 1$, ha $x \geq 0$ és $F_0(x) = 0$, ha $x < 0$) és ha $\sigma < \infty$, akkor

$$\Gamma_m = (m-1)\alpha + \left[1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}\right]\left[\frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{1-\varepsilon_1}\right]. \tag{47}$$

BIZONYÍTÁS: Annak a valószínűsége, hogy stacionárius folyamatnál egy gépleállás éppen $E_k \to E_{k-1}$ átmenet legyen

$$\frac{kP_k^*}{\sum_{k=0}^{m} kP_k^*} = \frac{kP_k^*}{B_1^*} = P_{k-1}.$$

Ha egy adott időpontban $E_k \to E_{k-1}$ átmenet történik és $k = m$ úgy nincs várakozási idő, míg ha $k = 1, 2, \ldots, m-1$, úgy a várakozási idő összetevődik az éppen folyó javítás befejezéséig tartó időből ($F_{k-1}^*(x)$ az eloszlásfüggvénye) és a korábban leállt $m-k-1$ gép javításának időtartamából ($F_{m-k-1}(x)$ az eloszlásfüggvénye). Ennek figyelembevételével adódik (46).

Ha tekintetbe vesszük, hogy $\eta(t) < m$ feltétel mellett a t időpontban folyamatban lévő javítás befejezéséig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye $F^*(x)$ és

$$\int_0^\infty x\,dF^*(x) = \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2\alpha}$$

akkor a Γ_m várható értékre könnyen adódik, hogy

$$\Gamma_m = \sum_{k=1}^{m-1} P_{k-1}\left[\frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2\alpha} + (m-k-1)\alpha\right].$$

Innen B_1 (6) és P_{m-1} (5) alakjának figyelembevételével az adódik, hogy

$$\Gamma_m = (m-1)\alpha + (1 - P_{m-1})\left[\frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{1-\varepsilon_1}\right], \tag{48}$$

amely megegyezik (47)-tel.

1. MEGJEGYZÉS. Tárgyalásunk során egyedül $G_m(x)$ meghatározásánál használtuk fel azt a feltételt, hogy a kezelő a javításokat a leállások sorrendjében végzi el. A többi eredmény Γ_m értékét is beleértve, független attól, hogy a gépek javítása milyen sorrendben történik.

2. MEGJEGYZÉS. A. J. HINCSIN [6] munkájában közölt gondolatmenetét követve azt nyertük volna eredményül, hogy a várakozási idő várható értéke

$$\Gamma'_m = (m-1)\alpha - \frac{1}{\mu}(1-P_{m-1}), \tag{49}$$

amely például független a javítási idő szórásától. Erre HINCSIN a következő meggondolással jut: Stacionárius esetben a gépleállások időegységre eső várható száma a (40) képlet szerint $1-P^*_m$. Tehát egy gép leállásainak várható száma $\frac{1-P^*_m}{m}$ és minden egyes leállást várakozási idő javítási idő és működési idő követ, rendre $\Gamma'_m, \alpha, 1/\mu$ várható értékkel, tehát

$$\frac{1-P^*_m}{m}\left[\Gamma'_m+\alpha+\frac{1}{\mu}\right]=1$$

és innen adódik (49). Ez Γ_m-mel csak abban a speciális esetben egyezik meg, ha $F(x)$ exponenciális eloszlást követ. HINCSIN itt lényegében véletlen számú valószínűségi változó összegének várható értékére vonatkozó ismert A. WALD-féle képletet alkalmazza, ámbár jelenleg nem teljesülnek az ehhez szükséges feltételek (vö. A. N. KOLMOGOROV és J. V. PROCHOROV [9]).

3. MEGJEGYZÉS. Abban az esetben, ha $m\to\infty$ és $\mu=\lambda\, m$, ahol λ pozitív állandó, fennáll $\lambda\alpha<1$ esetben, hogy

$$P_{m-1}=(1-\lambda\alpha)-\frac{\lambda\alpha}{m(1-\lambda\alpha)}\left[\frac{\lambda(\alpha^2-\sigma^2)}{2\alpha}-1\right]+o\left(\frac{1}{m}\right).$$

P_{m-1} fenti alakjának tekintetbevételével az adódik, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\Gamma_m=\lim_{m\to\infty}\Gamma'_m=\frac{\lambda\alpha}{1-\lambda\alpha}\,\frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha}, \tag{50}$$

amely határérték megegyezik A. J. HINCSIN [7] ismert eredményével.

Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

IRODALOM

[1] H. ASHCROFT: The productivity of several machines under the care of one operator *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B. **12** (1950) 145—151.

[2] D. BLACKWELL: A renewal theorem *Duke Mathematical Journal*, **15** (1948) 145—150.

[3] J. L. DOOB: Renewal theory from the point of view of the theory of probability *Transactions of the American Mathematical Society* **63** (1948) 422—438.

[4] W. FELLER: An introduction to probability theory and its applications (New-York, 1950).

[5] TH. FRY: Probability and its engineering uses (New-York, 1928).

[6] А. Я. Хинчин: О среднем времени простоя станков [Математический Сборник **40** (1933) 119—123].

[7] А. Я. Хинчин: Математическая Теориа стационарной очереди [Математический Сборник **39** (1932) 73—84].

[8] CH. JORDAN: Calculus of finite differences (Budapest, 1939).

[9] А. Н. Колмогоров и Ю. В. Прохоров: О суммах случайного числа случайных слагаемых [Успехи Математических Наук **4** в. 4 (1949) 168—172].

[10] R. KRONIG: On time losses in machinery undergoing interruption, I. Physica, **10** (1943) 215—224.

[11] R. KRONIG—H. MONDRIA: On time losses in machinery undergoing interruption, II. (Physica **10** (1943) 331—336.

[12] R. E. A. C. PALEY—N. WIENER: Fourier-transforms in the complex domain (New-York, 1934).

[13] C. PALM: The distribution of repairman in servicing automatic machines, *Industritidningen Norden* **75** (1947) 75—80, 90—94, 119—123.

[14] TAKÁCS L.: Gépegyüttállások valószínűségszámítási tárgyalása tekintettel a várakozási időkre. *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának közleményei* **1** (1951) 228—234.

(Beérkezett: 1956. XII. 22.)

MEGJEGYZÉSEK EGY SZTOCHASZTIKUS MATRIX SPEKTRÁLFELBONTÁSÁHOZ

RÓZSA PÁL kandidátus

Tekintsük az alábbi sztochasztikus matrixot:[1]

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{n-1}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \frac{1}{n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{P}$ matrix számottevő szerepet játszik mind az elmélet, mind pedig az alkalmazások legkülönbözőbb területein. Már J. J. SYLVESTER felismerte, hogy a $\mathbf{Q}=n\mathbf{P}$ matrix sajátértékei a 0-ra szimmetrikusan helyezkednek el, és olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek különbsége 2. J. J. SYLVESTER ezt az állítását bizonyítás nélkül közölte [5]. A $\mathbf{Q}$ matrix szimmetrizált alakja[2] szerepel a kvantummechanikában.[3] E. SCHRÖDINGER is felismeri a sajátértékeket, de a bizonyítást, — amint dolgozatában ő maga megírja, — nem sikerült megtalálnia. A valószínűségszámításban a $\mathbf{P}$ matrix a Markov-láncok elméletében fordul elő, mint a hőátadás „urnamodelljé"-nek megfelelő sztochasztikus

[1] Ha egy nem-negatív elemű matrix minden egyes sorában az elemek összege 1, akkor azt *sztochasztikus* matrixnak nevezzük.

[2] A $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}=\left\langle\sqrt{\binom{n}{k}}\right\rangle$ diagonálmatrix segítségével a $\mathbf{Q}$ matrix hasonlósági transzformációval szimmetrikus alakra hozható: $\mathbf{S}=\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$. Valóban, mivel $q_{i,i-1}=i-1$ és $q_{i-1,i}=n-i+2$, tehát

$$s_{i,i-1}=\sqrt{\binom{n}{i-1}}\cdot(i-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{\binom{n}{i-2}}}=\sqrt{(i-1)(n-i+2)} \text{ és}$$

$$s_{i-1,i}=\sqrt{\binom{n}{i-2}}\cdot(n-i+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{\binom{n}{i-1}}}=\sqrt{(i-1)(n-i+2)}.$$

[3] Lásd [4], 480. oldalt.

matrix.[4] A **P** matrix teljes spektrálfelbontását M. KAC állítja elő egyik dolgozatában,[5] ahol **P** a Brown-féle mozgás elméletével kapcsolatban kerül alkalmazásra. M. KAC generátorfüggvény segítségével határozza meg a sajátvektorok elemeit, s eljárása automatikusan szolgáltatja J. J. SYLVESTER állításának a bizonyítását is.

Az alábbiakban néhány megjegyzéssel kívánjuk M. KAC eredményeit kiegészíteni. Ezek a következő tételben foglalhatók össze.

TÉTEL. *A* **P** *sztochasztikus matrix teljes spektrálfelbontását*

$$\mathbf{P}=\left[\frac{a_{ik}}{\sqrt{2^n}}\right]\left\langle 1-\frac{2k}{n}\right\rangle\left[\frac{a_{ik}}{\sqrt{2^n}}\right],\quad i,k=0,1,\ldots,n$$

adja, ahol

$$a_{ik}=(-2)^k P_k^{(i-k,\,n-i-k)}(0),$$

($P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ az α és β paraméterekhez tartozó k-adrendű Jacobi-polinomokat jelenti), *tehát* **P** *involutórius transzformációval diagonalizálható.*

A tétel bizonyítását a következő lépésekben végezzük el:

1. M. KAC eredményeinek a felhasználásával meghatározzuk a baloldali sajátvektorok komponenseit és ennek során bebizonyítjuk, J. J. SYLVESTER állítását.

2. A sajátvektorokat annak a feltételnek a felhasználásával normáljuk, hogy a hasonlósági transzformációval szimmetrizált **P** sajátvektorai *ortogonális* matrixot alkotnak.

3. Kimutatjuk, hogy **P** ily módon normált sajátvektoraiból alkotott matrix *involutórius.*

1. A baloldali sajátvektorokat az

$$\mathbf{Y}^*\mathbf{P}=\varLambda\mathbf{Y}^* \tag{1}$$

matrixegyenlet definiálja, ahol a $\varLambda$ diagonálmatrix elemei **P** sajátértékei, $\mathbf{Y}^*$ sorai pedig **P** baloldali sajátvektorai. Behelyettesítés után az (1) egyenlet az

$$(n-k+1)y_{i,k-1}-n\lambda_i y_{ik}+(k+1)y_{i,k+1}=0,\quad k=0,1,\ldots,n \tag{2}$$

másodrendű, változó együtthatójú lineáris differenciaegyenletre vezet, melynek az

$$\begin{aligned} y_{i,-1}&=0\\ y_{i,n+1}&=0\end{aligned} \tag{3}$$

feltételeket kielégítő megoldása az i-edik sajátvektor y_{ik} elemeit szolgáltatja. M. KAC a (2) egyenleteket $k=n+1, n+2,\ldots$ értékekre folytatólagosan felírva, végtelen sok egyenletből álló egyenletrendszert nyer. Ha az egyenleteket

[4] Lásd pl. [3], 550—554. oldalakat.
[5] Lásd [2], 379—385. oldalakat.

rendre t^k kifejezéssel megszorozzuk és összeadjuk, akkor a

(4) $$g_i(t)=\sum_{k=0}^{\infty} y_{ik}t^k \qquad i=0,1,\ldots,n$$

generátorfüggvényekre a

$$g_i'(t)=n\frac{\lambda_i-t}{1-t^2}g_i(t) \qquad i=0,1,\ldots,n$$

differenciálegyenleteket nyerjük, melyek megoldására

(5) $$g_i(t)=c_i(1+t)^{\frac{n}{2}(1+\lambda_i)}\cdot(1-t)^{\frac{n}{2}(1-\lambda_i)}, \qquad i=0,1,\ldots,n$$

adódik. Ha most tekintetbe vesszük, hogy a (3) feltétel csak akkor teljesül, ha $g_i(t)$ polinom, akkor a sajátértékekre, — amint ez az (5) összefüggésből közvetlenül kiolvasható, — azt kapjuk, hogy

$$\lambda_i=1-\frac{2i}{n}, \qquad i=0,1,\ldots,n.$$

Ezeket az értékeket behelyettesítve a generátorfüggvények (5) kifejezésébe, ezekre

(6) $$g_i(t)=c_i(1+t)^{n-i}(1-t)^i=c_i\sum_{k=0}^{n}a_{ik}^{(n)}t^k, \qquad i=0,1,\ldots,n$$

adódik.

Bevezetve az $\mathbf{A}=[a_{ik}^{(n)}]$, $n+1$-edrendű kvadratikus matrixot és a $\mathbf{C}=\langle c_0,\ldots,c_n\rangle$ diagonálmatrixot, a (4) és (6) kifejezésekből a baloldali sajátvektorokra az

(7) $$\mathbf{Y}^*=\mathbf{CA}$$

összefüggést kapjuk, ahol $\mathbf{C}$ elemei egyelőre tetszőlegesen választhatók.

Az $a_{ik}^{(n)}$ értékeket most kifejezzük a Jacobi-polinomok segítségével. Ismeretes, hogy az α és β paraméterekhez tartozó k-adrendű Jacobi-polinomot előállító Rodrigues-formula a következő:[6]

(8) $$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta P_k^{(\alpha,\beta)}(t)=\frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\{(1-t)^{k+\alpha}(1+t)^{k+\beta}\}.$$

Az $a_{ik}^{(n)}$ értékeket definiáló (6) összefüggésből viszont

(9) $$a_{ik}^{(n)}=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\{(1-t)^i(1+t)^{n-i}\}_{t=0}.$$

A (8) és (9) kifejezések összehasonlításából kiolvasható, hogy

$$a_{ik}^{(n)}=(-2)^k P_k^{(i-k,\,n-i-k)}(0).$$

[6] Lásd pl. [6], 66. oldalt.

2. A **C** matrix elemeit abból a feltételből határozzuk meg, hogy a hasonlósági transzformációval szimmetrizált **P** matrix sajátvektorai ortogonális matrixot alkotnak.

Ha **X** jelenti a jobboldali sajátvektorokból, mint oszlopvektorokból alkotott matrixot, akkor **P** spektrálfelbontása a

$$\mathbf{P}=\mathbf{X}\varLambda\mathbf{Y}^*$$

alakban írható fel, ahol

$$\mathbf{Y}^*\mathbf{X}=\mathbf{E}. \tag{10}$$

Felhasználva a [2] lábjegyzetben tett megjegyzésünket, az **S** matrix spektrálfelbontását a következő alakba írhatjuk:

$$\mathbf{S}=(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}})\varLambda(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}^*D^{-\frac{1}{2}}),$$

ahonnan

$$\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}=(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}^*\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}})^*$$

következik. Innen (7) behelyettesítésével az **X** matrixra

$$\mathbf{X}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{D}\mathbf{C} \tag{11}$$

adódik. A (7) és (11) összefüggések segítségével **C** meghatározására (10) alapján a következő kifejezést nyerjük:

$$\mathbf{C}^{-2}=\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{D}. \tag{12}$$

Ezzel a sajátvektorokat — legalábbis elvileg — meghatároztuk.

3. Végül kimutatjuk, hogy a fentiek szerint normált sajátvektorokból alkotott matrix involutórius, azaz

$$\mathbf{Y}^*=\mathbf{X}.$$

Ezt a következő két lépésben végezzük: először azt bizonyítjuk be, hogy

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{D}=\mathbf{A}, \tag{13}$$

azután azt, hogy

$$\mathbf{C}=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\mathbf{E}. \tag{14}$$

A (13) összefüggésre igen egyszerűen úgy jutunk, ha (6) alapján az $a_{ik}^{(n)}$ számokat a binomiális együtthatók segítségével fejezzük ki:

$$a_{ik}^{(n)}=\sum_{\nu}(-1)^{\nu}\binom{i}{\nu}\binom{n-i}{k-\nu}, \tag{15}$$

ahol ν értéke

$$\begin{array}{ll} k \leqq n-i & \text{esetén} \\ \nu = \begin{cases} 0, 1, \ldots, k, \\ 0, 1, \ldots, i, \end{cases} & \begin{array}{l} \text{ha } k \leqq i, \\ \text{ha } k \geqq i, \end{array} \\ k \geqq n-i & \text{esetén} \\ \nu = \begin{cases} k-n+i, \ldots, k \\ k-n+i, \ldots, i \end{cases} & \begin{array}{l} \text{ha } k \leqq i, \\ \text{ha } k \geqq i. \end{array} \end{array}$$

Szorozzuk meg a (15) egyenlőség mindkét oldalát $\binom{n}{i}$ értékével:

$$\binom{n}{i} a_{ik}^{(n)} = n! \sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!(i-\nu)!\,(k-\nu)!\,(n-i-k-\nu)!}.$$

A jobboldalon i és k szimmetrikus kifejezése áll, tehát

$$\binom{n}{i} a_{ik}^{(n)} = a_{ki}^{(n)} \binom{n}{k},$$

ahonnan közvetlenül adódik a (13) összefüggés.

Valamivel bonyolultabb (14) bizonyítása. Ehhez szükségünk van egy, az $a_{ik}^{(n)}$ számok között fennálló egyszerű összefüggésre, ami önmagában is érdekes, mert ennek alapján azok gyakorlatilag igen egyszerűen, rögtön táblázatosan írhatók fel. Tekintsük az

$$(1+t)\{(1+t)^{n-i}(1-t)^{i}\} \equiv \{(1+t)^{n-i+1}(1-t)^{i-1}\}(1-t)$$

azonosságot, ami (6) felhasználásával

$$(1+t)\sum_{k=0}^{n} a_{ik}^{(n)} t^{k} \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{i-1,k}^{(n)} t^{k} \cdot (1-t)$$

alakban írható. Innen rögtön következik az

$$a_{ik}^{(n)} + a_{i,k-1}^{(n)} = a_{i-1,k}^{(n)} - a_{i-1,k-1}^{(n)} \tag{16}$$

összefüggés. Az $a_{ik}^{(n)}$ együtthatók fenti, (6) definíciójából nyilvánvaló, hogy $a_{ok}^{(n)} = \binom{n}{k}$ és $a_{io}^{(n)} = 1$. Ezért az $a_{ik}^{(n)}$ számok rendszerét, — a Pascal-háromszöghöz hasonlóan, de nem egy elemből, hanem az első sor és oszlop elemeiből kiindulva, — (16) segítségével igen egyszerűen felépíthetjük. Például $n=4$ esetén az $a_{ik}^{(4)}$ számok táblázatát, — vagyis az $\mathbf{A}_4$ matrixot —

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

szolgáltatja.

Ezek után a (14) összefüggést a következőképpen bizonyítjuk. A (12) és (13) kifejezésekből következik, hogy

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{C}^{-2}.$$

Elegendő tehát azt kimutatni, hogy $\mathbf{A}^2=2^n\mathbf{E}$ vagyis

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik}^{(n)} a_{ki}^{(n)}=2^n, \qquad i=0,1,\ldots,n. \tag{17}$$

Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk: $n=1$ esetén, — amint ez a (6) összefüggésből nyilvánvaló, —

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \text{ innen } \mathbf{A}_1^2=2\mathbf{E}, \text{ azaz}$$

$$\sum_{k=0}^{1} a_{ik}^{(1)} a_{ki}^{(1)}=2.$$

Most, — feltéve, hogy (17) teljesül, — meghatározzuk

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_{ik}^{(n+1)} a_{ki}^{(n+1)}$$

értékét. Az $a_{ik}^{(n)}$ számokra érvényes (15) összefüggésből következik, hogy

$$a_{ik}^{(n+1)}=a_{ik}^{(n)}+a_{i,k-1}^{(n)}, \qquad \text{ha} \quad k=1,2,\ldots,n,$$

$$a_{io}^{(n+1)}=a_{io}^{(n)} \text{ és } a_{i,n+1}^{(n+1)}=a_{i,n}^{(n)},$$

valamint

$$a_{ki}^{(n+1)}=a_{ki}^{(n)}+a_{k,i-1}^{(n)}, \qquad \text{ha} \quad k=0,1,\ldots,n,$$

illetve — felhasználva a (16) összefüggést is, —

$$a_{ki}^{(n+1)}=a_{k-1,i}^{(n)}-a_{k-1,i-1}^{(n)}, \qquad \text{ha} \quad k=1,2,\ldots,n+1.$$

Ezzel

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_{ik}^{(n+1)} a_{ki}^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n} a_{ik}^{(n)}\left(a_{ki}^{(n)}+a_{k,i-1}^{(n)}\right)+\sum_{k=1}^{n+1} a_{i,k-1}^{(n)}\left(a_{k-1,i}^{(n)}-a_{k-1,i-1}^{(n)}\right)=$$

$$=2\sum_{k=0}^{n} a_{ik}^{(n)} a_{ki}^{(n)}=2^{n+1}.$$

(Itt kihasználtuk azt a körülményt, hogy $\mathbf{A}^2$ diagonál-matrix, vagyis $\sum_{k=0}^{n} a_{ik}^{(n)} a_{kj}^{(n)}=0$, ha $i \neq j$.)

Ezzel bebizonyítottuk, hogy érvényes (17), tehát (14) is. A (13) és (14) összefüggéseket a (7) és (11) kifejezésekbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{Y}^*=\mathbf{X}=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\mathbf{A},$$

vagyis az adott **P** matrix involutórius transzformációval diagonizálható, — és ezzel tételünket teljesen bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy a sajátvektorokat úgy is normálhatjuk, ahogy az a Markov-láncok elméletében szokásos. Ismeretes, hogy minden nem-széteső sztochasztikus matrixnak 1 egyszeres sajátértéke, és egyik sajátérték abszolút értéke sem nagyobb 1-nél, a hozzátartozó jobboldali sajátvektor komponensei pedig egyenlők. A Markov-láncok elméletében ezt a sajátvektort úgy normálják, hogy minden komponense 1 legyen, ekkor ugyanis a megfelelő baloldali sajátvektor komponensei, — mivel a biortogonalitás folytán összegük 1, — eloszlásfüggvényt alkotnak. Ezt nevezik stacionér eloszlásnak.[7] Ezek szerint a **P** sztochasztikus matrix spektrál-felbontását

$$\mathbf{P} = [a_{ik}^{(n)}] \langle \lambda_k \rangle \left[\frac{a_{ik}^{(n)}}{2^n} \right]$$

alakban is előállíthatjuk. Ekkor ugyanis a $\lambda_0 = 1$ sajátértékekhez tartozó jobboldali sajátvektor komponenseire $a_{i0}^{(n)} = 1$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, a baloldali sajátvektor komponenseire pedig $\frac{a_{ik}^{(n)}}{2^n} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$ adódik. A stacionér eloszlás tehát a binomiális eloszlás. Végül még annyit, hogy mivel $\lambda_n = -1$ is sajátértéke a **P** matrixnak, **P** *nem-primitív*,[8] tehát a $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mathbf{P}^\nu$ határérték nem létezik. Ez annyit jelent, hogy annak a Markov-láncnak, melynek matrixa **P**, nincs határeloszlása, tehát nem *ergodikus*.[9]

Megjegyzés. A bizonyítás 1. részében felhasználtam M. Kac eredményeit. Szükségesnek tartom megjegyezni, hogy tőle függetlenül ugyanazokra az eredményekre jutottam *„A matrixelmélet néhány új tételéről és azok alkalmazásairól differencia- és differenciálegyenletek megoldására"* című kandidátusi disszertációmban, melynek benyujtásakor M. Kac dolgozatát még nem ismertem.

[7] Lásd pl. [1], 351—359. oldalakat, [3], 536—546. oldalakat.

[8] Ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ jelenti egy nem-negatív elemű, nem-széteső (irreducibilis) **A** matrix valamennyi maximális abszolút értékű sajátértékét: $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_h|$, akkor $h = 1$ esetén **A** *primitív*, $h > 1$ esetén **A** *nem-primitív* matrix. Lásd [1], 345. oldalt.

[9] Lásd [3], 536—554. oldalakat.

IRODALOM

[1] Ф. Р. Гантмахер: Теория матриц. Государственное изд. техн.-теор. литературы, Москва, 1953.

[2] M. KAC: „Random walk and the theory of Brownian motion" *American Mathematical Monthly* **54** (1947) 369—391.

[3] RÉNYI A.: *Valószinűségszámitás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[4] E. SCHRÖDINGER: „Quantisierung als Eigenwertproblem," *Annalen der Physik* **80** (1926) 437—490.

[5] J. J. SYLVESTER: „Théorème sur les déterminants". *Nouvelles Annales de Mathématiques* **13** (1854) 305.

[6] G. SZEGŐ: *Orthogonal Polynomials.* American Mathematical Society, New-York, 1939.

(Beérkezett: 1957. IV. 9.)

NEMSZIMMETRIKUS KÖZÉPÉRTÉKEK

HOSSZÚ MIKLÓS (Miskolc)

1. §. Bevezetés

Az x, y (valós) mennyiségek (kváziaritmetikai) középértékének nevezzük azt az

$$(1) \qquad M(x,y)=\varphi\left[\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)\right], \qquad f(M)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$$

alakban felírható $M(x,y)$ kétváltozós (valós) függvényt, ahol $t \longleftrightarrow f(t)$ kölcsönösen egyértelmű leképezés és $t \longleftrightarrow \varphi(t)$ ennek az inverze. A rövidség kedvéért az (1) alatti kapcsolat fennállására (a szokástól eltérően, de a félreértés veszélye nélkül) használhatjuk azt a kifejezést, hogy M izomorf a számtani középpel. $M(x,y)$ nyilván szimmetrikus:

$$M(x,y)=M(y,x).$$

Nemszimmetrikus (kvázilineáris) középértéknek nevezzük a súlyozott számtani középpel izomorf $m(x,y)$ középértékeket:

$$(2) \qquad m(x,y)=\varphi[pf(x)+qf(y)], \qquad f(m)=pf(x)+qf(y), \qquad p+q=1.$$

A szimmetrikus, folytonos $M(x,y)$ középértékek jellemző tulajdonságainak megállapítása (a középértékek elméletének axiomatikus megalapozása) után felmerült a megfelelő kérdés a nemszimmetrikus középértékekre vonatkozóan is.[1] ACZÉL JÁNOS [2] a folytonos intern $m(x,y)=x\cdot y$ $(p,q>0)$ kvázilineáris középértékeket a következő tulajdonságokkal tudta jellemezni:

$$(3) \qquad (x\cdot y)\cdot(u\cdot v)=(x\cdot u)\cdot(y\cdot v) \qquad \text{(biszimmetria);}$$

$$(4) \qquad x\cdot x=x \qquad \text{(reflexivitás, vagy idempotencia);}$$

$$(5) \qquad x\cdot u>y\cdot u \quad \text{és} \quad u\cdot x>u\cdot y, \quad \text{ha} \quad x>y \qquad \text{(szigorú monoton növekedés).}$$

Hasonló tulajdonságok jellemzik a több változóra értelmezett középértékeket is. ACZÉL eredményét FUCHS LÁSZLÓ [3] kiterjesztette rendezett algebrai rendszerekre és extern $(pq>0)$ közepekre is, (5)-öt az enyhébb

$$(5') \qquad x\cdot u\neq y\cdot u \quad \text{és} \quad u\cdot x\neq u\cdot y, \quad \text{ha} \quad x\neq y \qquad \text{(leoszthatóság)}$$

[1] A középértékek elméletéről részletesebb tájékoztatást nyújt az [1] alatti cikk. A szögletes zárójelben lévő számok a dolgozat végén található irodalomjegyzékre utalnak.

követelménnyel helyettesítve. ACZÉL JÁNOSnak [1] sikerült a (3) és (4) helyett a

(6) $$(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot (y \cdot z)$$ (jobboldali autodisztributivitás)

tulajdonsággal is jellemeznie a kétszer differenciálható kvázilineáris közepeket. Minthogy a szimmetrikus esetben C. RYLL-NARDZEWSKI [7] (illetve B. KNASTER [5] a (3)-ra való visszavezetéssel) már tudta használni (6)-ot a folytonos kváziaritmetikai közepek jellemzésére, ezért ACZÉL JÁNOS [1] (P. 145.) felvetette a problémát, hogy megtartva (6)-ot, más módszerekkel lehetne-e enyhíteni a kétszeres differenciálhatóság követelményét, azaz kimondta azt a sejtést, hogy az autodisztributivitás (6) függvényegyenletének folytonos és leosztható megoldása sem lehet általánosabb mint (2).

Egy előző [4] dolgozatomban kétoldali autodisztributivitás, tehát (6) mellett a

(7) $$z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot (z \cdot y)$$ (baloldali autodisztributivitás)

egyenlet fennállását is megkövetelve, a kétszeres differenciálhatóság követelményét enyhítettem egyszeres differenciálhatóságig, e dolgozatban pedig, a 3. §-ban látni fogjuk, hogy akkor csupán a folytonosság is elég.

Előzőleg azonban a 2. §-ban néhány algebrai érvényű tételt fogunk bebizonyítani, melyek egész általános feltételek mellett lehetővé teszik az autodisztributív művelettel bíró struktúrák vizsgálatának visszavezetését csoportok vizsgálatára, és következményként a két különböző oldali autodisztributív törvény: (6) és (7) függetlenségét mutatják, még csoportokra visszavezethető autodisztributív struktúrák esetén is. Itt látni fogjuk az autodisztributív művelettel bíró kvázicsoportok és az Abel-féle kvázicsoportok [6] (illetve csoportok) közti összefüggést is.

2. §. Csoportok autodisztributív izotópjai

Valamely $G = a, b, \ldots$ csoport (általában struktúra) izotópjának nevezzük azt az $A = x, y, \ldots$ halmazt, melyen értelmezve van egy $x \cdot y$ művelet ($x, y, x \cdot y \in A$), amely az ab csoportművelettel a következő kapcsolatban áll:

(8) $$h(x \cdot y) = (fx)(gy), \qquad \chi(ab) = (\varphi a) \cdot (\psi b),$$

ahol $\xi \leftrightarrow f\xi, g\xi, h\xi$ az A halmaznak (kvázicsoportnak) a G csoportra való kölcsönösen egyértelmű leképezései, illetve φ, ψ, χ ezek inverz leképezései:

(9) $$f\varphi a = g\psi a = h\chi a = a, \quad f\chi e = e \qquad (a \in G),$$

ahol e a G egységeleme.

Az A struktúrát jobbról autodisztributív rendszernek nevezzük, ha fennáll (6), s megfelelően baloldali autodisztributív rendszerről beszélünk, ha (7) érvényes.

1. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a G csoport* (8), (9)*-cel értelmezett A izotópja jobbról autodisztributív rendszer legyen, szükséges és elegendő, hogy $x \cdot y$ idempotens legyen:*

$$(10) \qquad x \cdot x = x, \qquad hx = (fx)(gx),$$

továbbá $\omega = f\chi$ a G-nek olyan automorfizmusa legyen, melynek a G egységelemén e-n kívül nincs több fixpontja:

$$(11) \qquad \omega(ab) = \omega a\, \omega b, \qquad \omega = f\chi,$$

$$(12) \qquad \omega a \neq a, \quad ha \quad a \neq e,$$

és $\sigma a = (\omega a)^{-1} a$ kimerítse G-t: $\sigma G = G$.

Dualizálással hasonló tétel érvényes baloldali autodisztributív rendszerekre

2. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy G csoportnak legyen kétoldalról autodisztributív izotópja, a* (11), (12) *és $\sigma G = G$ fennállása mellett szükséges és elegendő, hogy G Abel-féle legyen.*

3. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy kétoldalról autodisztributív A kvázicsoportnak a* (8), (9) *alatt értelmezett G izotópja csoport legyen, szükséges és elegendő, hogy létezzék legalább egy $u \in A$ elem, amellyel fennáll:*

$$(3) \qquad (x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v)$$

bármely $x, y, v \in A$ esetén. Ekkor érvényesek a

$$(13) \qquad \chi a = (\varphi a) \cdot u = u \cdot \psi a \qquad (a \in G)$$

összefüggések, és a 2. *tétel szerint szükségképpen kommutatív G egységeleme:*

$$(14) \qquad e = hu = fu = gu.$$

BIZONYÍTÁS.

1. Az általánosság sérelme nélkül feltehető, hogy (8) és (9_1)-gyel együtt

$$(9_2) \qquad f\chi e = e$$

is mindig teljesül. Ugyanis ellenkező esetben, ha

$$f\chi e = c \neq e,$$

akkor

$$(8) \qquad h(x \cdot y) = fx\, gy = [(fx)c^{-1}](cgy) = f_1 x\, g_1 y$$

alapján vehető f_1 és g_1 az f és g helyett, s ekkor már teljesül

$$f_1 \chi e = (f\chi e)c^{-1} = c\, c^{-1} = e.$$

Minthogy a G csoport bármely izotópja kvázicsoport, hiszen (8) folytán az

$$x \cdot y = \chi(fx gy) = z \qquad (x, y, z \in A)$$

egyenlet mind x, mind y-ra egyértelműen megoldható, azért (10) nyilvánvaló (6) alapján, ha ott $z = y = x$-et helyettesítünk:

$$(x \cdot x) \cdot x = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x);$$

s ebből a leoszthatóság miatt már következik (10).

Tegyük fel, hogy az ab csoportművelettel a (8) egyenlet alapján összefüggő $x \cdot y$ jobbról autodisztributív. Minthogy ekkor fennáll

$$h[(x \cdot y) \cdot z] = h[(x \cdot z) \cdot (y \cdot z)],$$

ezért

$$f(x \cdot y) g z = f(x \cdot z) g(y \cdot z),$$

$$f\chi(fxgy) gz = [f\chi(fxgz)][g\chi(fygz)],$$

azaz bevezetve az

$$\omega = f\chi, \qquad g\chi f\psi = \pi \tag{15}$$

jelölést, és

$$x = \varphi a, \qquad y = \psi b, \qquad z = \psi e$$

-t helyettesítve,

$$\omega(ab) = \omega a \pi b$$

is fennáll. Ha itt $a = e$, akkor (15) és (9_2) szerint

$$\omega b = \omega e \pi b = \pi b,$$

tehát valóban érvényes (11).

(12) teljesülését (10) alapján tudjuk belátni. Ugyanis (10) szerint

$$gx = (fx)^{-1}(hx),$$

melyből az $f\chi = \omega$, vagyis az $f = \omega h$ összefüggés felhasználásával

$$gx = (\omega hx)^{-1} hx$$

következik. Minthogy $a \leftrightarrow g\chi a = \sigma a$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, ezért

$$\sigma G = G$$

és

$$(\omega a)^{-1} a \neq (\omega b)^{-1} b, \quad \text{ha} \quad a \neq b.$$

(15) és (9_2) alapján azonban G egységeleme: e az $a \leftrightarrow \omega a$ automorfizmusnak fixpontja, továbbá az előzőek szerint

$$\omega(ab^{-1}) \neq ab^{-1}, \quad \text{ha} \quad a \neq b,$$

azaz $c = ab^{-1}$-gyel

$$\omega c \neq c, \quad \text{ha} \quad c \neq e,$$

azért az $a \leftrightarrow \omega a$ automorfizmus egyetlen fixpontja e.

Végül meg kell győződnünk, hogy az 1. tétel feltételei valóban elégségesek is. E végből tekintsük

$$x \cdot y = \chi(fxgy)$$

-t, ahol $\omega = f\chi$ G-nek valamelyik egyetlen fixponttal bíró automorfizmusa, $a \leftrightarrow \chi a$ tetszőleges, míg

$$fx = \omega hx, \quad gx = (\omega hx)^{-1} hx = \sigma hx$$

így már egyértelműen meghatározott, kölcsönösen egyértelmű leképezést létesítő függvények, hacsak $\sigma G = G$. Ha $\sigma G = G$ nem teljesül, akkor $x \leftrightarrow gx$ képtartománya G-nek csak egy része, tehát $x \cdot y$ leosztható ugyan, de nem invertálható y-ra nézve.

A jobboldali autodisztributivitás teljesülése tehát (a (6) alatti egyenlet mindkét oldalára a h leképezést alkalmazva) az

$$f(x \cdot y)\, gz = f(x \cdot z)\, g(y \cdot z),$$

vagyis az

$$f\chi(fxgy)\, gz = f\chi(fxgz)\, g\chi(fygz),$$

más jelöléssel az

$$\omega(agy)\, b = \omega(ab)\, g\chi[(fy)\, b]$$

egyenlet fennállásával egyenértékű. Minthogy azonban ω G-nek automorfizmusa, és

$$gx = (\omega hx)^{-1}(hx), \quad g\chi a = (\omega a)^{-1} a,$$

ezért csupán

$$(\omega a)\, \omega[(\omega hy)^{-1} hy]\, b = (\omega a)(\omega b)\{\omega[(fy)\, b]\}^{-1}(fy)\, b,$$

azaz

$$[\omega(\omega hy)]^{-1} \omega hy = (\omega b)(\omega b)^{-1}(\omega fy)^{-1} fy$$

fennállását kell igazolni; ez viszont az $\omega = f\chi$, vagyis az $f = \omega h$ összefüggés felhasználásával már rögtön adódik:

$$(\omega fy)^{-1} fy = (\omega fy)^{-1} fy,$$

s ez teljessé teszi az 1. tétel bizonyítását.

2. Az 1. tétel alapján A akkor és csak akkor jobbról autodisztributív rendszer, ha fennáll (10)—(12) és $\sigma G = G$. Teljesen hasonló módon a baloldali autodisztributivitáshoz szükséges és elegendő (10), továbbá

$$\sigma(ab) = \sigma a \sigma b, \qquad \sigma = g\chi, \tag{11'}$$

$$\sigma a \neq a, \quad \text{ha} \quad a \neq e \tag{12'}$$

és $\omega G = G$. Kimutatjuk, hogy ez egyenértékű azzal, hogy a G Abel-féle. (10) teljesülése mindig elérhető

$$gx = (fx)^{-1} hx$$

-szel. Minthogy (10) alapján érvényes

$$\sigma a = g\chi a = (f\chi a)^{-1} a = (\omega a)^{-1} a, \tag{16}$$

ezért (12') teljesül, hiszen

$$\sigma a = (\omega a)^{-1} a \neq a, \quad \text{ha} \quad a \neq e,$$

azaz

$$\omega a \neq e, \quad \text{ha} \quad a \neq e.$$

Írjuk át (11')-t is (16)-nak megfelelően:

$$(\omega ab)^{-1}ab=(\omega a)^{-1}a(\omega b)^{-1}b.$$

Így az $(\omega b)^{-1}=d$ jelöléssel, egyszerű számolás után a (11')-vel egyenértékű

$$d(\omega a)^{-1}a=(\omega a)^{-1}ad,$$

azaz (16)-ot is figyelembe véve a

$$(\sigma a)d=d\sigma a \qquad (a,d\in G)$$

egyenletet nyerjük. Minthogy végül az

$$a\leftrightarrow\sigma a=g\chi a$$

leképezés invertálható, $c=\sigma a$-val azt kaptuk, hogy (10)—(12) teljesülése esetén (11') egyenértékű

$$cd=dc \qquad (c,d\in G)$$

-vel, vagyis azzal, hogy G Abel-féle.

Még csak azt kell megmutatni, hogyha (az általánosság sérelme nélkül)

$$(9_2) \qquad f\chi e=e$$

teljesül, akkor egyszersmind

$$\sigma e=g\chi e=e$$

is fennáll. Tekintsük ugyanis (10) alapján

$$g\chi a=(f\chi a)^{-1}a$$

-t és helyettesítsünk itt $a=e$-t, akkor valóban látjuk, hogy érvényes

$$g\chi e=(\omega e)^{-1}e=e,$$

s ezzel a 2. tétel bizonyítása teljes.

3. Tekintsük a kétoldalról autodisztributív A kvázicsoport G izotópját, ahol az izotópizmus a

$$(8_2) \qquad \chi(ab)=\varphi a\cdot\psi b \qquad (a,b\in G;\ \chi a,\varphi a,\psi a\in A)$$

összefüggés alapján áll fenn. Nyilván G is kvázicsoport, vagyis az

$$ab=c$$

egyenlet egyértelműen megoldható mind a, mind b-re vonatkozólag. Ahhoz, hogy G csoport legyen, a következőknek kell még teljesülni:

$$(17) \qquad ae=ea=a \qquad (a\in G),$$

$$(18) \qquad (ab)c=a(bc) \qquad (a,b,c\in G).$$

Mint az előzőkben, itt is vehetjük az általánosság sérelme nélkül

$$f\chi e=g\chi e=e$$

-t, azaz a (14)-gyel egyenértékű

$$(19) \qquad \chi e=\varphi e=\psi e=u$$

-t, ugyanis ha ez nem teljesülne, akkor lehetne φ,ψ,χ helyett más leképezéseket venni, melyek A-hoz ugyanazon G izotópot rendelik, és teljesítik (19)-et is. Ezt nem is fogjuk részletezni, hanem rögtön áttérünk a (17)—(18) egyenletek olyan átírására, mely az $x \cdot y$ műveletre vonatkozó kritériumot tartalmaz. Az átalakítások során a (8_2) alatti értelmezésen és (19)-en kívül csak azt használjuk fel, hogy $x \cdot y$ kétoldalról autodisztributív kvázicsoportot alkotó művelet, következőleg idempotens, s ezért érvényes rá speciálisan

$$(x \cdot y) \cdot x = x \cdot (y \cdot x) \tag{20}$$

is. Ezt szem előtt tartva, rögtön látjuk, hogy (17) egyenértékű

$$\chi a = (\varphi a) \cdot u = u \cdot \psi a \tag{13}$$

-val. Vizsgáljuk ezután a (18)-ból egyszerű átalakításokkal nyert, vele egyenértékű

$$\varphi(ab) \cdot \psi c = (\varphi a) \cdot \psi(bc)$$

egyenletet, és „szorozzuk meg" az egyenlet mindkét oldalát jobbról és balról u-val. Így az autodisztributivitás és (8_2), (20), (13) figyelembevételével az

$$u \cdot (\{[\varphi(ab)] \cdot u\} \cdot [(\psi c) \cdot u]) = \{(u \cdot \varphi a) \cdot [u \cdot \psi(bc)]\} \cdot u,$$
$$u \cdot \{[\chi(ab)] \cdot [(\psi c) \cdot u]\} = [(u \cdot \varphi a) \cdot \chi(bc)] \cdot u,$$
$$u \cdot \{[(\varphi a) \cdot (\psi b)] \cdot [(\psi c) \cdot u]\} = \{(u \cdot \varphi a) \cdot [(\varphi b) \cdot (\psi c)]\} \cdot u,$$
$$[(u \cdot \varphi a) \cdot (u \cdot \psi b)] \cdot \{[u \cdot (\psi c)] \cdot u\} = \{u \cdot [(\varphi a) \cdot u]\} \cdot \{[(\varphi b) \cdot u] \cdot [(\psi c) \cdot u]\},$$
$$[(u \cdot \varphi a) \cdot \chi b] \cdot \{u \cdot [(\psi c) \cdot u]\} = [(u \cdot \varphi a) \cdot u] \cdot \{(\chi b) \cdot [(\psi c) \cdot u]\},$$

s végül más jelölésekkel az

$$(x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v)$$

egyenletet nyerjük, tetszőleges $x, y, v \in A$ esetén.

Megjegyzések

1. Az 1. tétel bizonyításában ez már szóba került, de még egyszer lerögzítjük, hogyan lehet egy G csoport összes jobbról autodisztributív izotópjait megadni. Tekintjük mindazon ω automorfizmusokat, melyeknek egyetlen fixpontja e, és melyeknél $\sigma a = (\omega a)^{-1} a$-ra teljesül $\sigma G = G$; ω-t felbontva tetszőleges módon az f, χ leképezések szorzatára, az $f, h = \chi^{-1}$, továbbá a (10) alapján nyert $gx = (fx)^{-1} hx$ leképezések szolgáltatják az összes kívánt A izotópokat.

2. Az 1—2. tételek felhasználásával egyszerű példát szerkeszthetünk csupán egyik oldalról autodisztributív műveletre, melynek még további kedvező tulajdonsága is lehet (pl. leoszthatóság). Ehhez csupán egy olyan nemkommutatív csoportot kell megadni, melynek van olyan automorfizmusa, amely csak az egységelemet hagyja változatlanul. Ilyen csoport a következő[2]:

[2] A közölt példa ERDŐS JENŐtől ered, érte e helyen is köszönetet mondok.

Legyen G másodrangú szabad csoport, melynek elemei egy és csak egyféle módon írhatók fel redukált alakban két szabad generátor: a és b

$$a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2}\ldots a^{n_k}b^{m_k} \qquad (n_i, m_i = \pm 1, \pm 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots)$$

alakú hatványszorzataiként, miközben az egységelem:

$$e = a^0 = b^0,$$

s megállapodunk abban, hogy n_1 és m_k lehet 0 is.

G nyilván nem kommutatív, mert pl. $ab \neq ba$ a redukált felírás egyértelműsége miatt, továbbá

$$\omega(a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2}\ldots) = a^{-n_1}b^{-m_1}\ldots, \qquad \omega e = e$$

olyan automorfizmus, mely csupán az egységelemet hagyja változatlanul.[3]

3. A 3. tétel azt mutatja, hogy az autodisztributivitás függvényegyenletének megoldását a biszimmetria függvényegyenletére való visszavezetés útján is megkaphatjuk, feltéve, hogy kvázicsoport tulajdonságokat is megkövetelünk. A következő §-ban ezt a visszavezetést fogjuk látni, sőt annyival általánosabban, hogy az $x \cdot y = z$ egyenlet megoldhatósága helyett is csak a kétoldali leoszthatóságot kívánjuk meg.

[3] A példa nem bizonyítja a két különböző oldali autodisztributív törvény függetlenségét folytonos vagy kvázicsoportot alkotó művelet esetén (mert itt $\sigma G \neq G$).

Egy egyszerű példa csupán jobboldalról autodisztributív, leosztható (következőleg nem biszimmetrikus) műveletre

$$x \cdot y = (\omega x)(\omega y)^{-1} y \qquad (x, y \in G),$$

ahol éppen $hx = \chi x = x$-et választottuk, míg $fx = \omega x$ a G-nek olyan automorfizmusa, mely az egységelem kivételével egy elemet sem hagy változatlanul, pl. speciálisan az a, b elemek által generált szabad csoporton

$$\omega(a^{n_1}b^{m_1}\ldots) = a^{-n_1}b^{-m_1}\ldots .$$

Valóban, így

$$(x \cdot y) \cdot z = \omega[(\omega x)(\omega y)^{-1} y](\omega z)^{-1} z$$

és

$$(x \cdot z) \cdot (y \cdot z) = \omega[(\omega x)(\omega z)^{-1} z]\, \omega[(\omega y)(\omega z)^{-1} z]^{-1} (\omega y)(\omega z)^{-1} z$$

azonosak, míg pl.

$$(ab) \cdot (a \cdot b) = a^{-1} b a^{-2} b^2,$$

s ezzel szemben

$$(ab \cdot a) \cdot (ab \cdot b) = aba^{-2} ba^{-2} b.$$

SHERMAN K. STEIN [8] bebizonyította, hogy minden *véges* kvázicsoport, amely egyik oldalról autodisztributív, szükségképpen biszimmetrikus. Ebből az következik, hogy véges kvázicsoporton a két különböző oldali autodisztributív törvény nem független egymástól, hanem egyikük következménye a másiknak. Az itteni példa cáfolja SHERMAN K. STEINnek azt a (levélben közölt) sejtését, hogy a biszimmetria következménye lenne az autodisztributivitásnak nem véges rendszereken is. Nem véges kvázicsoporton a sejtés továbbra is nyitott kérdés.

3. §. A kétoldali autodisztributivitás függvényegyenletének megoldása

4. TÉTEL. *Egy I intervallumon értelmezett bármely kétoldalról autodisztributív folytonos és leosztható $x \cdot y$ művelet $(x, y, x \cdot y \in I)$ izomorf a súlyozott számtani középpel. Más szóval az*

$$\left.\begin{array}{ll} (6) & (x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot (y \cdot z) \\ (7) & z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot (z \cdot y) \end{array}\right\} \qquad (x, y, z \in I)$$

függvényegyenlet rendszer legáltalánosabb folytonos és leosztható megoldása az I intervallum felett

$$(2) \qquad x \cdot y = \varphi[pf(x) + qf(y)], \quad p + q = 1 \qquad (x, y, x \cdot y \in I),$$

ahol $f(x)$ tetszőleges topológikus (folytonos, szigorúan monoton) függvény, melynek inverze $\varphi(x)$, továbbá p, q tetszőleges állandók a $p + q = 1$, $pq \neq 0$ megszorítással.

BIZONYÍTÁS. Kimutatjuk, hogy fennáll

$$(3) \qquad (x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v) \qquad (x, y, u, v \in I),$$

s ebből már a bevezetésben idézettek [2—3] alapján következik a tétel állítása.

Ha x, y, u, illetve y, u és v közül van két megegyező, akkor (3) nyilvánvalóan fennáll (7), illetve (6), és a leoszthatóság folytán belőle következő reflexivitás miatt. Elég tehát (3)-at tetszőlegesen rögzített páronként különböző x, y és u, illetve y, u és v esetére igazolni. E végből pedig tekintsük a

$$(21) \qquad (x \cdot y) \cdot (u \cdot z) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot \varepsilon z), \qquad z \in (y, u)$$

egyenlettel értelmezett leképezést, ahol x, y és u páronként különbözők, és a határozottság kedvéért z-t úgy választottuk, hogy y és u közé essen; ez nem sérti az általánosságot, mert ha pl. u esne y és z közé, akkor teljesen hasonló okoskodást lehetne végezni az

$$(x \cdot y) \cdot (u \cdot z) = (x \cdot \zeta u) \cdot (y \cdot z), \qquad u \in (y, z)$$

egyenlettel értelmezett $u \longleftrightarrow \zeta z$-vel stb.

(21) nyilván egyértelműen meghatározza a $z \longleftrightarrow \varepsilon z$ leképezést bármely y és u közé eső z esetén. Ugyanis

$$\alpha(z) = (x \cdot y) \cdot (u \cdot z), \qquad \beta(z) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot z)$$

az $(y \cdot u)$ intervallum fölött olyan topológikus (szigorúan monoton, folytonos) függvények, melyekre (6) és a reflexivitás folytán érvényes

$$\alpha(y) = \beta(y), \qquad \alpha(u) = \beta(u);$$

Bolzano-tétele szerint tehát z-hez y és u között tartozik egy (a szigorú monotonitás miatt pedig csak egy) $t = \varepsilon z$ úgy, hogy teljesül $\alpha(z) = \beta(t)$. (3) tehát igazolva lesz, ha igazoljuk

(22) $$\varepsilon z = z, \qquad z \in (y, u)$$

fennállását. E célból kimutatjuk, hogy $z \leftrightarrow \varepsilon z$ automorfizmus:

(23) $$\varepsilon(z \cdot t) = (\varepsilon z) \cdot (\varepsilon t), \qquad z, t \in (y, u),$$

melynek az y, u pontok fixpontjai:

(24) $$\varepsilon y = y, \qquad \varepsilon u = u.$$

Ez utóbbi nyilvánvaló ε (21) alatti értelmezése, a jobboldali autodisztributivitás és a reflexivitás miatt. A (23) is egyszerűen következik a baloldali autodisztributivitásból és a baloldali leoszthatóságból az

$$(x \cdot u) \cdot [y \cdot \varepsilon(z \cdot t)] = (x \cdot y) \cdot [u \cdot (z \cdot t)] = [(x \cdot y) \cdot (u \cdot z)] \cdot [(x \cdot y) \cdot (u \cdot t)] =$$
$$= [(x \cdot u) \cdot (y \cdot \varepsilon z)] \cdot [(x \cdot u) \cdot (y \cdot \varepsilon t)] = (x \cdot u) \cdot [y \cdot (\varepsilon z \cdot \varepsilon t)]$$

egyenlőség sorozat elejének és végének összehasonlításával.

Két esetet lehet megkülönböztetni:

1. $x \cdot y$ intern: $x \cdot y \in (x, y)$;
2. $x \cdot y$ extern: $x \cdot y \notin (x, y)$, ha $x \neq y$.

E két eset közül az egyik (és csakis egyik) feltétlen fennáll tetszőleges $x, y \in I$ mellett, $x \cdot y$ szigorú monotonitása és a reflexivitása miatt. Ugyanis, ha $x \cdot y$ mindkét változóban egy irányban monoton, akkor $x \cdot x = x$ miatt csak növekedő lehet, s ekkor tetszőleges $x < y$ esetén fennáll

$$x = x \cdot x < x \cdot y < y = y \cdot y,$$

és hasonló érvényes $y \cdot x$-re is; ha viszont $x \cdot y$ az x és y változóban nem egy irányban monoton, pl. x-ben növekedő és y-ban csökkenő, akkor

$$x \cdot y < x \cdot x = x < y = y \cdot y < y \cdot x$$

érvényes bármely $x < y$ mellett, és hasonló igaz akkor is, ha $x \cdot y$ az x-ben ogyó és y-ban növő.

Az első esetben képezzük az

$$y, u, y \cdot u, u \cdot y, \quad y \cdot (y \cdot u), \quad (y \cdot u) \cdot u, \ldots$$

számok S halmazát olyan törvényszerűség szerint, hogy a már értelmezett tagokat páronként „összeszorozzuk", és ezt az eljárást transzfinit indukcióval folytatjuk, a torlódási pontokat is a halmazhoz csatolva. S-en (23), (24), továbbá $x \cdot y$ és εz folytonossága miatt már érvényes (22):

$$\varepsilon y = y, \quad \varepsilon u = u, \quad \varepsilon(y \cdot u) = \varepsilon y \cdot \varepsilon u = y \cdot u, \quad \varepsilon(u \cdot y) = \varepsilon u \cdot \varepsilon y = u \cdot y, \ldots$$

Ezután csak azt kell kimutatni, hogy $S = (y, u)$. Értelmezése szerint S tartalmazza összes torlódási pontjait, azért csak azt kell belátni, hogy S mindenütt sűrű az (y, u) intervallumon. Tételezzük fel ennek ellenkezőjét, hogy létezik olyan $(y_1, u_1)(y_1 < u_1)$ részintervallum, melynek nincs S-sel közös része; ekkor véve S-ben az y_1-nél kisebb elemek felső határát $y_2(\in S)$-t és az u_1-nél nagyobb elemek alsó határát $u_2(\in S)$-et (mely nyilván létezik), olyan (y_2, u_2) $(y_2 \neq u_2)$ intervallumot nyerünk, melyek belseje S-től idegen, és határpontjai S-beliek. Így viszont indirekt feltevésükkel ellentmondásba kerülünk azáltal, hogy

$$y_2 < y_2 \cdot u_2 < u_2,$$

holott $y_2 \cdot u_2 \in S$.

Az extern eset is lényegében hasonló módon intézhető el, ha észrevesszük, hogy folytonos, szigorúan monoton, reflexív, extern műveletnek mindig létezik olyan inverze, amely már intern. Mint említettük, $x \cdot y$ akkor extern, ha az x és y változóban nem egy irányban monoton. A határozottság kedvéért legyen $x \cdot y$ pl. az x változóban növekedő és y-ban fogyó. Minthogy akkor $x < y$-nal fennáll

$$x \cdot y < x < y \cdot y,$$

s ugyancsak $x > y$-nal hasonlóan

$$x \cdot y > x > y \cdot y,$$

ezért Bolzano-tétele értelmében mindkét esetben bármely rögzített x és y-hoz van oly z, hogy a

$$z \cdot y = x, \qquad z = x * y$$

egyenlet z megoldása értelmezi a folytonos, mindkét változóban egy irányban szigorúan monoton $x * y$ inverz műveletet, melyre nézve nyilván érvényes

$$\varepsilon(z * t) = (\varepsilon z) * (\varepsilon t) \tag{23'}$$

is. Hasonlót lehet mondani $x \cdot y$ másik oldali inverzéről, abban az esetben, midőn ez az x változóban fogy, és y-ban nő.

Ily módon tehát (22) bizonyítása ugyanúgy fejezhető be, mint az intern esetben.

Ezáltal a 4. tétel bizonyítása teljes.

IRODALOM

[1] J. ACZÉL, О теории средних, *Colloquium Mathematicum*, **4** (1956) 33—55.
A középértékek elméletéhez, *Acta Universitatis Debreceniensis*, **1** (1954) 117—135.

[2] „ On mean values, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, **54** (1948) 392—400.

[3] L. FUCHS, On mean systems, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950) 303—320.

[4] M. HOSSZÚ, On the functional equation of autodistributivity, *Publicationes Math.*, **3** (1953) 83—87.

[5] B. KNASTER, Sur une équivalence pour les fonctions, *Colloquium Math.*, **2** (1949) 1—4.

[6] D. C. MURDOCH, Structure of abelian quasi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49** (1941) 392—409.

[7] C. RYLL-NARDZEWSKI, Sur les moyennes, *Studia Math.*, **11** (1949) 31—37.

[8] SHERMAN K. STEIN, Foundations of quasigroups, *Procedinds of the National Academy of Sciences*, **42** (1956) 545—546.

(Beérkezett: 1957. II. 16.)

DESCARTES MÓDSZERTANA ÉS FELFOGÁSA A TERMÉSZETTÖRVÉNYRŐL

NÁDOR GYÖRGY kandidátus

A racionalista irány vezető gondolkodója, akinek a modern természettudományos gondolkodás és a természettörvény-fogalom megalapozásában jelentős része volt: RENÉ DESCARTES (1596—1650). Egészen a legutóbbi időkig nem igen vonták kétségbe DESCARTES történelmi helyét az európai racionalizmus megalapozásában. Nemcsak a racionalizmus hívei, de ellenségei sem. Ha pl. a hitlerista „filozófusok" a racionalizmus ellen harcba indultak, mindenekelőtt DESCARTES eszmei pozicióját vették célba.[1] Újabban azonban különös törekvésnek vagyunk tanúi: egyesek számára terhessé vált a descartesi örökség és minden erővel szabadulni igyekeznek a racionalizmus descartesi tradiciójától. A tudománytörténetben ez úgy jelentkezik, hogy kisebbíteni igyekeznek DESCARTES szerepét a modern tudományos gondolkodás megalapozásában, hogy másnak tulajdonítják az elsőbbséget, a kezdeményezést. LENOBLE pl. vaskos könyvet írt MERSENNE-ről; e könyv vezető gondolata, hogy a vallással harmonizáló és egy, a mai konvencializmushoz hasonló álláspontot valló MERSENNE páter sok mindenben megelőzte DESCARTES-ot, hogy a descartesi módszertani elvek és elgondolások egy része már a *Discours de la Méthode* megjelenését három esztendővel megelőzően, 1634-ben kifejezést nyert MERSENNE-nél.[2] Olyan „koncepció" is felmerült az utóbbi években, hogy nem DESCARTE-ot, hanem éppenséggel a vallásos MALEBRANCHE-t kellene a modern természettudományos gondolkodás úttörőjének tekinteni.[3] — Sokak számára a racionalizmus már descartesi formájában sem elfogadható!

Pedig DESCARTES filozófiájában a racionalizmus szemszögéből tekintve is sok még a következetlenség. Vitathatatlan a diszharmónia — amint erre

[1] Vö. pl. FRANZ BÖHM: Anti-Cartesianismus. Deutsche Philosophie im Widerstand (Leipzig 1938).

[2] Vö. ROBERT LENOBLE: Mersenne ou la naissance de la Mécanisme (Paris 1943).

[3] CUVILLIER így nyilatkozott az egyik vitaülésen, amelyet a tudományos gondolkodás fejlődéstörténetének alapkérdéseiről tartottak Párizsban: Nyíltan kimondom, hogy nézetem szerint MALEBRANCHE a kísérleti tudomány filozófiájának igazi megalapozója. (Revue de Synthèse 1949.)

MARX már a *Szent család*ban rámutatott[4] — DESCARTES lényegében materialista fizikája és idealista metafizikája között. E következetlenségek nyilvánvalóan abból fakadnak, hogy DESCARTES — mint filozófus, mint „metafizikus" — bizonyos mértékig még kora világnézeti közszellemében gyökerezik. Milyen volt e kor tudományos közszelleme?

Az egyetemeken korlátlan úr a skolasztika, a kor fizikai tankönyvei — akárcsak évszázadokkal előbb — a céloksągra építenek; a természetfilozófiában misztikus, kabbalisztikus irányzatok vannak divatban stb. DESCARTES gondolkodásának radikális újszerűsége épen e korviszonyok tükrében válik nyilvánvalóvá: a *descartesi fizika* gyökeres szakítást jelentett a kor valamennyi tudománytalan és tudományellenes törekvésével és a természeti törvények kutatásán alapuló *materialista tudománynak* vetette meg az alapját. Amint HUYGENS visszatekintve DESCARTES jelentőségére, mondotta: *„csakis mechanikai elveket érvényesített"*.[5] Ez pedig HUYGENS nyelvén éppen azt jelentette, hogy valóságos, reális tudományos elveket vitt győzelemre, hiszen a holland tudós szerint az az igazi *filozófia*, amelyben *„minden természeti jelenség okát mechanikai elvekkel magyarázzák."*[6]

a) DESCARTES és az okság elve

DESCARTES felfogását az okság kérdéséről akkor lehet valóban tudományos színvonalon tárgyalni, ha következetesen érvényesítjük azt a módszertani szempontot, hogy DESCARTES-nál a fizika és a metafizika elkülönül egymástól. „A kettős igazság" elvének egy egészen sajátságos formájával van itt dolgunk. DESCARTES-nál megvalósult az, ami BACON-nél csak mint kívánalom szerepelt: más a metafizika és ismét más a fizika. DESCARTES metafizikai elvei nem határozzák meg és nem deformálják a fizikai kérdésekben elfoglalt álláspontját.

Azok a szerzők, akik nem ismerik fel az éles különbséget DESCARTES fizikája és metafizikája között, nem látnak világosan a kauzalitás descartesi felfogásának kérdésében sem. E. KÖNIG pl. az oksági probléma fejlődéséről írott monográfiájában DESCARTES felfogását az okságról csaknem kizárólag a descartesi metafizika és nem a descartesi fizika alapján vizsgálja.[7] Ennek következtében az olvasó azt a benyomást nyeri, mintha DESCARTES lényegé-

[4] KARL MARX—FRIEDRICH ENGELS: Die heilige Familie (Dietz-Verlag, Berlin 1953) 254.

[5] HUYGENS: Oeuvres complètes p. 405. — Közli RENÉ DUGAS: Sur le cartésianisme de Huygens (Revue d'Histoire des Sciences. 1954. jan., márc.).

[6] Közli LENOBLE: *Mersenne* (i. k.) 364.

[7] EDMUND KÖNIG: Die Entwicklung des Kausalproblems von *Cartesius* bis *Kant* (Leipzig 1888) I.

ben a skolasztikus felfogáshoz közelálló nézetet vallott volna az okság elvéről. Ez azonban csalódás, látszat, ami abból fakad, hogy a szerző nem veszi tekintetbe: DESCARTES a fizikus teljes egészében *szakított* a skolasztika metafizikai okságkoncepciójával és az okság elvének a mechanikában *kialakult* exakt felfogását terjesztette ki más tudományok területére is.[8]

Vizsgáljuk meg tehát külön-külön DESCARTES metafizikai és fizikai okságfelfogását.

A metafizikában DESCARTES sok szempontból még a skolasztika befolyása alatt áll. Így nála is találkozunk a négy különböző okságfajtával, persze azzal a lényeges változtatással, hogy nála a *hatóok az alapvető* és mintegy magába olvasztja a többi okságfajtákat; ezért beszél DESCARTES *causa efficiens et formalis*-ról (ható- és formális ok), *illetve causa efficiens et totalis*-ról (ható- és átfogó ok).[9]

A skolasztikában a kauzalitás elvét isten létének bizonyítására használták fel. A descartesi metafizikában szereplő okságfelfogás magán viseli még skolasztikus eredetének bélyegét; annál is inkább, mert maga DESCARTES is felhasználja ezt az elvet a maga metafizikája felépítéséhez szükséges istenbizonyításaiban. E „kauzalitás-elv" két alappillére: „ex nihilo nihil fit" (semmiből nem lesz semmi) és az a tétel, hogy „legalább annyi létet kell hogy tartalmazzon az ok, mint amennyi az okozatban van."[10]

Ezekből a metafizikai elvekből DESCARTES egyrészt isten létére következtet, aki a világ létének és tökéletességének forrása: másrészt úgy építi tovább az okság elméletét, hogy mivel az ok implicite magában foglalja az okozatot, az *ok*-ból megfelelő módszerrel kielemezhető az *okozat.* Ahogyan a valóságban az ok okozatot szül, úgy az elméletben a logikai alap ismerete a következmény ismeretéhez vezet. Mivel mármost isten a világ oka, isten fogalmából *deduktíve* ki lehet bontani és le lehet vezetni az egész világmindenséget.

A *deduktív módszerre való törekvés* az a közös vonás, ami egyként áthatja DESCARTES metafizikáját és fizikáját is. Egyébként azonban e két terület nálá — két külön világ. A fizikában DESCARTES mellőzi azt az egész bonyolult-mesterkélt oksági apparátust, amit a metafizikában felállított és a mechanikus materializmus világos, egyszerű, áttekinthető okságfelfogását akceptálja.

[8] Nem ilyen súlyos, de hasonló módszertani hibát követ el E. WENTSCHER is az oksági elv történetéről írott könyvében (Geschichte des Kausalproblems in der neueren Philosophie. — Leipzig 1921.) — 2. fejezet.

[9] Az adatokat és lelőhelyeket l. KÖNIG op. cit. passim.

[10] „Tantum ad minimum esse debere in causa efficiente et totali, quantum in eiusdem causae effectu" (DESCARTES: Meditationes III.)

Descartes a fizikát teljes egészében *kvantitatív kategóriákra* építi, olyannyira, hogy a fizikát kifejezetten mennyiségtanra redukálja: *„Nem ismerek el olyan elveket a fizikában, amelyek egyben nem a matematika elvei is.“*[11] *„Egész fizikám nem más mint geometria“* — írta DESCARTES egyik levelében.[12] A fizikai jelenségek magyarázatára DESCARTESnak csak két alapfogalomra van szüksége: anyagra és mozgásra. *„Adjatok nekem anyagot és mozgást és én felépítem a világot“* — mondotta állítólag DESCARTES.[13] De ha nem is mondotta betű szerint, mindenesetre ennek szellemében járt el: a világkép felépítéséhez anyagi okokon és elveken kívül más építőkövet nem használt fel. Kiküszöbölte a világképből a skolasztikus fizika „szubsztanciális formáit“, a teleológiát, a természetfilozófiákban oly kedvelt szimpáthia-antipáthia tant, valamint a rejtett minőségek elméletét. A *Principia philosophiae* végén DESCARTES összefoglalva világnézetének végső alapelveit, teljes élességgel elhatárolja a maga *materialista okságfelfogását* a divatos korabeli irányzatok elképzelésétől:

„Bizonnyal mindenki be fogja látni... mily beláthatatlan távolságokba terjed az állócsillagok fénye és mást is, aminek az okát én, nézetem szerint, meggyőző módon vezettem le e műben a közismert és általánosan elismert elvekből, azaz az anyagrészecskék alakjából, nagyságából, helyzetéből és mozgásából s könnyen meggyőződnek majd róla, hogy nincsenek a kövekben és a növényekben titokzatos erők, nem léteznek a szimpáthia és az antipáthia bámulatra méltó csodái és hogy végül nincs az egész természetben — amennyiben ti. pusztán az anyagi okokat vesszük figyelembe, amelyeknek nincs lelkük és gondolkodásuk — semmi olyan, aminek alapján nem ugyanazokból az elvekből kellene levezetni; úgy hogy más további elemek bekapcsolása nem szükséges.“[14]

BACON egy olyan fizika felépítését tartotta szükségesnek, amely a célokság szempontját teljesen kiküszöböli. DESCARTES nemcsak ábrándozott

[11] Idézi DUHEM: Die Wandlungen der Mechanik und die mechanische Naturerklärung (Leipzig 1912) 16.

[12] „Toute ma physique n'est que géométrie" (DESCARTES levele MESSENNE-hez 1638-ban).

[13] „Donnez-moi de la matière et du mouvement et je ferai un monde" (VOLTAIRE DESCARTES fizikájáról. — Oeuvres. XXII. 404.)

[14] DESCARTES: Principia philosophiae IV.: „Et sane quisquis considerabit,.... ad quam immanem distantiam stellae fixae lumen suum circumquaque diffundant, et reliqua, quorum causas, meo judicio, satis evidentes, ex principiis omnibus notis et omnibus admissis, figura scilicet, magnitudine, situ et motu particularium in hoc scripto deduxi facile sibi persuadebit, nullas esse vires in lapidibus aut plantis tam occultas, nulla sympathiae vel antipathiae miracula tam stupenda, nihil denique in natura universa, quod ad causas tantum corporales, sive mente et cogitatione destitutas, debeat referri, cujus ratio ex iisdem illis principiis deduci non possit: adeo ut aliqua alia ipsis adjungere non sit necesse." (187. paragrafus.)

erről a feladatról, hanem meg is valósította és működésével nagyban hozzájárult ahhoz, hogy a célokság tudománytalan szempontja egyre inkább kiszoruljon a fizikai tudományokból. Sőt — BACON-nel ellentétben — nemcsak a fizikából, de még a metafizikából is kiiktatta a teleológia szempontját:

„Végül a természeti dolgokra vonatkozólag nem is fogjuk soha kutatni, hogy mely célt tűzött ki magának isten vagy a természet, midőn teremtette őket. Mert nem szabad oly önhitteknek lennünk, hogy tervébe beavatottaknak képzeljük magunkat, hanem őt fogjuk minden dolog ható okának tekinteni és azután nézni, hogy természetes eszünk erejével, amelyet ő adott nekünk, mit következtethetünk az ő attributumaiból...“ [15]

DESCARTES működése arra az időszakra esik, amikor az animisztikus és skolasztikus természetszemlélet helyét a kor legjobbjainak gondolkodásában a mechanikai, materialista természetszemlélet és ezzel együtt a determinista felfogás foglalta el. Az új koncepció sokak gondolkodásában érik: KEPLER, GALILEI, BACON mellett más gondolkodók is effelé tartanak. GASSENDI (1592—1655) pl., DESCARTES kortársa, az epikureus filozófiát újítja fel és az atomista materializmust állítja sorompóba az aristotelesi-skolasztikus természetfilozófia ellenében. GASSENDI is azon a véleményen van, hogy a skolasztika csak fecseg a természetről, de nem tud róla semmit: *„Azt fogják mondani, hogy a Napban forma és anyag van, meg azt, hogy a levegőben forma és anyag van, meg azt, hogy a kőben, meg azt, hogy a fában, meg azt, hogy az emberben forma és anyag van. Oh, dicső filozófia! Mindennek van anyaga és formája! Ezzel mindent tudunk! Minek kínlódunk hát a természet kutatásával?“* [16]

A kor számos tudósa és gondolkodója törekszik arra, hogy az animisztikus-skolasztikus természetfelfogás helyébe a mechanikai, materialista természetmagyarázatot helyezze, a finalizmust a determinizmus elvével cserélje fel. Ez a törekvés élteti az atomista irányzatot (GASSENDI, HUYGENS stb.) Jellemző az új tudományos szellemre, hogy MERSENNE, ha végső soron el is akarja ismertetni a vallás igényeit, ezt ő már csak egy mechanikai világkép alapján tudja elképzelni.[17] DESCARTES a kor legjobb törekvéseinek ad hangot,

[15] „Ita denique nullas unquam rationes, circa res naturales, a fine quem Deus aut natura in iis faciendis sibi proposuit, desumemus: quia non tantum nobis debemus arrogare, ut ejus consiliorum participes esse putemus. Sed ipsum ut causam efficientem rerum omnium considerantes videbimus quidnam ex iis ejus attributis, quorum nos nonnullam notitiam voluit habere, circa illos ejus effectus, qui sensibus nostris apparent lumen naturale, quod nobis indidit, concludendum esse ostendat.”

[16] GASSENDI: Exercitationes paradoxicae adversus Aristoteles. Közli: FEUERBACH: Válogatott fil. művei (Akad. Kiadó) 28. lap.

[17] Vö. LENOBLE: MERSENNE (i. k.) 10 és 11. fejezet.

amikor fizikájában teljes következetességgel (az atomista GASSENDIt meghaladó konzekvenciával) építi fel a mechanikai elvek segítségével a maga materialista világképét.

A mondottak alapján könnyű megérteni és helyesen értékelni DESCARTES-nak a *természettörvények* kérdésében elfoglalt álláspontját.

b) A természet törvényei

A descartesi filozófia sajátos kettőssége — ami a descartesi fizika és metafizika sajátos viszonyában jut a legélesebben kifejezésre — a természettörvény kérdésében is megmutatkozik. Ha DESCARTES igazi felfogását akarjuk megismerni e kérdésben, el kell választani egymástól a teológiai apparátust és a valóságos mondanivalót.

Formailag DESCARTES a hagyományos, teológiai álláspontot vallja a természeti törvények kérdésében. Ezért beszél az isteni törvényhozóról:

„A törvényeket isten szabta a természetnek, hasonlóan ahhoz, ahogy egy király megállapítja birodalmának törvényeit."[18]

Ugyanakkor azonban tiltakozott e felfogás olyan értelmezése ellen, mint hogyha a szubjektivizmusnak és az önkénynek akarna utat nyitni és magát a teológiai formulát is úgy precizírozza, hogy egyértelmű legyen a *változhatatlan természeti törvény* elvével: *„Azt mondhatják, hogy ha isten rendelte el ezeket az igazságokat, meg is változtathatja őket, ahogyan egy király is megváltoztathatja törvényeit; erre a válasz az, hogy igen, feltéve ha akarata megváltozhat. De én azokat öröknek és változhatatlannak tartom és ugyanezt gondolom istenről is."*[19] (Az én kiemelésem. — N. Gy.)

DESCARTES törvényfelfogásában — a descartesi filozófia ellentmondásos alapszerkezetének megfelelően — sajátos ellentmondás érvényesül: a törvényeket isten helyezte ugyan a természetbe, de isten korántsem szuverén ura a természetnek és törvényeinek. Isten szerepeltetése nem szünteti meg a descartesi törvényfelfogás lényegében objektív karakterét: a természet törvényei *örökök* és *változhatatlanok*. Az egész teológiai apparátus csak mintegy a színfalat adja; DESCARTES nemegyszer utal arra, hogy *a természet gépezetének működése alapjában önnön törvényei szerint megy végbe:* isten így e mechanikus materialista világkép legszélső perifériájára szorul. A világ *saját törvényei* szerint mozogva fejlődött ki a káoszból, tanítja a descartesi kozmogónia, az első tudományos igényű kozmogóniai elmélet: *„ha tehát isten kez-*

[18] „Est Dieu, qui a établi ces lois en la nature, ainsi que un rois établit les lois en son royaume". (DESCARTES levele MERSENNE-hez 1630. ápr. 15-én.)

[19] DESCARTES idézett levelében.

detben csak a káosz formáját adta volna is a világnak, de megállapítván a természet törvényeit, rendes segítségét nyújtotta volna neki, hogy szokása szerint működhessék: akkor anélkül, hogy a természet csodás voltát kissebbítenők, elhihetnők, hogy a pusztán anyagi dolgok csakis ezáltal idővel olyanokká lehettek volna, amilyeneknek most látjuk őket.[20] (Az én kiemelésem. — N. Gy.) — írja DESCARTES, óvatosságból feltételes módba téve kozmogóniai elméletét.[21]

A természeti törvények változhatatlansága mellett DESCARTES felismeri *egyetemes* érvényességüket is: *„minden ami történik, pontosan e törvények szerint történik.*[22] (Az én kiemelésem. N. Gy.): e törvények érvényességi köre nem korlátozódik a mi szűkebb világunkra: *„ha isten több világot teremtett volna, akkor sem lehetne egy is olyan, amelyben e törvények nem volnának érvényesek."*[23]

DESCARTES három természettörvényt fogalmaz meg (az ún. Descartes-féle tehetetlenségi elv, a mozgásmennyiség megmaradásának törvénye, a mozgásátadás törvénye[24]). Bár e törvények a későbbi kutatás fényében nem bizonyultak teljesen exaktaknak[25], ez nem csökkenti Descartes törekvésének történelmi jelentőségét, hogy fizikájában objektív törvények alapján racionális módszerekkel magyarázta a világ gépezetének bonyolult szerkezetét. HUYGENS, aki nem értett egyet DESCARTES konkrét fizikai tanainak számos részletével, kiemelte DESCARTES mechanikai világképének, eme *új rendszernek* inspiratív szerepét a fizikai kutatások további fejlődésére: hiszen DESCARTES eredményei arra ösztönözték az őt követő kutatókat, hogy a mesterénél jobb megoldások elérésére törekedjenek.[26] Alapjában véve hasonlóan ítélt a 18. század mate-

[20] DESCARTES: Discours de la Méthode, V. rész (Magyar kiad. 42. lap.)

[21] DESCARTES egy levelében egészen nyíltan megmondja, hogy tudományos elméleteit csak óvatosságból adta elő hipotetikus formában, valójában feltétlenül meg van győződve ezen elméletek objektív érvényességéről: „A fizikáról semmit sem tudnék akkor, ha csak annyit tudnék mondani, hogyan lehetnének a dolgok és nem bizonyítanám be, hogy másként nem is lehetségesek. Ezt pedig — mivel mindezt a matematikai törvényekre vezettem vissza — meg is tehetem és úgy vélem, hogy ezt az eljárást végre is tudom hajtani valamennyi általam ismert tárgykörön, jóllehet nem így jártam el Essai-imben, amelyekben ki akartam fejteni elveimet és nem is érzek hajlandóságot arra, hogy akár a jövőben ezt megtegyem." (DESCARTES levele MERSENNE-hez 1640. márc. 11-én.)

[22] "... après y avoir fait assez de réflexion nous ne saurions doutez qu'elles ne soient exactement observées *en tout ce qui est ou qui se fait dans le monde*" (DESCARTES: Discours de la méthode. — V. Partie.)

[23] DESCARTES loc. cit. „... les lois de la nature... sont telles, qu'encore que Dieu aurait créé plusieurs mondes, il n'y en saurait avoir aucun ou elles manquassent d'être observées."

[24] DESCARTES: Principia philosophiae II. rész 37. paragrafustól.

[25] Ez mindenekelőtt a harmadik törvényt részletező szabályokra vonatkozik.

[26] Vö. HUYGENS: Oeuvres Complètes p. 406.

rialista szellemű tudománya is a descartesi törekvések jelentőségéről. D'ALEMBERT írja: *„El kell ismerni, hogy* DESCARTES, *akinek egy teljesen új fizikát kellett létrehoznia, nem adhatott jobbat... és hogyha ő tévedett is a mozgástörvények kérdésében, mindenesetre ő volt az első, aki megsejtette, hogy ilyen törvényeknek létezniök kell."*[27]

DESCARTES fizikai világképének a lényege éppen abban állott — és ebben rejlik inspiratív jelentősége a materialista természettudomány további fejlődésére — hogy a világot — a világ kialakulását is beleértve — a maga immanens törvényeivel magyarázza. Az isten a descartesi fizikában csak hipotézis annak megmagyarázására, hogyan indult működésnek a világ mechanizmusa: miután azonban a világ gépezete mozgásba jött, a maga változatlan és örök törvényei szerint folytatja működését. Így értelmezték DESCARTES fizikáját már a kortársak is. PASCAL pl. ezt írja:

DESCARTES... *„a legjobban szerette volna istent kihagyni a világképből, de mégsem kerülhette el, hogy egy isteni fricskát fel ne tételezzen, amely a világot mozgásba hozta; ezentúl már nem volt szüksége többé az istenségre."*[28]

DESCARTES fizikai világképe az immanens és objektív természeti törvényeken felépülő, mechanikus materialista világkép. A descartesi fizikában egy materialista világszemlélet lehetőségei rejlenek, amely világszemléletet azonban maga DESCARTES nem bontott ki: filozófiájában idealista metafizika híve maradt. Ennek ellenére a fizikájában kifejezésre jutó materialista világkép és a benne rejlő materialista világnézeti lehetőségek már a kortársak és közvetlen utódok előtt sem maradtak rejtve. ARAM VARTANIAN[29] gazdag forrásanyag alapján rendkívül érdekesen mutatja meg, hogy a descartesi fizika a 17. században teljes mértékben materialista tan számba ment; sőt a descartesi fizika és az atomizmus között elmosódnak a határvonalak. A GASSENDI által felújított atomista irányzat — amennyiben mint természettudományos irány működik — lényegében beleolvad a kartéziánus tudományba és ott konzekvensebb materialista és ateista vonásokat nyer, mint amilyenekkel eredetileg rendelkezett. (Hiszen maga GASSENDI az epikureizmust a keresztény vallás keretébe akarta beleszorítani, míg DESCARTES fizikájából teljesen hiányzanak a vallási tekintetek.)

A DESCARTES fizikájában rejlő materialista-determinista világnézetre az ellenfél hamar felfigyelt. 1657-ben a Dordrechti Synodus egyházi átok alá helyezi őt; nem sokkal utóbb, 1662-ben követi ezt a katolikus reakció: műveit indexre teszik.

[27] D'ALEMBERT: Discours préliminaire. — Oeuvres I. 67.
[28] BLAISE PASCAL: Pensées. I. Partie Art. X XLI.
[29] ARAM VARTANIAN: *Diderot* and *Descartes* (i. k.) II. fejezet.

Már DESCARTES életében azzal támadják őt egyesek, hogy fizikája ugyanazokon az alapelveken nyugszik, mint az atomistáké, DEMOKRITOSÉ és EPIKUROSÉ.[30] Ez a felfogás azután eléggé elterjedt: barát és ellenség egyaránt elfogadta. PIERRE BAYLE szerint: *„Lehetetlen tagadni, hogy a descartesi rendszer egyes elemei hasonlítanak* LEUKIPPOS *hipotéziseihez"*.[31] A DESCARTES elleni világnézeti támadásoknak évtizedeken keresztül egyik legfontosabb elvi bázisa volt az a tétel, hogy DESCARTES és az atomizmus között az alapvető kérdésekben nincs is különbség. Az anti-karteziánus MONTFAUCON DE VILLARS igen élesen exponálja ezt a tézist, amikor DESCARTES egyik követője szájába a következő elmélkedést teszi:

„A lényeges kérdéseket tekintve egyáltalán nincs is eltérés az epikureus tan és a miénk között. Mert... milyen különbséget is jelent a vallás és a hit kérdéseit illetően, hogy az anyag részecskéi négyszögletűek-e, vagy pedig szabálytalan idomúak, hogy átlós-függőleges, vagy pedig körmozgást végeznek-e, feltéve, ha mindkét esetben a mozgások szükségszerűek és belőlük egy mechanikai rend áll elő, anélkül, hogy az istenre vagy pedig valamely szellemi tényezőre szükség volna".[32] (Az én kiemelésem. — N. Gy.)

Mindez nemcsak rosszhiszemű denunciáció a klerikálisok részéről: a descartesi fizika mechanikus-materialista világképe csakugyan emlékeztet az ókori atomisták rendszereire. Azzal a különbséggel persze, hogy DESCARTES egy hasonlíthatatlanul kidolgozottabb fizikai tudásanyag alapján állott és ez lehetővé tette számára, hogy DÉMOKRITOS fatum-fogalma és logos-fogalma helyét nála az erők és változatlan természettörvények exaktabb fogalmai foglalják el.

Az azután másodlagos jelentőségű, a teológiai apparátus következménye, hogy Descartes a természeti törvények örökváltozatlan voltát isten változatlan természetéből vezeti le![33] A döntő: e *törvények* (leges), vagy *szabályok* (regulae) változatlanok és kvantitatív módon megfogalmazhatók. A természettörvények kvantitatív módon való megfogalmazhatóságát DESCARTES számára a világnak általa kialakított mechanikai képe teszi evidenssé.

[30] PLEMPIUS, DESCARTES egyik ellenfele, 1654-ben közzétett DESCARTES filozófiája elleni leveleiben.

[31] PIERRE BAYLE. Dictionnaire historique et critique. — „Leucippe" címszó.

[32] MONTFAUCON DE VILLARS: Suite de Comte de *Gabalis* etc. alapján idézi VARTANIAN i. m. 54. k.

[33] Vö. DESCARTES: Principia philosophiae II. 36. §. „Istenben mint tökéletességet ismerjük fel, hogy nemcsak maga változatlan, hanem a lehető legszilárdabb és vitathatatlanabb módon hat..." (Intelligimus etiam perfectionem esse in Deo, non solum, quod in se ipso sit immutabilis, sed etiam quod modo quam maxime constanti et immutabili, operatur). — Továbbá DESCARTES op. cit. §. 37.: „Istennek e változhatatlanságából néhány szabály vagy természettörvény következtethető." (Atque ex hoc eadem immutabilitate Dei, regulae quaedam sive leges naturae cognosci possunt.)

c) A mechanikai modell szerepe DESCARTES-nál

Azok közül a modellek közül, amelyek segítségével az emberiség a világ működését magyarázni és értelmezni próbálta, a mechanika modellje volt az első, amely lehetővé tette valóságos természeti törvények felismerését.

DESCARTES korában számos régi és új modell és magyarázati kísérlet volt forgalomban. FONTENELLE nagyon plasztikusan érzékelteti az újat és megtermékenyítőt, amit DESCARTES mechanikus világképe jelentett az addigi világmagyarázati elvekhez képest:

»*Én a világot nagy látványosságként, mintegy operaként képzelem el. Az operában elfoglalt helyetekről nem látjátok a szinházat olyannak, amilyen az a valóságban: a díszletek és a gépezetek úgy vannak elhelyezve, hogy a távolból kellemes hatást keltsenek; a kerekek és nehezékek, amelyek mozgatnak mindent, rejtve vannak a tekintetek elől. Ám egyáltalán nem is igyekeztek végére járni annak, hogyan működik mindez. És meglehet, hogy csupán valamely gépész, aki titokban meghúzódott a földszinten, izgul ama szárnyalás láttán, mely szokatlannak tűnik fel előtte és óhajtja okvetlenül megtudni, hogyan történt ez a szárnyalás. Ez a gépész, látjátok, hasonló a filozófushoz. Csakhogy a filozófusok esetében még az is súlyosbítja az akadályokat, hogy azokban a gépezetekben, melyeket a természet tár szemünk elé, a zsinegek teljesen rejtve vannak, s úgy vannak elrejtve, nehogy egyhamar ki lehessen találni, mi kelti a mozgást a világegyetemben. Képzeljétek el magatokat a bölcsek — a Pythagorasok, Aristotelesek — operájában, kiknek neve mostanában oly hangosan csendül meg fülünkben; tegyük fel, hogy ők látják* PHAETON *szárnyalását, kit magukkal ragadtak a szelek, de nem fedezik fel a zsineget és nem ismerik a szinház berendezését a kulisszák mögött. Az egyik így szól: „*PHAETON*t valamely rejtett tulajdonság ragadja magával." A másik: „*PHAETON *bizonyos számokból áll, melyek felszállásra kényszerítik őt." A harmadik: „*PHAETON *nem teremtetett repülésre, de inkább felrepül, mintsem elszenvedje az űrt a színház belsejében." A negyedik:* PHAETON*-ban bizonyos vonzódás él a szinház teteje iránt: rosszul érzi magát, ha nem tartózkodhat ott"; és így tovább, száz meg száz fantázia. Végül jön* DESCARTES *és némelyek az újak közül s így szólnak: „*PHAETON *azért emelkedik fel, mert zsinegek húzzák fel s van egy teher, mely nehezebb nála s amely ugyanekkor leereszkedik." Így tehát ma már nem hiszik többé, hogy a test mozog, ha nem húzza azt valami, vagy pontosabban: le nem löki azt valamely más test...*«[34] (Az én kiemeléseim. N. Gy.)

[34] FONTENELLE: Entretiens sur la pluralité des mondes c. művében.

A mechanikai természetszemlélet, a természetnek vagy egyes természeti jelenségeknek a mechanika mintájára történő magyarázata nemcsak DESCARTES sajátja. Már LEONARDO DA VINCI, majd később KEPLER, különösen pedig GALILEI a világ mechanikai viziójának alapján értelmezik a természetet. A mechanika a kor vezető tudománya, a mechanikai látásmód a kor új, az addiginál jóval gyümölcsözőbb tudományos nézőpontja.

Ha DESCARTES nem is az első, vagy az egyetlen tudós e korban, aki a mechanikai szemléletet egyetemes világmagyarázati elvvé szélesíti, ő az, aki talán a legradikálisabban és legkövetkezetesebben jár el ebben: *„az egész világ egy gépezet, amelyben minden a (geometriai) alak és a mozgás szerint történik.“*[35] Nagy gépezet a világegyetem, kis mechanizmusok — olyanok, mint az órák, vagy az automaták, — az állatok, és ugyancsak mechanizmus — igaz, hogy igen bonyolult — az emberi test is, vallja DESCARTES.

A mechanikai modell alkalmazásának igen nagy a tudománytörténeti jelentősége: impozáns módszertani kisérlet volt a világ demisztifikálására, exakt, racionális eszközökkel való kutatására. A görögök, vagy a reneszánsz természetfilozófusai — igaz — a világ mélyebb, a mechanikai kapcsolatok feltárásán túlmenő megismerésének, a jelenségek közötti *szerves* összefüggések feltárásának programját tűzték ki és igy célkitűzésükhöz képest a világ mechanikai szemlélete egyszerűsítésnek tűnhet. De ez az egyszerűsítés, e szerényebb program világtörténetileg szükséges szakasz volt a módszertan és a tudományos szemléletmódok fejlődésében, mert ez tette lehetővé a kvantitatív módszer alkalmazását, a természeti jelenségek exakt, oksági magyarázatát. Csak *miután* ezek az alapvető módszertani vívmányok a mechanikai világkép talaján — a tudomány közkincsévé váltak, lehetett magasabb fokon visszatérni a görögök és a reneszánsz természetfilozófusai által kezdeményezett, dialektikusabb természetszemlélethez: DIDEROT pl. éppen a *descartesi vívmányok alapján* kutatja a természeti jelenségek közötti *szerves* kapcsolatokat.[36]

A világ mechanikai szemlélete tehát rendkívül tudatos, módszeresen végrehajtott *absztrakció* terméke: a kutatás exaktsága érdekében „szerényebbé“ teszi a természetmagyarázat célkitűzéseit. A természeti jelenségeket egybefűző, mindenoldalú kapcsolatok feltárásának programját az alapvető mechanikai, kvantitatív kapcsolatok kutatására redukálja.

Éppen a mechanikai modell és az ennek alapján végrehajtott kvantitatív kutatások teszik lehetővé DESCARTES számára az *oksági összefüggések* feltárását. DESCARTES törvényei kauzális törvények:

[35] Idézi: J. F. SCOTT: The Scientific Works of RENÉ DESCARTES (London é. n.) 161.
[36] Vö. VARTANIAN i. m. IV. fejezet.

„... a természeti törvények közvetlen és különös okai azoknak a különböző mozgásoknak, amelyeket az egyes testeken észreveszünk.“ [37]

DESCARTES tudományos célkitűzése az *összes* természeti jelenségeknek — azoknak is, amelyeket közönségesen csodálatos vagy véletlen jelenségeknek tartanak, — szigorúan tudományos, *kauzális magyarázata.* A *Meteorokról* írott műve elején megfogalmazza tudományos célkitűzésének ezt az aspektusát. A meteorológiai jelenségek tudományos magyarázatához DESCARTES nagy reményeket fűz általános világnézeti vonatkozásban: *„Remélem, hogy ha a (meteorológiai) jelenségek természetét itt megmagyarázom, olymódon, hogy az embereknek nem lesz okuk többé, hogy csodálkozzanak azon, ami a levegőben látszik, vagy ami leszáll onnan, akkor könnyen el fogják hinni, hogy lehetséges, ugyanilyen módon, megtalálni mindannak okát — legyen az bár még csodálatra méltóbb is, ami a föld felett van.“* [38] (Az én kiemelésem. — N. Gy.)

A világ mechanikai magyarázata megfosztotta a természeti jelenségeket a csodálatosság fátyolától, a titokzatosság síkjáról a racionalitás síkjára helyezte át őket. A mechanikai világszemlélet nem ismerhetett el érték-mozzanatokat a természeti jelenségekben: a természet abszolute *tárgyilagos* vizsgálatának alapjára helyezkedett. Igen érdekesek ebből a szempontból DESCARTES-nak azok a fejtegetései, amelyekben szembefordulva az antropomorf, értékelő természetfelfogással, kifejti, hogy az egészséges és a beteg test — ha ez utóbbi „célszerűtlenül“ viselkedik is — *egyazon természeti törvényeknek* engedelmeskedik; a célszerűség hamis, antropomorf szempontját nem szabad a természeti jelenségekre alkalmazni, hiszen az teljes mértékben ellenkezik a természet mechanikai (értsd: kauzális) szerkezetével, amelynek hatósugarába az élőlények is beletartoznak. E fontos fejtegetést részletesebben idézem:

„De gyakran abban is csalódunk, amire a természet egyenesen ösztönöz, amint pl. betegeken megesik, hogy oly ételt, italt kivánnak, mely megárthat nekik. Valaki talán azt mondhatná, hogy megromlott természetük a tévedés oka, de ez nem oszlatja el a nehézséget, mert a beteg ember csakúgy isten teremtménye, mint az egészséges, s azért egyformán ellenkezik isten jóságával, hogy akár ennek, akár amannak tévelyítő, csaló természete legyen. Az óra,

[37] „... leges naturae;.. quae sunt causae secundaria ac particulares diversorum motuum, quos in singulis corporibus advertimus.“ (DESCARTES: Principia philosophiae. — II. 37. §.)

[38] „Ce qui me fait espérer, que si j'explique ici leur nature en telle sorte, qu'on n'ait plus d'occasion d'admirer rien de ce qui s'y voit ou qui en descent, on croyra facilement, qu'il *est possible,* en même façon, *de trouver les causes de tout ce* qu'il y a de plus admirable dessus la terre. "(DESCARTES: Les Meteores. — Discours Premier — Oeuvres de *Descartes.* — Publiées par *Adam* et *Tannery.* VI. kötet. 231.)

mely kerekekből és súlyokból áll, éppoly pontosan követi a természet minden törvényét, midőn rosszul van csinálva s rosszul jelzi az időt, mint mikor egészen a munkás akarata szerint jár. Épp így gépnek tekintem az emberi testet is, mely csontokból, idegekből, izmokból, erekből, vízből és bőrből úgy van összealkotva, hogy ha lélek nem volna is benne, mégis megtehetné mindazokat a mozgásokat, melyek most is nem akaratlagosak, azaz az ész hozzájárulása nélkül keletkeznek benne. Világosan állítom, pedig, hogy a vízkóros testre nézve éppoly természetes, hogy gégéje kiszárad, hogy ez a szomjúság érzetét kelti benne, hogy ennélfogva idegeit és egyéb testrészeit úgy mozgatja, mint amily természetes az egészséges testre nézve, hogy a gége hasonló szárazsága hasonlóképpen ivásra bírja s hogy ez szolgál az ő egészségének. Igaz ugyan, hogy ha az óra rendeltetését tekintem, azt mondhatnám, hogy midőn rosszul jelzi az időt, akkor eltért természetétől, s hasonló módon azt gondolhatnám, hogy az emberi test gépezete is, amelyet isten a szokásos mozgások céljára rendezett be, a természet rendjét nem követi, midőn gégéje száraz, az ivás pedig megárt neki. Azonban állítom, hogy a „természet" szónak ez utóbbi értelme nagyon különbözik az előbbitől. Mert mit jelent most e szó? Összehasonlítottam a beteg embert s a rosszul csinált órát az egészséges embernek s a jól csinált órának fogalmával. E szó „természet" tehát pusztán csak az én összehasonlító gondolkodásomból folyó elnevezés, a szóban forgó dolgokhoz tehát nincsen semmi köze. Ellenben a „természet", amint előbb értettem, olyat jelent, ami valóban megvan a dolgokban, s ezért bizonyos igazsággal bir."[39] (Az én kiemelésem).

Helyesen értelmezte tehát a mechanikai természetszemlélet történelmi jelentőségét FEUERBACH, rámutatván arra, hogy e szemléletmódban a mechanikai modell csak eszköze, korhoz kötött megjelenési formája a természeti szükségszerűségek feltárására irányuló tudományos törekvésnek.[40] Joggal állapítja meg azt is, hogy a mechanikai látásmód *„a természetnek látszólag legkevesebbé természetes, sőt legtermészetellenesebb szemlélete volt a természetnek*

[39] DESCARTES: Meditationes. VI. rész (Oeuvres. VII.—84.) „ut horologium ex votis et ponderibus confectum non minus accurate leges omnes naturae observat, cum male fabricatum est et horas non recte indicat, quam cum omni ex parte artificis volo satisfacit:... ita... hominis corpus... machinamentum quoddam est..."

[40] „Az eszme, amely alapja DESCARTES amaz állításának, hogy az állatok, gépek, nem egyéb, mint ... a szükségszerűség fogalma... A mechanizmus nem az eszme, hanem meghatározása az eszmének, azaz mulandó, véges, de éppen ezért kora szempontjából igaz és szükségszerű meghatározás. A későbbi időben ennélfogva, mikor mélyebb természeti érzék ébredt fel... elesett ez a meghatározás, de az eszme megmaradt." FEUERBACH: P. Bayle. — Válogatott filozófiai művei. — i. k. III.

első természetes szemlélete. Ezért DESCARTES, *nem* BACON *mondotta ki tisztán a természettudomány elvét.“* [41]

Hiba volna azt gondolni, hogy a világ mechanikai viziója nem lát összefüggést, kapcsolatot a természet egyes részei között. Az igazság az, hogy nagyon is figyelembe veszi az összefüggést és a kapcsolatot, de ezt egyoldalúan mechanikai összefüggésnek fogja fel. A mechanikai modell mármost igen jelentős módszertani lehetőségeket nyújtott. A világ gépszerű szerkezetének feltételezése alapján bizonyos adott okokból igen távoli hatásokra, vagy megfordítva adott hatásokból az okok láncolatán keresztül távolfekvő okokra lehetett következtetni. Érdekesen írja le SZECSENOV a mechanikai modellek szerint gondolkodó természettudós gondolkodási technikáját: *„A természetbúvár annyira elmélyedt a mechanizmusokban, hogy ha szeme elé új gépet állítunk és szeme elől elrejtjük annak belsejét, s működésének csak elejét és végét mutatjuk meg, akkor is megközelítően hű képe van a gép szerkezetéről és működéséről.“* [42]

Amikor LAPLACE a determinizmus híres megfogalmazását adja,[43] előtte is a világmechanizmus viziója lebeg, amelyben minden kerék és alkatrész az ok-okozat szükségszerű viszonyában áll egymással.

A mechanizmus analógiáját DESCARTES az élőlényekre is kiterjesztette. Módszertanilag ez rendkívül jelentős lépés volt, amennyiben egészen új tudományok kibontakozását alapozta meg. Az *életjelenségeket,* különösen pedig a specifikus *lelki jelenségeket* évezredekig a titokzatosság homálya borította. DESCARTES — felismerve HARVEY vérkeringés-tanának nagy elvi jelentőségét — kiragadta az életjelenségeket a tudatlanság és a hamis tudás markaiból és a mechanikai magyarázat alapján a racionális kutatás objektumává tette. A gép analógiája, — ha nem is volt adekvát, az életjelenségek bonyolultságának abszolute megfelelő — mindenesetre módszertani alapot adott a fiziológiai kutatás számára, hiszen — mint SZECSENOV némileg más vonatkozásban mondotta — *„mindenféle gép, bármely furfangos legyen is az, minden esetben kutatás tárgyává tehető.“* [44]

[41] FEUERBACH loc. cit.

[42] SZECSENOV: Az agy reflexei. (Akad. kiadó 1954.) 35.

[43] LAPLACE klasszikus meghatározása a determinizmusról így hangzik: „Így a mindenség jelen állapota az előző állapot okozatának és az eljövendő állapot okának tekintendő. Az olyan értelem, mely egy bizonyos pillanatban a természet összes erőit és az azt összetevő egységek helyzetét ismeri, mely továbbá eléggé mélyreható volna ezen adatok elemzésére, egyazon képletbe foglalhatná a világ legnagyobb testének és legkisebb atomjának mozgását. Semmi sem volna bizonytalan előtte: a jelen módjára látná a jövőt, éppenúgy, mint a multat.“

[44] SZECSENOV op. cit. 35.

Az állat-gép (bête machine) descartesi koncepciójától közvetlen út vezet az *ember-gép* (homme machine) LA METTRIE képviselte materialista tanához. — Maga LA METTRIE igen világosan látta ezt az eszmei kapcsolatot.[45] De már DESCARTES életében egyes tanítványai, — így pl. REGIUS — arra a következtetésre jutottak, hogy DESCARTES fiziológiai tanaiból logikusan következik egy materialista pszichológia, a lélek monista felfogása. Ennek megfelelően REGIUS a léleknek a testtel való organikus egységét vallotta: *„Az emberi lélek, bár olyan szubsztancia, amely valóságosan különbözik a testtől, mégis, amig csak a testben van, a test szervezetéhez organikusan hozzátartozik.“*[46] DESCARTESnak azokat az írásait, amelyek az embernek biológiai és pszichológiai szempontból való vizsgálatával foglalkoznak (a poszthumus *L'Homme*-ot, a *Les passions de l'ame*-ot) csakugyan a materialista monizmus szelleme hatja át.[47] Nem hiába látta PAVLOV is DESCARTES reflexológiai kutatásaiban a maga művének előfutárát.[48]

DESCARTES azonban a szaktudományos kutatásaiban érvényrejutó monista felfogást filozófiai műveiben és filozófiai elmélkedéseiben dualista világnézettel cserélte fel. Így jutott el a két külön szubsztanciához és idealista metafizikájának más összetevőihez. DESCARTES mint filozófus nem vonta le saját természettudományos munkájának, eredményeinek világnézeti következményeit. DESCARTES filozófiájában a mechanizmust még „kiegészíti“ egy nála magasabbrendűnek feltételezett szellemi tényező. A descartesi tudományban, DESCARTES mechanisztikus szemléletmódjában immanensen bennerejlő monizmust csak SPINOZA bontotta ki és emelte világnézeti rangra. SPINOZÁnak nem kis szerepe volt abban, hogy a haladó francia természettudósok (DIDEROT, LA METTRIE, BUFFON stb.) felismerték DESCARTES tudományában a monista vonásokat és materialista szellemben vitték tovább a descartesi tudományt.

45 LA METTRIE úgy vélekedett, hogy DESCARTES az embert is monista módon fogta fel és a két szubsztanciáról kifejtett felfogása csak trükk volt a teológusok félrevezetésére. (Vö. VARTANIAN i. m. 205—206.)

46 HENRICUS REGIUS: Fundamenta physices (Amstelodami 1646.— p. 246.): „Mens humana, quamvis sit substantia a corpore realiter distincta, est tamen, quamdiu in corpore existit, organica“.

47 DESCARTES maga egy helyen egészen világosan magáévá teszi az emberi lélek organikus felfogását. A *Traité de l'homme*-ban DESCARTES hipotetikusan egy ember-gépet konstruál gondolatban, amely — anélkül, hogy a testtől különálló lelket kellene feltételezni nála — képes valamennyi organikus funkció elvégzésére: „Azt akarom — mondom —, hogy mindezeket a funkciókat úgy tekintsd, hogy ezek e gépben természetes módon jöttek létre, kizárólag szerveinek helyzetéből kifolyóan, ugyanúgy, ahogy egy óra, vagy automata mozgásai... úgyhogy nem szükséges, hogy feltételezzünk benne valamiféle vegetatív vagy szenzitív lelket, sem pedig a mozgásnak és az életnek más principiumát, mint a vért, illetve a lélekszellemeket...“. DESCARTES i. k. XI. 201—202.

48 Vö. PAVLOV: Válogatott Művei (Akad. kiadó 1951) 456.

d) DESCARTES módszertana

DESCARTES valamennyi tudomány számára a deduktív (geometriai) módszert tartja ideálisnak: az okokból kell haladni az okozatok, hatások kibontása felé. Néhány biztos és szilárd alapelvet, törvényt kell megfogalmazni és ezekből levezetni az ismeretek egész gazdagságát.

Descartes előtt az euklidesi geometria mintája lebegett. Az egymástól független vagy egymással csak laza kapcsolatban álló geometriai ismeretekből EUKLIDES zsenialitása teremtett tudományt éspedig olyat, amely évszázadokon keresztül — méltán — a biztos és szilárd tudomány mintaképének számított. EUKLIDES néhány alapelvből bámulatos logikai erővel vezette le, illetve építette ki a geometria egész épületét. DESCARTES minden tudományt az elméleti tudásnak az euklidesi geometria által elért színvonalára kíván felemelni és erre egyedül a deduktív módszert tartja alkalmasnak.

Számára a deduktív módszer egyetemes alkalmazása nem erőszakolt eljárás[49]: a dedukció *egyetemes* alkalmazhatósága az igazságok és a tudományok belső szerkezetéből következik. Minthogy a tudományos igazságok, tételek (és maguk az egyes tudományok is) objektíve szigorúan logikus rendben épülnek fel — az általánosabb tételekből néhány módszertani szabály betartásával ki lehet fejteni, le lehet vezetni a kevésbé általános és az egyedi igazságokat, tételeket. DESCARTES annál is inkább képviselhette ezt a felfogást, mert racionálista ismeretelméleti álláspontja szerint a logikai összefüggésrend, a logikai konzekvencia a valóságos összefüggésrendnek felel meg. (causa = ratio). A logikai-matematikai dedukció útja tehát nem valamiféle mesterkélt eljárás, nem erőszak a valóságon, hanem egybevág a valóság *reális* összefüggésével, anyagi szerkezetével.

DESCARTES módszertanának jellegzetes vonásai élesen kidomborodnak, ha a kartézius módszertant egybevetjük egyrészt BACON, másrészt NEWTON metodikájával.

BACON empirizmusával szemben DESCARTES az *elméleti fizika* kezdeményezője. Ez a megkülönböztetés egyáltalán nem azt jelenti, mintha DESCARTES szemben állott volna az empiriával, a kísérletezéssel. A kísérletezés szükségességét és hasznosságát illetően DESCARTESnak nem voltak semmiféle kételyei: „*A kísérletekre vonatkozóan észrevettem* — mondja a módszerről írott híres ÉRTEKEZÉSÉBEN —, *hogy minél jobban előrehalad valaki a tudományban, annál szükségesebbek.*“[50]

[49] GIAMBATTISTA VICO emelte azt a kifogást DESCARTES módszertanával szemben, hogy a geometriát általános módszernek fogva fel, erőszakot tesz az egyes speciális területeken. (Vö. LAMEERE: *G. Vico*, critique italien de *Descartes*. — Études Cartésiennes. — Paris 1937.)

[50] DESCARTES: Discours de la Méthode. VI. „Même je remarquois, touchant les experiences, qu'elles sont d'autant plus nécessaires, qu'on est plus avancé en connoissance“ (DESCARTES: Oeuvres VI. 63.)

Mégis: az új, amivel DESCARTES a tudományos kutatás módszertanát, a tudomány önmegismerését és tudatosodását gazdagította, a puszta indukción túlmenő tevékenységekre vonatkozik. DESCARTES merészebben épített a gondolkodás alkotó, aktív szerepére, mint az indukcionisták. Jellemző a következő tudománytörténeti epizód. 1648-ban PASCAL több kísérletet hajt végre arra vonatkozóan: milyen állást mutat a barométer különböző magasságokban. DESCARTES egyik levelében ehhez a következő igen érdekes megjegyzést fűzi: *„Én ajánlottam neki két évvel ezelőtt e kísérlet elvégzését, mert bár magam nem hajtottam végre, nem kételkedtem sikerében, mivel hogy teljesen egybevág principiumaimmal.“* [51]

A baconi indukcionizmus leszűkítette a tudományos kutatás programját és e leszűkítés következtében a módszertani elvek is torzulást szenvedtek. A deduktív gondolkodási mozzanatok bekapcsolása, a gondolkodásbeli aktivitásnak a puszta indukción túlmenő tevékenysége nélkül, a modern tudományok nem születhettek volna meg. Nem véletlen, hogy a baconi program jegyében működő természettudósok is — gyakorlati kutatómunkájukban — messze túlmentek a baconi indukció keretein és számos deduktív elemet kapcsoltak bele módszerükbe.

DESCARTES metodikai elvei különösen az elméleti tudományokra, mindenekelőtt az *elméleti fizikára* nézve nagy jelentőségűek. Az elméleti fizika ma is lényegében a DESCARTES által megfogalmazott módszertani elvekre épül. Az elméleti fizikának EINSTEIN által összefoglalt módszertani elvei — néhány legáltalánosabb, elemi törvényből gondolati dedukció útján levezetni az egész világképet[52] — teljes mértékben a descartesi — és nem a baconi! — tudományeszmény szellemében valók.

Nem azonos a BACON és DESCARTES közötti metodikai ellentéttel, hanem más síkon jelentkezik a különbség és az ellentét DESCARTES és NEWTON módszere és módszertana között. NEWTON indukcionizmusát hiba volna túlságosan közelhozni a Bacon-féle indukcióhoz, vagy egyenest azonosítani vele. Az elméleti fizika felépítésének kérdésében NEWTON is a deduktív módszer híve: néhány alapelvből kell kibontani a tudomány egész rendszerét. Jól ismertek NEWTON erre vonatkozó elvi fejtegetései:

„A jelenségekből két vagy három általános mozgáselvet vezetni le, azután kifejteni, mint következnek ezekből a világos elvekből valamennyi anyagi tárgy tulajdonságai és kölcsönhatásai, ez az, ami nagy lépést jelentene előre a filozófiában, mégha ezeknek az elveknek okai nem is volnának felfedve.“ [53]

[51] DESCARTES levele CARCAVIhoz 1640 júniusában. (DESCARTES: *Oeuvres* V. 366.)

[52] Vö. EINSTEIN: Mein Weltbild (Amsterdam 1934) 168 kk. és EINSTEIN: Out of my later years (Philosophical Library. — New York 1950) 98 k.

[53] NEWTON: Optika (az utolsó kérdésre adott válasz).

NEWTON ezt a programmot meg is valósította. NEWTON *Principia*-ja az elméleti fizika deduktív felépítésének mindmáig valóságos mintaképe maradt.[54] Kérdés azonban az, hogyan nyerjük magukat a deduktív levezetések alapjául szolgáló alaptörvényeket és alapelveket? Ebben a kérdésben már eltér egymástól DESCARTES és NEWTON, illetve azok az irányzatok, amelyek hozzájuk hasonlítanak. DESCARTES az indukció mellett tudományos-megismerő erőt és értéket tulajdonít a gondolkodás nem-induktív mozzanatainak, különösen a hipotéziseknek, valamint a tudományos intuiciónak. Ezzel szemben NEWTON elutasítja a hipotéziseket (hypotheses non fingo) és külön szabályt fogalmaz meg annak biztosítására, *„hogy a hipotézisek meg ne semmisíthessék az indukció érveit."*

DESCARTES módszertani elvei abból a meggyőződésből fakadnak, hogy a tudományos gondolkodást nem szabad leszűkíteni szűk határok által korlátolt szellemi tevékenységekre: az alkotó tudományos gondolkodás az ember valamennyi szellemi erejének, fantáziájának latbavetését követeli meg. A fantázia és az enthuziazmus adnak a tudományban is szárnyakat a gondolkodásnak. DESCARTES egyik feljegyzésében olvasható a következő — DESCARTES gondolatainak mélységébe világító — fejtegetés:

„Amint a képzelőerő figurákat használ fel ahhoz, hogy testeket teremtsen, akként az értelem is érzéki testeket — mint a szelet, a fényt — használ fel, hogy szellemi létezőket képezzen: ennek alapján vagyunk képesek a filozófia magasabb témáira térve a szellemet a megismerés erejével magasba emelni.

Csodálatosnak tünhet, miért magvasabbak a költők gondolatai, mint a filozófusoké. Ennek az az oka, hogy a költők enthuziasmussal és képzelőerővel írtak: Bennünk rejlenek az igazság magvai, akárcsak a kovakőben (a szikra) s ezeket a filozófusok az értelem segítségével válogatják ki; a poéták viszont a képzelőerő segítségével csiholják elő őket, s így erősebb fényt adnak."[55] („Ut imaginatio utitur figuris ad corpora concipienda ita intellectus utitur quibusdam corporibus sensibilibus ad spiritualia figuranda, ut vento, lumine: unde altius philosophantes mentem cognitione possumus in sublime tollere.

Mirum videri possit, quare graves sententiae in scriptis poetarum, magis quam philosophorum. Ratio est, quod poetae per enthusiasmum et vim imaginationis scripsere: sunt in nobis semina scientiae, ut in silice, quae per rationem a philosophis educuntur, per imaginationem a poetis excutiuntur magisque elucent.")

Már GIORDANO BRUNO kifejezésre juttatta azt a reneszánszgondolatot, hogy az egész embert, az ember valamennyi intellektuális és morális erőit a

[54] Vö. EINSTEIN: Zur Methode der theoretischen Physik (Mein Weltbild. — i. k. 176 k.) és EINSTEIN: *Isaac Newton* (in: Out of my later years. i. k. 219.)

[55] DESCARTES: Oeuvres (i. k.) X. 227. l.

kutatásnak, az igazság felderítésének és előadásának szolgálatába kell állítani. A skolasztika rideg, hamis „objektivitásával" szemben DESCARTES is ezt a tudományfelfogást vallja: meg kell nyitni az alkotó fantázia, a lelkesedés és a *tudományos intuició* zsilipjeit is a kutatásban.[56]

A gondolkodás aktív-alkotó mozzanatainak egyik legfontosabbika: a *hipotézis*, melynek segítségével a gondolat csak később tisztázható összefüggéseket képes meglátni. DESCARTES hipotézisei is jórészt igen megtermékenyítőek voltak (az örvényhipotézis pl. egy új tudomány megalapozásául szolgált). Merész hipotézisek, analógiák, modell-alkotások segítették DESCARTES-ot, hogy kimerészkedjen olyan utakra is, amelyeken előtte még nagyon kevesen jártak.

NEWTON és iskolája elvetették a hipotéziseket és gúnnyal beszéltek a „hipotézisek fizikájáról". Mai ítéletünk e kérdésben nem áll az indukcionisták mellé. Ha DESCARTES egyes hipotézisei megdőltek is, ez nem azt jelenti, hogy maga a hipotézisalkotás volna helytelen.[57] A tudomány fejlődése a további évszázadokban nem is lett volna elképzelhető hipotézisek alkotása nélkül és ez rákényszerítette a tudósokat, hogy elvileg is a hipotézisek létjogosultsága mellé álljanak. Ime egy jellemző epizód: A 18. században MAUPERTUIS a szerves természet kialakulásáról egy transzformista szellemű hipotézist állított fel: az élőlények változatos formái valamennyien egyetlen ősformából jöttek létre. E merész elgondolást az elmaradott nézetek hívei hipotetikus jellegére való hivatkozással támadták, kétségbevonván a hipotézisek tudományos jogosultságát. DIDEROT elvileg szól hozzá a kérdéshez és megvédi a hipotézisek tudományos rangját:

„Akár igaznak kell elismerni e filozófikus feltevést, akár mint hamisat el kell vetnünk, — senki sem tagadhatja annak szükségességét, hogy mint hipotézishez ragaszkodjunk hozzá. E hipotézis elősegíti az experimentális fizikának is, a racionális tudománynak is a fejlődését és felfedezésekhez, vala-

[56] DESCARTES-nak a tudományos fantáziáról vallott kedvező értékelése a 18. század francia tudományát jelentős mértékben befolyásolta. (DIDEROT, LA METTRIE stb.) LA METTRIE pl. így ír e kérdésről: A hatékony, nagy és erős képzelőerő... a legnagyszerűbb képesség mind a tudományokban, mind a művészetekben. Nem tudom eldönteni, ahhoz kellenek-e nagyobb intellektuális képességek (esprit), hogy ARISTOTELES és DESCARTES, vagy pedig ahhoz, hogy EURIPIDES és SOPHOKLES művészetében alkosson valaki kiemelkedőt... de annyi bizonyos, hogy egyedül a képzelőerő — amelyet más-más módon használtak — szerzett nekik kiemelkedő győzelmeket és halhatatlan dicsőséget." (LA METTRIE: Oeuvres philosophiques III. 37.)

[57] Hipotézis volt pl. HUYGENS fény-hullámelmélete, hiszen mint VAVILOV kifejti, közvetlen tapasztalat útján a fényhullámok nem érzékelhetők, létezésüket a hangok vagy a vízhullámok analógiája alapján feltételezzük. (VAVILOV: *Newton.* — Szikra 1948.—144.) És milyen nagy jelentőségű volt a fény hullámelmélete a fizika és a fizikai gondolkodás számára!

mint a kérdések tisztázásához vezet az élő szervezettel kapcsolatos problémák esetében." [58]

Összefoglalva DESCARTES jelentőségét a természettörvény-fogalom kialakulástörténetében:

DESCARTES magáévá teszi a törvénymetafórát és polgárjogot szerez a tudományos szóhasználatban a természet törvényei *(leges naturae)* terminusnak. Bár DESCARTES *formálisan* elfogadja a teológiai voluntarizmust a természettörvény kérdésében (isten úgy szab törvényt a természetnek, mint egy király a maga országának), *valójában* kiküszöböli a törvénykoncepcióból a voluntarista elemeket: isten természetéből éppen azt következteti, hogy a természettörvények *objektív jellegűek, örök érvényűek és változatlanok.*

Természeti összefüggések és törvényszerűségek — DESCARTES szerint — *kauzális* természetűek: a természetnek nincsenek céljai, nincs „hivatása". A természeti jelenségek a *mechanikai kauzalitás* viszonylatában állanak egymással.

DESCARTES abszolut következetességgel viszi keresztül a mechanikai modellt a természet magyarázatában. Ennek segítségével sikerül addig titokzatosnak tartott jelenségcsoportokat (az élet és a lélek problémáit) a tudományos kutatás világosságába vonnia. DESCARTES új tudományoknak veti meg alapját (kozmogónia, fiziológia, reflexológia) és ezzel jelentős mértékben kitágítja a természettörvények reális kutatásának területét.

A módszertanban DESCARTES a tudományos gondolkodás nem-induktív elemeit hangsúlyozza. Az elméleti fizika mind a mai napig a DESCARTES által elképzelt és helyesnek tartott *deduktív* felépítést követi. DESCARTES a kutatásban is kiemeli a nem-induktív gondolati tevékenységek szerepét: a tudományos fantáziának, intuiciónak, hipotézisalkotásnak jelentőségét.

DESCARTES tudományos műveiben *monista* világkép rejlik. Filozófiájában azonban DESCARTES *dualista világnézetet* képvisel — idealista metafizikát alapoz meg.[59] A tudományos gondolkodás továbbfejlődése szempontjából ezért nagy jelentőségű volt SPINOZA filozófiája, aki kibontotta a descartesi tudományban, — valamint általában a kor természettudományában — rejlő monista világképet és erre alapozta filozófiai rendszerét.

(Beérkezett: 1956. IV. 18.)

[58] DIDEROT: De la Nature. (Oeuvres Complètes. Paris 1875) II. 16.

[59] DESCARTES három „csodás" dolog elismerésére alapítja metafizikáját: „Három csodát tett az Úr; ezek: a semmiből való teremtés, a szabadakarat és az ember-isten (Tria mirabilia fecit Dominus: res ex nihilo, liberum arbitrium et Hominem Deum) DESCARTES: Oeuvres X. 218.

KÖNYVISMERTETÉSEK

Herzberg G. „Molekulaszínképek és molekulaszerkezet" című könyve első kötetének („Kétatomos molekulák színképe") ismertetése

Hazai tudományos irodalmunk igen értékes művel gazdagodott, amikor Akadémiánk a fentebb megnevezett híres monográfiát anyanyelvünkön megszólaltatta. Magyar fordításában ez a kitűnő mű most már a magyar fizikusok és kémikusok szélesebb rétegei számára is hozzáférhetővé válik. (A mű eredeti angol címe: Molecular Spectra and Molecular Structure. I. Spectra of Diatomic Molecules by G. Herzberg. D. Van Nostrand Company, Inc. Toronto—New York—London 1950.) Ez a monográfia széles közkedveltségét annak is köszöni, hogy megértése egyáltalán nem igényel mélyebb matematikai és elméleti fizikai előismereteket, mégis felvezet az elmélet parnasszusára. Megtaláljuk azonban benne a molekulaspektroszkópia különböző alkalmazásait is, amelyek közül különösen a pirometriai, a kémiai-termodinamikai, a reakciokinetikai, a fotokémiai, valamint az asztrofizikai alkalmazás emelendő ki. A mű az e területeken búvárkodók számára nélkülözhetetlen forrásmű, a molekulafizikában elmélyedni óhajtók számára pedig egyben kiváló tankönyv is.

Lapozzuk fel a finom papiron nyomott, szép piros kötésű könyvet, mit tartalmaz.

A *bevezetésben* általános megjegyzéseket olvasunk a molekulaspektroszkópia tudományos jelentőségéről. Követőleg megtaláljuk a spektroszkópiában előforduló alapvető fizikai állandóknak legpontosabb értékeit, továbbá a fontosabb fizikai mennyiségek szabatos értelmezését, azok különböző mértékegységeit, a különböző energia-egységek egymásba való átszámításának numerikus adatait is.

A könyv *első fejezete* az atomszerkezet elemeinek kompendiumát nyújtja. Ebben a mű előbb visszatekint BOHR elméletére, majd összefoglalja a hullámmechanikát. Ezután alkalmazza ezt előbb az egyelektronos, majd a többelektronos atomokra. Felépíti végül az atom vektormodelljét. Ezen rövid elméleti fejezet alapján érthetjük meg az atomszínképek keletkezését, valamint főbb jellegzetességeit.

A *második* fejezet az észlelhető molekulaszínképeknek fenomenologikus leírásával foglalkozik. Megismerjük itt rendre az ultraibolya, a látható, az infravörös, a radiofrekvenciás színképeknek, továbbá a Raman-színképeknek jellemző tulajdonságait, valamint a molekulaszínképeket mennyiségi módon leíró empirikus formulákat. Igen sok spektrogram-másolat, ill. ábra illusztrálja ezt a fejezetet.

A *harmadik* fejezetben megismerkedünk a kétatomos molekuláknak ún. kétcentrum-modelljével, közelebbről pedig ezzel kapcsolatban a térbeli merev rotátornak és a harmonikus oszcillátornak hullámmechanikájával. Itt megérthetjük az infravörös és a Raman-színképnek keletkezését, sőt ilyen színképek finomabb részleteinek elméleti magyarázatát is ebben a fejezetben találjuk meg.

A *negyedik* fejezet az elektronállapotok és az elektronátmenetek elemi tárgyalását adja meg. Az elektronsávok rezgési és rotációs szerkezetének jellemző tulajdonságai, mint pl. az ún. izotópeffektusok mellett megfogalmazza e fejezet a Franck—Condon-féle elvet, és ennek alapján hullámmechanikai úton értelmezi a sávok intenzitáseloszlását, majd kitér a különböző elektronátmenetekhez tartozó sávok rotációs szerkezetében jelentkező intenzitásszabályokra is.

Az *ötödik* fejezet az elektronállapotokra és átmenetekre vonatkozó ismereteinket tovább mélyíti. Elsősorban osztályozza az elektronállapotokat és foglalkozik az ún. multiplett-szerkezettel, az elektronspin következményével. Majd taglalja az elektronmozgásnak és a molekula forgásának kölcsönhatását, részletezve az ún. Hund-féle kapcsolódási eseteket. Kitér az ún. lekapcsolódási jelenségekre, mint a Λ-típusú dublettnek, valamint a spinlekapcsolódásnak stb. esetére. Ezután a különböző lehetséges elektronátmenetekhez tartozó sávoknak rotációs szerkezetét veszi a fejezet részletes vizsgálat alá, ismertetve a kiválasztási szabályokat. Követőleg a molekulaszínképekben jelentkező ún. perturbációs jelenségeket tekinti át a fejezet, megadja továbbá a Zeeman- és Stark-jelenség diszkusszióját, végül a magspin molekulaszínképekre való hatásaként az ún. hiperfinom-szerkezetnek ismertetését.

A mű *hatodik* fejezetében a kétatomos molekulák felépítési elveivel, az elektronkonfigurációval és a vegyértékelmélettel ismerkedünk meg. Bemutatja e fejezet a molekula termsokasága meghatározásának módszereit mind a különálló, mind az egyesített atomok állapotai alapján, mindpedig ún. elektronkonfigurációból. Ez utóbbi módszernél kitér a fejezet a Pauli-féle elvnek a molekulára való alkalmazására, kitér továbbá a termtípus meghatározására is Russel—Saunders-féle és más kapcsolódás esetén. E módszert itt számos példa illusztrálja. Ezután foglalkozik a könyv a molekulák elektronállapotainak stabilitásával, ezzel kapcsolatban taglalja a kémiai kötés különböző típusainak elméletét, végül részletezi az elektronátmenet-intenzitás hullámmechanikai elméletének eredményeit.

A *hetedik* fejezet a folytonos és diffúz molekulaszínképekről, a disszociációról és predisszociációról szól. Megismerkedünk itt elsősorban a folytonos molekulaszínképek sávkonvergencia-határával. Részletesen taglalja a mű az abszorpció, valamint az emisszió különböző lehetséges eseteit. Egyes diffúz molekulaszínképeknek predisszociációval való magyarázata céljából tárgyalja a könyv a spontán, sugárzásmentes felbomlási folyamatoknak elméletét, részletezi a predisszociáció különböző fajtáit, majd az e jelenségeknél érvényes Kronig-féle kiválasztási szabályokat, ezután a Franck—Condon-féle elvet a predisszociáció különféle eseteire alkalmazva a jelenség finomabb részleteinek elméleti magyarázatát is leírja. Végül a disszociációs hők meghatározásainak módszereit találjuk meg e fejezetben.

A szerző a könyv *nyolcadik* (utolsó) fejezetét a molekulaszínképek főbb példáinak, eredményeinek és alkalmazásainak szentelte. E fejezet ismerteti több molekulának energianívó-diagramját és állandóit. Kifejti ezenfelül a molekulaspektroszkópiának magfizikai, termodinamikai, reakciokinetikai, végül geo- és asztrofizikai alkalmazásait.

A könyv *függeléke* irodalmi utalásokkal és kritikai megjegyzésekkel igen értékes táblázatokat közöl, amelyekben minden ismert kétatomos molekula elektronállapotainak rezgési és rotációs állandóit megleljük. A függelék további része a monográfia irodalmi hivatkozásait foglalja össze, szerzők szerint is csoportosítva. A függeléket terjedelmes tárgymutató zárja be.

A magyar kiadás jellemzésére térve át, megelégedéssel állapítható meg, hogy a fordító, M. ZEMPLÉN JOLÁN, igyekezett hű maradni az eredeti szöveghez még akkor is, amikor a stílus eleganciájából engedni kényszerült. A fordítást KOVÁCS ISTVÁN lev. tag lektorálta, a magyar kiadást MÁTRAI TIBOR rendezte sajtó alá. Jó néhány sajnálatosan becsúszott sajtóhiba a nyomás hajráját tükrözi, viszont a szerző segítőkészségének jóvoltából mentessé lehetett a könyvet tenni több olyan sajtóhibától, amely az angol eredetiben előfordul. Kár, hogy a II. fejezet gazdag spektrogram-illusztrációit a kiadó nem a szerző által időközben rendelkezésre bocsátott eredeti fényképekről, hanem az angol kiadás ábráiról sokszorosította. E technikai fogyatékosság miatt a spektrogramok életlenebbek és elmosódottabbak is, mint az angol kiadásban, ezenfelül a spektrogramok sok helyen pontatlanul illeszkednek a margójukra rajzolt magyarázó vonalakhoz.

Egyéb szempontból a kiadó dicséretre méltó kivitelben tudta megoldani a szerző megítélése szerint is tekintélyes nyomdatechnikai feladatot.

A mű magyar nyelvű előszava azzal a kívánsággal bocsátja útjára ezt az anyanyelvünkön megszólaltatott szép könyvet, hogy nyújtson minél több segítséget azok számára, akik a molekulaspektroszkópia tudományát tovább fejlesztik és felhasználják, és ezen keresztül szerezzen a molekulafizika számára minél több lelkes művelőt.

Dr. Mátrai Tibor
a fizikai tudományok kandidátusa

A. N. Tyihonov—A. A. Szamarszkij: A matematikai fizika differenciálegyenletei

(Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.)

A fizika természettörvényeinek matematikai megfogalmazása általában differenciálegyenletek formájában történik. A jelenségek elméleti tanulmányozása ezen ún. alapegyenletek megoldására épül. Azt mondhatjuk, hogy az elméleti fizikus kutató és oktató munkájában a legtöbbször a differenciálegyenletek elméletébe vágó problémákkal találkozik. Elengedhetetlenül szükséges tehát az analízis e területének — a megfelelő tételeknek és módszereknek — az ismerete. A differenciálegyenletek óriási problémakörét magában foglaló, a legteljesebb matematikai precizitást is kielégítő monográfiák áttanulmányozása azonban a fizikus számára feleslegesen sok munkát jelentene, hisz nem a matematikai igazságok, hanem a természet más törvényeinek — pl. az elemi részecskék kölcsönhatásainak — kiderítésére jegyezte el magát a tudománnyal. Éppen ezért nagy nyereségként könyvelhető el, hogy A. N. TYIHONOV és A. A. SZAMARSZKIJ: *A matematikai fizika differenciálegyenletei* című tankönyv magyarra való fordítása a differenciálegyenletekre vonatkozó, a fizika szempontjából fontos tételeknek és módszereknek anyanyelvünkön való, könynyebb elsajátítását teszi lehetővé. Különösen nagy előnyt jelent ez fiatal kutatóinknak és fizikus hallgatóinknak.

TYIHONOV és SZAMARSZKIJ könyve nagyon ügyesen ismerteti meg az olvasót a parciális differenciálegyenletek elméletével. A különféle egyenlettípusokat egy-egy fizikai problémán keresztül vezeti be, miáltal a könyv a fizikus számára sem száraz és elvont, hanem végig eleven és vonzó marad. A nagy matematikai anyag mellett igen sok fizikai probléma exakt matematikai tárgyalása gazdagítja a könyvet. Azt lehet mondani, hogy nemcsak a parciális differenciálegyenletek, hanem számos fizikai jelenség és feladat megtanulására is alkalmas. Reméljük, hogy fizikus (és talán matematika-fizikaszakos) hallgatóink oktatásában is jelentős szerep jut a jövőben ennek a jó tankönyvnek.

A hatvanöt ív terjedelmű könyv hét fejezetre oszlik és nagyon gazdag függelékkel zárul.

Az első fejezet a parciális differenciálegyenletek osztályozását tartalmazza.

A második fejezet a hiperbolikus egyenletekre vonatkozó tételeket és az idevágó fizikai alkalmazásokat öleli fel. Behatóan foglalkozik a könyv ebben a fejezetben a rezgéstani problémákkal és a velük kapcsolatos egyenletekkel. Itt találhatók a húr és membrán rezgéseinek matematikai leírásai, hidrodinamikai és akusztikai feladatok, gázdinamikai problémák.

A harmadik fejezet a parabolikus egyenletekre vonatkozó tételeket és a megfelelő alkalmazásokat fogja össze. Nagy helyet foglalnak el e fejezetben a hővezetéssel és diffúzióval összefüggő matematikai problémák, peremértékproblémák megfogalmazása különféle kezdeti feltételekkel. A fejezetet a δ-függvénnyel kapcsolatos vizsgálatok zárják be.

A negyedik fejezet az elliptikus egyenletekkel és azok fizikai alkalmazásaival foglalkozik. Itt találhatók a Laplace-féle egyenletre vezető problémák: stacionárius termikus tér, stacionárius áram terének potenciálja, örvénymentes folyadékáramlás. Ezt követi a harmonikus függvények általános tulajdonságait tárgyaló paragrafus, melyben a megoldások egyértelműségével kapcsolatos fejtegetések is helyet kapnak. Ugyancsak e fejezetben találkozunk a potenciálelmélet több szép alkalmazásával: térfogati és felületi sűrűségeloszlás által keltett potenciál, kettősréteg potenciálja. A fejezet végén a konform leképezés módszerének elektrosztatikai és hidrodinamikai alkalmazásai, majd a biharmonikus egyenlettel kapcsolatos fejtegetések találhatók.

Az ötödik fejezet „hullámok térbeli terjedése" címet viseli. Részletesen foglalkozik e fejezet a hullámegyenletre vonatkozó általános matematikai tételekkel és módszerekkel. Ezután a hang és az elektromágneses hullámokra való alkalmazások következnek. Ezek között találhatók az elektromágneses potenciálok hullámegyenletei, valamint az oszcillátor elektromágneses terének és sugárzásának matematikai tárgyalása.

A hatodik fejezetet a térbeli hőterjedéssel összefüggő matematikai problémákra szenteli a könyv. De ugyanitt kapnak helyet a füstfelhő diffúzióját és a szolenoid hengeres vasmagjának demagnetizálódását tárgyaló paragrafusok is.

A hetedik fejezet ismét az elliptikus egyenletekkel foglalkozik. A $\Delta v+cv=0$ (c állandó) egyenletre vezető problémákkal (mint pl. a $\Delta v+k^2v=0$ hullámegyenlettel leírt rezgések, diffúzió mozgó közegben) kezdődik a fejezet. Ezt követi a pontszerű források hatásfüggvényével kapcsolatos rész, majd a fényelhajlás matematikai elmélete. A fejezet nagyon szép problémák tárgyalásával zárul. Nevezetesen: Hullámok henger alakú csőben. Elektromágneses rezgések üreg-rezonátorokban. Skin-effektus. Rádióhullámok terjedése a Föld felszíne felett.

A fizikus szemével nézve nagyon értékes része a könyvnek a függelék, mely az elméleti fizikai munkákban igen gyakori speciális függvényekkel és polinomokkal foglalkozik. E százhúsz oldalas függelék a következő fontosabb dolgokat tartalmazza: Hengerfüggvények. A Bessel-egyenlettel kapcsolatos peremértékproblémák. A hengerfüggvények különféle típusai: Hankel-függvények, Hankel- és Neumann-függvények. Fourier—Bessel integrál. Behatóan foglalkozik a függelék a gömbfüggvényekkel és a Legendre-, továbbá a Csebisev—Hermite- és a Csebisev—Laguerre-polinomokkal. Befejezésül a Schrödinger-egyenlettel kapcsolatos egyszerűbb feladatok (lineáris oszcillátor, rotator, elektron mozgása Coulomb-féle erőtérben), a hibaintegrál és néhány hengerfüggvény értékeinek táblázata található.

Minden fejezet számos megoldandó, ún. házi feladatot nyújt az olvasónak.

E rövid tartalmi ismertetésből kiderül, hogy az elméleti fizikus szemével lapozgattam végig e könyvet és azt próbáltam itt pár sorban lerögzíteni, ami bennem nyomot hagyott. (Valószínű, hogy matematikus kollégáim másként ismertették volna.)

Szeretnék még pár technikai természetű megjegyzést tenni a könyv magyar kiadásával kapcsolatban. Nagyon örvendetes dolog, hogy a fordítás kitűnő. Szép a könyv kiállítása is. Jó lett volna, ha a fizikai mennyiségek jelölésére következetesen a fizikai irodalomban szokásos betűket használták volna. Pl. nagyon idegenül hat a fizikus szemének, ha T-t lát a rugalmas feszültség jelölésére, vagy ha nem f-et lát az erősűrűség helyén. Sajnálatos végül az, hogy ehhez az értékes, jó könyvhöz tizenöt oldalas hibajegyzéket kellett mellékelni.

Nagy Károly
a fizikai tudományok kandidatusa

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Marx György doktori disszertációjának nyilvános vitája

MARX GYÖRGY kandidátus „Relativisztikus dinamika" című doktori disszertációjának nyilvános vitáját 1956. június 8-án rendezte meg a Tudományos Minősítő Bizottság. A jelölt eddigi eredményes munkásságát figyelemmel kisérő fizikus és matematikus kollégák érdeklődése nagyszámú közönséget csalt az Eötvös Loránd Fizikai Társulat előadótermébe a disszertáció megvédésére.

A TMB a disszertáció opponenseinek GOMBÁS PÁL akadémikust, NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikust és HOFFMANN TIBORt, a fizikai tudományok doktorát kérte fel.

A bíráló bizottság tagjai voltak: JÁNOSSY LAJOS akadémikus, a bizottság elnöke, NAGY KÁROLY a fizikai tudományok kandidátusa, a bizottság titkára, KOVÁCS ISTVÁN akadémiai levelező tag, NEUGEBAUER TIBOR a fizikai tudományok doktora és SZAMOSI GÉZA a fizikai tudományok doktora.

JÁNOSSY akadémikus megnyitó szavai után a bizottság titkára ismertette a jelölt tudományos munkásságát.

Ezután MARX GYÖRGY tizenkét tézisben foglalta össze a disszertációjának főbb eredményeit.

A relativitáselmélet kidolgozása idején a térelméleti kutatások az akkor ismeretes gravitációs és elektromágneses térre vonatkoztak. A relativisztikus dinamikának a speciális relativitáselmélet keretén belül való kidolgozása ennélfogva csak az egyedül ismeretes Lorentz-féle erőtípusra épült. Az általánosabb erőhatások csak később, a térelmélet határainak bővítésével vonultak be az elméleti fizikai kutatásokba. Ezek természetesen a relativisztikus dinamika tovább fejlesztését követelték a Lorentz-erőtől eltérő, általánosabb kölcsönhatások esetére. Igen időszerű célt tűzött tehát a jelölt maga elé, amikor disszertációja főfeladatául azt jelölte meg, hogy „kidolgozza a relativisztikus dinamika alaptörvényeit olyan általános keretek között, melyek magukban foglalják a magerők és más, az utóbbi években felmerült problémák klasszikus — relativisztikus tárgyalásának lehetőségét". A 230 oldalas, monográfiának beillő értekezés a kitűzött célt szépen megvalósította. Azonban nem elégedett meg az általános törvényszerűségek megállapításával, hanem az elért eredményeket mindjárt alkalmazta olyan kölcsönhatásokra, melyek lehetősége a magfizikában és más területeken felmerült. Az értekezés főbb eredményeit az alábbiakban foglalhatjuk össze:

A részecskére ható négyes erőt egyértelműen felbontja a világvonalra merőleges és annak irányába mutató tangenciális komponensre. Gyorsító hatása a merőleges komponensnek van; egyúttal ez a komponens a tömegpont kinetikai energiáját növeli. A tangenciális komponens pedig a belső energiát változtatja meg. A belső energia csak abban az esetben nem változik, amikor a négyesmunka nullával egyenlő, mint a Lorentz-féle erő esetében. Általában azonban nem ez áll fenn. A mezontér skaláris és pszeudoskaláris változata esetén megváltozik a belső energia. Ez a nyugalmi tömeg változó voltát idézi elő. Megmutatja a jelölt, hogy nem Lorentz-erő típusú kölcsönhatás esetén az elektrodinamikában fellép a belső munkavégzés és így a tömegpont nyugalmi tömege itt sem állandó. Erre példa a mágneses dipólus mozgása.

A belső energia változása bizonyos feltételek teljesülése esetén a nyugalmi tömeg negatívvá válását eredményezheti, ami vonzó erőtörvény mellett egész kis tartományban taszítást eredményez. Ez a jelenség fellép a skaláris mezontér, valamint a pszeudoskaláris mezontér pszeudoskaláris csatolása esetén.

Részletesen foglalkozik MARX GYÖRGY a skalár mezőtérbeli relativisztikus kéttestproblémával s megmutatja, hogy a taszítás jelensége itt is előfordul és hogy lényeges szerepe van a retardálásnak.

Az általános dinamikai kérdések tanulmányozása során a kényszer-mozgások relativisztikus tárgyalásával is foglalkozik az értekezés. A kényszererő belső munkája bármely kényszerfeltétel által megengedett elmozdulásnál nulla. A kovariáns tárgyalásban a problematikus „virtuális elmozdulás" fogalmára nincs szükség.

Részletesen elemzi a dolgozat a kontinuumok mechanikáját is és a szokásosnál egyszerűbb, variációs elven alapuló tárgyalást ad.

Az eddiginél általánosabb feltétel mellett tárgyalja a fenomenológiai elektrodinamika variációs elvét. Ennek kapcsán az elektrosztrikcióról is számot adó energia-impulzus-tenzor kifejezéshez jut, amely az Abraham-félének az általánosítása arra az esetre, amidőn ε a sűrűséggel változik.

Az alkalmazások közül legfontosabb a relativisztikus effektusok nehéz atommagoknál játszott szerepének tisztázása. Meghatározza a nehéz atommagok kötési energiáját skaláris mezontér feltételezésével. A nem-relativisztikus tárgyalás, mint ismeretes, skaláris térből származó Wigner-erőkkel a mag összeomlását eredményezné. A relativisztikus effektusok, elsősorban a nyugalmi tömeg lecsökkenése azonban biztosítani tudja a mag kötési energiájának telítettségét kicserélődési erő feltételezése nélkül is.

Miután MARX GYÖRGY ismertette disszertációjának téziseit, az opponensek olvasták fel bírálatukat.

GOMBÁS PÁL akadémikus az értekezés témakörét érdekesnek és nagyon aktuálisnak, a benne elért eredményeket értékesnek és szépnek tartja. Egy pontban nem értett egyet a disszertáció állításával, miszerint az egyes jelenségek fizikai magvának megértését megnehezítik és a lényeget gyakran elfedik a nehézkes és bonyolult kvantumelméleti közelítő módszerek. A jelölt ezek helyett a relativisztikus dinamika módszereivel tárgyalja az illető problémákat, miáltal a relativisztikus effektusok lényeges szerepe világossá válik. GOMBÁS akadémikus véleménye szerint, „egyáltalán nem biztos, hogy pl. az elemi részek között működő törvények, vagy pl. a tér és a részecske közötti kölcsönhatás pl. mezonok esetében klasszikus alapon egyáltalán tárgyalható. Lehetséges, hogy kiderül a későbbi kutatások során, hogy a klasszikus dinamika módszerei esetleg itt egyáltalán nem alkalmazhatók"... „Lehetséges az is, hogy az eddig alkalmazott hullámmechanikai közelítő módszerek, melyek a jelölt szerint a lényeget elfedik, még mindig többet nyújtanak, mint egy tisztán klasszikus dinamikai módszer, mellyel esetleg a lényeg egyáltalán nem is közelíthető meg." GOMBÁS akadémikus befejezésül a disszertációnak doktori értekezés gyanánt való elfogadását melegen javasolta.

NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus bírálatában részletesen elemzi az értekezés tételeit és fejezetről-fejezetre értékeli a bennfoglalt eredményeket. A disszertáció legfontosabb eredményének a következőket tartotta: 1. „A jelölt kétségtelenül kimutatta, hogy a relativisztikus tömegcsökkenés, ill. taszítás nem korlátozódik a sztatikus térre, hanem a kéttestproblémánál is fellép. Ezzel megteremtette a kapcsolatot a fizikai valósággal"... 2. „A nagy matematikai nehézségek ellenére a jelölt leegyszerűsített modell alapján ki tudta mutatni, hogy a relativisztikus erők biztosítani tudják a nehéz atommagok kötési energiájának telítettségét. A relativisztikus erőknek ez a hatékonysága új és meglepő."

NOVOBÁTZKY akadémikus a disszertációt fenntartás nélkül és örömmel elfogadta.

HOFFMANN TIBOR doktor a tőle megszokott alapossággal vizsgálta meg a disszertáció összes számításait és ennélfogva több „sajtóhibát" ismert fel. Az értekezés felépítését és elrendezését jónak, magát a disszertációt pedig értékes és jelentős munkának tartja. Az előző opponensekhez hasonlóan HOFFMAN doktor is elfogadta a disszertációt.

Az opponensek után MARX GYÖRGY válaszolt a bírálatokra. A választ mindhárom opponens kielégítőnek találta és elfogadta.

HOFFMANN TIBOR tett fel még egy kérdést, amire a jelölt ugyancsak kielégítő választ adott.

Ezután a bíráló bizottság határozathozatalra vonult vissza és az opponensek véleménye, valamint az azokra adott kielégítő válasz alapján a következő határozatot hozta:

„MARX GYÖRGY a fizikai tudományok kandidátusa „Relativisztikus dinamika" című doktori értekezésének nyilvános vitájára kiküldött bíráló bizottság megállapította, hogy a disszertáció témaválasztása minden szempontból kielégítő. A választott témakört a jelölt nagy részletességgel dolgozta ki. Igen érdemes munkát végzett a szerző, amikor kimutatta, hogy a relativisztikus taszítás nemcsak egytest, hanem a kéttestprobléma esetében, valamint a pszeudoskaláris térben is fennáll. További kiemelkedő eredménye, hogy a nagy matematikai nehézségek ellenére a szerző leegyszerűsített modell alapján ki tudta mutatni, hogy relativisztikus erők biztosítani tudják a nehéz atommagok kötési energiájának telítettségét. E pontnál a bizottság megállapítja, hogy a kvantumelméleti tárgyalás mellőzése kétségtelenül hiányosságokat jelent, de egyúttal elismeri, hogy egy ilyen problémát nem lehet azonnal minden összefüggésében egyforma hatékonysággal tárgyalni. A dolgozat a kiemelteken felül is számos igen értékes eredményt tartalmaz és lényegesen előreviszi a relativisztikus dinamika eddig kevésbé kidolgozott fejezetét. Ennek alapján a Bizottság egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy MARX GYÖRGYöt nyilvánítsa a fizikai tudományok doktorává."

Üdvözöljük MARX GYÖRGYöt a fizikai tudományok doktora cím elnyerése alkalmából és várakozással tekintünk további kutatásai felé.

Nagy Károly
a fizikai tudományok kandidátusa

Hoffmann Tibor „Egyvegyértékű fémek olvadásának elmélete" című doktori értekezésének nyilvános vitája

1956. május 18-án került sor Budapesten HOFFMANN TIBOR doktori értekezésének megvédésére.

A TMB által kiküldött bizottság elnöke NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus megnyitotta az ülést és felkérte HOFFMANN TIBORt, hogy ismertesse értekezésének téziseit.

A dolgozat néhány szóval rámutat az eddigi olvadás elméletekre és azok hibáira. Az itt bevezetett reális szilárd testet Frenkel-defektusokkal, lyukakkal szennyezett kristályként tárgyalja. A lyukkoncentráció és az entrópia között egyértelmű összefüggést állít fel. Egy durva, közelítő modellel egyértelmű összefüggést teremt a lyukkoncentráció és a kristályrács energiája között. Ennek az összefüggésnek az alapja még paraméterként függ a kristályblokk nagyságától. Ezen paraméter meghatározása után az energia és az entrópia között egyértelmű kapcsolatot teremt. Az energia — entrópia függvény részletes elemzése és tulajdonságainak értékelése után értelmezni tudja az olvadáspontot és ebből kiindulva az olvadási entrópiát, az olvadásponton fellépő lyukkoncentrációt, a fajhő olvadáspont körüli anomális viselkedését, továbbá a lyukkoncentráció hőmérséklet függését. A konkrét számításokat egyszerű tércentrált és lapcentrált köbös kristályra végezi el. Eredményei az alkalmazott közelítő lépések dacára igen jól egyeznek a kísérleti adatokkal.

Az opponensek közül elsőnek GOMBÁS PÁL akadémikus olvasta fel véleményét. Rámutat arra, hogy az alapul vett kristályrács modell igen durva, mert a számításokat atomláncokra végzi el és az ezekre nyert energiaértékekből építi fel a térbeli kristály energiáját. Nagyon meglepőnek tartja, hogy az egyezés a kísérleti eredményekkel igen jó. Felhívja a figyelmet arra, hogy a jelölt tércentrált rácsoknál csak a közvetlen szomszédok hatását veszi figyelembe (8 ilyen atom van), holott ezeknél csak 1,155-ször nagyobb távolságban még 6 atom található és az ezekkel való kölcsönhatás nyilvánvalóan nem elhanyagolható. A disszertációt értékes munkának tartja, mely az e tárgykörre vonatkozó eddigi elméleteken lényegesen túlmegy és elfogadásra melegen javasolja.

SCHAY GÉZA akadémikus kifejti, hogy a dolgozat alapelgondolásában helyes, de vannak olyan pontok, közelítések, amelyeknek a jogosságát nem indokolja eléggé a szerző s így az olvasó kényszerítve van, hogy a számítások elfogadhatóságát az eredmények alapján ítélje meg. Ilyen lépés pl. az, amikor a blokknagyságot kifejező paramétert ugyanakkorának veszi fel az olvadékban, mint a fémben és azt a lyukkoncentrációtól függetlenül állandónak tételezi fel. Megemlíti, hogy olyan nagy lyukkoncentráció mellett, mint ami az olvadékban van, nem helyes az entrópiának csupán az elegyítési tagjaival számolni, hanem a különböző konfigurációk energiakülönbségének a hatását is figyelembe kell venni. Megemlíti a koordinációs számmal kapcsolatban előbb már említett hibát és az atomkapcsolatok leszámlálásának eredményét. A dolgozatot értékesnek tartja, teljesen új és igen szellemes elméleti alapgondolatáért és elfogadásra ajánlja.

NEUGEBAUER TIBOR opponens véleményében rámutatott arra, hogy az olvadáselméletnek egyik fő nehézsége az, hogy a folyékony állapotról nincs jó atomfizikai képünk. A második fő nehézség, melyet minden elméletnek le kell küzdeni az, hogy nincs analóg jelenség, melyet mintául lehetne felhasználni. HOFFMANN témaválasztását ezért igen értékesnek tartja. Rámutat arra, hogy HOFFMANN a rezgési entrópiában a folyadék és szilárd test közt nyilván meglévő különbséget elhanyagolja. A folyadéknál bekövetkező igen jelentős lyukkoncentráció növelés dacára a halmazállapotváltozásnál alig változó térfogat és vezetőképesség magyarázata igen nagy elméleti nehézségeket okoz, melyeknek a dolgozatban adott magyarázata nem látszik teljesen kielégítőnek. További röntgenvizsgálatok ezen a téren igen jelentősek lehetnek. A dolgozatot természetesen elfogadásra ajánlja.

HOFFMANN TIBOR az opponensi véleményekre részletes választ adott. Részletes számításokat mutat be a dolgozatban elhanyagolt második legközelebbi szomszéd hatására vonatkozóan. Igen sok belső paraméter jelentősen változik, de a végső eredményekben csak kisebb korrekció adódik. Az eredmények több esetben javulnak (pl. olvadáspont). A közelítésekre tett megjegyzésekkel egyetért és további vizsgálatokat helyez kilátásba. A rezgési spektrumban fennálló különbséget szándékosan hanyagolja el, mert ezt kevésbé lényegesnek tartja és így a döntő hatást (lyuk) jobban tudja figyelembe venni. Az olvadásnál tapasztalt kis térfogatnövekedés magyarázatának hiányát elmélete leggyöngébb pontjának tartja és további kutatások során várja ennek a kérdésnek a tisztázását.

A megvédés programszerű részét igen széleskörű és termékeny vita követte, majd a bíráló bizottság határozathozatalra vonult vissza. A bíráló bizottság határozatában megállapította, hogy „a kandidátus doktori disszertációjának témájául a fizika egyik időszerű, fontos és a mai napig még teljességgel tisztázatlan problémáját választotta. A probléma megoldásához egészen eredeti elgondolások alapján fog hozzá, feltevései alapvetően helyesek. Hogy számszerű eredményeket tudjon alkalmazni, számításai során szükséges néhány számottevő elhanyagolást alkalmazni. Eredményei az alkalmazott közelítések ellenére is a kísérleti eredményekkel meglepően jól egyeznek. A vita során felmerült ellenvetésekre kielégítő választ tudott adni úgy, hogy a bizottság arra a véleményre jutott, hogy a kandidátus mind disszertációja, mind a vita során mutatott felkészültsége, továbbá eddigi tudományos működése alapján a doktori cím elnyerésére mindenképpen méltónak mutatkozott.“

Ennek alapján a bizottság egyhangúan javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy HOFFMANN TIBORt nyilvánítsa a „fizikai tudományok doktorává.“

A Tudományos Minősítő Bizottság a fenti vélemény alapján HOFFMANN TIBORt a „fizikai tudományok doktorává“ nyilvánította.

További munkájához sok sikert kívánunk és reméljük, hogy az általa bevezetett új elmélet még sok érdekes vizsgálat kiindulópontja lesz.

Dr. Gáspár Rezső
a fizikai tudományok doktora

Kisdi Dávid „Atommagok és nukleonok effektív kölcsönhatási potenciáljának meghatározása az atommagok statisztikus elmélete alapján“ című kandidátusi dolgozat nyilvános vitájának ismertetése

A Magyar Tudományos Akadémia Minősítő Bizottsága 1955. szeptember 23-án rendezte meg KISDI DÁVID kandidátusi dolgozatának vitáját. SZALAY SÁNDOR elnök megnyitó szavai után a bíráló bizottság titkára ismertette a jelölt eddigi működését és tanulmányait, majd a jelölt ismertette dolgozatának téziseit.

A jelölt az atommag effektív potenciálját a következő feltevések alapján határozta meg. Az atommaggal kölcsönhatásba kerülő nukleon az atommag sűrűségeloszlását nem változtatja meg, tehát feltételezi, hogy a mag közelébe jutó nukleon a magot nem polarizálja. Ez a feltevés csak igen stabil magok esetében lehet helyes. A magerők távolságfüggő részének a Yukawa-potenciált választja és a protonok és neutronok eloszlását Gauss-függvény szerűnek veszi fel. Az effektív potenciál segítségével kiszámította a $^{208}_{82}$Pb mag utolsó neutronjának és a $^{209}_{83}$Bi mag utolsó protonjának kötési energiáját, továbbá termikus neutronoknak a $^{208}_{82}$Pb magon való szóródásának hatáskeresztmetszetét és a $^{209}_{82}$Pb mag β^- bomlásának a matrixelemét. Mind a négy esetben nagyságrendileg jól egyező eredményt ér el.

HORVÁTH JÁNOS opponensi véleményében rámutat arra, hogy a dolgozat több egymástól távol eső magfizikai kísérleti tény magyarázatát adja s igen időszerű vizsgálatot tartalmaz. Részletekkel kapcsolatos megjegyzéseiben kifogásolja, hogy a szerző a nukleon rendszer nem relativisztikus Hamilton-operátorából indul ki és a Hamilton-operátorban nem szerepel a protonok Coulomb-szerű kölcsönhatása. Coulomb-kölcsönhatás esetében ismert tény, hogy az önkicserélődés kompenzálja az ön-Coulomb-kölcsönhatást. Yukawa-potenciál esetében hasonló tétel még bizonyításra vár. Felhívja a figyelmet a pár nélküli nukleonoknak a spinjük révén betöltött fontos szerepére és a dolgozatnak a többtest erőkkel foglalkozó kijelentéseinek néhány következményére. A dolgozat nyelvezetét és stílusát igen jónak tartja. Javasolja, hogy a dolgozatot nyilvános megvédésre bocsássák.

MARX GYÖRGY opponensi véleményében kiemeli, hogy KISDI DÁVID disszertációja az első kandidátusi disszertáció, amely a magfizika területéről választja tárgyát. A jelölt elméleti kutatásainál nem támaszkodhatott biztosnak mondható erőtörvényre s így olyat választott, amelyikkel a nehéz magok adatai helyesen magyarázhatók. A dolgozat fő eredménye egy effektív potenciálnak a meghatározása, melynek segítségével több fontos tulajdonságot határoz meg. Az elért eredmények a kísérleti adatokkal nagyságrenden belül egyeznek, aminél jobb egyezés nem is várható. Megkérdezi, hogy az utolsó nukleon energiájának számításánál nem kapna-e jobb eredményt a héjszerkezet figyelembevételével. A Yukava-potenciál helyett nem vonzó szingularitással rendelkező potenciál milyen eredményt adna? Ismertesse a jelölt részletesebben az utolsó neutron kinetikus energiájának és a potenciál meghatározásánál elhanyagolt Weizsäcker-féle energiatagnak a kapcsolatát. A jelölt meghatározza a $^{208}_{82}$Pb atommag sűrűségét. Érdemes lenne ezt összehasonlítani a legutóbbi években végzett közvetlen kísérletek eredményével és a μ-mezonos atom színképéből nyerhető adatokkal. Meg lehet-e határozni a γ-izomer átmenetek matrix elemeit. Az opponens kifogásolja, hogy a jelölt kevésbé dolgozza fel problémakörének magfizikai irodalmát, mint elméletének a statisztikus módszerével kapcsolatos irodalmát. A dolgozat megfogalmazása, külső kiállítása kiemelkedően mintaszerű. A jelölt bebizonyította vele, hogy a tudományos kutatásban és a tudományos módszerekben járatos.

Ezután KISDI DÁVID részletesen válaszolt az opponensek által feltett kérdésekre. A relativisztikus hatások igen jelentősek lehetnek, de ezek figyelembevétele lehetetlenné tette volna a numerikus számolási munkának a rendelkezésre álló gépekkel való elvégzését. Bemutatja, hogy az önkicserélődési és önkölcsönhatási energia kompenzációja kéttest erők esetében független a kölcsönhatási potenciál alakjától. Az általa tárgyalt magoknál párnélküli nukleon nem játszott szerepet. A héjszerkezetet figyelembe veszi az által, hogy az utolsó nukleon energiáját nem a statisztikus atommagenergiák különbségeként állítja elő, hanem hullámmechanikusan számítja egy effektív potenciál tér segítségével. A Yukawa-potenciál szingularitásának az elejtése nem okoz lényeges változást az utolsó nukleon kötési energiájában. A hullámmechanikai kinetikus energia direkt módon figyelembe veszi a Weizsäcker-energiát és ezért kell ezt elhanyagolni az effektív potenciál meghatározásánál. A μ-mezonos atomokra vonatkozó számításokkal a közeljövőben kíván foglalkozni.

A vita alapján a bíráló bizottság a következő határozatot hozta:

„Dolgozata témaválasztása igen időszerű és a magfizika fontos problémáit öleli fel. Hazánkban az első disszertáció, amely az elméleti atommagfizika területéről választja tárgyát.

Az értekezés, az opponensi vélemények és a válasz alapján a bizottság megállapította, hogy a jelölt alaposan elmélyedt kutatásának területén és az önálló tudományos kutatáshoz kellő alapot szerzett.

A bizottság szerint a dolgozat főérdeme az atommag effektívpotenciáljának bevezetése, amely a disszertáció tanulsága szerint szerteágazó problémák egységes tárgyalására mutatkozott alkalmasnak. Mind az elvi, mind a numerikus számítások elvégzése nagy szakismeretet és fáradságos munkát kívánt.

A bíráló bizottság örömmel állapítja meg, hogy a jelölt ezen a téren is igen lelkiismeretes és jó munkát végzett.

Ezek alapján a bizottság egyhangúan javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy KISDI DÁVID elvtársat nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává."

A Tudományos Minősítő Bizottság ezen határozat alapján KISDI DÁVIDot a fizikai tudományok kandidátusává nyilvánította.

Dr. Gáspár Rezső
a fizikai tudományok doktora

Schmidt György kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1956. június 22-én rendezte meg a III. Osztály a szokásos vitát SCHMIDT GYÖRGY kandidátusi értekezése felett. Az értekezést WINTER ERNŐ lev. tag, valamint FARAGÓ PÉTER a fizikai tudományok kandidátusa opponálta. A vitaülés bíráló bizottságának elnökéül a Tudományos Minősítő Bizottság GYULAI ZOLTÁN akadémikust kérte fel. A vitára szépszámú hallgatóság sereglett egybe.

A vita előtt a Bizottság titkára ismertette SCHMIDT GYÖRGYnek, akit aspiránsi tanulmányaiban SIMONYI KÁROLY professzor vezetett, eddigi tudományos tevékenységét, majd az elnök felkérésére SCHMIDT GYÖRGY foglalta össze „Elektromos kisülések nagy vákuumban" című 96 oldal terjedelmű dolgozatának főbb eredményeit. A disszertáció a hideg elektródák közötti gázkisüléseknek azzal a határesetével foglalkozik, amelyben a kisülési térben uralkodó nyomás olyan kicsi, hogy az elektron és molekula közötti ütközés szabad úthossza az elektródatávolságnál lényegesen nagyobb. Mint ismeretes, ilyenkor a gáz elektromosan nem vezet, a kisülés másodlagos folyamatoknak tulajdonítható. A jelenséget kísérletileg tanulmányozva TRUMP és VAN DE GRAAFF régebben azt találták, hogy 25—700 kW között az átütés megindításához szükséges térerősség nagyságrendekkel kisebb annál a térerősségnél, amekkora hidegemissziót tenne lehetővé. Másoknak viszont kisebb feszültség mellett végzett mérései arra mutattak, hogy a kisülés hidegemissziós eredetű.

Sok szerző foglalkozott ezen anomália magyarázatával. A már említett két szerző szerint a katódból kilépő egyetlen elektron az anódon bizonyos A számú pozitív iont vált ki, amelyek mindegyike a katódról B számú újabb elektront szabadít fel. Az átütés feltétele: $A \cdot B \geqq 1$. A különböző mérésekből azonban az A és B nem volt egyértelműen meghatározható. Ezzel szemben CRANBERG elmélete szerint az elektromos tér elektrosztriktív hatásával darabokat szakít le az egyik elektródról és azokat a másik elektródáig gyorsítja. Az ütközés felmelegíti ezt az elektródát és ennek folytán következik be az átütés.

SCHMIDT GYÖRGY a két elméletnek kísérleti úton való ellenőrzését tűzte ki célul maga elé, és kimutatta azt, hogy az átütés mechanizmusa nagy feszültségnél is pontosan ugyanaz, mint kis feszültségnél. Nevezetesen az ívkisülésbe át nem menő hidegemissziós vákuum-kisülésnél felvette az állandó kisülési áramhoz tartozó feszültség-elektródatávolság-diagramot. Azt találta, hogy bizonyos elektródatávolságnál nagyobb távolság mellett a kisülési áram csakis a térerősségtől függ, ennél kisebb elektródatávolságnál viszont a katód mikroszerkezete is befolyásolja az áramerősséget. A mikroszerkezetet az ún. β-értékkel szokás jellemezni, amelyet a mikrocsúcson kialakult térerősségnek ahhoz a térerősséghez való viszonya ad meg, amely viszont a mikrocsúcs nélküli elektródafelületen alakulna ki.

A jelölt megmérvén az anódról kiinduló röntgensugárzás erősségét azt találta, hogy ez arányos az áramerősséggel. A tény bizonyíték arra nézve, hogy az előkisülésnél főleg elektronok szállítják a töltést.

CRANBERG elméletének ellenőrzésére a szerző acélelektródák között az elektrosztatikus térrel párhuzamos mágneses teret létesített, amely az elmélet által feltételezett elektródarészek leszakadását feltétlenül gátolta volna. Kísérletei során ezzel szemben SCHMIDT azt tapasztalta, hogy ilyen mágneses tér az átütést még csak nem is késlelteti. Az elektródok rácsos kialakításával mérhetővé tette az átlépő ionok és elektronok számát. A jelölt mérései szerint ezek viszonya: 1 : 1000. Ez az érték összhangban van a már említett A és B mennyiségre vonatkozó irodalmi adatokkal. A szerző az elektród mikroszerkezetére jellemző β-értékeket kiszámítva, magyarázatot tudott adni a hidegemissziónál észlelt ingadozásokra is. Kísérletei egybehangzóan arra utalnak, hogy az átütés közönséges gázkisülés, amelynél a gázokat az anódba ütköző hidegemissziós elektronok szabadítják fel. A szerző rájött arra is, hogy az egyes feszültségekhez tartozó térerősségértékek számításánál TRUMP és VAN DE GRAAFF nem vette figyelembe az elektródafelület alakját. Kimutatta, hogy a korrigált térerősség-görbe nagyobb elektródatávolságoknál a várakozásnak megfelelően vízszintessé válik.

Kísérletei során a jelöltnek sikerült a nagyfeszültségű mérési technikát is fejlesztenie: függetleníteni tudta az általa használt rotációs térmérő áramértékeit a fordulatszámtól.

Felvette az előkisülésnél a hidegemissziós áram FOWLER—NORDHEIM-féle görbéit és ezek alapján arra következtetett, hogy a vizsgált feszültségtartományban az előkisülés valóban hidegemissziós eredetű.

SCHMIDT GYÖRGY tézisei ismertetése után az opponensek adták elő rendre bírálatukat a megvitatásra kerülő dolgozattal kapcsolatban.

WINTER ERNŐ lev. tag szerint a disszertáció témája időszerű, ugyanis mind az elmélet, mind a gyakorlat szempontjából egyre jelentősebbekké válnak a nagy vákuumban hidegelektródák között végbemenő kisülések. WINTER ERNŐ a dolgozat címéből hiányolja a hidegelektródákra történő utalást. A dolgozatnak az irodalmat ismertető fejezetét méltatva, választ vár arra nézve, hogy a TRUMP—VAN DE GRAAFF-féle közlemény tartalmaz-e hidegemisszióra vonatkozó adatokat. WINTER ERNŐ véleménye szerint a szerzőnek az a kísérleti módszere, amelyben acélelektródák között létesített mágneses térrel az elektródarészek leszakadását gátolni akarja, egymagában nem alkalmas CRANBERG elméletének eldöntésére, azért mert az elektrosztriktív erőkkel szemben működő mágneses erőket a vas telíthetősége erősen korlátozza. Szerinte ez a hiány azonban dolgozatának értékét nem csökkenti, mert feltevéseinek igazolására a többi kísérletéből nyert bizonyítékok teljesen elegendőek. WINTER ERNŐ a dolgozat legnagyobb értékét az előkisülési görbék felvételében és ezeknek alapján a törvényszerűség megállapításában látja. További jelentős eredményként emeli ki a TRUMP—VAN DE GRAAFF-féle görbék helyes magyarázatát illetőleg korrekcióját. WINTER ERNŐ szerint a szerző munkájában határozottan elősegítette a vakuumátütések kérdésének tisztázását és meggyőzően bizonyította be a TRUMP—VAN DE GRAAFF-féle, valamint a CRANBERG-féle elméleteknek tarthatatlanságát. A jelölt nemcsak jó kísérleti készségről és elméleti tudásról, hanem kiváló tudományos ítélőképességről és ötletességről is tanúbizonyságot tett, ezért munkájával bebizonyította tudományos munkára való rátermettségét. SCHMIDT GYÖRGY számára WINTER ERNŐ a kandidátusi fokozat megadását javasolja.

Az opponens szerint a dolgozat értékét növelte volna, ha a mérésekből levont ítéleteinek puszta ismertetésén felül a méréseinek számszerű eredményeit is közölte volna. A jelölt csupán nagyfeszültségű gyorsítóknál használt berendezéseken kísérletezett, sajnálatos módon nem fejlesztett ki olyan zárt, kigáztalanítható vákuumapparaturát, amelynél a kísérleti körülmények valamivel definiáltabbak lehettek volna.

Ezután az opponáló FARAGÓ PÉTER adta elő az értekezésről kialakult véleményét.

Az értekezés tárgyát ő is korszerűnek és gyakorlati jelentőségűnek ítélte. A szerző szerinte is bebizonyította azt, hogy tárgykörében irodalmi szempontból jól tájékozott, az irodalmi eredményeket megfelelő kritikával mérlegelni tudja, az elgondolásainak bebizonyításához szükséges kísérleti és elméleti érveket meg tudta teremteni. Ennek alapján tehát a kandidátusi értekezését FARAGÓ PÉTER is elfogadásra ajánlotta. A szerző gondos munkája ellenére azonban a kísérleti eredmények közlését FARAGÓ PÉTER is helyenként szűkreszabottnak tartja. Ez a szűkreszabottság a jelölt állításainak meggyőző erejét csökkenti. FARAGÓ PÉTER hiányolta még az előkisülés vizsgálatával kapcsolatban más szerzők azon véleményeinek mérlegelését, amelyek nagyfeszültségű és igen nagyfrekvenciás erőterekben lezajló jelenségekre vonatkoznak.

Ezután az opponensi észrevételekre SCHMIDT GYÖRGY adta meg válaszát.

WINTER ERNŐ ellenvetéseire válaszolva többek között kifejtette, hogy a mágneses tér alkalmazásával a CRANBERG-féle elmélet cáfolatára végzett méréseinél nem tételezett fel mikrocsúcsokat, minthogy ilyenekkel ez az elmélet sem számolt. Mérési adatait dolgozatában pedig azért nem részletezte, mert kísérletei során a CRANBERG-féle elméletből várható változás nem volt kimutatható. Hogy pedig beérte kevéssé jól definiált mérési körülmények megteremtésével is, arra a jelölt mentségül azt hozta fel, hogy vizsgálatai célját tekintve neki gyorsító csövekben megvalósítható kísérleti körülményekkel kellett megalkudnia, szerencsére sikerült azonban így is elgondolásainak igazolására elegendő kísérleti bizonyítékot összegyűjteni. Ez egyben válaszadás FARAGÓ PÉTER hasonló értelmű kifogásaira is.

Ami pedig FARAGÓ PÉTERnek az igen nagy frekvenciás kisülésekre vonatkozó kérdését illeti, a jelölt kiegészítésképpen ismertette O. HALPERNnek és másoknak vizsgálatait, amelyek szerint még 2800 Mc-frekvencián egy 5 cm-es résen 2 MV-nál sem mutatkozik átütés. Ez a tény a jelölt elméletével nem áll ellentétben, hiszen a feszültségcsúcsról leszakított elektronoknak a hirtelen polaritásváltás miatt már igen kis távolságokból vissza kell zuhanniok.

Az opponensek SCHMIDT GYÖRGY válaszát elfogadták. WINTER ERNŐ és FARAGÓ PÉTER szerint azonban helyes lett volna, ha a jelölt a dolgozatában ezeket az erősebben kiugró mérési adatokat is közölte volna, amelyeket — mint válaszából kiderült — nem vett tekintetbe.

Ezután SCARI OTTÓ kandidátus emlékeztetett arra, hogy közönséges gázkisülésekben is igen nagy térerősségre van szükség átütés keltésére. Megkérdezte, hogyan egyeztethető ez a tény össze a dolgozatnak elektródatávolság-térerősség-diagramjaival. SCHMIDT GYÖRGY szerint az említett jelenség oka az, hogy közönséges gázkisüléseknél a töltéshordozók szabad úthossza az elektródatávolság nagyságrendjébe esik és ezért ionlavina nem képződhetik. A vakuumátütésnél viszont a szabad úthossz az elektródatávolságnál nagyságrendekkel nagyobb, és ezért itt az átütés mechanizmusa egészen más.

GYULAI ZOLTÁN akadémikus szerint a mikrocsúcsok hatásának kvalitatív kimutatása modellkísérlettel lehetséges lett volna, éspedig pl. az egyik elektródába besüllyesztett ismert geometriájú platinatűnek az elektromos térbe való kitolása árán. A jelölt ezt az észrevételt is köszönettel tette magáévá.

A vita lezárása után a bírálóbizottság a következő határozatot hozta:

„A SCHMIDT GYÖRGY aspiráns „Elektromos kisülések nagyvákuumban" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitájára kiküldött bíráló bizottság megállapította, hogy az értekezés tárgya időszerű. A szerző az irodalmat jól ismeri és komoly kritikával tudja értékelni, továbbá saját gondolatainak alátámasztásához szükséges érveket kísérleti és elméleti téren egyaránt meg tudja teremteni. Az elért eredményei értékesek. Közülük számos nemzetközi viszonylatban is új.

Ennek alapján a bizottság egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy SCHMIDT GYÖRGYöt a fizikai tudományok kandidátusává nyilvánítsa."

A magyar fizikusok SCHMIDT GYÖRGY szépen indult kutatásaihoz további sikereket kívánnak.

Mátray Tibor
a fizikai tudományok kandidátusa

Prékopa András kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A Tudományos Minősítő Bizottság 1956. május 25-én tartotta meg PRÉKOPA ANDRÁS „Sztochasztikus halmazfüggvények" című kandidátusi disszertációjának vitáját. A disszertáció opponensei SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikus és CSÁSZÁR ÁKOS, a matematikai tudományok doktora voltak. A bírálóbizottság tagjai a következők voltak: Elnök: ALEXITS GYÖRGY akadémikus, titkár: MEDGYESSY PÁL, a matematikai tudományok kandidátusa, tagok: VARGA OTTÓ lev. tag, VINCZE ISTVÁN, GYIRES BÉLA és TANDORI KÁROLY a matematikai tudományok kandidátusai.

Az elnök megnyitója után a titkár ismertette PRÉKOPA ANDRÁS pályafutását és eddigi tudományos munkásságát, amely 15 dolgozatot ölel fel, majd az elnök felkérésére PRÉKOPA ANDRÁS összefoglaló előadást tartott disszertációjáról.

Az időben véletlenszerűen lejátszódó folyamatok elméletével szemben az értekezés véletlen értékű (sztochasztikus) halmazfüggvények vizsgálatával foglalkozik. Ilyen függvények bevezetését maga a gyakorlat is megkövetelte. A munka ún. sztochasztikus additív halmazfüggvényekre specializálódik; ezeket a következőképp definiálja: Tekintsünk egy rögzített Ω esemény-térben értelmezett valószínűségi változókat; Ω elemeit jelöljük ω-val. Legyen $\mathfrak{R}$ egy H tér bizonyos részhalmazaiból álló gyűrű. — $\mathfrak{R}$ minden A eleméhez tartozzék egy $\xi(A)=\xi(\omega, A)$ valószínűségi változó, oly módon, hogy ha A_k $(k=1,\ldots,r)$ $\mathfrak{R}$ diszjunkt halmazai, akkor a $\xi(A_k)$ valószínűségi változók függetlenek és $\mathbf{P}\left(\xi(A)=\sum_{k=1}^{r}\xi(A_k)\right)=1$, ha $A=\bigcup_{k=1}^{r}A_k$; ekkor $\xi(A)$-t sztochasztikus additív halmazfüggvénynek nevezzük. — $\xi(A)$-t ezen felül sztochasztikus teljesen additív halmazfüggvénynek akkor nevezzük, ha $\mathfrak{R}$ bármely olyan $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt halmazsorozatára, amelyre $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathfrak{R}$, teljesül hogy $\mathbf{P}\left(\xi(A)=\right.$ $\left.=\sum_{k=1}^{\infty}\xi(A_k)\right)=1.$

A disszertáció fő célja gyűrűn értelmezett sztochasztikus teljesen additív halmazfüggvények kiterjesztésének elvégzése különböző feltételek mellett, továbbá σ-gyűrűn értelmezett hasonló típusú halmazfüggvények egyes tulajdonságainak vizsgálata. (Egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény kiterjesztésén egy olyan, az $\mathfrak{R}$ gyűrűt tartalmazó legkisebb σ-gyűrűn — $S(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűn — értelmezett $\xi^*(A)$ teljesen additív halmazfüggvény konstrukcióját értjük, amelyre teljesül, hogy $\mathbf{P}(\xi^*(A)=\xi(A))=1$, ha $A\in\mathfrak{R}$). — Ennek a problémakörnek [amellyel speciális esetekben számos matematikus (pl. H. CRAMÉR, E. MARCZEWSKI, C. RYLL-NARDZEWSKI) foglalkozott már] van a főtéma szempontjából elsősorban nagy gyakorlati és elméleti jelentősége, hisz pl. ide sorolható független valószínűségi változókból álló végtelen sorok konvergenciájának problémája vagy a független növekményű folyamatok vizsgálata is. A dolgozat legfőbb tételei az említett kiterjesztés exisztenciájával és egyértelműségével foglalkoznak, továbbá idevágó halmazelméleti kérdésekkel. — Ha a sztochasztikus halmazfüggvényeket σ-gyűrű helyett algebrán értelmezzük, az említett tételek feltételei egyes esetekben enyhíthetők. Újabb tételek nyerhetők, ha az Ω tér minden mérhető függvényét a valószínűségi változók közé soroljuk. Egyes tételekből a független valószínűségi változókból álló végtelen sorok konvergenciájára vonatkozólag is újabb eredmények kaphatók.

A tézisek ismertetése után az elnök felkérésére PRÉKOPA ANDRÁS aspiránsvezetője, RÉNYI ALFRÉD akadémikus mutatott rá arra, hogy a jelölt számos, a disszertációban csak érintett problémát kidolgozott már az utóbbi időben, azokat is, amelyek megoldását az opponensek hiányolták. Rámutatott arra is, hogy a disszertáció új diszciplina alapjait veti meg és eredményei számos területen lesznek alkalmazhatók. Ezután SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikus olvasta fel opponensi véleményét. Ebben PRÉKOPA ANDRÁS munkáját szélesebb, mértékelméleti háttérbe helyezve foglalta össze, a kiterjeszthetőség problémája köré csoportosítva eredményeit. Részletesen kitért a legfontosabb tételek és alkalmazásaik ismertetésére, majd néhány észrevételt sorolt fel a megfogalmazást illetően. Ő is hangsúlyozta a dolgozat alapvető jelentőségét, a bizonyítások mélységét és a szerző nagy felkészültségét. Véleménye szerint a szerző — eddigi értékes munkásságát figyelembe véve — a matematikai tudományok doktora fokozat elnyerésére érdemesítette magát. Ezután a másik opponens, CSÁSZÁR ÁKOS, a matematikai tudományok doktora olvasta fel bírálatát. Összefoglalta a dolgozat alapeszméjét és fő tételeit, hangsúlyozva a téma új fejezetet nyitó jellegét és az egyes problémaköröket az eddigi, odavágó kutatások hátterébe állítva bele. — Főleg a kiterjesztési tételekkel kapcsolatban néhány észrevételt tett, amelyekre választ kért a jelölttől, valamint más definíciót javasolt a diszkontinuus halmazfüggvényekre. — Ezek az észrevételek azonban nem csökkentik a disszertáció értékét. Az alapvető jelentőségű dolgozatot feltétlenül alkalmasnak találta arra, hogy a szerző általa a matematikai tudományok kandidátusa fokozatot elnyerje.

PRÉKOPA ANDRÁS az opponensi véleményekre adott válaszában megköszönte a tanulságos bírálatokat és a hiányosságok részletes felsorolását. Ezekkel kapcsolatban megtette megjegyzéseit és részletesen közölte, milyen módosításokkal tudta megszüntetni őket. Az opponensek észrevételeit a disszertációra támaszkodó új dolgozatában már figyelembe is vette.

Az opponensek a válasszal megelégedtek. A jelenlevők közül senki sem tett fel kérdést a jelöltnek. Szünet után, minthogy közben sem jelentkezett felszólalásra senki, a bizottság határozathozatalra vonult vissza. A kész határozatot az elnök ismertette. A határozat megállapítja, hogy: „A szerző alaposan ismeri a mértékelmélet, a valószínűségszámítás és speciálisan a sztochasztikus folyamatok elméletének irodalmát, az ezekben használatos fogalomalkotásokat és bizonyítási eljárásokat eredeti és igen ötleles módon alkalmazva, s velük a sztochasztikus folyamatokról való ismereteinket jelentékenyen kiszélesítő további kutatásoknak és alkalmazásoknak indítékot adó, értékes eredményeket ér el azáltal, hogy lerakja a sztochasztikus halmazfüggvények eddig hiányzó általános elméletének alapjait. A szerzőnek már több önálló dolgozata jelent meg, amelyek közül valamelyiket már évekkel ezelőtt benyújthatta volna kandidátusi disszertációként. A bizottságnak az a véleménye, hogy — tekintetbe véve eddigi tudományos munkásságát is — a szerző ezzel a disszertációval a tudományok *doktora* fokozatának elnyerésére is érdemesítette magát. Bízvást várható, hogy munkájának a nemzetközi irodalomban igen kedvező visszhangja lesz. Ennek alapján a bizottság egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy PRÉKOPA ANDRÁSt nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává, továbbá a doktori disszertáció benyújtásához szükséges 3 év várakozási idő alól mentse fel.“

A határozat ismertetése után az elnök a vitát bezárta. — Néhány hét múlva, az ügy tárgyalásakor, a Tudományos Minősítő Bizottság e határozat alapján PRÉKOPA ANDRÁSt a matematikai tudományok kandidátusának nyilvánította.

Medgyessy Pál
a matematikai tudományok kandidátusa

Rózsa Pál kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A Tudományos Minősítő Bizottság 1956. június 30-án tartotta meg RÓZSA PÁL „A matrix-elmélet néhány új tételéről és azok alkalmazásairól differencia és differenciálegyenletek megoldására" c. kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját. RÓZSA PÁL aspiránsvezetője EGERVÁRY JENŐ volt.

A dolgozat opponensei: MAKAI ENDRE, a matematikai tudományok doktora és GYIRES BÉLA, a matematikai tudományok kandidátusa — a bíráló bizottság tagjai: HAJÓS GYÖRGY akadémikus (elnök), MEDGYESSY PÁL, a matematikai tudományok kandidátusa (titkár), ACZÉL JÁNOS, FREUD GÉZA és SURÁNYI JÁNOS, a matematikai tudományok kandidátusai (tagok) voltak.

Az elnök felkérésére a titkár felolvasta a jelölt eddigi tudományos munkájáról szóló jelentést, majd RÓZSA PÁL ismertette dolgozatának legfontosabb téziseit.

A dolgozat néhány új matrixelméleti tétellel kezdődik, melyek megalkotása a második részben szereplő mechanikai problémák tárgyalása szempontjából vált szükségessé. Az új tételek egyike — J. SHERMAN és W. J. MORRISON eredményeinek általánosításaként — azt mutatja ki, hogy ha egy ismert reciprokkal bíró matrix tetszőleges $\mu \times \nu$-edrendű blokkját változtatjuk meg, akkor ez esetben hogyan számítható ki a módosított matrix reciproka az ismert reciprok, valamint egy $k = \min(\mu, \nu)$ rendű matrix reciprokának segítségével. Más tételek azokkal az n-edrendű kvadratikus matrixokkal foglalkoznak, melyeknek $k < n$ sorában csak a fődiagonális elem 0-tól különböző („Z matrixok"), — a továbbiak matrixok spektrál-felbontásának különböző módszereit, valamint nem-felcserélhető blokkokból álló hipermatrixok egyes tulajdonságait adják meg. Részletesen szó van hipermatrixok reciprokjának faktorizációjáról, ami egyes esetekben lehetővé teszi nem-felcserélhető blokkokból álló hipermatrixok determinánsának kiszámítását; ez aztán felhasználható közönséges matrixok adjungáltjainak, ill. reciprokjainak kiszámítására.

Mindezek bőséges alkalmazást nyernek a dolgozat második részében, amely egy- és kétdimenziós rugalmas korpuszkuláris rendszerekre, valamint rugalmas kontinuumokra vonatkozó feladatokkal foglalkozik. A közölt matrixelméleti tételeknek idevágó problémák közelítő numerikus megoldásában van fontos szerepe. — Szerző vizsgálja korpuszkuláris húr és téglalap alakú membrán-modell transzverzális terhelés hatására elfoglalt egyensúlyi helyzetét (ez lineáris algebrai egyenletrendszer megoldását kívánja meg), azután váltakozó tömegű részecskékből álló korpuszkuláris húr-modell szabad és gerjesztett rezgéseit (itt közönséges lineáris differenciálegyenlet-rendszereket kell megoldani.) Utóbbinál külön érdekes új eredmény, hogy a gerjesztő frekvenciának két olyan intervalluma van, amelyekben változatlan amplitudójú állóhullámok alakulnak ki és két olyan intervalluma, amelyben a részecskék rezgésamplitudói a gerjesztési helytől számítva hiperbolikusan csökkennek, ezek az intervallumok a változatlan amplitudójú állóhullám-szakasszal kezdődnek és felváltva követik egymást (mindez az egyenlő tömegpontokra ismeretes ROUTH-féle jelenség általánosításának tekinthető). — A hátralevő részben foglalkozik még a szerző téglalap alakú korpuszkuláris membrán gerjesztett rezgéseivel, abban az esetben, amidőn a rendszer valamely elemét periodikus kényszernek vetjük alá, — valamint rudak egyensúlyi helyzetének meghatározásával. Ezeknél a feladatoknál közönséges inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer, ill. kerületi feltételek mellett megoldandó közönséges differenciálegyenlet szerepel; ezek (közelítő) megoldásánál ismét szükség van az első rész tételeire. Legvégül téglalap alakú lemezek egyensúlyi helyzetének meghatározásakor fellépő inhomogén biharmonikus differenciálegyenlet közelítő megoldásáról van szó adott kerületi feltételek mellett, többek között a **Z** matrixok és hipermatrixok reciprokjainak kiszámítása segítségével. Bár több tárgyalt probléma más eszközökkel is kezelhető, a matrixelméleti módszerek más, bonyolultabb feladatok megoldásához is útmutatást, ill. eszközöket nyújtanak, s így szélesebb, átfogóbb perspektívát biztosítanak: nagy problémakörök tárgyalására nyújtanak az eddigieknél egységesebb, alkalmasabb módszereket.

A jelölt ismertető előadása után az elnök felkérésére EGERVÁRY JENŐ akadémikus rámutatott arra, hogy a dolgozat szép példája az elmélet és gyakorlat egységének, majd MAKAI ENDRE, a matematikai tudományok doktora olvasta fel opponensi véleményét. Ebben a főbb tételek összefoglalása mellett arra is rámutatott, hogy RÓZSA PÁL általánosabb és szigorúbb tárgyalását tudta adni a vizsgált problémáknak, mint azok a szerzők, akik azokat korábban tárgyalták. Néhány egyszerűsítési lehetőségre, ill. homályos pontra hívta fel a figyelmet majd az opponens a dolgozatot kandidátusi értekezésként elfogadhatónak mondotta ki, külön rámutatva a szerző tájékozottságára és kalkulatív készségére. — Ezután az elnök felkérésére GYIRES BÉLA, a matematikai tudományok kandidátusa olvasta fel opponensi véleményét. Ismertetésében a dolgozatban a mechanikai problémák tárgyalásánál alkalmazott közelítő eljárásokat és a bennük felhasznált matrixelméleti eszközöket helyezte előtérbe s ennek kapcsán mutatott rá az elmélet és gyakorlat egységének megvalósítására RÓZSA PÁL disszertációjában, valamint arra, hogyan dolgozta ki a jelölt azokat az új tételeket, amelyek biztosították számára problémái megoldhatóságát. Azt sem szabad elfelejteni, hogy RÓZSA PÁL egy egész mechanikai problémakör számára keresett és talált egységes tárgyalási módot. A szerző alapos elméleti felkészültséget mutat a matematika más területein is; mindezek alapján kimondható, hogy a dolgozat teljes mértékben megüti a kandidátusi értekezések mértékét.

Ezután RÓZSA PÁL válaszolt az opponensi véleményekre. Ebben megmagyarázta a homályosnak említett helyeket és megjegyzéseket tett az ajánlott egyszerűsítésekre vonatkozólag, valamint hangsúlyozta, hogy a dolgozat egyenlő mértékben fektet súlyt a mechanikai és matrixelméleti problémákra.

Az elnök kérdésére az opponensek a választ kielégítőnek nyilvánították. Ezután az elnök — miután szünet tartását elvetették — kérdést tett fel bizonyos, a dolgozatban tárgyalt problémák fizikai megvalósíthatóságát illetőleg, Hasonló jellegű kérdést tett fel a hallgatóság köréből PÁL SÁNDOR, MAKAI ENDRE opponensnek. A tájékoztató válaszokat a kérdezettek s EGERVÁRY JENŐ akadémikus adták meg.

A vita megnyitása után FREUD GÉZA és PÁL SÁNDOR megkérdezték, hogy a membrán-modell tárgyalása mennyire van speciális tartományokhoz kötve, ill., hogy mennyiben előny a matrix tárgyalás a változó tömegpontból álló korpuszkuláris húr esetében. PÁL SÁNDOR utóbbi problémára be is mutatott egy más tárgyalásmódot. SZABÓ JÁNOS gyakorlati tényekkel támogatta a

PÁL SÁNDOR által felhozott esetben RÓZSA PÁL eljárását. Hasonló értelemben szólalt fel BOSZNAY ÁDÁM. FREY TAMÁS a tartományokra vonatkozó kérdéshez szólt hozzá. RÓZSA PÁL válaszában ismertette a tartomány megválasztásakor fellépő nehézségeket, majd PÁL SÁNDORral szállt vitába a matrixelméleti módszerek hasznát illetőleg. Álláspontja helyességét a többi hozzászóló szavaiból is igazolva látta. (Utóbbit EGERVÁRY JENŐ akadémikus egy megjegyzése is támogatta.)

Ezután PÁL SÁNDOR és RÓZSA PÁL között rövid vita alakult ki a matrixelméleti módszerek előnyéről, a disszertáció problémáival kapcsolatban. Mivel ez a vita nem befolyásolhatta lényegesen a bíráló bizottság ítéletének kialakulását, illetve — mint arra ACZÉL JÁNOS rá is mutatott — a kandidátusi értekezés publikálási lehetősége megkötésének folyománya volt — folytatásától eltekintettek.

Miután a jelenlevők RÓZSA PÁL válaszait elfogadták, az elnök az ülést felfüggesztette és a bizottság határozathozatalra vonult vissza. Ennek megtörténte után az elnök kihirdette a bizottság egyhangú véleményét:

„A kiküldött bíráló bizottság megállapította, hogy a dolgozat két részre oszlik, melyek közül az első a matrixelmélet egyes speciális fejezeteihez kapcsolódó tételeket tartalmaz, a második pedig e tételeknek véges sok tömegpontból álló hurok, rudak, membránok és lemezek vizsgálatánál való felhasználását mutatja be. A dolgozat eredményei közül kiemelendő a SHERMAN—MORRISON tétel általánosítása, valamint egy, az irodalomban már többször szerepelt kontinuáns matrix spektrálfelbontásának explicit előállítása. A dolgozat második része is értékes, mert ebben az első rész elméleti vizsgálatait alkalmazza, egy mechanikai feladatkört újszerű módszerrel kezel és vizsgálataiban eddig nem közölt eredményekhez is eljut. Növelte volna a második rész értékét, ha a szerző tárgyalását összevetette volna az adott mechanikai problémáknál kínálkozó más módszerek hatékonyságával. A dolgozat bizonyítja a jelölt alapos irodalmi tájékozottságát, valamint elismerésre méltó kalkulatív készségét. A dolgozat kiállítása mintaszerű."

Ennek a véleménynek az alapján a bizottság javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy RÓZSA PÁLt nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává. Ezután az elnök a vitát berekesztette.

Medgyessy Pál
a matematikai tudományok kandidátusa

A III. OSZTÁLY HÍREI

FELOLVASÓ ÜLÉSEK:

1956. szeptember 28-án:

1. RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus: „Az első fokban nemkommutatív véges gyűrűk".
2. RÉNYI ALFRÉD akadémikus bemutatja: CSÁSZÁR ÁKOS: „A normális eloszlás egy jellemzéséről"; ARATÓ MÁTYÁS—RÉNYI ALFRÉD: „Függvények általánosított Bernstein-féle polinomokkal való approximációjáról"; TAKÁCS LAJOS: „Erlang képletének általánosításáról"; VINCZE ISTVÁN: „Transzcendens egész függvények maximum-modulusáról" és SZÜSZ PÉTER: „Egy sorelméleti problémáról" című dolgozatát.
3. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikus bemutatja: KORÁNYI ÁDÁM—SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: „NEVANLINNA és PICK egy problémájának kapcsolatai a Hilbert-tér operátorainak elméletével" című dolgozatát.
4. KOVÁCS ISTVÁN lev. tag bemutatja: DEÉZSI IRÉN—MÁTRAI TIBOR: „Újabb sávok a nitrogénoxid-molekula γ-, ε- és β-sávrendszerében" című dolgozatát.

1957. március 22-én:

1. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikus: „Normális operátorok gyengén konvergens sorozatairól" (Székfoglaló előadás).
2. GOMBÁS PÁL akadémikus bemutatja: PAUNCZ REZSŐ: „Aromás vegyületek kétdimenziós homológ sorának vizsgálata"; PAUNCZ REZSŐ: „Perturbációs módszerek használata azonos egységekből felépített rendszerek kvantumkémiai vizsgálatánál"; BERENCZ FERENC: A hidrogénmolekula alapállapotának számítása a variációs eljárás alapján"; GÁSPÁR REZSŐ—MOLNÁR BÉLÁNÉ: „Az Ag atom sajátfüggvényeinek és energiájának számítása elektronkicserélődéssel"; GÁSPÁR REZSŐ — MOLNÁR BÉLA: „A fémes ezüst kötéséről" és GÁSPÁR REZSŐ—CSAVINSZKY PÉTER: „Az O_2^- ion elektroneloszlásának számítása variációs módszerrel" című dolgozatát.

3. TURÁN PÁL akadémikus bemutatja: J. W. S. CASSELS (Cambridge): „Komplex számok hatványösszegeiről" és BIHARI IMRE: Közönséges differenciálegyenletek stabilitási kérdéseiről"; BALÁZS JÁNOS—TURÁN PÁL: „Megjegyzések az interpolációról" és RÉNYI KATÓ: „Periódikus egészfüggvényekről" című dolgozatát.

4. RÉNYI ALFRÉD akadémikus bemutatja: ANTONIN SPACEK (Prága): „Majdnem bizonyosan lineáris valószínűségi transzformációk inverzéről" és TAKÁCS LAJOS: „Többdimenziós Poisson folyamat által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatokról" című dolgozatát.

KITÜNTETÉSEK:

A Magyar Forradalmi Munkás Paraszt Kormány az 1957. évi Kossuth díjak odaítélésénél a Kossuth díj II. fokozatával és a vele járó 35.000 Ft-os pénzjutalommal tüntette ki FEJES-TÓTH LÁSZLÓT, a matematikai tudományok doktorát, egyetemi tanárt, geometriai szélsőérték feladatok, elhelyezési és fedési problémák terén elért tudományos eredményeiért.

PRÉMIUMOK:

A Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya az 1956-ban végzett eredményes munkájukért a következőket részesítette prémiumban:

ACZÉL JÁNOS a matematikai tudományok kandidátusa 3.000 Ft prémiumban részesült. Kiemelkedő eredményeket ért el függvényegyenletek elméletével foglalkozó, valamint EGERVÁRY JENŐ akadémikussal közösen írt dolgozatában, amely a valószínűségszámítást függvényegyenletekre és mátrixkalkulusra alkalmazza.

BALÁZS JÁNOS a Matematikai Kutató Intézet tudományos munkatársa 3.000 Ft prémiumban részesült. Az Akadémia III. osztálya szaktitkárságán 4 éven át végzett önfeláldozó és eredményes munkásságot, amellyel elősegítette az osztály feladatainak maradéktalan ellátását és az osztály tagjai közötti baráti együttműködést.

FÉNYES IMRE a fizikai tudományok kandidátusa 3.000 Ft prémiumban részesült. Figyelemre méltó dolgozatában beható vizsgálat tárgyává tette a kvantumelméletben jól ismert W. K. B. módszert. Egy másik dolgozatában eltávolítja azokat a gyakorlati nehézségeket, amelyek módszerével együtt járnak. E két dolgozata régi nehézségeket tisztáz és az elméleti fizika közelítő módszereit határozott lépéssel viszi előre.

MARX GYÖRGY a fizikai tudományok doktora 3.000 Ft prémiumban részesült. Egyik dolgozatában a relativisztikus dinamika általánosításával foglalkozik a változó nyugalmi tömeg esetére. Egy másik dolgozata nehéz atommagok kötésének relativisztikus elméletét adja skaláris kontakt-kölcsönhatás esetében. Mindkét dolgozatában figyelemre méltó tudományes eredményeket ért el.

TAKÁCS LAJOS a Matematikai Kutató Intézet tudományos munkatársa 3.000 Ft prémiumban részesült. A sztochasztikus folyamatok elméletében és alkalmazásai terén ért el kiemelkedő új eredményeket.

SEGÉLYEK:

A Magyar Tudományos Akadémia elnöke a rendelkezésére álló jutalmazási alapból az 1956. őszi harci cselekmények során károkat szenvedett tudósok részére segélyeket folyósított. A III. osztály területéről

JORDÁN KÁROLY levelező tag	15.000 Ft
FUCHS LÁSZLÓ a matematikai tud. doktora	8.000 Ft
KÁRTESZI FERENC a matematikai tud. kandidátusa	8.000 Ft

segélyben részesült.

A III. osztály vezetősége a rendelkezésére álló prémiumösszeg egy részét ugyancsak segély formájában utalta ki egyrészt azok részére, akik a harci cselekmények során károkat szenvedtek, másrészt az alacsony fizetésű aspiránsok részére.

EGERVÁRY JENŐ akadémikus	3.000 Ft
LOVAS MIKLÓS (Csillagvizsg. Int.)	4.000 Ft
LIPTÁK TAMÁS aspiráns	1.500 Ft
MEDGYESSY PÁL (Matematikai Kutató Intézet)	2.000 Ft
NIEDERLEITNER KÁROLY (Bp. Műszaki Egy. Fizikai Intézet)	3.000 Ft
PÁSZTOR ISTVÁN (Műszaki Egyetem III. Matematikai Tanszék)	3.000 Ft
özv. PEKÁR GYULÁNÉ	3.000 Ft
özv. TARJÁN FERENCNÉ	4.000 Ft
VASS ZSUZSA (Elm. Fizikai Kut. Csoport)	2.000 Ft

Az osztályhoz tartozó valamennyi aspiráns 500—500 ft segélyben részesült.

Technikai szerkesztő: Alpár László

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Fark s Sándor
A kézirat beérkezett: 1957. IV. 22. — Terjedelem: 11,75 (A/5) ív, 23 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 57-1498 Felelős vezető: /incze György

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK

FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

Kutató fizikusok számára önálló eredményeket tartalmazó és összefoglaló jellegű fizikai, csillagászati dolgozatokat, könyvismertetéseket, laboratóriumi fogásokat és ma már klasszikussá vált dolgozatokat közöl hazai és külföldi szerzőktől.

Évenként 1 kötet (kb. 36 ív) jelenik meg 6 számban.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 42 forint, külföldi címre 60 forint.

Belföldi megrendeléseket az *Akadémiai Kiadó,* Budapest V. Alkotmány utca 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44) teljesít.

Külföldi megrendelések a *„Kultúra“* Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI. Népköztársaság Útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

Ára: 26,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VII. KÖTET 3—4. SZÁM

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN,
HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY,
RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:
ALEXITS GYÖRGY

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1957

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

VII. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: Budapest V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest V. Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat. továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek, Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal,

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V. Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI. Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

VALÓS SZÁMOK ELŐÁLLÍTÁSÁRA SZOLGÁLÓ ALGORITMUSOKRÓL

(Székfoglaló előadás, elhangzott 1957. május 31-én)

RÉNYI ALFRÉD

1. §. Klasszikus algoritmusok és általánosításaik

Valós számok előállítására számos különböző algoritmus ismeretes[1]. Felsorolunk néhányat a legnevezetesebbek közül. A leghasználatosabb a *tizedestörtkifejtés,* illetve ennek kézenfekvő általánosítása, a *q-adikus kifejtés.* Ha $q \geqq 2$ egész szám, minden valós szám előállítható

(1a) $$x = \varepsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q^k}$$

alakban, ahol $\varepsilon_0(x)$ egész szám és $\varepsilon_k(x)$ a $0, 1, \ldots, q-1$ számok egyike ($k = 1, 2, \ldots$). Jelölje $[z]$ a z szám egész részét, (z) pedig z törtrészét[2]. Az $\varepsilon_n(x)$ „jegyeket" a következő algoritmus származtatja:

(1b) $$\begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= [x], & r_0(x) &= (x), \\ \varepsilon_n(x) &= [q r_{n-1}(x)], & r_n(x) &= (q r_{n-1}(x)) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Az (1b) által definiált (1a) előállítás minden x-re egyértelmű[3]. $\varepsilon_n(x)$-et x q-adikus kifejtése n-edik „jegyének", $r_n(x)$-et pedig n-edik „maradékának" nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az $r_n(x)$ maradékok az $\varepsilon_n(x)$ jegyek segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

(1c) $$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+k}(x)}{q^k} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Fennáll továbbá az

(1d) $$r_n(x) = (q^n x)$$

összefüggés is.

[1] Az *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*-ben külön cikk foglalkozik ezzel a kérdéssel (l. [1]).

[2] A $[z]$ egész számot a $[z] \leq z < [z] + 1$ feltétellel definiáljuk, (z)-t pedig a $(z) = z - [z]$ összefüggés segítségével, amiből következik, hogy $0 \leq (z) < 1$.

[3] Az (1b) alatti algoritmus egyértelmű, az $x = \dfrac{k}{q^l}$ alakú racionális számok esetében is (k és $l \geqq 0$ egész számok), és ez esetben x *véges* előállítását adja.

A q-adikus kifejtés kézenfekvő általánositását képezik az ún. *Cantor-féle kifejtések*. Ha $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ egész számok egy rögzített sorozata és $q_n \geqq 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, minden x valós szám egyértelműen előállítható

(2a) $$x = \varepsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k}$$

alakban, ahol az $\varepsilon_n(x)$ „jegyeket" és az $r_n(x)$ „maradékokat" a következő algoritmus származtatja:

(2b) $$\begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= [x], & r_0(x) &= (x), \\ \varepsilon_n(x) &= [q_n r_{n-1}(x)], & r_n(x) &= (q_n r_{n-1}(x)) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Az $r_n(x)$ maradékok az $\varepsilon_n(x)$ jegyek segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

(2c) $$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+k}(x)}{q_{n+1} q_{n+2} \ldots q_{n+k}} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

A másik legismertebb eljárás a *lánctörtkifejtés*. Minden x valós szám egyértelműen előállítható

(3a) $$x = \varepsilon_0(x) + \cfrac{1}{\varepsilon_1(x) + \cfrac{1}{\varepsilon_2(x) + \cdots}}$$

alakban, ahol az $\varepsilon_n(x)$ „jegyeket" és az $r_n(x)$ „maradékokat" a következő algoritmus szolgáltatja:

(3b) $$\begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= [x], & r_0(x) &= (x), \\ \varepsilon_n(x) &= \left[\frac{1}{r_{n-1}(x)}\right], & r_n(x) &= \left(\frac{1}{r_{n-1}(x)}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Az $r_n(x)$ maradékok az $\varepsilon_n(x)$ jegyek segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

(3c) $$r_n(x) = \cfrac{1}{\varepsilon_{n+1}(x) + \cfrac{1}{\varepsilon_{n+2}(x) + \cdots}}.$$

Egyéb, kevésbé ismert eljárások az 1. és 2. fajú *Engel-féle kifejtések*, az ún. *Lüroth-féle kifejtések*, az Engel- és Lüroth-féle kifejtéseket általánosító *Perron-féle algoritmus*, továbbá az ún. *Cantor-féle szorzatelőállítások* (lásd [2]). TIETZE [3] vizsgálta a *félig-szabályos lánctörtkifejtéseket*, STRATEMEYER [4] a *váltakozó előjelű Engel-féle sorokat* és *Cantor-szorzatokat*. Találkozunk az irodalomban másfajta, gyökvonásokat tartalmazó eljárásokkal is (lásd pl. [5]). Igen figyelemreméltó ilyen eljárás BOLYAI FARKAS algoritmusa[4] ([6], [7]), amely,

[4] Az BOLYAI FARKAS „algoritmusa" elnevezését FARKAS GYULA vezette be (lásd [7]).

bár eredetileg csak trinom egyenletek gyökeinek előállítására szolgált, tetszőleges valós számok előállítására használható algoritmussá bővíthető ki a következőképpen:

Legyen $m>1$ egész szám, akkor tetszőleges x valós szám előállítható az

(4a) $$x=\varepsilon_0(x)-1+\sqrt[m]{\varepsilon_1(x)+\sqrt[m]{\varepsilon_2(x)+\sqrt[m]{\varepsilon_3(x)+\cdots}}}$$

alakban, ahol $\varepsilon_0(x)$ egész szám, $\varepsilon_n(x)$ a $0, 1, \ldots, 2^m-2$ értékeket veheti fel és az $\varepsilon_n(x)$ „jegyeket" és az $r_n(x)$ „maradékokat" a következő algoritmus szolgáltatja:

(4b) $$\begin{gathered}\varepsilon_0(x)=[x],\ r_0(x)=(x),\\ \varepsilon_n(x)=[(1+r_{n-1}(x))^m-1],\ r_n(x)=((1+r_{n-1}(x))^m-1)\quad (n=1,2,\ldots).\end{gathered}$$

Az $r_n(x)$ „maradékok" az $\varepsilon_n(x)$ „jegyek" segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

(4c) $$r_n(x)=-1+\sqrt[m]{\varepsilon_{n+1}(x)+\sqrt[m]{\varepsilon_{n+2}(x)+\sqrt[m]{\varepsilon_{n+3}(x)+\cdots}}}.$$

A felsorolt algoritmusok általánosításával, ill. az ezeket felölelő általános elmélet kidolgozásával B. H. BISSINGER [8] és J. EVERETT [9] foglalkoztak[5]. BISSINGER a lánctörtek következő általánosítását vizsgálta: Legyen x tetszőleges valós szám és

(5a) $$\begin{gathered}\varepsilon_0(x)=[x],\ r_0(x)=(x),\\ \varepsilon_{n+1}(x)=[\varphi(r_n(x)],\ r_{n+1}(x)=(\varphi(r_n(x)))\quad (n=0,1,\ldots),\end{gathered}$$

ahol a $\varphi(y)$ függvény a következő feltételeknek tesz eleget[6]:

$\varphi(y)$ monoton *csökkenő* és folytonos a $0<y\leqq 1$ intervallumban, $\varphi(1)=1$, $\lim\limits_{y\to+0}\varphi(y)=+\infty$,

$$\left|\frac{\varphi(y_2)-\varphi(y_1)}{y_2-y_1}\right|>1,\quad \text{ha}\quad 0<y_1<y_2\leqq 1,$$

továbbá

$$\left|\frac{\varphi(y_2)-\varphi(y_1)}{y_2-y_1}\right|\geqq q>1,\quad \text{ha}\quad 0<y_1<y_2<\varphi(1+f(2)),$$

ahol $y=f(x)$ az $x=\varphi(y)$ függvény inverze.

[5] EVERETT többek között BOLYAI FARKAS algoritmusának fentemlített általánosításával is foglalkozik.

[6] BISSINGER feltételeit tőle kissé eltérő módon fogalmazzuk meg a későbbiekkel való könnyebb összehasonlíthatóság kedvéért. Ha $\varphi(y)=\frac{1}{y}$, BISSINGER algoritmusa speciális eseteként a lánctörtalgoritmust nyerjük.

Bebizonyította, hogy e feltevések mellett x előállítható az

(5b) $$x = \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x) + \cdots)$$

végtelen „f-lánc" alakjában és ugyanakkor

(5c) $$r_n(x) = f(\varepsilon_{n+1}(x) + f(\varepsilon_{n+2}(x) + \cdots) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

A *Bissinger-féle előállítás*ban az $\varepsilon_n(x)$ jegyek az $1, 2, \ldots$ értékeket vehetik fel; akárhogy adunk is meg egy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ természetes számokból álló végtelen, számsorozatot, létezik egy és csak egy x valós szám a $(0, 1)$ intervallumban, amelyre $\varepsilon_n(x) = \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Akárhogy adunk meg egy természetes számokból álló véges $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ sorozatot, létezik egy és csak egy x valós szám a $(0, 1)$ intervallumban, amelyre $\varepsilon_n(x) = \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ és $r_N(x) = 0$.

EVERETT a q-adikus törtek hasonló módon való általánosításával foglalkozott. Legyen $\varphi(y)$ a $0 \leqq y \leqq 1$ intervallumban definiált monoton *növekvő* és folytonos függvény, amelyre[7] $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = p$, ahol $p \geqq 2$ egész szám és $\dfrac{\varphi(y_2) - \varphi(y_1)}{y_2 - y_1} > 1$, ha $0 \leqq y_1 < y_2 \leqq 1$. Legyen x tetszőleges valós szám és definiáljuk az $\varepsilon_n(x)$ jegyeket és az $r_n(x)$ maradékokat a következőképpen:

(6a) $$\begin{gathered} \varepsilon_0(x) = [x], \; r_0(x) = (x), \\ \varepsilon_{n+1}(x) = [\varphi(r_n(x))], \; r_{n+1}(x) = (\varphi(r_n(x))) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \end{gathered}$$

Akkor x előállítható

(6b) $$x = \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x) + \cdots)$$

végtelen f-lánc alakjában, ahol $y = f(x)$ az $x = \varphi(y)$ függvény inverze. Ugyanakkor

(6c) $$r_n(x) = f(\varepsilon_{n+1}(x) + f(\varepsilon_{n+2}(x) + \cdots).$$

Az *Everett*-féle algoritmusoknál az $\varepsilon_n(x)$ jegyek a $0, 1, \ldots, p-1$ értéket vehetik fel és bármely olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ végtelen számsorozathoz, amelyben ε_n a $0, 1, \ldots, p-1$ számok egyikével egyenlő $(n = 1, 2, \ldots)$ és az ε_n sorozatban végtelen sok $(p-1)$-től különböző szám fordul elő, egy és csak egy olyan x $(0 \leqq x < 1)$ valós szám tartozik, amelyre $\varepsilon_n(x) = \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, továbbá bármely a $0, 1, \ldots, p-1$ számokból képzett véges $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ számsorozathoz megadható egy és csak egy olyan x szám $(0 \leqq x < 1)$, amelyre $\varepsilon_k(x) = \varepsilon_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ és $r_N(x) = 0$.[8]

[7] EVERETT feltételeit tőle eltérő formában fogalmazzuk meg, a későbbiekkel való könnyebb összehasonlíthatóság kedvéért. EVERETT a $\dfrac{\varphi(y_2) - \varphi(y_1)}{y_2 - y_1} > 1$ feltétel helyett valamivel enyhébb, de bonyolultabb feltételnek eleget tevő φ fügvényekkel is foglalkozott.

[8] Az EVERETT-féle algoritmusosztály tartalmazza a q-adikus törteket $(\varphi(y) = qy)$ továbbá a BOLYAI FARKAS-féle algoritmust is $(\varphi(y) = (1 + y)^m - 1)$.

A **3.** §.-ban BISSINGER és EVERETT algoritmusait tartalmazó általános algoritmusosztályt vezetünk be. Ellentétben BISSINGER és EVERETT tárgyalásmódjával, a monoton növekvő és csökkenő φ függvényekhez tartozó algoritmusokat egységesen tárgyaljuk. Az általunk tárgyalt algoritmus-típus monoton növekvő $\varphi(y)$ esetében annyiban általánosabb az *Everett*-félénél, hogy nem kötjük ki, hogy $\varphi(1)$ egész szám; nálunk $\varphi(1)$ lehet tetszőleges egynél nagyobb valós szám, illetve $\lim\limits_{y\to 1}\varphi(y)$ lehet $+\infty$ is. A monoton csökkenő φ esetében az általunk tárgyalt algoritmus-típus annyiban általánosabb, mint a *Bissinger*-féle, hogy nem kötjük ki, hogy $\lim\limits_{y\to 0}\varphi(y)=+\infty$, hanem megengedjük, hogy $\varphi(0)$ véges legyen. Ennek következtében tárgyalunk olyan (a BISSINGER és EVERETT által tárgyaltaktól lényegesen különböző) algoritmusokat, ahol az ε_n jegyek értékei nem írhatók elő egymástól függetlenül (megengedett értékkészletükön belül sem). Ezen lényeges általánosítás mellett az egyszerűség kedvéért bizonyos szempontból erősebb megszorításokat alkalmazunk, mint BISSINGER és EVERETT, amennyiben feltesszük, hogy $\varphi'(y)$ létezik (egy legfeljebb megszámlálható, a (0, 1) intervallum belsejében nem torlódó pontsorozat pontjaitól eltekintve) és (szakaszonként) folytonos. Ez a megszorítás elejthető volna, azonban a 4. §-ban szereplő tételben úgyis még erősebb megszorításokra van szükségünk.

A **2.** §-ban a klasszikus algoritmusokra vonatkozó ismert statisztikus tételeket soroljuk fel. Dolgozatunk fő célja e statisztikus tételek (BOREL, RAIKOV a q-adikus törtekre, KUZMIN, LÉVY, HINCSIN és RYLL-NARDZEWSKI a lánctörtekre vonatkozó tételei) az általunk tárgyalt általános algoritmus osztály algoritmusaira való kiterjesztése. E tételt a **4.** §-ban fogalmazzuk meg. Eredményeink az említett, a klasszikus algoritmusokra vonatkozó tételeket speciális esetként tartalmazzák. Az **5.** § egy konkrét, a klasszikus algoritmusoktól különböző algoritmus-típussal, az ún. β-adikus kifejtésekkel foglalkozik (β nem egész szám).

A **6.** §-ban az invariáns mérték létezésére vonatkozólag teszünk néhány megjegyzést. A **3.**, ill. **4.** §-ban kimondott tételek bizonyítását a **7—9.** §§-ok tartalmazzák. A **10.** §-ban néhány példán konkretizáljuk az elmondottakat.

2. §. A klasszikus algoritmusokra vonatkozó statisztikus tételek és ezek tárgyalása az ergod-elmélet alapján

A két legfontosabb algoritmusra, a q-adikus kifejtésre és a lánctörtkifejtésre vonatkozólag igen érdekes statisztikus jellegű tételek ismeretesek. BOREL [10] kimutatta, hogy majdnem minden x-re az (1b) alatti $\varepsilon_n(x)$ $(n=$

$=1,2,\ldots)$ számsorozatban a $0, 1, \ldots, q-1$ számok közül mindegyik $\frac{1}{q}$ sűrűséggel fordul elő[9]. E tétel megfelelője lánctörtekre R. O. KUZMIN [11] és P. LÉVY [12], [13], [14] tétele, mely szerint majdnem minden x-re a (3b) alatti $\varepsilon_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ számsorozatban a k szám $\frac{1}{\log 2}\log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$ sűrűséggel fordul elő $(k=1,2,\ldots)$. BOREL tételét általánosította RAIKOV [15], aki kimutatta, hogy ha $g(x)$ $[0, 1]$-ben L-integrálható és 1 periódusú periodikus függvény, akkor majdnem minden x-re

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(q^k x)=\int_0^1 g(t)\,dt. \tag{7a}$$

Más alakban kifejezve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x))=\int_0^1 g(t)\,dt. \tag{7b}$$

Lánctörtekre A. JA. HINCSIN ([17], [18], [19]) a következő tétel bizonyította be. Ha $0\leqq g(t)<Ct^{1/2-\delta}$, ahol $C>0$ és $\delta>0$, ha $t\geqq 1$, akkor ha $\varepsilon_n(x)$ jelöli az x szám lánctörtkifejtésének n-edik jegyét, majdnem minden x-re fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\varepsilon_k(x))=\sum_{r=1}^{\infty} g(r)\frac{\log\frac{(r+1)^2}{r(r+2)}}{\log 2}. \tag{8a}$$

HINCSIN vizsgálatainak kiindulópontját az képezte, hogy R. O. KUZMIN [11] (lásd még [19]) bebizonyította GAUSS egy sejtését, mely szerint, ha $F_n(y)$ $(0\leqq y\leqq 1)$ jelöli azon x pontok $(0\leqq x<1)$ halmazának mértékét, amelyekre $r_n(x)<y$, ahol $r_n(x)$ jelöli x lánctörtkifejtésének n-edik maradékát, akkor

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y)=\frac{\log(1+y)}{\log 2}. \tag{8b}$$

HINCSIN tételét először P. LÉVY [12], [13], [14], majd C. RYLL-NARDZEWSKI ([20], [21], lásd továbbá [22]) messzemenően általánosították. RYLL-NARDZEWSKI bebizonyította, hogy ha $g(t)$ tetszőleges L-integrálható függvény $(0, 1)$-ben

[9] Nemrégiben sikerült BOREL tételét CANTOR-féle sorokra kiterjesztenem ([16]). A legutóbbi időben ERDŐS PÁLlal és SZŰSZ PÉTERrel együtt az Engel-féle sorokra is találtunk hasonló statisztikus tételeket.

és $r_n(x)$ x lánctörtkifejtése n-edik maradéka, akkor majdnem minden x-re

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x)) = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{g(t)dt}{1+t}. \tag{8c}$$

(8c) tartalmazza a (8a) és (8b) tételeket speciális esetként.

RIESZ FRIGYES volt az első, aki a szóbanforgó problémakörnek az ergodikus elmélettel való összefüggésére felhívta a figyelmet (l. [23]) és így többek között rámutatott arra, hogy BOREL tételele, sőt, RAIKOV tétele is a BIRKHOFF féle ergodikus tétel speciális esetei. A BIRKHOFF-tétel RIESZ FRIGYES által adott általánosítása, mint ismeretes, a következőképpen hangzik: Legyen Ω egy absztrakt tér, $\mathfrak{B}$ e tér részhalmazaiból álló σ-algebra, μ pedig egy $\mathfrak{B}$ elemeire definiált σ-véges mérték. Legyen T az Ω tér önmagára való mérhető leképezése, amelyről nem tesszük fel, hogy egy-egyértelmű. Ha T *mértéktartó*, abban az értelemben, hogy bármely $E \in \mathfrak{B}$-re, ha $T^{-1}E$ jelöli E teljes eredetijét a T leképezésnél, akkor $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$, továbbá ha $g(x)$ integrálható az Ω téren, akkor a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x) = g^*(x) \tag{9a}$$

határérték Ω majdnem minden x elemére létezik. Ha továbbá T *felbonthatatlan*, (más kifejezéssel: *metrikusan tranzitív*, vagy *ergodikus*) vagyis, ha E egy olyan halmaz, amelyre $T^{-1}E = E$, akkor $\mu(E) = 0$, vagy $\mu(\bar{E}) = 0$, ahol $\bar{E}$ az E halmaz kiegészítő halmazát jelöli, akkor $g^*(x)$ Ω-án majdnem mindenütt állandó, mégpedig

$$g^*(x) = M(g) = \int_\Omega g(x)\,d\mu. \tag{9b}$$

Mármost a q-adikus törtek esetében legyen Ω a $[0,1]$ intervallum, $\mathfrak{B}$ ezen intervallum mérhető halmazainak összessége és μ a közönséges Lebesgue-mérték, továbbá legyen $Tx = (qx)$ ($q \geqq 2$ egész), akkor a Birkhoff-tétel fenti alakjának összes feltételei teljesülnek, és mivel $T^k x = (q^k x) = r_k(x)$, tehát RAIKOV tétele azonnal következik, tekintve, hogy a $Tx = (qx)$ transzformáció felbonthatatlansága könnyen belátható K. KNOPP egy tétele [24], (vagy H. STEINHAUS egy tétele [25]) alapján.[10] A lánctörtek esetében a helyzet valamivel bonyolultabb. Ha ugyanis Ω, $\mathfrak{B}$ és μ az előző jelentéssel bírnak és $Tx = \left(\frac{1}{x}\right)$, akkor T nem mértéktartó. RYLL-NARDZEWSKI vette észre, hogy ez

[10] Annak oka, hogy az ergodikus elmélet és a BOREL-, ill. RAIKOV-tételek kapcsolatát előzőleg nem vették észre, valószínűleg az, hogy RIESZ előtt az ergodikus elmélet csupán egy-egyértelmű T transzformációkkal foglalkozott.

a nehézség áthidalható, úgy hogy a [0,1] intervallumon bevezetjük a

$$\nu(E)=\frac{1}{\log 2}\int_E \frac{dx}{1+x}$$

új mértéket, ugyanis erre a mértékre nézve a $Tx=\left(\frac{1}{x}\right)$ transzformáció már mértéktartó. Ilyenmódon, figyelembevéve, hogy a $Tx=\left(\frac{1}{x}\right)$ transzformáció felbonthatatlan (lásd [22] és [24]) következik (8c).[11]

3. §. Egy általános algoritmus-osztály

Közvetlen célunk egy a valós számok előállítására szolgáló olyan általános algoritmus-osztály vizsgálata, amelybe tartozó algoritmusokra hasonló statisztikus tételek érvényesek, mint a q-adikus törtekre, ill. a lánctörtekre és egy olyan általános tétel bebizonyítása, amely az említett BOREL—RAIKOV, illetve KUZMIN—HINCSIN—LÉVY—RYLL-NARDZEWSKI-tételeket speciális esetként tartalmazza. E célból csak olyan algoritmusokkal foglalkozunk, amelyeket egy T transzformáció iterált alkalmazása származtat, hasonlóképpen, ahogy $Tx=(qx)$ a q-adikus előállítást és $Tx=\left(\frac{1}{x}\right)$ a lánctörtelőállítást származtatja. Az ilyen algoritmusokat *homogénnek* nevezzük, ellentétben azokkal, amelyeknél minden lépésnél más-más T_k transzformációt alkalmazunk, mint pl. a Cantor-soroknál; az ilyen algoritmusokat *inhomogén*nek nevezzük; ezekre egy más alkalommal még vissza kívánok térni. Meg szeretnénk továbbá tartani az említett klasszikus előállításoknak azt a sajátságát, hogy minden valós számhoz egész számok (jegyek) egy végtelen sorozatát rendelik hozzá. Nem kötjük ki azonban azt, ami a q-adikus kifejtésnél és a lánctörtalgoritmusnál teljesül, hogy a közelítő értékek mindig racionális számok legyenek. E feltétel már a BOLYAI FARKAS-féle algoritmusnál sem teljesül, amely egyébként az általunk tárgyalt osztályba tartozik, és amelyet a $Tx=((1+x)^m-1)$ transzformáció származtat.[12]

E követelményeknek megfelel a következő általános algoritmustípus, amely tartalmazza BISSINGER és EVERETT algoritmusait is. Legyen $\varphi(y)$ egy

[11] S. HARTMAN ([22]) rámutatott arra, hogy (8c) akkor is igaz, ha $g(x)\geqq 0$ és $\int_0^1 \frac{g(x)}{1+x}\,dx=+\infty$.

[12] Azt, hogy a közelítő értékek racionálisak legyenek, már csak azért sem indokolt nélkülözhetetlen feltételnek tekinteni, hiszen a közelítő értékeket mindig pótolhatjuk (és numerikus számolás esetén úgyis mindig pótoljuk) egy közel eső racionális számmal.

a $0<y<1$ intervallumban értelmezett nemnegatív függvény és definiáljuk az $\varepsilon_n(x)$ egész értékű függvényeket és az $r_n(x)$ valós értékű függvényeket $(-\infty<x<+\infty;\ n=0,1,\ldots)$ a következő algoritmussal

$$\begin{aligned}&\varepsilon_0(x)=[x],\ r_0(x)=(x),\\ &\varepsilon_{n+1}(x)=[\varphi(r_n(x))],\ r_{n+1}(x)=(\varphi(r_n(x)))\qquad (n=0,1,\ldots).\end{aligned}\tag{10}$$

Nyilvánvaló, hogy ha $\varphi(x)=qx$ $(q=2,3,\ldots)$, akkor a q-adikus törteket, ha $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, a lánctörteket kapjuk speciális esetként. Az $\varepsilon_n(x)$ számot nevezzük x n-edik jegyének, $r_n(x)$-et pedig x n-edik maradékának. Mivel a fenti algoritmust a $Tx=(\varphi(x))$ transzformáció származtatja ezt az az algoritmust röviden a $Tx=(\varphi(x))$ transzformációhoz tartozó algoritmusnak fogjuk nevezni. Kérdés mármost, hogy milyen feltevéseket kell tennünk φ-re nézve, hogy az $\varepsilon_n(x)$ $(n=0,1,\ldots)$ számsorozat az x számot egyértelműen meghatározza.

Be fogjuk bizonyítani, (**7. §.** 1. TÉTEL), hogy ha $\varphi(y)$ eleget tesz a következő A) feltételnek, továbbá vagy a B) vagy a B') feltételnek, akkor az $\varepsilon_n(x)$ számsorozat meghatározza az x számot.[13]

A) $\varphi'(y)$ folytonos és monoton növekvő a $0<y<1$ nyílt intervallumban[14],

továbbá, vagy

B) $\qquad \varphi(0)=0$ és $\varphi'(0)=\lambda_0>1,$

vagy

B') $\qquad \varphi(1)=1$ és $\varphi'(1)=-\lambda_1\leqq-1.$

Vegyük észre, hogy A)-ból és B)-ből következik, hogy $\varphi(y)$ monoton növekvő, A)-ből és B')-ből, hogy $\varphi(y)$ monoton csökkenő $(0,1)$-ben.[15] (A B) esetben $\varphi(1)$ lehet $+\infty$ is, a B') esetben $\varphi(0)$ lehet $+\infty$.)

Az A) és B), vagy A) és B') feltételek teljesülése esetén x a következőképpen állítható elő. Jelölje $y=f(x)$ az $x=\varphi(y)$ függvény inverzét, amely a B) esetben a $(0,\varphi(1))$, a B') esetben az $(1,\varphi(0))$ (nyílt) intervallumban egy-

[13] Mint már említettük, az A) és B), ill. B') feltételek enyhíthetők volnának.

[14] Elegendő volna feltenni, hogy $\varphi'(y)$ egy legfeljebb megszámlálható, (0,1) belsejében nem torlódó pontsorozat pontjaitól eltekintve differenciálható és $\varphi'(y)$ szakaszonként folytonos.

[15] $\varepsilon_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ a B) esetben $\varphi(1)$-nél kisebb nemnegatív egész szám (vagyis $\varepsilon_n(x)$, ha $\varphi(1)$ egész szám, a $0,1,\ldots,\varphi(1)-1$ értékeket, ha $\varphi(1)$ nem egész, a $0,1,\ldots,[\varphi(1)]$ értékeket veheti fel, míg ha $\varphi(1)=+\infty$, bármely nemnegatív egész értéket felvehet). A B') esetben $\varepsilon_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ a $\varphi(0)$-nál kisebb pozitív egész szám (tehát ha $\varphi(0)$ egész, $\varepsilon_n(x)$ lehetséges értékei $1,2,\ldots,\varphi(0)-1$, míg ha $\varphi(0)$ nem egész, $\varepsilon_n(x)$ lehetséges értékei $1,2,\ldots,[\varphi(0)]$; ha $\varphi(0)=+\infty$, $\varepsilon_n(x)$ bármely pozitív egész számot felvehet.)

értelműen definiált folytonos, monoton és folytonosan differenciálható függvény. Terjesszük ki $f(x)$ definícióját a következőképpen: A B) esetben, ha $\varphi(1) < +\infty$, legyen $f(x) = +1$, ha $x > \varphi(1)$. A B') esetben, ha $\varphi(0) < +\infty$, legyen $f(x) = 0$, ha $x > \varphi(0)$. Definiáljuk a $K_n(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ függvényeket a következőképpen: Legyen

$$K_0(z_0) = z_0, \tag{11a}$$
$$K_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) = K_{n-1}(z_0, z_1 \ldots, z_{n-2}, z_{n-1} + f(z_n)).$$

Akkor nyílván[16]

$$\begin{aligned} K_1(z_0, z_1) &= z_0 + f(z_1), \\ K_2(z_0, z_1, z_2) &= z_0 + f(z_1 + f(z_2)), \\ K_3(z_0, z_1, z_2, z_3) &= z_0 + f(z_1 + f(z_2 + f(z_3))), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{11b}$$

s. i. t.

Legyen most

$$k_n(x) = K_n(\varepsilon_0(x), \varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{11c}$$

és nevezzük $k_n(x)$-et az x szám n-edik *közelitő értékének*. Akkor tehát

$$\begin{aligned} k_0(x) &= \varepsilon_0(x), \\ k_1(x) &= \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x)), \\ k_2(x) &= \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x))), \\ &\vdots \\ k_n(x) &= \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x) + \cdots f(\varepsilon_n(x)) \cdots). \end{aligned} \tag{11d}$$

Könnyen belátható, hogy

$$\varepsilon_k(k_n(x)) = \varepsilon_k(x), \quad \text{ha} \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{11e}$$

(kivéve azt az esetet, amikor $f(x)$ monoton csökkenő, és $\varepsilon_n(x) = 1$, amikor (11e) csak $k \leqq n-2$-re érvényes, és $\varepsilon_{n-1}(k_n(x)) = \varepsilon_{n-1}(x) + 1$).

Be fogjuk bizonyítani, hogy minden valós x-re

$$\lim_{n \to \infty} k_n(x) = x, \tag{12}$$

vagyis x mindig előállítható az

$$x = \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x) + \cdots + f(\varepsilon_n(x) + f(\varepsilon_{n+1}(x) + \cdots)) \cdots) \tag{13}$$

alakban, tehát egy *végtelen f-lánc* alakjában. (Megszámlálható sok x-re $r_n(x)$ n valamely értékére (0)-val lesz egyenlő; ez esetben a (13) előállítást „véges"-nek nevezzük.).

[16] $f(x)$ a fentiek értelmében a B) esetben a $0 \leqq x < +\infty$, a B') esetben az $1 \leqq x < +\infty$ intervallumban van értelmezve és így a $K_n(z_0, \ldots, z_n)$ függvény a $-\infty < z_0 < +\infty$, továbbá a B) esetben $0 \leqq z_i < +\infty$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), a B') esetben $1 \leqq z_i < +\infty$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) értékre van definiálva.

Nyilvánvaló, hogy a tárgyalt algoritmus-osztály tartalmazza a q-adikus algoritmuson ($\varphi(y)=qy$) és a lánctörtalgoritmuson $\left(\varphi(y)=\dfrac{1}{y}\right)$ kívül a Bolyai Farkas-féle algoritmust is $\varphi(y)=(1+y)^m-1$. Az első és harmadik esetben $\varphi(y)$-ra az A) és B), a második esetben az A) és B′) feltétel teljesül. Algoritmus-osztályunk tartalmazza továbbá a BISSINGER- és EVERETT-féle algoritmusok jórészét is.

Megemlítünk egy igen egyszerű algoritmust, amely a tárgyalt osztályba tartozik, de amellyel eddig nem foglalkoztak. Legyen $\varphi(y)=\dfrac{y}{\alpha}$, ahol $0<\alpha<1$ tetszőleges, akkor bármely x valós szám előállítható az

$$x=\varepsilon_0(x)+\alpha\varepsilon_1(x)+\alpha^2\varepsilon_2(x)+\cdots\alpha^n\varepsilon_n(x)+\cdots \tag{14a}$$

alakban, ahol $\varepsilon_0(x)$ egész szám és $\varepsilon_n(x)$ a $0, 1, \ldots, \left[\dfrac{1}{\alpha}\right]$ számok valamelyike ($n=1, 2, \ldots$). Bevezetve a $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$ jelölést, az előállítást az

$$\begin{aligned}&\varepsilon_0(x)=[x],\ r_0(x)=(x),\\ &\varepsilon_{n+1}(x)=[\beta r_n(x)],\ r_{n+1}(x)=(\beta r_n(x)) \qquad (n=0, 1, \ldots)\end{aligned} \tag{14b}$$

algoritmus szolgáltatja. Ha $\beta=q\geqq 2$ egész szám, akkor (14a) x q-adikus előállítását adja, ha azonban β nem egész, akkor egy újfajta algoritmust nyerünk, amelyet β-adikus algoritmusnak nevezünk.[17]

Nevezzük az olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ véges számsorozatokat, amelyekhez van olyan x valós szám ($0\leqq x<1$), hogy

$$\varepsilon_k(x)=\varepsilon_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

ahol az $\varepsilon_k(x)$-eket a (10) által definiált, a $Ty=(\varphi(y))$ transformációhoz tartozó algoritmus definiálja, a $\varphi(y)$-hoz tartozó algoritmusra nézve *kanonikus* számsorozatoknak.

Megjegyzendő, hogy általában nem minden, az $\varepsilon_k(x)$-ekre megengedett értékekből alkotott számsorozat lesz kanonikus. A q-adikus és a lánctörtalgoritmus, továbbá a BISSINGER és EVERETT által tárgyalt algoritmusok kivételesek e tekintetben. A q-adikus algoritmus ($q\geqq 2$ egész) esetében minden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sorozat kanonikus, ha ε_k egész és $0\leqq\varepsilon_k\leqq q-1$ ($k=1, 2, \ldots, n$);

[17] Megjegyzendő, hogy ebben az esetben 1-nél nagyobb x számok esetében lehetne a β-adikus előállítást a következőképpen is definiálni:

$$x=\alpha^{-r}\varepsilon_{-r}+\alpha^{-r+1}\varepsilon_{-(r-1)}+\cdots+\varepsilon_{-1}\alpha^{-1}+\varepsilon_0+\alpha\varepsilon_1+\cdots+\alpha^n\varepsilon_n+\cdots \tag{14c}$$

$\beta=\dfrac{1}{\alpha}=10$ esetében (14c) x a tízesalapú számrendszerben való előállítását adja.

lánctörtek esetében $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ kanonikus, ha $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ természetes számok.[18] Más algoritmusok esetében bonyolúltabb a helyzet: pl. a β-adikus algoritmus esetében, ahol $\frac{1}{\beta} = \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, akkor és csak akkor kanonikus, ha ε_i csak a 0 vagy 1 értéket veszi fel, és ha $\varepsilon_i = 1$, akkor $\varepsilon_{i+1} = 0$; tehát ez esetben erős függés áll fenn egy kanonikus sorozatban az ε_i számok között.

4. §. Statisztikus tételek általános algoritmusokra

A 3. §-ban bevezetett általános algoritmusra, a q-adikus és a lánctört-algoritmusra ismertekhez hasonló statisztikai tételt azon feltétel mellett fogunk bebizonyítani, ha $\varphi(y)$ az A) és B), ill. A) és B') feltételek mellett rendelkezik a következő tulajdonsággal is:

C) Bármely $n \geq 1$-re és bármely x-re $(0 \leq x < 1)$, bevezetve a

$$H_n(x,t) = \frac{d}{dt} K_n(0, \varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_{n-1}(x), \varepsilon_n(x)+t) \tag{15}$$

jelölést

$$\frac{\operatorname*{Max}_{0 \leq t \leq 1} |H_n(x,t)|}{\operatorname*{Min}_{0 \leq t \leq 1} |H_n(x,t)|} \leq C, \tag{16}$$

ahol C nem függ sem n-től, sem x-től. Ezen kívül feltesszük, hogy ha a B) feltevés teljesül, akkor $\varphi(1)$ egész szám vagy $\varphi(1) = +\infty$, ha pedig a B') feltevés teljesül, akkor $\varphi(0)$ egész szám vagy $\varphi(0) = +\infty$. Ez a feltétel biztosítja, hogy bármely nemnegatív egész számokból képezett $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sorozat kanonikus, hacsak a B) esetben $0 \leq \varepsilon_k < \varphi(1)$ ill. a B') esetben $1 \leq \varepsilon_k < \varphi(0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ez esetben igaz a következő tétel: *bármely $g(x)$ a $[0,1]$ intervallumban L-integrálható függvényre és majdnem minden x-re létezik a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x)) = M(g) \tag{17a}$$

határérték, ahol $M(g)$ csak a $g(x)$ függvénytől függő véges állandó. Létezik továbbá olyan $\nu(E)$ mérték az $I = (0,1)$ intervallumon, amelyre $\nu(I) = 1$ és amelyre nézve $Ty = (\varphi(y))$, mértéktartó, továbbá $\frac{1}{C}\mu(E) \leq \nu(E) \leq C\mu(E)$, ahol

[18] Ha racionális szám lánctörtkifejtését vizsgáljuk, akkor n valamely értékére $r_n(x) = 0$ lesz. Ez esetben a következő konvenció segít. Legyen $\frac{1}{0} = +\infty, [+\infty] = +\infty, (+\infty) = 0$, vagyis tekintsük $+\infty$-t természetes számnak és lehetséges jegynek. Ez esetben tehát az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ számsorozat akkor kanonikus, ha $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ vagy mind (véges) természetes számok és $\varepsilon_n > 1$, vagy ha $\varepsilon_k = +\infty$, akkor $\varepsilon_{k+1} = \ldots = \varepsilon_n = +\infty$ továbbá ez esetben $\varepsilon_{k-1} > 1$.

$\mu(E)$ a Lebesgue-mérték és C a (16)-ban szereplő állandó. A ν mérték segítségével $M(g)$ az

(17b) $$M(g)=\int_0^1 g(x)\,d\nu$$

alakban fejezhető ki.

Ezt a tételt olymódon bizonyítjuk be, hogy kimutatjuk, hogy a C) feltevés mellett a $(0,1)$ intervallum bármely E mérhető részhalmazára

(18a) $$\frac{1}{C}\mu(E)\leq\mu(T^{-k}E)\leq C\mu(E)\qquad(k=1,2,\ldots),$$

ahol T^{-k} a T^{-1} transzformáció k-adik hatványát jelöli és μ a Lebesgue-féle mérték. Ilyenmódon ez esetben a fortiori

(18b) $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(T^{-k}E)\leq C\mu(E)\qquad(n=1,2,\ldots),$$

és így alkalmazható DUNFORD és MILLER nevezetes tétele ([26], [27]), amely szerint (18b)-ből következik, hogy a

(19) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(T_r^k x)=g^*(x)$$

határérték bármely $g(x)$ integrálható függvényre majdnem minden x-re létezik. Be fogjuk bizonyítani, hogy feltevéseinkből az is következik, hogy $Tx=(\varphi(x))$ felbonthatatlan. Mivel, ha $Tx=(\varphi(x))=r_1(x)$, akkor $T^k x=r_k(x)$ $(k=2,3,\ldots)$, tehát (19)-ből következik, hogy a (17a) baloldalán álló határérték majdnem minden x-re létezik. Tx felbonthatatlanságából jólismert módon következik, hogy $g^*(x)$ (majdnem mindenütt) állandó.

Nyilvánvaló, hogy a C) feltevés teljesül, ha $\varphi(x)=\beta x$, ahol $\beta=\frac{1}{\alpha}>1$ egész szám; ez esetben ugyanis $H_n(x,t)\equiv\alpha^n$. Tehát, ha $\frac{1}{\alpha}=\beta\geq 2$ egész, tételünk speciális eseteként nyerjük RAIKOV (ill. BOREL) tételeit. Ha β nem egész, tételünk feltételei nem teljesülnek (ui. $\varphi(1)$ nem egész) azoban be lehet bizonyítani, hogy a tétel állítása ez esetben is igaz. E kérdésre másutt kívánunk visszatérni, azonban a következő §-ban részletesen tárgyalunk egy esetet, az $\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ esetet.

5. §. A β-adikus algoritmusról

Vizsgáljuk meg közelebbről a β-adikus algoritmust abban az esetben, ha $\frac{1}{\beta}=\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Az $\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ számról a következőkben mindig azt fogjuk felhasználni, hogy az $\alpha+\alpha^2=1$ egyenletnek tesz eleget. Mivel $[\beta]=1$, ez esetben $\varepsilon_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ csak a 0 és 1 értékeket veheti fel. Bebizonyítjuk, hogy ez esetben az $\varepsilon_n(x)$ számsorozatban majdnem minden x-re az 1 szám sűrűsége $\delta_1=\frac{5-\sqrt{5}}{10}=0{,}276393\ldots$ és így 0 sűrűsége $\delta_0=\frac{5+\sqrt{5}}{10}=0{,}723607.$[19] Ebben az esetben explicit alakban megadható a Tx transzformációra invariáns mérték:

$$\nu(E)=\int_E \varrho(x)\,dx,$$

ahol

$$\varrho(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{5}+5}{10}, & \text{ha } 0<x<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\\[2ex] \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}, & \text{ha } \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<x<1.\end{cases} \tag{20}$$

Megjegyzendő, hogy a tárgyalt esetben az $\varepsilon_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ függvények, mint a $[0,1]$ intervallumban a Lebesgue-mérték segítségével képezett valószínűségi mezőn definiált valószínűségi változók, *Markov-féle láncot* alkotnak, amelynek átmenet-valószínűségeinek matrixa $\begin{pmatrix}\alpha & \alpha^2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, vagyis ha az x számot a $(0,1)$ intervallumban találomra (egyenletes eloszlással) választjuk és $\varepsilon_n(x)=1$, akkor bizonyosan $\varepsilon_{n+1}(x)=0$, míg ha $\varepsilon_n(x)=0$, akkor $\varepsilon_{n+1}(x)$ a 0 és 1 értékeket α, ill. α^2 feltételes valószínűséggel veszi fel, függetlenül attól, hogy mik voltak $\varepsilon_1(x),\ldots,\varepsilon_{n-1}(x)$ értékei. A δ_0 és δ_1 számok ennek a Markovláncnak a stacionér állapotához tartozó valószínűségek és így a

$$\begin{aligned}\delta_0&=\delta_0\alpha+\delta_1\\ \delta_1&=\delta_0\alpha^2\end{aligned} \tag{21}$$

egyenletrendszernek tesznek eleget, amit könnyen verifikálhatunk, figyelembevéve, hogy $\delta_1=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ és $\delta_0=\frac{1}{\alpha\sqrt{5}}$.

Állításunk a következőképpen látható be: osszuk fel a $(0,1)$ intervallumot a $(0,\alpha)$ és $(\alpha,1)$ részintervallumokra, legyenek ezek I_{11} és I_{12}. Osszuk fel

[19] Ezt más úton ERDŐS PÁL és SZÜSZ PÉTER is bebizonyították.

az I_{11} intervallumot a $(0, \alpha^2)$ és (α^2, α) részintervallumokra, legyenek ezek I_{21} és I_{22} és legyen $I_{23} = I_{12}$. Legyen

$$I_{31} = (0, \alpha^3),\ I_{32} = (\alpha^3, \alpha^2),\ I_{33} = (\alpha^2, \alpha),\ I_{34} = (\alpha, \alpha + \alpha^3),\ I_{35} = (\alpha + \alpha^3, 1).$$

Ha már $I_{n1}, I_{n2}, \ldots, I_{nF_n}$ definiálva vannak, akkor, mint teljes indukcióval belátható, az I_{nk} intervallumok mindegyike vagy α^n, vagy α^{n+1} hosszúságú. Az $I_{n+1,k}$ intervallumokat úgy kapjuk, hogy az α^n hosszúságú I_{nk} intervallumokat felbontjuk egy α^{n+1} és egy α^{n+2} hosszúságú részintervallumra, az α^{n+1} hosszúságúakat változatlanul hagyjuk. Az F_n szám (az n-edrendű intervallumok száma) nyilvánvalóan a $2, 3, 5, 8, \ldots$ *Fibonacci*-féle számsorozat n-edik tagja. Mármost $\varepsilon_n(x) = 0$, ha x egy α^n hosszúságú n-edrendű intervallumba esik és $\varepsilon_n(x) = 1$, ha x egy α^{n+1} hosszúságú n-edrendű intervallumba esik. Ebből azonban leolvasható, hogy ha $\varepsilon_n(x)$ értéke adott, e feltétel mellett az $\varepsilon_{n+k}(x)$ változók $(k = 1, 2, \ldots)$ sztochasztikusan függetlenek az $\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_{n-1}(x)$ változóktól. A mondottakból egyszerű közvetlen bizonyítást nyerünk arra, hogy

$$(22) \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(\varepsilon_n(x) = 0) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \mu(\varepsilon_n(x) = 1) = \frac{5-\sqrt{5}}{10},$$

ahol $\mu(\varepsilon_n(x) = i)$ az $\varepsilon_n(x) = i$ feltételnek eleget tevő x $(0 \leqq x < 1)$ számok halmazának Lebesgue mértékét jelöli $(i = 0, 1)$. Ugyanis az n-edrendű, α^n hosszúságú intervallumok száma nyilván F_{n-1}, az α^{n+1} hosszúságúaké F_{n-2} és így

$$(23) \qquad \mu(\varepsilon_n(x) = 0) = F_{n-1}\alpha^n, \quad \mu(\varepsilon_n(x) = 1) = F_{n-2}\alpha^{n+1},$$

ahol

$$(24) \qquad F_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

(23)-ból és (24)-ből (22) könnyen következik.

Ilyenmódon az a tény, hogy a 0, ill. 1 jegy sűrűsége majdnem minden x szám kifejtésében δ_0, ill. δ_1, a nagy számok erős törvényét jelenti Markov-láncokra (lásd [23]). Markov-láncokról lévén szó, ez esetben a centrális határeloszlástétel is érvényes, vagyis $G_n(y)$-nal jelölve azon x számok $(0 \leqq x < 1)$ halmazának mértékét, amelyekre

$$(25) \qquad \frac{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \cdots + \varepsilon_n(x) - n\delta_1}{\sqrt{nD}} < y, \text{ ahol } D = \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

azt kapjuk, hogy

$$(25\text{b}) \qquad \lim_{n\to\infty} G_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

(lásd [29], 583. o. 19. feladat). Hasonlóan tárgyalható a β-adikus algoritmus számos más egyszerű algebrai egyenletnek eleget tevő $\alpha = \frac{1}{\beta}$ szám esetében is.

Tetszőleges α-ra $(0<\alpha<1)$ igaz, hogy ha $g(x)$ L-integrálható $[0,1]$-ben, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(r_k(x))=M_\alpha(g) \tag{26}$$

majdnem minde x-re létezik és $M_\alpha(g)$ nem függ x-től. Ennek bizonyításával azonban itt nem foglalkozunk.

Ha $\frac{1}{\alpha}=\beta\geqq 2$ egész szám, akkor (26) RAIKOV már említett tételére[20] redukálódik. Ha $\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, akkor

$$M_\alpha(g)=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha g(x)dx\right)+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1}{1-\alpha}\int_{1-\alpha}^1 g(x)dx\right). \tag{26b}$$

[20] Meg kell jegyeznünk ezzel kapcsolatban, hogy RAIKOV tételének ismeretes egy másik — analitikus szempontból kézenfekvőbb — általánosítása is. Azt, hogy a $\beta^n x$ $(n=1,2,\ldots)$ számsorozat $(\beta>1)$ majdnem minden x-re mindenütt sűrű mod 1, a $(0,1)$ intervallumban, még P. FATOU, azt, hogy e sorozat majdnem minden x-re mod 1, egyenletes eloszlású, HARDY és LITTLEWOOD és WEYL mutatták meg. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g((\beta^k x))=\int_0^1 g(x)dx, \tag{27a}$$

ha $g(x)$ Riemann-integrálható függvény. M. KAC., R. SALEM és A. ZYGMUND kimutatták [30], hogy (27a) akkor is igaz, ha $g(x)$ az L^2-osztályba tartozik és 1 periódusú, hacsak $g(x)$ Fourier-sorának együtthatóira teljesül a

$$\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=O\left(\frac{1}{(\log n)^\varepsilon}\right),\ \text{ha } n\to\infty \tag{28a}$$

feltétel, ahol $\varepsilon>0$. ERDÖS PÁL [32] élesítette ezt a tételt, amennyiben kimutatta, hogy elegendő feltenni (28a) helyett, hogy

$$\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=O\left(\frac{1}{(\log\log n)^{2+\varepsilon}}\right),\ \text{ha } n\to\infty, \tag{28b}$$

ahol $\varepsilon>0$ (lásd még I. F. KOKSMA [31] munkáját is). Az általunk tárgyalt esetben nincs szükség $g(x)$ Fourier-együtthatóira vonatkozó megszorításra, sőt még arra sem, hogy $g(x)\in L^2$ legyen. Bebizonyítható, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[g((x))+g((\beta x))+\cdots+g((\beta(\beta(\cdots(\beta x)\cdots))))]=M_\alpha(g), \tag{27b}$$

minden $g(x)$ L-integrálható függvényre majdnem minden x-re fennáll, azonban $M_\alpha(g)$ általában nem azonos $\int_0^1 g(x)dx$-szel. Ha $\frac{1}{\alpha}=\beta\geqq 2$ pozitív egész szám, akkor a (27a) és (27b) baloldalán álló összegek azonosak és mindkét állítás RAIKOV tételére redukálódik.

6. §. Az invariáns mérték létezéséről

Kézenfekvően felmerül a kérdés, hogy az általunk tárgyalt $Tx = (\varphi(x))$ transzformációkhoz megadható-e olyan ν mérték a $[0,1]$ intervallum mérhető halmazain, amely ekvivalens μ-vel, a Lebesgue-mértékkel (vagyis, $\mu(E) = 0$, akkor és csak akkor, ha $\nu(E) = 0$) és amely T-re invariáns. Az invariáns mérték létezésének kérdése egyike a mértékelmélet alapvető problémáinak (lásd pl. [33]). A kölcsönösen egyértelmű T-transzformációk esetére vonatkozólag Y. N. DOWKER [34], [35], [36], [37], az általános esetre vonatkozólag COTLAR és RICABARRA [38] és CALDERON [39] értek el figyelemreméltó eredményeket.

A mi esetünkben, ha a C) feltétel teljesül, tételünkből korolláriumként adódik az invariáns mérték exisztenciája. Legyen ugyanis $E(x)$ az E mérhető halmaz karakterisztikus függvénye, vagyis

$$E(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in E, \\ 0, & \text{ha} \quad x \notin E. \end{cases}$$

Ez esetben

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E(r_k(x)) \right) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k} E)$$

és mivel $0 \leqq E(x) \leqq 1$, LEBESGUE tételéből és 2. TÉTELünkből következik, hogy ha

$$\nu_n(E) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k} E),$$

akkor

$$\lim_{n \to \infty} \nu_n(E) = \nu(E)$$

minden E mérhető halmazra létezik. Mivel $\nu_n(E)$ n minden értékére mérték, tehát $\nu(E)$ nyilván végesen additív és nemnegatív halmazfüggvény. A **8.** §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy C) feltételből következik, hogy $\frac{1}{C} \mu(E) \leqq \mu(T^{-n} E) \leqq$ $\leqq C \mu(E)$ és ennélfogva $\frac{1}{C} \mu(E) \leqq \nu(E) \leqq C \mu(E)$ és így $\nu(E)$ ekvivalens $\mu(E)$-vel. Ebből azonban könnyen következik, hogy $\nu(E)$ σ-additív, tehát $\nu(E)$ is mérték. Ha ugyanis $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ a $(0,1)$ intervallum mérhető részhalmazainak diszjunkt sorozata és[21] $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, akkor ν véges additívitása folytán

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{N-1} \nu(E_k) + \nu\left(\sum_{k=N}^{\infty} E_k \right) \qquad (N = 1, 2, \ldots).$$

[21] $\sum E_n$ az E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ halmazok egyesítését jelöli.

Mivel

$$0 \leqq \nu\left(\sum_{k=N}^{\infty} E_k\right) \leqq C\mu\left(\sum_{k=N}^{\infty} E_k\right) \to 0, \text{ ha } N \to \infty,$$

tehát

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k),$$

amit bizonyítani akartunk. Azt, hogy $\nu(E)$ invariáns T-re nézve, könnyen beláthatjuk, hiszen

$$\nu_n(T^{-1}E) = \frac{n+1}{n}\nu_{n+1}(E) - \frac{\mu(E)}{n},$$

tehát elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet, nyerjük, hogy

$$\nu(T^{-1}E) = \nu(E).$$

Nyilvánvaló az is, hogy ha I a teljes $(0,1)$ intervallum, akkor $\nu(I) = 1$. Könnyen belátható, hogy T ν-re nézve is felbonthatatlan, ugyanis, ha $T^{-1}E = E$, akkor vagy $\mu(E) = 0$, vagy $\mu(\bar{E}) = 0$, és mivel ν abszolút folytonos μ-re nézve, tehát $\nu(E) = 0$, vagy $\nu(\bar{E}) = 0$. Ilyenmódon a 2. TÉTEL állítása most utólag már BIRKHOFF tételből is következik; persze azt, hogy a invariáns mérték létezik, csak a 2. TÉTEL segítségével láttuk be, vagyis BIRKHOFF tételéből a 2. TÉTELt csak akkor tudjuk levezetni, ha előzőleg már más úton (a Dunford—Miller-tétel segítségével) a 2. TÉTELt bebizonyítottuk. Más a helyzet persze, ha egy konkrét algoritmusra a ν invariáns mértéket effektíve meg tudjuk konstruálni. Ez azonban általában igen nehéz feladat. Pl. a β-adikus algoritmus esetében, ha $\alpha = \frac{1}{\beta}$ egyszerű algebrai egyenletnek tesz eleget, az invariáns mértéket viszonylag egyszerűen megtalálhatjuk, azonban tetszőleges α-ra az invariáns mérték megtalálása nehéznek tűnik.

Még csak azt jegyezzük meg, hogy az említett mértékelméleti problémát meg is lehet fordítani. Ahelyett, hogy a T transzformációból indulunk ki és keressük azt a ν mértéket, amely T-re invariáns, kiindulhatunk egy ν mértékből és kérdezhetjük, hogy mely $Tx = (\varphi(x))$ transzformációra invariáns. E kérdésre más alkalommal kívánunk visszatérni.

7. §. Az előállíthatóság bizonyítása

Legyen $\varphi(y)$ a $0<y<1$ intervallumban értelmezett nemnegatív függvény. Tegyük fel továbbá, hogy $\varphi(y)$ az alábbi A) és B) vagy A) és B)' feltételek egyikének tesz eleget:

A) $\varphi'(y)$ folytonos és monoton növekvő a $0<y<1$ nyílt intervallumban,

B) $\varphi(0)=0$ és $\varphi'(0)=\lambda_0>1$;

B') $\varphi(1)=1$ és $\varphi'(1)=-\lambda_1\leqq-1$.

Nyilván az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $0\leqq x<1$. Legyen $r_0(x)=x$ és definiáljuk az $r_n(x)$ és $\varepsilon_n(x)$ számsorozatokat a következőképpen:

$$r_{n+1}(x)=(\varphi(r_n(x))),\ \varepsilon_{n+1}(x)=[\varphi(r_n(x))] \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Jelölje $y=f(x)$ az $x=\varphi(y)$ függvény inverzét. A B) esetben, ha $M=\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)$ ($M=+\infty$ is lehetséges) $f(x)$ a $0\leqq x<M$ intervallumban van értelmezve, ott $0\leqq f(x)<1$, továbbá $f'(x)$ nemnegatív, monoton csökkenő és folytonos függvény és $f'(x)\leqq\frac{1}{\lambda_0}<1$. A B') esetben, ha $M=\lim\limits_{y\to0}\varphi(y)$ ($M=+\infty$ is lehetséges) $f(x)$ az $1\leqq x<M$ intervallumban van értelmezve, ott $0\leqq f(x)<1$, $f'(1)=\frac{1}{\lambda_1}\leqq-1$, $-1<f'(x)<0$, ha $1<x<M, f'(x)$ monoton növekvő és folytonos.

Definiáljuk a $H_n(x,t)$ függvényeket ($0\leqq x<1, 0\leqq t\leqq1$) a következőképpen:

$$H_n(x,t)=\frac{d}{dt}K_n(0,\varepsilon_1(x),\ldots,\varepsilon_{n-1}(x),\varepsilon_n(x)+t), \tag{29}$$

ahol $K_n(z_0,z_1,\ldots,z_n)$ (11.a) által van definiálva, továbbá legyen

$$k_n(x)=K_n(0,\varepsilon_1(x),\ldots,\varepsilon_n(x)).$$

Bebizonyítjuk a következő tételt:

1. TÉTEL: *Bármely x-re* $(0\leqq x<1)$

$$\lim_{n\to\infty}k_n(x)=x.$$

BIZONYÍTÁS: Könnyen belátható, hogy

$$x=K_n(0,\varepsilon_1(x),\ldots,\varepsilon_{n-1}(x),\varepsilon_n(x)+r_n(x)), \tag{30}$$

és így, mivel

$$k_n(x)=K_n(0,\varepsilon_1(x),\ldots,\varepsilon_{n-1}(x),\varepsilon_n(x)). \tag{31}$$

(29) szerint

$$x - k_n(x) = \int_0^{r_n(x)} H_n(x, t)\, dt. \tag{32}$$

Mármost

$$H_n(x, t) = \prod_{j=1}^{n} f'(K_{n-j}(\varepsilon_j(x), \ldots, \varepsilon_n(x) + t)). \tag{33}$$

Vizsgáljuk először a B) esetet. Mivel $0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{\lambda_0} < 1$, (33) szerint

$$0 \leqq H_n(x, t) \leqq \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^n, \tag{34}$$

és így (32)-ből

$$0 \leqq x - k_n(x) \leqq \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^n r_n(x) \leqq \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^n, \tag{35}$$

tehát

$$\lim_{n \to \infty} k_n(x) = x. \tag{36}$$

Vizsgáljuk most a B') esetet. Ha $f'(1) = -\lambda_1 < -1$, akkor $|f'(x)| \leqq \frac{1}{\lambda_1} < 1$ és így a bizonyítás ugyanúgy megy mint a B) esetben. Ha $\lambda_1 = 1$, akkor valamivel finomabb meggondolásokra van szükség. Legyen x_0 az a pont, amelyre $x_0 + 1 = \varphi(x_0)$. Mivel $\varphi(x)$ monoton csökkenő, $x+1$ monoton növekvő, $\varphi(0) > 0 + 1$ és $1 = \varphi(1) < 1 + 1$, tehát ilyen x_0 egy és csak egy létezik, $0 < x_0 < 1$, $x_0, = f(x_0 + 1)$, és ha $x_0 < x < 1$, akkor $\varphi(x) < x + 1$. Mármost vizsgáljuk a

$$t_j = K_{n-j}(\varepsilon_j(x), \ldots, \varepsilon_n(x) + \tau) \tag{37}$$

számsorozatot, ahol $0 < \tau < 1$. Ha $j \geqq 2$ és $t_j \geqq x_0 + 1$, akkor

$$|f'(t_j)| \leqq |f'(x_0 + 1)|. \tag{38a}$$

Ha azonban $t_j < x_0 + 1$, akkor

$$t_{j-1} = \varepsilon_{j-1}(x) + f(t_j) \geqq 1 + f(x_0 + 1) = 1 + x_0,$$

és így

$$|f'(t_{j-1})| \leqq |f'(x_0 + 1)|. \tag{38b}$$

Tehát mindenképpen

$$|f'(t_{j-1}) f'(t_j)| \leqq |f'(x_0 + 1)| = \gamma < 1. \tag{38c}$$

Mivel (32) szerint

$$x - k_n(x) = r_n(x) H_n(x, \tau), \qquad \text{ahol } 0 < \tau < r_n(x), \tag{39a}$$

tehát (39a), (33) és (38c) szerint.

$$|x - k_n(x)| \leqq \gamma^{\left[\frac{n}{2}\right]}, \tag{39b}$$

vagyis (36) ez esetben is teljesül.

8. §. Az általános statisztikai tétel bizonyítása

E §-ban megtartjuk az előző § definícióit és jelöléseit, így többek között feltesszük, hogy $\varphi(y)$ a **7. §**.-ban tett feltevéseknek tesz eleget. Vezessük be továbbá a következő feltevést:

$$\text{C)} \qquad \frac{\max\limits_{0\leq t\leq 1}|H_n(x,t)|}{\min\limits_{0\leq t\leq 1}|H_n(x,t)|} \leq C \qquad (0 \leq x c 1\,;\, n=1,2,\ldots),$$

ahol C sem x-től, sem n-től nem függ. Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

2. TÉTEL: *Ha a $\varphi(y)$ függvényre teljesülnek az A) és B) feltevések és $\varphi(1)$ egész szám vagy $\varphi(1)=+\infty$, vagy teljesülnek az A) és B') feltevések és ez esetben $\varphi(0)$ egész szám vagy $\varphi(0)=+\infty$, továbbá teljesül a C) feltevés, és $g(x)$ tetszőleges a* $[0, 1]$ *intervallumban Lebesgue-szerint integrálható függvény, és* $r_k(x)$ $(k=0,1,\ldots)$ (10) *által van definiálva, akkor majdnem minden x-re létezik a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x)) = M(g) \tag{40}$$

határérték és nem függ x-től.

BIZONYÍTÁS: Feltehetjük, hogy $0 \leq x < 1$, vagyis, hogy $\varepsilon_0(x)=0$. Jelöljön $\mathfrak{E}_n$ egy tetszőleges n-tagú $\mathfrak{E}_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ kanonikus sorozatot; $\mathfrak{E}_n$ kanonikus voltából következik, hogy a $(K_n(0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n),\ K_n(0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n+1))$ intervallumba nem esik se $K_n(0,\varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_n')$, se $K_n(0,\varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_n'+1)$ alakú szám, ahol $\mathfrak{E}_n'=(\varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_n')$ $\mathfrak{E}_n$-től különböző kanonikus sorozat, vagyis a különböző $\mathfrak{E}_n=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ kanonikus sorozatokhoz tartozó $(K_n(0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n),$ $K_n(0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n+1))$ intervallumok idegenek. Ennélfogva

$$\sum_{\mathfrak{E}_n}|K_n(0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n+1)-K_n(0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)|=1, \tag{41}$$

ahol az összegezés az összes n-edrendű $\mathfrak{E}_n=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ kanonikus sorozatokra vonatkozik. Legyen $Tx=(\varphi(x))$ $(0\leq x<1)$. Akkor Tx a $(0, 1)$ intervallumnak egy önmagára való mérhető leképezése. Jelölje $T^{-1}E$ az E halmaz teljes eredetijét a T leképezésre nézve, vagyis legyen $T^{-1}E$ azon x számok összessége $(0\leq x<1)$, amelyekre $Tx\in E$. Akkor nyilvánvalóan, ha $I_{a,b}$ az (a,b) intervallum és $\mu(E)$ jelöli E Lebesgue-mértékét,

$$\mu(T^{-n}I_{a,b})=\sum_{\varepsilon_n}|K_n(0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n+b)-K_n(0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n+a)|, \tag{42}$$

ahol az összegezés az összes n-edrendű kanonikus $\mathfrak{E}_n=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ sorozatokra terjesztendő ki. (41)-ből

$$(43) \qquad \sum_{\mathcal{E}_n} \operatorname*{Min}_{0\leqq t\leqq 1} |H_n(x(\mathcal{E}_n), t)| \leqq 1 \leqq \sum_{\mathcal{E}_n} \operatorname*{Max}_{0\leqq t\leqq 1} |H_n(x(\mathcal{E}_n), t)|,$$

továbbá (42)-ből

$$(44) \quad (b-a)\sum_{\mathcal{E}_n} \operatorname*{Min}_{0\leqq t\leqq 1} |H_n(x(\mathcal{E}_n), t)| \leqq \mu(T^{-n} I_{a,b}) \leqq (b-a)\sum_{\mathcal{E}_n} \operatorname*{Max}_{0\leqq t\leqq 1} |H_n(x(\mathcal{E}_n), t)|,$$

ahol $x(\mathcal{E}_n)$ egy olyan szám, amelyre

$$\varepsilon_k(x(\mathcal{E}_n)) = \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

(Ilyen $x = x(\mathcal{E}_n)$ létezik, mivel $\mathcal{E}_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ feltevésünk szerint kanonikus.) A C) feltevés szerint tehát (43)-ból és (44)-ből következik, hogy

$$(45) \qquad \frac{1}{C}\mu(E) \leqq \mu(T^{-n}E) \leqq C\mu(E)$$

hacsak E [0, 1] egy részintervalluma. Ebből azonban nyilvánvalóan következik, hogy (45) akkor is fennáll, ha E tetszőleges véges vagy megszámlálható sok idegen intervallumból álló halmaz és így abban az esetben is, ha E tetszőleges mérhető halmaz.

Ennélfogva a Tx leképezésre teljesül a DUNFORD-MILLER-tétel feltevése és így tetszőleges $g(x)$ integrálható függvényre a (40) baloldalán álló határérték létezik és egy T-re invariáns $g^*(x)$ mérhető függvénnyel egyenlő. A következő §-ban kimutatjuk, hogy T felbonthatatlan (metrikusan tranzitív) és ilyenmódon kell, hogy $g^*(x)$ majdnem mindenütt egy $M(g)$ állandóval legyen egyenlő. FATOU lemmájából könnyen következik, hogy ez az állandó *véges* kell, hogy legyen, ugyanis (45) szerint

$$(46) \qquad \int_0^1 |g(T^k x)|\,dx \leqq C\int_0^1 |g(x)|\,dx.$$

9. §. T felbonthatatlanságának bizonyítása

3. TÉTEL: *Ha $\varphi(y)$ eleget tesz a* 2. TÉTEL *feltevéseinek, akkor a $Tx = (\varphi(x))$ leképezés felbonthatatlan, vagyis ha $T^{-1}E = E$, ahol E a* (0, 1) *intervallum mérhető rész halmaza, akkor E vagy* 0 *mértékű, vagy* 1 *mértékű.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy E mérhető, $T^{-1}E = E$ és $\mu(E) = \delta > 0$. Ki fogjuk mutatni, hogy ez esetben $\mu(E) = 1$. KNOPP tétele szerint elegendő kimutatni, hogy megadható intervallumoknak egy olyan $\mathfrak{J}$ halmaza, hogy bármely (a, b) $(0 \leqq a < b \leqq 1)$ intervallum előállítható véges vagy megszámlálható sok $\mathfrak{J}$-hez tartozó idegen intervallum egyesítéseképpen és bármely $I \in \mathfrak{J}$-re $\mu(EI) \geqq \Delta\mu(I)$, ahol $\Delta > 0$ nem függ I-től.

Ez a következőképpen látható be: Legyen $I_n=(K_n(0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n), K_n(0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n+1))=(a,b)$, ahol $\mathcal{E}_n=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ kanonikus sorozat. Akkor ha

$$E(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x\in E,\\ 0, & \text{ha } x\notin E\end{cases}$$

és $x=x(\mathcal{E}_n)$ olyan szám, amelyre $\varepsilon_k(x)=\varepsilon_k$ $(k=1,2,\dots,n)$, akkor

$$\mu(EI_n)=\left|\int_a^b E(x)\,dx\right|=\int_0^1 E(y)|H_n(x,y)|\,dy, \tag{47}$$

és így

$$\mu(EI_n)\geqq \operatorname*{Min}_{0\leqq y\leqq 1}|H_n(x,y)|\cdot\delta\geqq\frac{\delta}{C}\operatorname*{Max}_{0\leqq y\leqq 1}|H_n(x,y)|\geqq\frac{\delta}{C}\left|\int_a^b dx\right|=\frac{\delta}{C}\mu(I_n), \tag{48}$$

tehát

$$\frac{\mu(EI_n)}{\mu(I_n)}\geqq\frac{\delta}{C}=\Delta. \tag{49}$$

Mivel az I_n intervallumok összessége az 1. TÉTEL szerint rendelkezik a KNOPP tételében szereplő tulajdonsággal, ezzel a 3. TÉTELt bebizonyítottuk. Ezzel egyben a 2. TÉTEL bizonyítása is teljessé vált.

10. §. Néhány példa

Vizsgáljunk most meg néhány példát, amelyekben az előbbiekben bebizonyított tételek alkalmazhatók.

1. Legyen $\varphi(y)=qy$, ahol $q>1$ egész szám; ez esetben 2. TÉTELünk alkalmazható és speciális esetként nyerjük a q-adikus kifejtéseket és így BOREL, ill. RAIKOV tételeit.

2. Legyen $\varphi(y)=\dfrac{1}{y}$, akkor teljesül az $A)$ és $B')$ feltevés és $\varphi(0)=+\infty$, továbbá mivel

$$K_n(0,z_1,\dots,z_n)=\cfrac{1}{z_1+\cfrac{1}{z_2+\cdots+\cfrac{1}{z_n}}},$$

ha $\dfrac{p_k(x)}{q_k(x)}$ jelöli $x=\cfrac{1}{\varepsilon_1(x)+\cfrac{1}{\varepsilon_2(x)+\cfrac{1}{\varepsilon_3(x)+\cdots}}}$ k-adik közelítő törtjét $(k=$

$=1, 2, \ldots$), akkor egy jólismert képlet szerint (lásd [19])

$$K_n(0, \varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)+t) = \frac{p_{n-1}(x)(\varepsilon_n(x)+t)+p_{n-2}(x)}{q_{n-1}(x)(\varepsilon_n(x)+t)+q_{n-2}(x)}, \tag{50}$$

tehát, mivel $p_{n-1}(x)q_{n-2}(x)-q_{n-1}(x)p_{n-2}(x)=(-1)^{n-2}$, kapjuk, hogy

$$H_n(x, t) = \frac{(-1)^{n-2}}{(q_{n-1}(x)(\varepsilon_n(x)+t)+q_{n-2}(x))^2}. \tag{51}$$

Ennélfogva, ha $0 \leqq t \leqq 1$

$$\frac{1}{(q_{n-1}(x)(\varepsilon_n(x)+1)+q_{n-2}(x))^2} \leqq |H_n(x, t)| \leqq \frac{1}{(q_{n-1}(x)\varepsilon_n(x)+q_{n-2}(x))^2}, \tag{52}$$

vagyis a C) feltevés teljesül $C=4$-gyel, ugyanis

$$\left(\frac{q_{n-1}(x)(\varepsilon_n(x)+1)+q_{n-2}(x)}{q_{n-1}(x)\varepsilon_n(x)+q_{n-2}(x)}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{\varepsilon_n(x)+\dfrac{q_{n-2}(x)}{q_{n-1}(x)}}\right)^2 \leqq 4.$$

Ennélfogva a $(0, 1)$ intervallum bármely E mérhető részhalmazára

$$\mu(T^{-n}E) \leqq 4\mu(E) \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{53a}$$

Valójában ennél több igaz, ugyanis (44)-ből és (52)-ből következik, hogy

$$\mu(T^{-n}E) \leqq L_n \cdot \mu(E) \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{53b}$$

ahol

$$L_n = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{F_n(q)}{q^2}. \tag{54}$$

Itt $F_n(q)$ azon $\frac{p}{q}$ racionális számok számát jelöli, amelyekre $1 \leqq p \leqq q$, p és q relatív prímek, és amelyek „n-emeletes" lánctört alakjában állíthatók elő, vagyis amelyek

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \cdots + \cfrac{1}{\varepsilon_n}}}$$

alakúak ($\varepsilon_n = 1$ is megengedett!). S. HARTMAN [22] megmutatta indirekt úton (az invariáns $\nu(E)$ mérték segítségével), hogy az (54) által definiált L_n sorok konvergensek és

$$L_n \leqq 2 \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{55}$$

Alábbiakban HARTMAN egyenlőtlenségére egy közvetlen bizonyítást adunk, melynek alapgondolata KUZMINtól származik. (l. [19]).

Legyen $\mathfrak{F}_n$ azon $\frac{p}{q}$ racionális számok halmaza ($q \geqq 1$, $1 \leqq p \leqq q$, p és q relatív prímek), amelyek előállíthatók n-emeletes lánctört alakjában, és legyen

$$\Phi_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{\frac{p}{q} \in \mathfrak{F}_n} \frac{1}{(q+px)^\lambda} \qquad (0 \leqq x < 1; \lambda > 1). \tag{56}$$

Ha $\frac{p}{q} \in \mathfrak{F}_{n+1}$, akkor $\frac{p}{q} = \frac{1}{k+\frac{r}{s}} = \frac{s}{ks+r}$, ahol $\frac{r}{s} \in \mathfrak{F}_n$, tehát

$$\Phi_{n+1}^{(\lambda)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\frac{r}{s} \in \mathfrak{F}_n} \frac{1}{((ks+r)+sx)^\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^\lambda} \Phi_n^{(\lambda)}\left(\frac{1}{k+x}\right). \tag{57}$$

Legyen most $\lambda = 2$, akkor

$$\Phi_1^{(2)}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q+x)^2} \leqq \frac{1}{(1+x)^2} + \int_{1+x}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{1+x}\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) \leqq \frac{2}{1+x}. \tag{58}$$

Mivel továbbá

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \cdot \frac{2}{1+\frac{1}{k+x}} = \frac{2}{1+x}, \tag{59}$$

tehát teljes indukcióval következik n minden értékére

$$\Phi_n^{(2)}(x) \leqq \frac{2}{1+x} \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

és így

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{F}_n(q)}{q^2} = \Phi_n^{(2)}(0) \leqq 2.$$

Ezzel (55)-öt bebizonyítottuk. Bizonyítási módszerünk többet is kiad. Ha ugyanis $\lambda > 1$ tetszőleges, akkor

$$\Phi_1^{(\lambda)}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q+x)^\lambda} \leqq \frac{1}{(1+x)^\lambda} + \int_{1+x}^{\infty} \frac{dt}{t^\lambda} \leqq \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{1}{(1+x)^{\lambda-1}} \leqq \frac{\lambda}{\lambda-1}. \tag{60}$$

Ennélfogva (57) szerint

$$\Phi_2^{(\lambda)}(x) \leqq \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^2, \tag{61}$$

és általában

$$\Phi_n^{(\lambda)}(x) \leqq \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^n. \tag{62}$$

Tehát, ha $0 < \varepsilon \leqq 1$

$$\Phi_n^{(1+\varepsilon)}(0) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{F_n(q)}{q^{1+\varepsilon}} \leqq \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^n, \tag{63}$$

és így, mindkét oldalt $\varepsilon^{n-1+\delta}$-val $(0<\delta<1)$ beszorozva és ε szerint 0-tól 1-ig integrálva következik, hogy a

$$\sum_{q=2}^{\infty} \frac{F_n(q)}{q(\log q)^{n+\delta}} \tag{64}$$

sor konvergens, ha $\delta > 0$ $(n=1,2,\ldots)$. Ez némi felvilágosítást nyújt $F_n(q)$ nagyságrendjére vonatkozólag.

3. Vizsgáljuk most az általánosított *Bolyai—Farkas*-féle algoritmust. Ez esetben $\varphi(y)=(1+y)^m-1$, és így az A) és B) feltevések teljesülnek és $\varphi(1)=2^m-1$ egész szám. Vizsgáljuk meg a C) feltevés teljesülését: Ez esetben

$$\frac{\operatorname*{Max}_{0\leqq t\leqq 1} H_n(x,t)}{\operatorname*{Min}_{0\leqq t\leqq 1} H_n(x,t)} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon_j + \sqrt[m]{\varepsilon_{j+1}+\cdots+\sqrt[m]{\varepsilon_n+2}}}{\varepsilon_j + \sqrt[m]{\varepsilon_{j+1}+\cdots+\sqrt[m]{\varepsilon_n+1}}} \right)^{1-\frac{1}{m}}.$$

Mivel $\dfrac{a+c}{a+b} \leqq \dfrac{c}{b}$, ha $0<b\leqq c$ és $a \geqq 0$, tehát

$$\frac{\operatorname*{Max}_{0\leqq t\leqq 1} H_n(x,t)}{\operatorname*{Min}_{0\leqq t\leqq 1} H_n(x,t)} \leqq \prod_{j=1}^{n} \left(1+\frac{1}{\varepsilon_n+1}\right)^{\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{m^{n-j}}} \leqq 2^{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m^{n-1}}\right)} \leqq 2,$$

tehát a C) feltevés, $C=2$-vel teljesül.

4. Bemutatunk egy algoritmust, amely nem tartozik a tárgyalt kategóriákba. Legyen $\varphi(x)=\dfrac{x}{1-x}$. Akkor $\varphi(x)$-re nyilván teljesül az A) feltevés. A B) feltevés nem teljesül, mivel $\varphi'(0)=1$ ennek ellenére az 1. TÉTEL állítása ez esetben is érvényes.[22]

[22] Általában igaz az, hogy az 1. TÉTEL állítása akkor is érvényes, ha az A) feltétel, és ha a B) feltétel helyett a következő gyengébb feltétel teljesül: B*) $\varphi(0)=0$ és $\varphi'(0)-\lambda_0 \geqq 1$. Ugyanis $\lambda_0=1$ esetben (32)-ből $|X-k_n(x)|<\gamma^{V_n}$, ahol $\gamma=f'(1)<1$ és V_n az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ számok között a 0-tól különbözők számát jelöli. Ha tehát $\lim_{n\to\infty} V_n = +\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = x$; V_n azonban csak akkor nem tart $+\infty$-hez, ha x véges f-lánccal állitható elő, hiszen egyébként bármely k-hoz van olyan s nemnegatív egész szám, amelyre $\varepsilon_{k+s}(x) \geqq 1$; ellenkező esetben ugyanis $r_k(x) < r_{k+1}(x) < \ldots < f(1)$ volna, és így léteznék $0 < \xi = \lim_{s\to\infty} r_{k+s}(x) \leqq f(1)$ és kielégítené a $\xi=\varphi(\xi)$ egyenletet. Mivel $\xi < \varphi(\xi)$, ha $\xi > 0$, ez lehetetlen, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Ha x közönséges lánctörtelőállítása

$$x = \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \cfrac{1}{s_3 + \cdots}}}$$

akkor az ε_k számok a következőképpen határozhatók meg:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_{s_1-1} = 0, \varepsilon_{s_1} = s_2,$$

$$\varepsilon_{s_1+1} = \varepsilon_{s_1+2} = \cdots = \varepsilon_{s_1+s_3-1} = 0, \varepsilon_{s_1+s_3} = s_4,$$

s. i. t. Az ε_k sorozatban a 0 jegy sűrűsége eggyel, a többi jegy sűrűsége pedig zérussal egyenlő, azonban a *zérustól különböző* ε_k jegyek sorozatában létezik a k szám ($k = 1, 4 \ldots$) *relatív* sűrűsége és $\frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$-vel egyenlő. Ezek az állítások következnek a tárgyalt algoritmus és a közönséges lánctört-kifejtés közti fentemlített összefüggésből, de levezethetők HOPF egy általános ergodikus tételéből is, annak figyelembevételével, hogy a $Tx = \left(\frac{x}{1-x}\right)$ transzformációra nézve a $\nu(E) = \int\limits_E \frac{dx}{x}$ *nem korlátos* mérték invariáns. Mivel

$$\int\limits_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k+1}{k+2}} \frac{dx}{x} = \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

és

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x} = +\infty,$$

az említett állítás HOPF ergodikus tételéből ([40]; nem egy-egy értelmű leképezésekre lásd [23]) valóban következik.

IRODALOM

[1] K. KNOPP: *Darstellung der reellen Zahlen durch Grenzprozesse*, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, I. 1. 4., 1—30., B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1939.

[2] O. PERRON: *Irrationalzahlen*, de Gruyter, Berlin u. Leipzig, 1921, pp. 90—127.

[3] H. TIETZE: Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche. *Math. Annalen*, **70** (1911) 236. o.

[4] G. STRATEMEYER: Entwicklung positiver Zahlen nach Stammbrüchen, *Mitteilungen des Mat. Seminars der Univ. Giessen*, **20** (1931) 1—27.

[5] G. PÓLYA—G. SZEGŐ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. I. Aufg. I. 184. Berlin, Springer, 1925, p. 33.

[6] BOLYAI FARKAS: *Tentamen inventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi*, ed. sec., Budapest, 1897, Vol. I.

[7] FARKAS GYULA: A Bolyai-féle algoritmus, *Értekezések a matematikai tudományok köréből*, **8** (1881) 1—8., lásd továbbá VERESS PÁL: A Bolyai-féle algoritmus, *Menynyiségtani és Term. Tud. Didaktikai Lapok*, **1** (1943) 57—62.

[8] B. H. BISSINGER: A generalization of continued fractions, *Bullettin of the Amer. Math. Soc.*, **50** (1944) 868—876.

[9] C. I. EVERETT: Representations for real numbers, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **52** (1946) 861—869.

[10] É. BOREL: Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, **27** (1909) pp. 247—271.

[11] R. O. KUZMIN: Sur un problème de Gauss, *Atti del Congresso Internazionale del Matematici*, Bologna, 1928. Vol., **6** p. 83—89.

[12] P. LÉVY: Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue. *Bull. Soc. Math.*, **57** (1929) pp. 178—194.

[13] P. LÉVY: *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, 2. e. d. Paris, Gauthiers—Villars, 1954. Ch. IX.

[14] P. LÉVY: Sur le développement en fraction continue d'un nombre choise en hazard, *Comp. Math.*, **3** (1936) 286—303.

[15] D. RAIKOFF: On some arithmetical properties of summable functions, *Mat. Sbornik n. s.*, **1** (1936) 377—384.

[16] A. RÉNYI: A new axiomatic theory of probability, *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955) 285—336; lásd továbbá A. RÉNYI: A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle előállításában, *Mat. Lapok*, **7** (1956) 77—100.

[17] A. KHINTCHINE: Metrische Kettenbruchprobleme, *Comp. Math.*, **1** (1935) 359—382.

[18] A. KHINTCHINE: Zur metrischen Kettenbruchtheorie, *Comp. Math.*, **3** (1936) 276—285.

[19] A. KHINTCHINE: *Kettenbrüche*, B. G. Teubner, Leipzig, 1956.

[20] C. RYLL-NARDZEWSKI; On the ergodic theorems II. Ergodic theory of continued fractions *Studia Math.*, **12** (1951) 74—79.

[21] S. HARTMAN—E. MARCZEWSKY—C. RYLL-NARDZEWSKI: Théorèmes ergodiques et leurs applications, *Coll. Math.*, **2** (1951) 109—123.

[22] S. HARTMAN: Quelques propriétés ergodiques des fractions continues. *Studia. Math.*, **12** (1951) 271—278.

[23] F. RIESZ: Sur la théorie ergodique, *Commentarii Math. Helv.*, **17** (1944—1945) pp. 221—239.

[24] K. KNOPP: Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten, *Math. Annalen,* **95** (1926) 409—426.

[25] H. STEINHAUS: Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, *Fund. Math.,* **1** (1920) 93—104.

[26] N. DUNFORD—D. S. MILLER: On the ergodic theorem, *Transact. Amer. Math. Soc.,* **60** (1946) 538—549.

[27] F. RIESZ: On a recent generalization of G. D. Birkhoff's ergodic theorem, *Acta. Sci., Math.* (Szeged), **11** (1948) 193—200.

[28] J. L. DOOB: *Stochastic processes,* Wiley, New-York, 1953.

[29] A. RÉNYI: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[30] M. KAC—R. SALEM—A. ZYGMUND: A gap theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **63** (1948) 235—243.

[31] J. F. KOKSMA: An arithmetical property of some summable functions, *Proc. Koninkligke Nederlandse Akad. van. Wet.,* **13** (1956) 959—972.

[32] P. ERDŐS: On the strong law of large numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **67** (1950) 51—56.

[33] R. P. HALMOS: Measurable transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **55** (1949) 1015—1034.

[34] Y. N. DOWKER: Invariant measure and the ergodic theorem, *Duke Math. Journal,* **14** (1947) 1051—1061.

[35] Y. N. DOWKER: Finite and σ-finite invariant measures, *Ann. of Mat.,* **54** (1951) 595—608.

[36] Y. N. DOWKER: On measurable transformations in finite measure spaces, *Annals of Math.,* **62** (1955) 504—515.

[37] Y. N. DOWKER: Sur les applications measurables, *Comptes Rendus,* **242** (1956) 329—331.

[38] M. COTLAR—R. A. RICABARRA: On a theorem of E. Hopf. *Rev. Union Mat. Argentina,* **14** (1949) 49—63.

[39] P. CALDERON: Sur les mesures invariantes, *Comptes Rendus,* **240** (1955) 1960—1962.

[40] E. HOPF: *Ergodentheorie,* Ergebnisse der Math. u. Grenzgebiete, Berlin, Springer, 1937.

(Beérkezett: 1957. VII. 11.)

A HILBERT-TÉR NORMÁLIS TRANSZFORMÁCIÓINAK GYENGÉN KONVERGENS SOROZATAIRÓL

(Székfoglaló előadás, elhangzott 1957 március 22-én)

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

1. BEVEZETÉS. A következőkben jelentsen $\mathfrak{H}$ Hilbert-teret, amelynek a dimenziója,

$$\mathfrak{d} = \dim \mathfrak{H},$$

tetszőleges *végtelen* (megszámlálható vagy nem megszámlálható) kardinális szám lehet.

Jelöljük $\mathfrak{B}$-vel a $\mathfrak{H}$ tér korlátos lineáris transzformációinak a halmazát. $\mathfrak{B}$ maga is metrikus lineáris tér, amelyben a metrikát a transzformációk normája által értelmezzük. Az e metrikával kapcsolatos konvergencia- és környezetfogalmon kívül más konvergencia- és környezetfogalom is fontossággal bír a $\mathfrak{B}$ halmaz vizsgálatában; a következőkben az ún. *gyenge* konvergenciáról és topológiáról lesz szó.

Mint ismeretes, a $B_n \in \mathfrak{B}$ sorozat $(n = 1, 2, \ldots)$ akkor *konvergál gyengén* $\mathfrak{B}$ egy B eleméhez, jelben

$$B_n \rightharpoonup B,$$

ha $\mathfrak{H}$ bármely f, g elempárjára fennáll a

$$(B_n f, g) \rightarrow (Bf, g) \qquad (n \rightarrow \infty)$$

konvergencia. $\mathfrak{B}$ egy B_0 elemének egy *gyenge környezetén* pedig $\mathfrak{B}$ mindazon B elemeinek halmazát értjük, amelyekre

$$|(Bf_i, g_i) - (B_0 f_i, g_i)| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ahol ε adott pozitív szám, $f_1, \ldots, f_n$, $g_1, \ldots, g_n$ pedig véges sok adott elem $\mathfrak{H}$-ból; röviden mondva ez B_0-nak a

$$\mathfrak{V}(B_0; f_1, \ldots, f_n; g_1, \ldots, g_n; \varepsilon)$$

- környezete. Az ezen környezetfogalom által származtatott topológia a $\mathfrak{B}$ tér *gyenge topológiája.*

Ha $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{B}$ tér elemeinek egy részhalmaza, jelöljük $\overline{\mathfrak{C}}$-sal ennek a gyenge topológia értelmében való lezárását; $\overline{\mathfrak{C}}$-ba tehát $\mathfrak{B}$ azon „pontjai" tartoznak, amelyeknek bármely gyenge környezetébe esik $\mathfrak{C}$-nek legalább egy pontja ($\overline{\mathfrak{C}}$ tehát $\mathfrak{C}$-nek és az $\mathfrak{C}$ gyenge torlódási pontjai halmazának az egyesítése).

Jelöljük továbbá $\tilde{\mathfrak{S}}$-vel az $\mathfrak{S}$-ből kiválasztható gyengén konvergens $\{B_n\}$ sorozatok limeszeinek a halmazát. Nyílvánvaló, hogy

$$\mathfrak{S} \subseteq \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \bar{\mathfrak{S}},$$

azonban általában

$$\tilde{\mathfrak{S}} \neq \bar{\mathfrak{S}}$$

(v.ö. [3], 383; itt lényeges, hogy $\mathfrak{H}$-ról feltettük, hogy végtelen dimenziós, mert véges dimenziós euklidesi tér esetében itt mindig egyenlőség van).

A következőkben $\mathfrak{B}$-nek bizonyos speciális részhalmazait fogjuk tekinteni:

$$\mathfrak{S}_T, \ \mathfrak{S}_U, \ \mathfrak{S}_A, \ \mathfrak{S}_E.$$

$\mathfrak{S}_T$ a $\mathfrak{B}$ tér *egységgömbje*, azaz $\mathfrak{H}$ mindazon T lineáris transzformációinak a halmaza, amelyekre $\|T\| \leqq 1$ (ezek a $\mathfrak{H}$ tér ún. *kontrakciói*). Speciális kontrakciók az U unitér transzformációk, az $O \leqq A \leqq I$ feltételnek eleget tevő A önadjungált transzformációk, és az E (ortogonális) projekciók. Ezek halmazait jelölje rendre $\mathfrak{S}_U$, $\mathfrak{S}_A$, $\mathfrak{S}_E$. Nyílván

$$\mathfrak{S}_T \supseteq \mathfrak{S}_U, \quad \mathfrak{S}_T \supseteq \mathfrak{S}_A \supseteq \mathfrak{S}_E.$$

Mind az $\mathfrak{S}_U$, mind az $\mathfrak{S}_E$ halmaz nyílvánvaló értelemben az $\mathfrak{S}_T$ egységgömb „felületén" fekszik (kivéve $\mathfrak{S}_E$ egy pontját, a O projekciót). Az $\mathfrak{S}_U$ halmazról pedig éppenséggel könnyen kimutatható, hogy pontjai az $\mathfrak{S}_T$ egységgömbnek csupa „szélső" pontjai, ti. ha egy U unitér transzformáció előállítható az

$$U = \lambda T_1 + (1-\lambda) T_2$$

alakban, ahol T_1, T_2 kontrakciók, és $0 < \lambda < 1$, akkor szükségképpen $T_1 = T_2 = U$.

Ugyanígy könnyű kimutatni, hogy az $\mathfrak{S}_E$ halmaz pontjai pedig az $\mathfrak{S}_A$ halmaznak csupa szélső pontjai.

Annál meglepőbb az a HALMOS-tól [2] származó tétel, amely szerint az $\mathfrak{S}_U$ halmaz gyenge lezárása az egész egységgömbbel, az $\mathfrak{S}_E$ halmazé pedig az egész $\mathfrak{S}_A$ halmazzal egyenlő:

(1) $$\bar{\mathfrak{S}}_U = \mathfrak{S}_T, \quad \bar{\mathfrak{S}}_E = \mathfrak{S}_A.$$

E dolgozatban megmutatjuk, hogy a gyenge topológiában való lezárás helyett elég itt a gyengén konvergens sorozatok limeszeivel való lezárást venni, azaz igaz az is, hogy

(2) $$\tilde{\mathfrak{S}}_U = \mathfrak{S}_T, \quad \tilde{\mathfrak{S}}_E = \mathfrak{S}_A.$$

Minthogy az

$$\tilde{\mathfrak{S}}_U \subseteq \mathfrak{S}_T, \quad \tilde{\mathfrak{S}}_E \subseteq \mathfrak{S}_A$$

relációk nyílvánvalóan igazak, azt kell csak megmutatnunk, hogy minden T kontrakcióhoz található unitér transzformációknak olyan $\{U_k\}$ sorozata, amely gyengén T-hez tart, és minden $A \in \mathfrak{C}_A$ transzformációhoz található projekcióknak olyan $\{E_k\}$ sorozata, amely gyengén A-hoz tart:

(3) $$U_k \rightharpoonup T, \quad E_k \rightharpoonup A \qquad (k \to \infty).$$

Az első reláció nem vonja maga után, hogy U_k négyzete T négyzetéhez tart, stb., azonban látni fogjuk, hogy az $\{U_k\}$ sorozat választható úgy is, hogy U_k bármely pozitív egész kitevőjű hatványa T megfelelő hatványához tartson gyengén, mégpedig az összes hatványokra nézve egyenletes módon. Analóg állítást fogunk bebizonyítani kontrakciók egyparaméteres félcsoportjaira. A második relációt ugyancsak általánosabb alakban bizonyítjuk be, amelyben az egyetlen A transzformáció helyébe a λ valós paramétertől monoton módon függő $A(\lambda)$ transzformáció lép.

Állapodjunk meg a következő *értelmezés*ben: Függjenek a $B, B_1, B_2, \ldots (\in \mathfrak{B})$ transzformációk egy (absztrakt) p paramétertől. Akkor mondjuk, hogy B_k p-re nézve egyenletes módon gyengén tart B-hez, ha minden pozitív ε-hoz és minden $f, g \in \mathfrak{H}$ elempárhoz található olyan, p-től nem függő k_0 index, hogy $k \geqq k_0$ esetében minden p paraméterértékre álljon:

$$|(B_k(p)f, g) - (B(p)f, g)| < \varepsilon.$$

Állításaink a következők:

I. *A $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér minden T kontrakciójához található $\mathfrak{H}$ unitér transzformációinak egy olyan $\{U_k\}$ sorozata, hogy minden rögzített n természetes számra*

$$U_k^n \rightharpoonup T^n \qquad (k \to \infty),$$

egyenletesen n-re nézve. Az U_k transzformációk választhatók úgy, hogy egymással mind unitér-ekvivalensek legyenek.

II. *Legyen $T(s)$ $(s \geqq 0)$ a $\mathfrak{H}$ tér kontrakcióiból álló egyparaméteres félcsoport, amely s-től gyengén folytonosan függ ($T(s) \rightharpoonup I$, ha $s \to 0$). Ekkor található $\mathfrak{H}$ unitér transzformációiból álló egyparaméteres, erősen folytonos félcsoportoknak olyan $\{U_k(s)\}$ sorozata, amelyre*

$$U_k(s) \rightharpoonup T(s), \qquad (k \to \infty),$$

s-re nézve egyenletesen. Az $U_k(s)$ félcsoportok választhatók úgy, hogy egymás közt mind unitér-ekvivalensek legyenek.

III. *Legyen $A(\lambda)$ $(-\infty \leqq \lambda \leqq \infty)$ a $\mathfrak{H}$ tér korlátos önadjungált transzformációja, amely a λ paraméternek monoton növekvő, jobbról folytonos függvénye, $A(-\infty) = O$, $A(+\infty) = \lim\limits_{\lambda \to \infty} A(\lambda) = I$. Található ekkor hasonló tulajdonságú, de projekcióértékű függvényeknek (tehát ún. spektrálseregeknek) olyan $\{E_k(\lambda)\}$ sorozata, amelyre*

$$E_k(\lambda) \rightharpoonup A(\lambda) \qquad (k \to \infty),$$

λ-ra nézve egyenletesen. Az $E_k(\lambda)$ spektrálseregek választhatók egymással unitér-ekvivalenseknek.

A (3) alatti állítások közül a második ebből $A(\lambda)$-nak pl. a következő választásával adódik:

$$A(\lambda)=O \quad (\lambda<0), \quad A(\lambda)=A \quad (0\leqq\lambda<1), \quad A(\lambda)=I \quad (\lambda\geqq 1).$$

A (3) alatti állítások értelmében léteznek speciálisan olyan $\{U_k\}$, $\{E_k\}$ sorozatok, amelyekre

$$U_k\rightharpoonup\frac{1}{2}I, \qquad E_k\rightharpoonup\frac{1}{2}I.$$

De ekkor

$$U_k^{-1}=U_k^*\rightharpoonup\left(\frac{1}{2}I\right)^*=\frac{1}{2}I\neq\left(\frac{1}{2}I\right)^{-1},$$

$$E_k^2=E_k\rightharpoonup\frac{1}{2}I\neq\left(\frac{1}{2}I\right)^2,$$

ami azt bizonyítja, hogy *sem az inverzképzés, sem a négyzetreemelés nem folytonos műveletek a gyenge konvergenciára vonatkozólag.* Hogy ezek nem folytonosak a $\mathfrak{B}$ gyenge topológiájára vonatkozólag, arra hasonló okoskodással már HALMOS [2] rámutatott.

2. AZ I—III. TÉTELEK BIZONYÍTÁSA. Kezdjük az I. tétel bizonyításával. Legyen tehát T a $\mathfrak{H}$ tér egy kontrakciója. Egy előbbi tételünk szerint [4] létezik egy, általában bővebb $\mathfrak{H}'$ Hilbert-térben egy olyan U' unitér transzformáció, amelyre érvényes a következő összefüggés:

$$T^n f=P'U'^n f \qquad (f\in\mathfrak{H};\ n=0,1,2,\ldots), \tag{4}$$

ahol is P' a $\mathfrak{H}$ altérre való (ortogonális) vetítés operátorát jelenti. Megkívánható, hogy $\mathfrak{H}'$-t az $U'^n f$ $(f\in\mathfrak{H};\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ alakú elemek kifeszítsék; ebben az esetben nyilvánvalóan

$$\dim\mathfrak{H}'=\aleph_0\cdot\dim\mathfrak{H}=\aleph_0\cdot\mathfrak{d}=\mathfrak{d}; \tag{5}$$

itt újra felhasználtuk azt, hogy a $\mathfrak{d}$ kardinális szám végtelen.

Legyen $\mathfrak{Q}$ a $\mathfrak{H}$ térnek egy olyan altere, amelyre

$$\dim(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{Q})=\mathfrak{d}, \tag{6}$$

és jelöljük Q-val, ill. Q'-vel a $\mathfrak{Q}$-ra való vetítés operátorát $\mathfrak{H}$-ban, ill. $\mathfrak{H}'$-ben. Minthogy

$$\mathfrak{Q}\subseteq\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{H}',$$

azért

$$QP'=Q';$$

ennélfogva (4)-ből következik, hogy

$$QT^n f = Q'U'^n f \qquad (f \in \mathfrak{H};\; n = 0, 1, \ldots). \tag{7}$$

(5)-ből és (6)-ból következik, hogy

$$\dim(\mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{Q}) = \dim(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{Q}).$$

Ennélfogva létezik $\mathfrak{H}'$-nek $\mathfrak{H}$-ra való olyan τ izometrikus leképezése, amely a két tér közös $\mathfrak{Q}$ alterének elemeit invariánsan hagyja, a $\mathfrak{Q}$-ra merőleges $\mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{Q}$ altereket pedig egymásra képezi le. Mint könnyen belátható, ekkor

$$\tau Q' \tau^{-1} = Q \qquad (\mathfrak{H}\text{-ban}).$$

Legyen

$$\tau U' \tau^{-1} = U \qquad (\mathfrak{H}\text{-ban}); \tag{8}$$

U a $\mathfrak{H}$ tér unitér transzformációja.

(7)-ből következik, hogy a $\mathfrak{H}$ tér minden g elemére

$$QT^n Qg = Q'U'^n Qg = \tau^{-1} Q U^n \tau Qg = QU^n Qg,$$

hiszen a $\mathfrak{Q}$ elemei invariánsok τ-ra és τ^{-1}-re vonatkozólag. Ennélfogva

$$QT^n Q = QU^n Q \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Ezen előkészítő meggondolások után tekintsük a $\mathfrak{H}$ tér egy felbontását megszámlálhatóan végtelen sok, páronként ortogonális $\mathfrak{P}_i$ altér vektori összegére:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_2 \oplus \mathfrak{P}_3 \oplus \ldots,$$

a $\mathfrak{P}_i$ alterek mindegyikének a dimenziója legyen ugyanaz, mint a $\mathfrak{H}$ téré, azaz $\mathfrak{d}$-vel egyenlő. Ilyen felbontás létezése következik abból, hogy $\mathfrak{d}$ végtelen kardinális szám lévén, $\aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}$.

Legyen

$$\mathfrak{Q}_k = \mathfrak{P}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{P}_k. \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor

$$\dim(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{Q}_k) = \dim(\mathfrak{P}_{k+1} \oplus \mathfrak{P}_{k+2} \oplus \ldots) = \aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}.$$

Az előzők szerint tehát k minden értékére létezik egy olyan U_k unitér transzformációja a $\mathfrak{H}$ térnek, amelyre

$$Q_k T^n Q_k = Q_k U_k^n Q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots;\; n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{10}$$

Q_k jelenti a $\mathfrak{Q}_k$-ra való vetítés operátorát $\mathfrak{H}$-ban. (8) folytán az U_k transzformációk egymással unitér-ekvivalensek. Bevezetve az

$$S_k(n) = T^n - U_k^n$$

jelölést, (10)-et így is írhatjuk:

$$Q_k S_k(n) Q_k = O.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$S_k(n) = [Q_k + (I - Q_k)]\, S_k(n)\, [Q_k + (I - Q_k)] =$$
$$= Q_k S_k(n)(I - Q_k) + (I - Q_k) S_k(n) Q_k + (I - Q_k) S_k(n)(I - Q_k),$$

tehát tetszésszerinti $f, g \in \mathfrak{H}$ elemekre

$$(S_k(n) f, g) = (Q_k S_k(n)(I - Q_k) f, g) + (S_k(n) Q_k f, (I - Q_k) g) +$$
$$+ (S_k(n)(I - Q_k) f, (I - Q_k) g).$$

Minthogy

$$\text{(11)} \qquad \|S_k(n)\| \leqq \|T^n\| + \|U_k^n\| \leqq 2,$$

következik ebből, hogy

$$|(S_k(n) f, g)| \leqq 2\{\|(I - Q_k) f\| \|g\| + \|f\| \|(I - Q_k) g\| + \|(I - Q_k) f\| \|(I - Q_k) g\|\}.$$

Az

$$\|(I - Q_k) f\|^2 = \|\sum_{k+1}^{\infty} P_i f\|^2 = \sum_{k+1}^{\infty} \|P_i f\|^2$$

összefüggésből látható, hogy ha $k \to \infty$, akkor $(I - Q_k) f \to 0$, és ugyanigy $(I - Q_k) g \to 0$. Ennélfogva elég nagy k-ra n-től függetlenül érvényes:

$$|(S_k(n) f, g)| < \varepsilon.$$

Ezzel az I. tétel bizonyítását befejeztük.

A II. tétel bizonyítása analóg módon történhet. Felhasználjuk azt az előbbi eredményünket [4], hogy a $T(s)$ félcsoport előállítható a következő alakban:

$$T(s) f = P' U'(s) f \qquad (f \in \mathfrak{H},\ s \geqq 0),$$

ahol $U'(s)$ egy erősen folytonos, egyparaméteres, unitér csoport egy alkalmas $\mathfrak{H}'$ térben, $\mathfrak{H}' \supseteq \mathfrak{H}$; ahol is megkövetelhető, hogy $\mathfrak{H}'$ minimális legyen abban az értelemben, hogy az $U'(s) f$ $(f \in \mathfrak{H},\ -\infty < s < \infty)$ alakú elemek $\mathfrak{H}'$-t kifeszitsék. $U'(s)$-nek mint s függvényének folytonossága miatt $\mathfrak{H}'$-t ekkor a racionális s paraméterértékekhez tartozó $U'(s) f$ elemek is kifeszítik, amiből következik, hogy

$$\dim \mathfrak{H}' = \aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{r}.$$

Ezek után ugyanúgy okoskodunk, mint fentebb, csupán U_k^n szerepét $U_k(s)$, $S_k(n)$ szerepét pedig $S_k(s) = T(s) - U_k(s)$ veszi át, és felhasználjuk a nyilvánvaló $\|S_k(s)\| \leqq 2$ egyenlőtlenséget.

A III. tétel bizonyítását NEUMARK egy tételére alapozzuk (v.ö. [4]), amely szerint $A(\lambda)$ előállítható az

$$A(\lambda) f = P' E'(\lambda) f \qquad (f \in \mathfrak{H},\ -\infty < \lambda < \infty)$$

alakban, ahol $\{E'(\lambda)\}$ közönséges (projekciókból álló) spektrálsereg valamely $\mathfrak{H}'$ térben, $\mathfrak{H}' \supseteq \mathfrak{H}$. Megkövetelhető, hogy $\mathfrak{H}'$ minimális legyen abban az értelemben, hogy az $E'(\lambda)f$ ($f \in \mathfrak{H}$, $-\infty < \lambda < \infty$) alakú elemek kifeszítsék; $E'(\lambda)$-nak mint λ függvényének jobbról való folytonossága miatt elég itt a racionális λ értékekre szorítkozni, amiből újra az következik, hogy

$$\dim \mathfrak{H}' = \aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}.$$

A bizonyítás során fellépő $S_k(\lambda) = A(\lambda) - E_k(\lambda)$ transzformációkra nyilván érvényes: $\|S_k(\lambda)\| \leqq 2$, és így a bizonyítás az előbbiekhez hasonló módon fejezhető be.

3. SZUBNORMÁLIS TRANSZFORMÁCIÓK. Az I. tétel közvetlen folyománya, hogy minden $S \in \mathfrak{B}$ transzformációhoz található olyan, korlátos *normális* transzformációkból álló $\{N_k\}$ sorozat, hogy minden rögzített természetes n számára álljon:

$$N_k^n \rightharpoonup S^n \qquad (k \to \infty). \tag{12}$$

(Csupán $N_k = \|S\| U_k$ veendő, ahol $\{U_k\}$ az I. tétel szerint a $T = \frac{1}{\|S\|} S$ kontrakcióhoz megadható unitér transzformáció-sorozat.) (12)-ből következik, hogy

$$N_k^{*n} \rightharpoonup S^{*n} \qquad (k \to \infty),$$

de nem következik az is, hogy

$$N_k^{*m} N_k^n \rightharpoonup S^{*m} S^n \qquad (k \to \infty), \tag{13}$$

mert a gyenge konvergenciának nincs multiplikatív tulajdonsága. Ez nem zárja ki eleve annak a lehetőségét, hogy az $\{N_k\}$ sorozat speciális választása esetén (13) is kielégül. Kiderül azonban az, hogy ez csak bizonyos, további feltételt teljesítő S transzformációk esetében lehetséges. Ez a feltétel az, hogy S *szubnormális* legyen, azaz hogy létezzék korlátos normális N' folytatása valamely tágabb $\mathfrak{H}'$ térben.[1] Bebizonyítjuk ugyanis a következő tételt:

IV. *A korlátos lineáris S transzformációhoz akkor és csakis akkor található korlátos normális transzformációk olyan $\{N_k\}$ sorozata, amely a* (13) *feltételnek minden nem negatív egész m, n kitevőre eleget tesz, ha az S transzformáció szubnormális. Ebben az esetben az N_k transzformációk választhatók úgy, hogy egymással unitér-ekvivalensek legyenek.*

BIZONYÍTÁS. Először azt tegyük fel, hogy S szubnormális, azaz hogy van korlátos normális N' folytatása valamely $\mathfrak{H}' \subseteqq \mathfrak{H}$ térben. Feltehetjük, hogy $\mathfrak{H}'$-t az

$$N'^{*m} N'^{n} f \qquad (f \in \mathfrak{H};\ m, n = 0, 1, \ldots)$$

[1] Eszerint minden korlátos normális transzformáció egyben szubnormális is (vehető ekkor $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$, $N' = S$). Létezik azonban szubnormális transzformáció, amely nem normális is egyben (vö. HALMOS [2]).

alakú elemek kifeszítik, ugyanis, N' normális lévén, ezeknek az elemeknek a halmaza N'-re és N'^*-ra nézve invariáns és tartalmazza $\mathfrak{H}$-t ($m=n=0$). Ha $\mathfrak{H}'$ így van megválasztva, akkor dimenziója nyilván $\aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}$. Ha $f, g \in \mathfrak{H}$, akkor

$$(S^{*m}S^n f, g) = (S^n f, S^m g) = (N'^n f, N'^m g) = (N'^{*m} N'^n f, g);$$

ebből látható, hogy

$$S^{*m}S^n f = P'N'^{*m} N'^n f \qquad (f \in \mathfrak{H};\ m, n = 0, 1, \ldots),$$

ahol P' a $\mathfrak{H}$ altérre való vetítés operátora $\mathfrak{H}'$-ben. Ebből az összefüggésből kiindulva úgy okoskodhatunk tovább, mint az I. tétel bizonyításában. Az okoskodás során találkozunk a $\mathfrak{H}$ tér

$$S_k(m, n) = S^{*m} S^n - N_k^{*m} N_k^n$$

alakú transzformációival, ahol az N_k-k (minden k-ra) egymással unitér-ekvivalensek; nyilvánvaló, hogy

$$\|S_k(m, n)\| \leqq \|S\|^{m+n} + \|N'\|^{m+n};$$

ez a becslés k-tól független, de m-től és n-től függ. Az

$$S_k(m, n) \rightarrow O \qquad (k \rightarrow \infty)$$

konvergencia bizonyítása ugyanígy történik mint fentebb az $S_k(n) \rightarrow O$ $(k \rightarrow \infty)$ konvergenciáé, csakhogy most ez a konvergencia m-re és n-re nézve általában nem egyenletes. Ha azonban $\|S\| \leqq 1$, akkor $\|N'\| \leqq 1$,[2] és így $\|S_k(m, n)\| \leqq 2$, következésképpen ekkor a (13) konvergencia m-re és n-re nézve egyenletes.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az S transzformáció szubnormális volta elégséges feltétel.

Most térjünk át e feltétel szükségességének a bizonyítására. Feltesszük, hogy létezik a $\mathfrak{H}$ tér korlátos normális transzformációinak olyan $\{N_k\}$ sorozata, amely a (13) feltételt kielégíti minden nemnegatív egész m, n kitevőpárra. Legyen $g_0, g_1, \ldots, g_r$ véges sok (nem szükségképpen különböző) elem $\mathfrak{H}$-ból; felhasználva N_k és N_k^* felcserélhetőségét, kapjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r}(S^{*j}S^i g_j, g_i) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r}(N_k^{*j}N_k^i g_j, g_i) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{r} N_k^{*j} g_j, \sum_{i=0}^{r} N_k^{*i} g_i\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{j=0}^{r} N_k^{*j} g_j\right\|^2 \geqq 0.$$

Ebből azonban HALMOS és BRAM [1, 2] egy tétele szerint következik, hogy S szubnormális.

[2] Vö. [1], 3. lemma.

4. POZITÍV DEFINIT FÜGGVÉNYEK. Befejezésül röviden mutassunk rá arra, hogy a [4] dolgozat „főtétele" az előbbiekhez hasonló következményeket von maga után. E tétel egy Γ „$*$-félcsoporton" értelmezett, pozitív definit, operátorértékű $T(\xi)$ függvényre vonatkozik, amelyre $T(\varepsilon)=I$ (ε a Γ egységeleme), és azt állítja, hogy ez a Γ valamely tágabb $\mathfrak{H}'$ Hilbert-térben való $D(\xi)$ „előállításának" az eredeti $\mathfrak{H}$ térre való projekciója. Hogy e $\mathfrak{H}'$ tér dimenziójáról biztosítható legyen, hogy nem magasabb a $\mathfrak{H}$ tér dimenziójánál, $\mathfrak{d}$-nél, ki kell szabnunk még valami további feltételt:

Szeparabilitás feltétele. Létezik Γ-nak egy megszámlálható Γ_0 részhalmaza azzal a tulajdonsággal, hogy Γ minden α eleméhez található Γ_0 elemeiből alkotott olyan $\{\alpha_n\}$ sorozat, amelyre

$$\lim\sup C_{\alpha_n} < \infty,^3$$

és

$$T(\xi\alpha_n\eta) \rightharpoonup T(\xi\alpha\eta) \qquad (n\to\infty),$$

ahol ξ, η Γ-nak tetszésszerinti elemei.

E feltétel mellett érvényes a következő tétel:

V. *Létezik Γ-nak a $\mathfrak{H}$ tér korlátos lineáris transzformációival való, egymással unitér-ekvivalens előállításainak olyan $\{D_k(\xi)\}$ sorozata, amelyre*

$$\text{a)}\quad D_k(\xi)\rightharpoonup T(\xi) \qquad (k\to\infty),$$
$$\text{b)}\quad \|D_k(\xi)\|\leqq C_\xi;$$

a gyenge konvergencia ξ-re nézve egyenletes minden olyan részhalmazán Γ-nak, amelyen C_ξ mint ξ függvénye korlátos.

A bizonyítás az előbbi tételéhez teljesen hasonlóan végezhető el.

IRODALOM

[1] J. BRAM: Subnormal operators, *Duke Math. Journal*, **22** (1955), 75—93.

[2] P. R. HALMOS: Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasiliensis Math.*, **2** (1950) 125—134.

[3] J. VON NEUMANN: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Annalen*, **102** (1929) 370—427.

[4] B. SZ.-NAGY: *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* A RIESZ—SZ.-NAGY: „Leçons d'analyse fonctionnelle" c. mű függeléke (Budapest, 1955).

(Beérkezett: 1957. VI. 28.)

[3] C_ξ ($\xi\in\Gamma$) jelentésére nézve utalunk a [4] dolgozatra.

GRÁFOKKAL KAPCSOLATOS MAXIMUM—MINIMUM TÉTELEK

(I. RÉSZ)

GALLAI TIBOR (Budapest)

1. §. Bevezetés*

(1. 1). A dolgozat célja több, a MENGER-féle gráftételhez ([8] 222. o.) hasonló „maximum-minimum" tétel bizonyítása. E tételek közül kettőt itt a bevezetésben ismertetünk:

Egy irányított véges Γ gráf (2.1; [7] 4. o.) X szögpontjaihoz a $\varphi(X)$, x éleihez a $\psi(x)$ egész számokat rendeljük, és ezeket a pontok, ill. élek *értékének* nevezzük. Egy k irányított kört ([7] 29. o;) *alapirányúnak* mondunk, ha k befutásának iránya minden érintett élen megegyezik az illető él irányításával. Egy alapirányú k kör *értékén* a $\psi(k)=\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i)$ számot értjük, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a kör élei. Γ szögpontjainak egy $\pi=(X_1, \ldots, X_n)$ sorozatát *pontrendszernek*, az alapirányú körök egy $\varkappa=(k_1, \ldots, k_n)$ sorozatát *körrendszernek* nevezzük. (Egy sorozatban ugyanaz a szögpont, ill. kör többször is szerepelhet. Az üres sorozatot is pont-, ill. körrendszernek tekintjük.) Két rendszert, melyek csak az elemek sorrendjében különböznek, azonosnak veszünk. Egy π, ill. $\varkappa$ rendszer *értékén* a $\varphi(\pi)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i)$, ill. a $\psi(\varkappa)=\sum_{i=1}^{n}\psi(k_i)$ számot értjük. (Az üres sorozathoz a 0 értéket rendeljük.) Egy $\pi=(X_1, \ldots, X_n)$ pontrendszer *elférő,* ill. *lefogó,* ha bármely alapirányú k kört is vizsgálunk, $X_1, \ldots, X_n$ közül a k-n elhelyezkedők száma kisebb vagy egyenlő, ill. nagyobb vagy egyenlő $\psi(k)$-nál. Egy $\varkappa=(k_1, \ldots, k_n)$ körrendszer *elférő,* ill. *lefogó,* ha bármely X szögpontot is vizsgálunk, $k_1, \ldots, k_n$ közül az X-en átmenők száma kisebb vagy egyenlő, ill. nagyobb vagy egyenlő $\varphi(X)$-nél.

Az elférő, ill. a lefogó körrendszerek halmazát A_e, ill. A_l-lel, az elférő, ill. lefogó pontrendszerek halmazát H_e, ill. H_l-lel jelöljük. Az 5. és 7. §-ban a következő duális vonatkozású tételeket bizonyítjuk:

* Tekintettel a dolgozatban szereplő számos jelölésre és fogalomra, csatoltan terminológiajegyzéket közlünk, amely a 337. oldalon található.

(1.2). TÉTEL: *Ha minden X-re* $\varphi(X) \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{\varkappa \in A_e} \psi(\varkappa) = \min_{\pi \in \Pi_l} \varphi(\pi).$$

(1.3). TÉTEL: *Ha minden alapirányú k-ra* $\psi(k) \geqq 0$, *és* A_l *nem üres, akkor*

$$\max_{\pi \in \Pi_e} \varphi(\pi) = \min_{\varkappa \in A_l} \psi(\varkappa).$$

(1.4). A 2. §- és 3. §-ban segédtételeket igazolunk. A 4. §-ban egy, az (1.2) TÉTELhez hasonló tételt bizonyítunk, és ebből kiindulva igazoljuk az 5. §-ban az (1.2) TÉTELt. A dolgozat II. részét alkotó 6—11. §-ok közül a 6. §-ban az (1.2) TÉTELt átvisszük tetszőleges, nem csak alapirányú körökből álló körrendszerekre. A 8. §-ban az előzően igazolt tételeket végtelen gráfokra terjesztjük ki. A 9. §-ban tételeinket speciális $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvényekre, ill. speciális gráfokra alkalmazva további maximum—minimum tételeket nyerünk. Ezeknek egy része irányítás nélküli gráfokra vonatkozik. E tételek speciális esetként tartalmazzák a MENGER-féle gráftételt, EGERVÁRY-nak egy matrixokra vonatkozó tételét ([3] 17. o, I.), DILWORTH-nak félig rendezett halmazokra vonatkozó egyik tételét, véges halmazok esetére ([2], 161. o, 1. 1) és a „max-flow min-cut“ tétel különböző eseteit ([1], [4], [5]). A 10. §-ban a maximum—minimum tételekből két faktorizációs tételt vezetünk le, melyeknek egyikéből TUTTE-nek a Q-faktorokra vonatkozó egy tétele következik ([9] 930. o.). Végül a 11. §-ban megmutatjuk, hogy véges gráfok esetén, hogyan lehet tételeinket tetszőleges valós értékű $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvényekre, ill. olyan pont- és körrendszerekre kiterjeszteni, amelyekben egy-egy pont, ill. kör multiplicitása tetszőleges valós szám. A dolgozatban alkalmazott bizonyítási eljárás a [6]-ban felhasznált módszer általánosítása.

2. §.

2.1. Irányítás nélküli és irányított gráfok

Legyen Φ és Ψ két nem üres véges halmaz. Φ a gráf *szögpontjainak* — ezután röviden pontjainak — Ψ pedig a gráf *éleinek* halmaza. Egy tetszőleges pontot általában X-szel, egy tetszőleges élt x-szel jelölünk. Továbbá pontot jelölnek az Y, Z, U, V betűk, az y, z betűk pedig éleket. A Γ gráf akkor van megadva, ha megmondjuk, hogy a pontok és élek közül melyek *illeszkednek*. Az illeszkedéseket a következőképpen írjuk elő: Az X és x elemek bármely X, x párjához hozzárendelünk egy (x, X) számértéket oly módon, hogy az alábbi kikötések teljesüljenek:

1. bármely x-hez van Y és Z $(Y \neq Z)$, melyekre $|(x, Y)| = |(x, Z)| = 1$ 2, és minden $X \neq Y$, $X \neq Z$-re $(x, X) = 0$. Y és Z x *határpontjai.*

2. bármely X-hez van x, melyre $(x, X) \neq 0$.

Ha minden X és x-re $(x, X) \geqq 0$, a gráf *irányítás nélküli.* Ha bármely x élre és annak Y és Z határpontjaira az (x, Y) és (x, Z) értékek egyike 1/2, a másik pedig $-1/2$, a gráf *irányított.* Amennyiben $(x, Y) = -1/2$ és $(x, Z) = 1/2$, Y az x él *kezdőpontja,* Z pedig a *végpontja.* Egy irányítás nélküli gráf többféleképpen irányítható. Irányításon azt értjük, hogy a gráf minden egyes éléhez és annak egyik határpontjához tartozó 1/2 értéket $-1/2$-re változtatjuk. A következőkben, ha ellenkezőjét nem mondjuk, gráfon mindig irányított gráfot értünk.

2. 2. Élláncok

(2. 2. 1). A Γ gráf egy *élláncán* egy tetszőleges, a gráf éleinek halmazán értelmezett $f(x)$ egész értékű függvényt értünk. (E fogalom a topológia 1-komplexeken értelmezett 1-lánc fogalmának felel meg.) Általában az f, g, h betűkkel élláncokat jelölünk. A rövidség kedvéért a továbbiakban élllánc helyett legtöbbször *láncot* mondunk.

Olyan láncokkal kapcsolatos egyenlőségeket, ill. egyenlőtlenségeket, amelyekben az x argumentum nincs feltüntetve, minden x élre fennállónak gondolunk. Pl. $f = 0$, ill. $fg \geqq 0$ azt jelenti, hogy minden x-re $f(x) = 0$, ill. $f(x)g(x) \geqq 0$.

Nyilvánvalóan fennáll, hogy ha f_i lánc és λ_i egész szám $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ is lánc.

(2. 2. 2). Az f és f' láncok *ütköznek,* ha van x, melyre $f(x)f'(x) < 0$. Ha $ff' \geqq 0$, akkor f és f' nem ütköznek.

Ha $ff' \geqq 0$ és $|f'| \leqq |f|$, akkor az $f' \subset f$ jelölést használjuk.

(2. 2. 3). *Ha $fg \geqq 0$ és $f' \subset f$, akkor $f'g \geqq 0$.*

BIZONYÍTÁS: $fg \geqq 0$ és $f'f \geqq 0$-ból, $f^2 f'g \geqq 0$. Ebből, ha $f(x) \neq 0$, akkor $f'(x)g(x) \geqq 0$. Ha $f(x) = 0$, akkor $f'(x) = 0$, s így $f'(x)g(x) = 0$.

Könnyen belátható az alábbi három állítás:

(2. 2. 4). *Ha $f'' \subset f'$ és $f' \subset f$, akkor $f'' \subset f$.*

(2. 2. 5). *Ha $f_i f' \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$-re $f'f \geqq 0$.*

(2. 2. 6). *Ha $f_i f_j \geqq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, akkor $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$-re $f_i \subset f$.*

(2. 2. 7). *Ha $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ és $f_i \subset f$, $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $f_i f_j \geqq 0$*

$(i, j=1, \ldots, n)$, *és ha* $i_1, \ldots, i_m$ *az* $1, \ldots, n$ *sorozat egy részsorozata, akkor* $f' = \sum_{\nu=1}^{m} f_{i_\nu} \subset f$.

Bizonyítás: Az első állítás (2. 2. 3)-ból következik. Ebből és (2. 2. 5)-ből adódik a második állítás.

(2. 2. 8). *Ha* $f' \subset f$, *akkor* $f - f' \subset f$.

Bizonyítás: $|f'| \leqq |f|$-ből $f(f-f') \geqq 0$ következik, $ff' \geqq 0$ miatt $|f-f'| \leqq |f|$.

(2. 2. 9). *Ha* $g(g+f) \geqq 0$ *és* $f' \subset f$, *akkor* $g(g+f') \geqq 0$.

Bizonyítás: Egy x élre $g(x)(g(x)+f'(x)) < 0$ csak akkor állhat fenn, ha $g(x)$ és $f'(x)$ ellenkező előjelű és $|f'(x)| > |g(x)|$. Ekkor azonban $|f| \geqq |f'|$ és $ff' \geqq 0$ miatt $g(x)$ és $f(x)$ is ellenkező jelű, és $|f(x)| > |g(x)|$. Ez ellentmond $g(g+f) \geqq 0$-nak.

(2. 2. 10). *Ha* $g(g+f) \geqq 0$, $f_i \subset f$ $(i=1, \ldots, n)$, *akkor* $(g+f_i)(g+f_j) \geqq 0$ $(i, j=1, \ldots, n)$.

Bizonyítás: Ha $g(x)=0$, akkor (2. 2. 7) szerint $(g(x)+f_i(x))(g(x)+f_j(x)) \geqq 0$. Legyen $g(x) \neq 0$. (2. 2. 9) szerint $g(g+f_i) \geqq 0$ és $g(g+f_j) \geqq 0$. Ezekből következik állításunk.

2. 3. Él mint speciális lánc

(2. 3. 1). Ha az $f(x)$ lánc olyan, hogy van olyan z él, melyre $|f(z)|=1$, és minden $x \neq z$-re $f(x)=0$, $f(x)$-et *élnek* mondjuk. z az f él *alapéle*. A Ψ halmaz éleit, az újonnan értelmezett élekkel szemben, ezentúl *alapéleknek* nevezzük. Egy élnek nevezett elláncot rendszerint $e(x)$-szel jelölünk. Ha e alapéle z és z határpontjai X és Y, akkor az $e(z)(z, X)$ és $e(z)(z, Y)$ értékek egyike $-1/2$, a másik $1/2$. Ha $e(z)(z, X) = -1/2$ és $e(z)(z, Y) = 1/2$, akkor X, ill. Y e-nek *kezdő-*, ill. *végpontja*, és e tényt az $e = XY$ egyenlettel fejezzük ki. Azt is mondjuk, hogy e X-ből *kifut*, és Y-ba *befut*.

Bevezetjük a következő jelölést:

$$(f, e) = \sum_x f(x)e(x) = f(z)e(z). \qquad (e(z) \neq 0)$$

A $\sum_x$ jel — melyet, ha félreértésre nincs ok, egyszerűen $\sum$-val helyettesítünk — azt jelenti, hogy az összegezést a Ψ halmaz valamennyi elemére ki kell terjeszteni. Könnyen beláthatók az alábbi állítások:

(2. 3. 2). *Ha* $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, *akkor* $(f, e) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i, e)$.

(2. 3. 3). *f és e ütköznek, f és e nem ütköznek, $e \subset f$ állítások rendre egyenértéküek a következő egyenlőtlenségekkel:* $(f, e) < 0$, $(f, e) \geqq 0$, $(f, e) > 0$.

Az $e \subset f$ esetben azt mondjuk, hogy *e éle f-nek*, ill. hogy *f tartalmazza* az e élt. Az (f, e) értéket ilyenkor *e f-beli multiplicitásának* nevezzük. Ha egy x-re $f(x) \neq 0$, akkor x-et *f alapélének* nevezzük.

(2. 3. 4). *Az $ff' \geqq 0$, és a „bármely e élre $(f, e)(f', e) \geqq 0$" állítások egyenértékűek.*

BIZONYÍTÁS: Legyen e alapéle z, akkor $(f, e)(f', e) = f(z)e(z)f'(z)e(z) = f(z)f'(z)$. Ebből következik állításunk.

(2. 3. 5). *Ha az $e'_1, \ldots, e'_m$ sorozatban nincs két egyenlő él, és $e'_i \subset f$ $(i = 1, \ldots, m)$, továbbá minden olyan él, mely f-nek éle a sorozatban szerepel, akkor $f = \sum_{i=1}^{m} (f, e'_i)e'_i$.*

BIZONYÍTÁS: Ha $f(x) = 0$, akkor $e'_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, tehát a (2. 3.5)-ben szereplő egyenlet erre az x-re fennáll. Ha $f(x) \neq 0$, akkor van j, melyre $\operatorname{sign} e'_j(x) = \operatorname{sign} f(x)$ és minden $i \neq j$-re $e'_i(x) = 0$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{m} (f, e'_i)e'_i(x) = (f, e'_j)e'_j(x) = f(x)e'_j(x)^2 = f(x).$$

(2. 3. 5)-ből közvetlenül belátható a következő állítás:

(2. 3. 6). *Ha az f lánc éleiből álló $e_1, \ldots, e_n$ sorozatban minden él annyiszor fordul elő, amennyi f-beli multiplicitása, akkor $f = \sum_{i=1}^{n} e_i$.*

(2. 3. 7). A (2. 3. 6)-ban szereplő n értéket *f élei számának* nevezzük, és $\nu(f)$-fel jelöljük. Ha $f = 0$, akkor $\nu(f) = 0$. Minden esetben fennáll: $\nu(f) = \sum_{x} |f(x)|$.

Hasonló értelemben beszélünk *f X-hez illeszkedő, X-ből kifutó* és *X-be befutó éleinek számáról.* E számértékekre rendre az alábbi egyenlőségek vonatkoznak:

$$\nu_X(f) = 2\sum_{x} |f(x)|\,|(x, X)|,$$

$$\nu'_X(f) = -2\sum_{x}' f(x)(x, X), \qquad \nu''_X(f) = 2\sum_{x}'' f(x)(x, X).$$

A Σ', ill. a Σ'' jel azt jelenti, hogy az összegezést mindazon x-ekre kell elvégezni, melyekre $f(x)(x, X) < 0$, ill. amelyekre $f(x)(x, X) > 0$. (Ha félreértésre nincs ok, a szóbanforgó élek számát röviden ν, ν' és ν''-vel jelöljük.)

(2. 3. 8). Az (f, X) jelet a következőképen értelmezzük:

$$(f, X) = \sum_{x} f(x)(x, X) = \frac{1}{2}[\nu''_X(f) - \nu'_X(f)].$$

Ha $e = YZ$, és $e(x_1) \neq 0$, akkor

$$(e, X) = e(x_1)(x_1, X) \quad \text{és} \quad (e, Y) = -\frac{1}{2}, \qquad (e, Z) = \frac{1}{2}.$$

Könnyen belátható a következő állítás:

(2. 3. 9). *Ha* $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, *akkor* $(f, X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i, X)$.

(2. 3. 10). *Ha* $e = XY$, $(f, e) > 0$ *és* $(f, Y) = 0$, *akkor van* $e' = YZ$, *melyre* $(f, e') > 0$.

BIZONYÍTÁS: Legyen $e(x_1) \neq 0$, ekkor $(e, Y) = e(x_1)(x_1, Y) > 0$. Ebből és $(f, e) = f(x_1)e(x_1) > 0$-ból $f(x_1)(x_1, Y) > 0$ következik. Tekintettel $(f, Y) = = \Sigma f(x)(x, Y) = 0$-ra van x_2, melyre $f(x_2)(x_2, Y) < 0$. Legyen e' az az él, melyre $e'(x_2)(x_2, Y) < 0$. Ekkor $e' = YZ$ és $(f, e') = f(x_2)e'(x_2) > 0$.

2. 4. Terhelések

Bevezetjük az alábbi jelöléseket és elnevezéseket:

(2. 4. 1). *x terhelése X-ben:* $|x, X| = |(x, X)|$,
f terhelése x-en: $|f(x)|$,
f terhelése X-ben: $|f, X| = \sum_{x} |f(x)|\,|x, X|$.

$|f, X|$ felfogható mint f-nek az X-hez illeszkedő alapéleken levő terheléseinek félösszege. (2. 3. 7) szerint $|f, X| = \frac{1}{2}\nu_X(f)$.

Ha $|f, X| \neq 0$, azt mondjuk, hogy X *pontja f-nek*, ill. X egy *f-pont*, ill. *f tartalmazza X-et.*

A fentiekből könnyen adódnak az alábbi megállapítások:

(2. 4. 2). $|e, X| = |(e, X)|$.

(2. 4. 3). *Ha* $f' \subset f$, *akkor* $|f', X| \leqq |f, X|$.

(2. 4. 4). *Ha* $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, *akkor* $|f, X| \leqq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\,|f_i, X|$.

(2. 4. 5). $|f_1 + f_2, X| \geqq |f_1, X| - |f_2, X|$.

(2. 4. 6). *Ha* $|f', X| = 0$, *akkor* $|f + f', X| = |f, X|$.

(2. 4. 7). *Ha* $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ *és* $f_i f_j \geqq 0$, $\lambda_i \geqq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, *akkor* $|f, X| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f_i, X|$.

(2. 4. 8). *Ha* $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ *és* $f_i \subset f$, *akkor* $|f, X| = \sum_{i=1}^{n} |f_i, X|$.

(2. 4. 9). *Ha* $g(g+f) \geqq 0$, *akkor* $|g(x)+f(x)|-|g(x)|=\vartheta(x)f(x)$, *ahol* $\vartheta(x)=\operatorname{sign} g(x)$, *ha* $g(x) \neq 0$, *és* $\vartheta(x)=\operatorname{sign} f(x)$, *ha* $g(x)=0$.

(2. 4. 10.) *Ha* $g(g+f) \geqq 0$ *és* $f=\sum_{i=1}^{n} f_i$, $f_i \subset f$ $(i=1,\ldots,n)$, *akkor*

$$|g+f, X|-|g, X|=\sum_{i=1}^{n}(|g+f_i, X|-|g, X|).$$

BIZONYÍTÁS:

$$|g+f, X|-|g, X|=\sum_x |g(x)+f(x)|\,|x, X|-\sum_x |g(x)|\,|x, X|=$$

$$=\sum_x \vartheta(x)f(x)|x, X|=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_x \vartheta(x)f_i(x)|x, X|\Big)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_x \vartheta_i(x)f_i(x)|x, X|\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(|g+f_i, X|-|g, X|).$$

Itt $\vartheta_i(x)=\operatorname{sign} g(x)$, ha $g(x) \neq 0$ és $\vartheta_i(x)=\operatorname{sign} f_i(x)$, ha $g(x)=0$ $(i=1,\ldots,n)$. Ugyanis (2. 4. 9) alkalmazható f_i-re, mert $g(g+f_i) \geqq 0$ [(2. 2. 9)]. Másrészt egy x-re $\vartheta_i(x) \neq \vartheta(x)$ csak a $g(x)=0$, $f_i(x)=0$, $f(x) \neq 0$ esetben lehetséges, de akkor is fennáll a $\vartheta(x)f_i(x)=\vartheta_i(x)f_i(x)$ egyenlőség.

(2. 4. 10) speciális esete a következő megállapítás:

(2. 4. 11). *Ha* $g(g+f) \geqq 0$ és $f=f_1+f_2$, $f_1 \subset f$, $f_2 \subset f$, *akkor*

$$|g+f, X|-|g+f_1, X|=|g+f_2, X|-|g, X|.$$

(2. 4. 12).

$$|g+e, X|-|g, X|=\tau,$$

ahol $\tau=0$, *ha* $|e, X|=0$, *és* $\tau=1/2$, *ill.* $\tau=-1/2$, *ha* $|e, X| \neq 0$ *és* $(g, e) \geqq 0$, *ill.* $(g, e)<0$.

BIZONYÍTÁS: Ha $e(x_1) \neq 0$, akkor az alapéleket tekintve $g+e$ és g terhelése csak x_1-en különbözhet, éspedig $|g(x_1)+e(x_1)|-|g(x_1)|=1$, ha $(g, e)=g(x_1)e(x_1) \geqq 0$, és $|g(x_1)+e(x_1)|-|g(x_1)|=-1$, ha $(g, e)<0$. Ebből (2. 4. 1) alapján következik állításunk.

(2. 4. 13). *Ha* $g(g+f) \geqq 0$, $f' \subset f$, $e \subset f-f'$, *akkor*

$$|g+f'+e, X|-|g+f', X|=\tau,$$

ahol τ *a* (2. 4. 12)-*beli értelemmel bír.*

BIZONYÍTÁS: (2. 4. 12) alkalmazható, ha megmutatjuk, hogy a $(g, e) \geqq 0$ esetben $(g+f', e) \geqq 0$, a $(g, e)<0$ esetben $(g+f', e)<0$. Valóban, ha $(g, e) \geqq 0$, akkor $(g+f', e)=(g, e)+(f', e) \geqq 0$ [(2. 2. 4), (2. 2. 7), (2. 2. 8)]. Ha $(g, e)<0$, akkor mivel (2. 2. 9) miatt $g(g+f'+e) \geqq 0$, azért (2. 3. 4) szerint $(g, e)(g+f'+e, e) \geqq 0$, s ebből $0 \geqq (g+f'+e, e)=(g+f', e)+1$ tehát $(g+f', e)<0$.

(2. 4. 14). *Ha* $g(g+f) \geqq 0$, $g(g+f+e) \geqq 0$ *és* $(g, e) \neq 0$, *akkor*

$$|g+f+e, X| - |g+f, X| = \tau,$$

ahol τ a (2. 4. 12) *alatti értelemmel bir.*

BIZONYÍTÁS: Ha $(g, e) > 0$, akkor $(g, e)(g+f, e) \geqq 0$-ból $(g+f, e) \geqq 0$ adódik. Ha $(g, e) < 0$, akkor $(g, e)(g+f+e, e) \geqq 0$-ból $0 \geqq (g+f+e, e) = (g+f, e)+1$, tehát $(g+f, e) < 0$. A fentiekből és (2. 4. 12)-ből következik állításunk.

(2. 4. 15). *Ha* $g(g+f) \geqq 0$, *akkor* $|g+f, X| - |g, X| = \frac{1}{2}(\nu_+ - \nu_-)$, *ahol* ν_-, *ill.* ν_+ f *X-hez illeszkedő g-vel ütköző, ill. g-vel nem ütköző éleinek számát jelenti, az élek multiplicitásának figyelembe vétele mellett.*

BIZONYÍTÁS: Jelöljük f X-hez illeszkedő éleit $e_1, \ldots, e_m$-mel, az X-hez nem illeszkedőket $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$-nel. E felsorolásban minden él annyiszor szerepeljen, amekkora f-beli multiplicitása. Ekkor $f = \sum_{i=1}^{m} e_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_i$. (2. 4. 12) szerint valamennyi szóbajövő i indexre

$$|g+e_i, X| - |g, X| = \tau_i, \quad |g+\bar{e}_i, X| - |g, X| = 0,$$

ahol $\tau_i = -1/2$ vagy $1/2$ aszerint, hogy e_i g-vel ütközik, vagy nem ütközik. A (2. 4. 10) tételt f megadott összegelőállítására alkalmazva nyerjük állításunkat.

A (2. 4. 15) tételt az alábbi alakban fogjuk felhasználni:

(2. 4. 16). *Ha* $g(g+f) \geqq 0$, *akkor*

$$|g+f, X| - |g, X| = \frac{1}{2}(\nu'_+ - \nu'_- + \nu''_+ - \nu''_-),$$

ahol ν'_-, *ill.* ν'_+ f *X-ből kifutó g-vel ütköző, ill. nem ütköző éleinek számát,* ν''_- *ill.* ν''_+ f *X-be befutó g-vel ütköző, ill. nem ütköző éleinek számát jelenti.*

2. 5. UV-lánc, zárt lánc

(2. 5. 1). Bevezetjük a következő jelölést: $(X, Y) = 0$, ha $X \neq Y$, és $(X, X) = 1/2$ (X és Y tetszőleges pontok).

(2. 5. 2). Az f láncot *zárt* láncnak mondjuk, ha minden X pontra

$$\nu'_X(f) = \nu''_X(f).$$

(2. 3. 8) alapján ezzel egyenértékű értelmezés a következő:

f zárt lánc, ha *minden* X-re $(f, X) = 0$.

(2. 5. 3). Az f láncot *UV-láncnak* mondjuk, ha *minden* X-re

$$\frac{1}{2}(\nu''_X(f) - \nu'_X(f)) = (X, V) - (X, U).$$

(2. 3. 8) alapján ezzel egyenértékű értelmezés a következő:

f UV-lánc, ha *minden* X-re $(f, X) = (X, V) - (X, U)$.

Ha f UV-lánc és $U \neq V$, akkor $X \neq U, X \neq V$ esetben $\nu'_X(f) = \nu''_X(f)$, $\nu'_U(f) = \nu''_U(f) + 1$, $\nu''_V(f) = \nu'_V(f) + 1$.

Ha $U = V$, akkor az UV-lánc zárt.

Az $e = UV$ él egy UV-lánc.

Könnyen belátható a következő állítás:

(2. 5. 4). *Ha f zárt, akkor minden X-re $|f, X|$ egész szám.*

(2. 5. 5). *Ha f UV-lánc és $|f, U| = 0$, akkor $V = U$.*

BIZONYÍTÁS: Ha $|f, U| = 0$, akkor $(f, U) = 0$, tehát $(U, V) - (U, U) = 0$, tehát $(U, V) = 1/2$.

(2. 5. 6). *Ha f UV-lánc vagy zárt lánc, továbbá $|f, U| \neq 0$, akkor van olyan $e = UX$ él, melyre $(f, e) > 0$.*

BIZONYÍTÁS: Zárt f esetén a $V = U$ kikötéssel élve, minden esetben $(f, U) = \Sigma f(x)(x, U) = (U, V) - (U, U) \leqq 0$ és $|f, U| = \Sigma |f(x)|\,|(x, U)| \neq 0$. Tehát van olyan y alapél, melyre $f(y)(y, U) < 0$. Ekkor arra az $e = UX$ élre, melynek y az alapéle fennáll, hogy $e(y)(y, U) < 0$, $(f, e) = f(y)e(y) > 0$.

Könnyen beláthatók az alábbi állítások:

(2. 5. 7). *Ha f UV-lánc, akkor $f' = -f$ VU-lánc.*

(2. 5. 8). *Ha f_i $U_{i-1}U_i$-lánc $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ $U_0 U_n$-lánc.*

(2. 5. 9). *Ha $e_i = U_{i-1} U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $f = \sum_{i=1}^{n} e_i$ $U_0 U_n$-lánc.*

(2. 5. 10). *Ha f UV-lánc és f' UZ-lánc, akkor $f'' = f - f'$ ZV-lánc.*

(2. 5. 11). *Ha g_i zárt lánc és λ_i egész szám $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ zárt lánc.*

(2. 5. 12). *Ha f UV-lánc és g zárt lánc, akkor $f' = f + g$ UV-lánc.*

(2. 5. 13). Ha $e_i = X_{i-1}X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ és $e_i e_j \geqq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, akkor a

$$\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n) \tag{*}$$

pont-élsorozatot X_0X_n-*vonalnak* nevezzük. A $\xi = 0$, elem nélküli sorozatot is XX-vonalnak nevezzük (X tetszőleges pont), és sokszor ebben az esetben is a (*) írásmódot alkalmazzuk.

Az $f = \sum_{i=1}^{n} e_i$ X_0X_n-láncot a ξ vonalhoz tartozó láncnak nevezzük. *A* $\xi = 0$ vonalhoz az $f = 0$ lánc tartozik.

ξ szakaszain a $\xi_{ij} = (X_i e_{i+1} X_{i+1} \dots X_{j-1} e_j X_j)$ $(0 \leqq i \leqq j \leqq n)$ vonalakat értjük.

(2. 5. 14). Az f UV-láncnak a $\xi = (X_0 e_1 X_1 \dots X_{n-1} e_n X_n)$ vonal egy *UV-bejárása*, ha $X_0 = U$, $X_n = V$ és $f = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

Nem minden UV-láncnak létezik UV-bejárása, ha létezik, a láncot *UV-pályának* mondjuk. Az $f=0$ UU-láncot is UU-pályának tekintjük. Ennek a $\xi = 0$ vonal egy UU-bejárása.

Az f UV-pálya U és V-től különböző pontjait a pálya *belső* pontjainak nevezzük.

Ha egy tételben vagy egy bizonyításban egy f láncnak csak egy meghatározott, (*) alakban felírt bejárása szerepel, akkor e bejárás szakaszaihoz tartozó láncokat f_{ij}-vel jelöljük. E szerint $f_{ij} = \sum_{l=i+1}^{j} e_l$.

A zárt f lánc egy bejárásán egy f-fel egyenlő UU-lánc egy UU-bejárását értjük, hol U f-nek tetszőleges pontja.

(2. 4. 8) segítségével könnyen belátható a következő állítás:

(2. 5. 15). *Ha a $\xi = (X_0 e_1 X_1 \dots X_{n-1} e_n X_n)$ vonal olyan, hogy $i > 0$-ra $X_i \neq X_0$, $j < n$-re $X_j \neq X_n$, akkor a ξ-hez tartozó f láncra $|f, X_0| = 1/2$, $|f, X_n| = 1/2$ és $1 < i < n$ esetén $|f, X_i|$ pozitív egész szám.*

(2. 5. 16). Az f UV-pályát *UV-ívnek* nevezzük, ha minden X-re $|f, X| \leqq 1$. U az ív kezdőpontja, V pedig a végpontja.

Könnyen beláthatók az alábbi állítások:

Ha f UV-ív és $e \subset f$, akkor $(f, e) = 1$.

Ha az f UV-ív minden egyes éle az f' láncnak is éle, akkor $f \subset f'$.

Ha $U \neq V$, akkor az f UV-ívet *UV-útnak* nevezzük. Ekkor $|f, U| = |f, V| = 1/2$, és az $|f, X| \neq 0, X \neq U, X \neq V$ esetben $|f, X| = 1$.

Ha $U = V$, akkor az UV-ívet *körnek* mondjuk. Köröket általában k betűvel jelölünk. Ha X a k körnek tetszőleges pontja, akkor k egy XX-ív, és $|k, X| = 1$.

(2. 5. 17). *Legyen g zárt lánc, $g \neq 0$. Ekkor van olyan k kör és y alapél, melyekre $k(y) \neq 0$, $\lambda k \subset g$, $\lambda = |g(y)| \neq 0$.*

BIZONYÍTÁS: Legyen g-nek egy tetszőleges éle $e_1 = X_0 X_1$. Ekkor $(g, e_1) > 0$. (2. 3. 10) ismételt alkalmazásából belátható, hogy létezik a pontoknak és éleknek olyan $X_0, X_1, X_2, \dots$, ill. $e_1, e_2, e_3, \dots$ végtelen sorozata, melyekre $e_i = X_{i-1} X_i$ és $(g, e_i) > 0$. Miután g-nek csak véges sok pontja lehet, az X_i-k között egyenlők is vannak. Jelöljük m-mel azt a legkisebb egész számot, melyre $X_m = X_{l-1}$ $(l < m)$. Ekkor a $k = \sum_{i=l}^{m} e_i$ lánc kör $(k \neq 0)$.

Ha k alapélei közül azt, amelyre $|g(x)|$ a legkisebb értéket veszi fel y-nal jelöljük, akkor $g(y) \neq 0$ és $\lambda = |g(y)|$ olyan érték, hogy ha egy x-re $k(x) \neq 0$, akkor $|\lambda k(x)| = \lambda \leqq |g(x)|$, ha viszont $k(x) = 0$, akkor szintén $|\lambda k(x)| \leqq |g(x)|$. Másrészt $\lambda kg \geqq 0$, tehát $\lambda k \subset g$.

(2. 5. 18) *Ha g zárt lánc, akkor a következő alakban állítható elő:* $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i$, *ahol* $\lambda_i k_i \subset g$, k_i *kör*, λ_i *pozitív egész szám* $(i = 1, \dots, n)$.

BIZONYÍTÁS: Jelöljük g alapéleinek számát $\tilde{\nu}(g)$-vel. Ha $\tilde{\nu}(g) = 0$, akkor $g = 0$, és akkor a $k_i = 0$ $(i = 1, \dots, n)$ körökkel igaz a tétel. Tegyük fel, hogy minden olyan g-re, melyre $\tilde{\nu}(g) \leqq m$ igaz a tétel, és legyen most g olyan lánc, melyre $\tilde{\nu}(g) \leqq m+1$. Ha $g = 0$, a tétel igaz. Ha $g \neq 0$, akkor (2. 5. 17) szerint, van olyan k kör és y alapél, melyekre $k(y) \neq 0$, $\lambda k \subset g$, $\lambda = |g(y)| \neq 0$. Ekkor a $g' = g - \lambda k$ zárt láncra $g' \subset g$ és $g'(y) = g(y) - \lambda k(y) = 0$. y tehát alapéle g-nek, de nem alapéle g'-nek. Mivel pedig g' minden alapéle g-nek is alapéle, $\tilde{\nu}(g') < \tilde{\nu}(g)$. Feltevésünk szerint tehát $g' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i$, ahol k_i kör, λ_i pozitív egész, és $\lambda_i k_i \subset g'$ $(i = 1, \dots, n)$. Ezért $g = \lambda k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i$ g-nek egy kívánt előállítása.

Megjegyzés: Feltehető, hogy a g lánc (2. 5. 18)-beli előállításában szereplő k_i körök között egyenlők nem fordulnak elő.

A (2. 5. 18) tétel a következő alakban is kimondható:

(2. 5. 19). *Ha g zárt lánc, akkor* $g = \sum_{i=1}^{n} k_i$, *ahol* k_i *kör és* $k_i \subset g$ $(i = 1, \dots, n)$.

(2. 5. 20). *Ha f UV-lánc, akkor* $f = f_0 + g$, *ahol* f_0 *UV-ív, g zárt lánc és* $f_0 \subset f$, $g \subset f$.

BIZONYÍTÁS: Ha $U = V$, akkor f zárt, és így $f_0 = 0$ mellett igaz a tétel.

Legyen $U \neq V$. Hozzuk létre a Γ gráfból a Γ' gráfot oly módon, hogy Γ alapéleinek Ψ halmazához egy olyan új $\bar{x}$ alapélt csatolunk, melynek kezdőpontja V, végpontja U. Egy Γ'-hez tartozó f' láncot így értelmezünk: $f'(x) = f(x)$, ha $x \in \Psi$, és $f'(\bar{x}) = 1$. Ekkor f' zárt lánc. (2. 5. 19) szerint ekkor $f' = \sum_{i=0}^{n} k'_i$, k'_i Γ'-beli kör és $k'_i \subset f'$ $(i = 0, \dots, n)$. Valamilyen i indexre $k'_i(\bar{x}) \neq 0$. Pl. legyen $k'_0(\bar{x}) \neq 0$. Ekkor $k'_0(\bar{x}) = 1$ és $k'_i(\bar{x}) = 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Az $f_0(x) = k'_0(x)$, $k_i(x) = k'_i(x)$, $x \in \Psi$ $(i = 1, \dots, n)$ értelmezések meghatározzák a Γ-hoz tartozó f_0 UV-ívet és a k_i köröket. Ha bevezetjük a $\sum_{i=1}^{n} k_i = g$ jelölést, nyilvánvalóan fennáll az $f = f_0 + g$ egyenlet, és $f_0 \subset f$, $g \subset f$.

(2. 5. 21). *Ha g zárt lánc és $e = UV$ g-nek éle, akkor van olyan f VU-út, melyre $f \subset g$.*

BIZONYÍTÁS: $f' = g - e$ VU-lánc. [(2. 5. 10)]. Ekkor (2. 5. 20) szerint van olyan f VU-út, melyre $f \subset f' \subset g$.

2.6. Pozitív láncok

Az $f(x)$ láncot *pozitívnak* mondjuk, ha minden x-re $f(x) \geqq 0$.

Könnyen beláthatók az alábbi állítások:

Ha f és f' pozitív, akkor $ff' \geqq 0$.

Ha f pozitív és $f' \subset f$, akkor f' is pozitív.

Ha f_i pozitív és $\lambda_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ is pozitív és $f_i \subset f$, továbbá minden X-re $|f, X| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f_i, X|$.

Ha a g zárt lánc, ill. az f UV-lánc pozitív, akkor $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i$, ill. $f = f_0 + g'$, ahol λ_i pozitív egész, k_i pozitív kör, $\lambda_i k_i \subset g$ $(i = 1, \ldots, n)$, f_0 pozitív UV-ív, g' pozitív zárt lánc.

3. §.

3. 1. Pontokhoz rendelt értékek. Kitérők

(3. 1. 1). A Γ gráf pontjainak Φ halmazán egy egész értékű, a 3. és 4. §-ban rögzített $\varphi(X)$ függvényt értelmezünk, és értékeit a pontok *értékének* nevezzük. E §-ban feltesszük, hogy minden X-re $\varphi(X) \geqq 0$. (A következőkben „minden X-re $\varphi(X) \geqq 0$" helyett röviden $\varphi \geqq 0$-t írunk.)

Egy f láncot *elférőnek* mondunk, ha *minden* X-re $|f, X| \leqq \varphi(X)$.

Jelentsen $a(x)$ egy tetszőleges — e §-ban rögzített — elférő láncot. E szerint $|a, X| \leqq \varphi(X)$ minden X-re.

Bevezetjük a következő elnevezéseket:

Az e élre az a-él, $\tilde{a}$-él, b-él, ab-él elnevezést használjuk a szerint, amint $(a, e) > 0$, $(a, e) < 0$, $(a, e) = 0$, $(a, e) \geqq 0$.

(3. 1. 2). A c láncot φ és a-hoz tartozó *UV-kitérőnek*, röviden UV-kitérőnek, nevezzük, ha

$$(1)\ c\ UV\text{-lánc}, \qquad (2)\ a(a+c) \geqq 0,$$

$$(3)\ |a+c, X| \leqq \varphi(X) + (X, U) + (X, V) \text{ minden } X\text{-re.}$$

Értelmezésünk szerint a $c = 0$ lánc UU-kitérő (U tetszőleges pont).

(3. 1. 3). *Ha c UV-kitérő, akkor* $|c, X| \leqq 2\varphi(X)+1$ *minden X-re.*

BIZONYÍTÁS: $|a+c, X| \leqq \varphi(X)+1$, s így (2. 4. 5) szerint $|c, X| \leqq$ $\leqq |a+c, X|+|a, X| \leqq 2\varphi(X)+1$.

(3. 1. 4). *Ha c UV-kitérő és az y alapél egyik határpontja X, akkor* $|c(y)| \leqq 2\varphi(X)+2$.

BIZONYÍTÁS: Ha $c(y)a(y) \geqq 0$, akkor a $c' = a+c$ jelölést használva

$$|c(y)| \leqq |c'(y)| = 2|c'(y)|\,|y, X| \leqq 2\sum_x |c'(x)|\,|x, X| = 2|c', X| \leqq 2\varphi(X)+2.$$

Ha $c(y)a(y) < 0$, akkor $(a(y)+c(y))a(y) \geqq 0$-ból következik, hogy

$$|c(y)| \leqq |a(y)| = 2|a(y)|\,|y, X| \leqq 2|a, X| \leqq 2\varphi(X).$$

(3. 1. 5). A c láncot φ és a-hoz tartozó *zárt kitérőnek*, röviden zárt kitérőnek nevezzük, ha

(1) c zárt lánc, (2) $a(a+c) \geqq 0$,

(3) $|a+c, X| \leqq \varphi(X)$ minden X-re.

Értelmezésünk szerint a $c=0$ lánc zárt kitérő.

(3. 1. 6). A $\tilde{c}$ láncot a c UV-kitérő elhagyható részének nevezzük, ha $\tilde{c}$ zárt kitérő, $\tilde{c} \neq 0$, $\tilde{c} \subset c$, $c-\tilde{c}$ UV-kitérő.

Értelmezésünk szerint, ha a c UV-kitérő egyben zárt kitérő és $c \neq 0$, akkor c is elhagyható része c-nek.

Egy UV-kitérőt *primitívnek* nevezünk, ha nincs elhagyható része.

(3. 1. 7). A c UV-kitérő egy *kanonikus* UV-bejárásán egy olyan $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ UV-bejárását értjük, amelyhez tartozó $c_{ij} = \sum_{l=i+1}^{j} e_l$ részlánc $X_i X_j$-kitérő, minden szóbajövő i, j indexpárra ($i \leqq j$).

A $c=0$ UU-kitérőnek a $\xi=0$ vonal kanonikus UU-bejárása.

(3. 1. 8). Az f láncot *b-irányúnak* mondjuk, ha minden olyan x alapélre, melyre $a(x)=0$ fennáll, hogy $f(x) \geqq 0$.

Könnyen beláthatók az alábbi állítások:

Ha f b-irányú és $f' \subset f$, akkor f' is b-irányú.

Ha f_i b-irányú és $\lambda_i > 0$ ($i=1, \ldots, n$), akkor $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ is b-irányú.

Ha f b-irányú, akkor bármely bejárásának szakaszaihoz tartozó láncok is b-irányúak.

Ha a c UV-kitérő b-irányú és $\tilde{c}$ c-nek elhagyható része, akkor $\tilde{c}$ is, $c-\tilde{c}$ is b-irányú.

3. 2. Egy lemma bizonyítása

LEMMA: *Ha a c UV-kitérő primitív, akkor létezik kanonikus UV-bejárása.*

A bizonyítás több lépésben történik: először teljes indukcióval értelmezünk egy $\xi=(X_0 e_1 X_0 \dots X_{n-1} e_n X_n)$ UX_n-vonalat ($U=X_0$), majd indukcióval igazoljuk, hogy ξ szakaszaihoz tartozó $c_{ij}=\sum_{l=i+1}^{j} e_l$ láncok $X_i X_j$-kitérők, valamint, hogy a $c-c_{0i}$ láncok $X_i V$-kitérők, $X_n=V$ és $c_{0n}=c$.

(I). A ξ vonalat a következő módon értelmezzük:

(α) Ha c-nek nincs U-ból kifutó éle, akkor legyen $\xi=0$.

(β) Ha c-nek van U-ból kifutó ab-éle, akkor legyen e_1 egy tetszőleges ilyen él.

(γ) Ha c-nek minden U-ból kifutó éle $\bar{a}$-él, akkor egy tetszőleges ilyen élt választunk e_1-nek.

Tegyük föl, hogy a $\xi_{0m}=(X_0 e_1 X_1 \dots X_{m-1} e_m X_m)$ vonalat már meghatároztuk. Ennek segítségével e_{m+1}-et így értelmezzük:

(α') Ha $c-c_{0m}$-nek nincs X_m-ből kifutó éle, akkor legyen $n=m$ és $\xi=\xi_{0m}$.

(β') Ha e_m ab-él és $c-c_{0m}$-nek van X_m-ből kifutó $\bar{a}$-éle, akkor egy ilyen élt választunk e_{m+1}-nek.

(β'') Ha e_m $\bar{a}$-él és $c-c_{0m}$-nek van X_m-ből kifutó ab-éle, akkor egy ilyen élt választunk e_{m+1}-nek.

(γ') Ha e_m ab-él és $c-c_{0m}$ minden X_m-ből kifutó éle ab-él, akkor egy ilyen élt veszünk e_{m+1}-nek.

(γ'') Ha e_m $\bar{a}$-él és $c-c_{0m}$ minden X_m-ből kifutó éle $\bar{a}$-él, akkor egy ilyen élt választunk e_{m+1}-nek.

Az $e_1, e_2, \dots$ élek c-nek élei és $c_{0j} \subset c$ minden j-re. Innen következik, hogy a konstrukciónak egy bizonyos n-nél meg kell szakadnia, azaz egy bizonyos n-re e_{n+1} megválasztásánál az (α), ill. (α') esettel állunk szemben. Következik továbbá, hogy $e_i e_j \gtreqqless 0$, azaz $(X_0 e_1 X_1 \dots X_{n-1} e_n X_n)$ valóban vonal.

A fenti eljárással értelmezett ξ vonal szakaszaihoz tartozó c_{ij}, valamint a $c-c_{0j}$ láncok, ill. a bizonyítás során előforduló bizonyos zárt láncok kitérő voltának igazolásánál a (3. 1. 2), ill. a (3. 1. 5) alatti (1) és (2) tulajdonságok fennállását könnyen beláthatjuk [(2, 5. 9), (2. 5. 10), (2. 2. 8), (2. 2. 9)]. A továbbiakban ezért mindig csak a (3. 1. 2), ill. a (3. 1. 5) alatti (3) tulajdonság igazolásával foglalkozunk.

(II). Az (α) esetben $c=0$.

BIZONYÍTÁS: Az (α) esetben (2. 5. 6) szerint $|c, U| = 0$. (2. 5. 5) és (2. 4. 6) szerint ekkor $V = U$, tehát c zárt lánc, és $|a+c, U| = |a, U| \leqq \varphi(U)$. Minden $X \neq U$-ra $|a+c, X| \leqq \varphi(X)$. E szerint c zárt kitérő. Ha $c \neq 0$ volna, akkor c elhagyható rész, és ez ellentmond c primitív voltának.

(III). A (β) és (γ) esetben $c_{01} = e_1$ X_0X_1-kitérő.

BIZONYÍTÁS: Ha $X \neq X_i$ $(i = 0, 1)$, akkor (2. 4. 12) szerint $|a+e_1, X| = |a, X| \leqq \varphi(X)$. Ezen kívül

$$|a+e_1, X_i| = |a, X_i| \pm \frac{1}{2} \leqq \varphi(X_i) + (X_i, X_0) + (X_i, X_1). \qquad (i = 0, 1).$$

(IV). A (β) esetben a $c - c_{01} = c - e_1$ lánc $X_1 V$-kitérő.

BIZONYÍTÁS: $(a, e_1) \geqq 0$. Ekkor (2. 4. 13) szerint, ha $X \neq X_i$ $(i = 0, 1)$,

$$|a+c-e_1, X| = |a+c, X| \leqq \varphi(X) + (X, U) + (X, V) = \varphi(X) + (X, V),$$

$$|a+c-e_1, X_i| = |a+c, X_i| - \frac{1}{2} \leqq \varphi(X_i) + (X_i, X_0) + (X_i, V) - \frac{1}{2} \leqq$$
$$\leqq \varphi(X_i) + (X_i, V) \qquad (i = 0, 1).$$

(V). A γ esetben $c - c_{01}$ $X_1 V$-kitérő.

BIZONYÍTÁS: $(a, e_1) < 0$. Ekkor az $X \neq X_i$ $(i = 0, 1)$ esetben a (IV) alattival azonos módon járhatunk el.

(2. 4. 13) miatt

$$|a+c-e_1, X_1| = |a+c, X_1| + \frac{1}{2} \leqq \varphi(X_1) + (X_1, X_0) + (X_1, V) + \frac{1}{2} =$$
$$= \varphi(X_1) + (X_1, X_1) + (X_1, V).$$

Az $X_0 = U$-beli terhelés vizsgálatánál a (2. 4. 16) és a (2. 5. 3) tételeket az U pontra alkalmazzuk: $\nu'_+ = 0$, $\nu'_- = \nu'$, $\nu''_+ - \nu''_- \leqq \nu''$,

$$|a+c, U| \leqq |a, U| + \frac{1}{2}(-\nu' + \nu'') = |a, U| + (U, V) - (U, U) = |a, U| +$$
$$+ (U, V) - \frac{1}{2}.$$

Ezért (2. 4. 13) alapján

$$|a+c-e_1, U| = |a+c, U| + \frac{1}{2} \leqq |a, U| + (U, V) \leqq \varphi(U) + (U, V).$$

(VI). Feltételezve, hogy $1 \leqq m < n$, c_{0j} X_0X_j-kitérő, c_{jm} X_jX_m-kitérő, $c - c_{0j}$ X_jV-kitérő $(j = 0, 1, \ldots, m)$, bebizonyítjuk, hogy $c_{j\,m+1}$ X_jX_{m+1}-kitérő $(j = 0, 1, \ldots, m)$ és $c - c_{0\,m+1}$ $X_{m+1}V$-kitérő. A bizonyítást több lépésben hajtjuk végre:

(VII). Ha $X \neq X_i$ $(i = m, m+1)$, akkor $a + c_{j\,m+1}$ és $a + c - c_{0\,m+1}$ X-beli terhelései a (3. 1. 2) (3) kikötésnek megfelelnek.

BIZONYÍTÁS: $c_{j\,m+1} = c_{jm} + e_{m+1}$, $c - c_{0\,m+1} + e_{m+1} = c - c_{0m}$. Ezért (2. 4. 12) alapján

$$|a + c_{j\,m+1}, X| = |a + c_{jm}, X| \leqq \varphi(X) + (X, X_j),$$
$$|a + c - c_{0\,m+1}, X| = |a + c - c_{0m}, X| \leqq \varphi(X) + (X, V).$$

(VIII). Az X_m-beli terhelés vizsgálata a (β') és (β'') esetekben.

Ekkor $(a, e_m) \geqq 0$ és $(a, e_{m+1}) < 0$, vagy $(a, e_m) < 0$ és $(a, e_{m+1}) \geqq 0$. $c_{jm} = c_{j\,m-1} + e_m$ $(j < m)$, $c - c_{0m} + e_m = c - c_{0\,m-1}$.

(2. 4. 13) szerint, ha $0 \leqq j \leqq m-1$,

$$|a + c_{j\,m+1}, X_m| = |a + c_{jm}, X_m| \mp \frac{1}{2} = |a + c_{j\,m-1}, X_m| \leqq \varphi(X_m) + (X_m, X_j),$$

ha $j = m$,

$$|a + c_{m\,m+1}, X_m| = |a, X_m| \mp \frac{1}{2} \leqq \varphi(X_m) + (X_m, X_m),$$

$$|a + c - c_{0\,m+1}, X_m| = |a + c - c_{0m}, X_m| \mp \frac{1}{2} = |a + c - c_{0\,m-1}, X_m| \leqq$$
$$\leqq \varphi(X_m) + (X_m, V).$$

(IX). Az $a + c_{j\,m+1}$ lánc X_m-beli terhelésének vizsgálata a (γ') esetben.

Ekkor $(a, e_m) \geqq 0$ és $(a, e_{m+1}) \geqq 0$. Először a következő egyenlőtlenséget igazoljuk:

$$(*) \qquad |a + c - c_{0\,m+1}, X_m| - |a, X_m| \geqq (X_m, V).$$

Ha $X_m \neq V$, akkor a (2. 4. 16) és (2. 5. 3) tételt az $f = c - c_{0\,m+1}$ láncra és az X_m pontra alkalmazva: $\nu' = 0$, $\nu'_+ = \nu'$, $\nu''_+ - \nu''_- \geqq -\nu''$ miatt

$$|a + c - c_{0\,m+1}, X_m| - |a, X_m| \geqq \frac{1}{2}(\nu' - \nu'') = (X_m, X_{m+1}) - (X_m, V) = 0.$$

Ha $X_m = V$, akkor előbb igazoljuk, hogy $c - c_{0m}$ X_m-be befutó élei nem lehetnek mind $\tilde{a}$-élek. Ugyanis, ha mind $\tilde{a}$-élek volnának, akkor a (2. 4. 16) és (2. 5. 3) tételt az $f = c - c_{0m}$ zárt láncra és az X_m pontra alkalmazva, $\nu' = 0$, $\nu'_+ = \nu'$, $\nu''_- = \nu''$, $\nu''_+ = 0$ miatt

$$|a + c - c_{0m}, X_m| = |a, X_m| + \frac{1}{2}(\nu' - \nu'') = |a, X_m| \leqq \varphi(X_m).$$

Ebből következik, hogy a $c - c_{0m}$ $X_m V$-kitérő zárt kitérő. Mivel pedig $m < n$ miatt $c - c_{0m} \neq 0$ és c_{0m} UX_m-kitérő, azért $c - c_{0m}$ c-nek elhagyható része. Ez ellentmond c primitív voltának.

$c - c_{0m}$ lánccal együtt $c - c_{0\,m+1}$-nek sem lehet minden X_m-be befutó éle $\tilde{a}$-él. Alkalmazzuk most a (2. 4. 16) és (2. 5. 3) tételt az $f = c - c_{0\,m+1}$ láncra és az U_m pontra:

$$\nu'_- = 0,\ \nu'_+ = \nu',\ \nu''_+ \geqq 1,\ \nu''_- \leqq \nu'' - 1,$$

$$|a+c-c_{0\,m+1}, X_m| - |a, X_m| \geqq \frac{1}{2}(\nu' - \nu'' + 2) = (X_m, X_{m+1}) - (X_m, V) + 1 = \frac{1}{2}.$$

Ezzel igazoltuk a $(*)$ egyenlőtlenséget.

A (2. 4. 10) tételt az $f_1 = c_{j\,m+1}$, $f_2 = c - c_{0\,m+1}$ láncokra alkalmazva, és figyelembe véve a $c - c_{0j} = c_{j\,m+1} + (c - c_{0\,m+1})$ összefüggést, kapjuk:

$$|a+c-c_{0j}, X_m| - |a, X_m| =$$
$$= |a + c_{j\,m+1}, X_m| - |a, X_m| + |a+c-c_{0\,m+1}, X_m| - |a, X_m|.$$

Ebből és $(*)$-ból következik, hogy

$$|a+c_{j\,m+1}, X_m| \leqq |a+c-c_{0j}, X_m| - (X_m, V) \leqq \varphi(X_m) + (X_m, X_j).$$

(X). Az $a+c-c_{0\,m+1}$ lánc X_m-beli terhelésének vizsgálata a (γ') esetben (2. 4. 13) szerint

$$|a+c-c_{0\,m+1}, X_m| = |a+c-c_{0m}, X_m| - \frac{1}{2} \leqq \varphi(X_m) + (X_m, V).$$

(XI). Az X_m-beli terhelések vizsgálata a (γ'') esetben.

Ekkor $(a, e_m) < 0$, $(a, e_{m+1}) < 0$. (2. 4. 13) szerint

$$|a+c_{j\,m+1}, X_m| = |a+c_{jm}, X_m| - \frac{1}{2} \leqq \varphi(X_m) + (X_m, X_j).$$

A (2. 4. 16) és (2. 5. 3) tételeket az $f = c - c_{0\,m+1}$ láncra és az X_m pontra alkalmazzuk: $\nu'_- = \nu'$, $\nu'_+ = 0$, $\nu''_+ - \nu''_- \leqq \nu''$,

$$|a+c-c_{0\,m+1}, X_m| \leqq |a, X_m| + \frac{1}{2}(-\nu' + \nu'') \leqq |a, X_m| + (X_m, V).$$

(XII). Az X_{m+1}-beli terhelések vizsgálata.

(2. 4. 13) szerint bármelyik esetben

$$|a+c_{j\,m+1}, X_{m+1}| \leqq |a+c_{jm}, X_{m+1}| + \frac{1}{2} \leqq \varphi(X_{m+1}) + (X_{m+1}, X_j) + (X_{m+1}, X_{m+1}),$$

$$|a+c-c_{0\,m+1}, X_{m+1}| \leqq |a+c-c_{0m}, X_{m+1}| + \frac{1}{2} \leqq$$
$$\leqq \varphi(X_{m+1}) + (X_{m+1}, V) + (X_{m+1}, X_{m+1}).$$

Ezzel befejeztük a (VI) alatti állítások igazolását. Minthogy (III), (IV) és (V) szerint (VI) feltevései az $m = 1$ esetben teljesülnek, azért (VI)-ból következik, hogy a c_{ij} láncok X_iX_j-kitérők $(0 \leqq i < j \leqq n)$ és a $c - c_{0i}$ láncok X_iV-kitérők $(0 \leqq i \leqq n)$.

(XIII). $X_n = V$ és $c_{0n} = c$.

BIZONYÍTÁS: (I) szerint a $c - c_{0n}$ $X_n V$-láncnak nincs X_n-ből kifutó éle. Ekkor (2.5.6) szerint $|c - c_{0n}, X_n| = 0$. (2.5.5) és (2.4.6) miatt ekkor $X_n = V$, a $c - c_{0n}$ lánc tehát zárt, és

$$|a + c - c_{0n}, V| = |a, V| \leqq \varphi(V).$$

$c - c_{0n}$ $X_n V$-kitérő voltából következik, hogy minden $X \neq V$-re $|a + c - c_{0n}, X| \leqq \leqq \varphi(X)$. E szerint $c - c_{0n}$ zárt kitérő. Ha $c - c_{0n} \neq 0$, akkor c_{0n} UV-kitérő volta miatt $c - c_{0n}$ c-nek elhagyható része, és ez ellentmond c primitív voltának.

Ezzel a lemmát teljes egészében igazoltuk.

3.3. Általánosított kitérők. Csatolási tételek

A 3. § további részében, valamint a 4. §-ban csak b-irányú kitérőket szerepeltetünk. A dolgozat említett részében ezért b-irányú kitérő helyett röviden csak kitérőt mondunk. (Megjegyezzük, hogy a 3. §-ban b-irányú kitérőkre kimondott tételek tetszőleges kitérőkre is fennállnak.)

c éleinek számára alkalmazott indukcióval könnyen belátható a következő állítás:

(3.3.1). *Ha c UV-kitérő, akkor $c = c' + \sum_{i=1}^{n} c_i$, ahol c' primitív UV-kitérő, c_i pedig zárt kitérő ($i = 1, \ldots, n$).*

(3.3.2). A d UV-láncot φ és a-hoz tartozó *általánosított UV-kitérőnek* (rövidítve: ált. UV-kitérő) nevezzük, ha

$$d = c + \sum_{i=1}^{n} c_i,$$

ahol c UV-kitérő, c_i pedig zárt kitérő ($i = 1, \ldots, n$).

Értelmezésünk szerint egy kitérő egyben általánosított kitérő is.

A fentiekből egyszerűen belátható az alábbi két állítás:

(3.3.3). *Ha d ált. UV-kitérő, és c_i zárt kitérő ($i = 1, \ldots, n$), akkor $d' = d + \sum_{i=1}^{n} c_i$ ált. UV-kitérő.*

(3.3.4). *Ha d ált. UV-kitérő, akkor $d = c' + \sum_{i=1}^{n} c_i$, ahol c' primitív UV-kitérő, c_i zárt kitérő ($i = 1, \ldots, n$).*

(3.3.5). *Ha c UV-kitérő, $e = VV'$ egy $\tilde{a}$-él és e nem éle c-nek, akkor $c' = c + e$ UV'-kitérő és*

$$|a + c', V'| \leqq \varphi(V') + (V', U) - \frac{1}{2}.$$

BIZONYÍTÁS: c' b-irányú UV'-lánc. Igazoljuk, hogy $a(a+c') \geqq 0$. (2. 3. 4) szerint elég megmutatni, hogy minden e' élre

$$(*) \qquad (a, e')(a+c', e') \geqq 0.$$

Ha $(e, e')=0$, akkor $(a+c', e')=(a+c, e')$. Tehát az $a(a+c) \geqq 0$-ból adódó $(a, e')(a+c, e') \geqq 0$ egyenlőtlenségből kapjuk a $(*)$ egyenlőtlenséget.

Ha $(e, e') \neq 0$, akkor vagy $e'=e$, vagy $e'=-e$. Feltevéseink szerint $(a, e) \leqq -1$, $(c, e) \leqq 0$, s ezért $(a+c', e)=(a, e)+(c, e)+(e, e) \leqq 0$, tehát $(a, e)(a+c', e) \geqq 0$. A kapott egyenlőtlenségből $(*)$ az $e'=-e$ esetre is következik.

Ezután igazoljuk, hogy $a+c'$ terhelései megfelelnek a (3. 1. 2) (3) kikötésnek.

Ha $X \neq V, X \neq V'$, akkor (2. 4. 12)-ből

$$|a+c', X|=|a+c, X| \leqq \varphi(X)+(X, U).$$

(2. 4. 14)-ből

$$|a+c', V|=|a+c, V|-\frac{1}{2} \leqq \varphi(V)+(V, U).$$

$$|a+c', V'|=|a+c, V'|-\frac{1}{2} \leqq \varphi(V')+(V', U)-\frac{1}{2}.$$

(3. 3. 6). *Ha c primitív UV-kitérő és $e=VV'$ egy $\tilde{a}$-él, akkor vagy $(c, e)=0$, vagy $(c, e)=-1$, és az utóbbi esetben c bármely $\xi=(X_0e_1X_1 \ldots$ $\ldots X_{n-1}e_nX_n)$ kanonikus UV-bejárásánál $e_n=-e$.*

BIZONYÍTÁS: Ha $(c, e) \neq 0$, akkor $c \neq 0$. A **3. 2** lemma szerint van c-nek kanonikus UV-bejárása. Legyen $\xi=(X_0e_1X_1 \ldots X_{n-1}e_nX_n)$ egy tetszőleges ilyen bejárás.

(I). Ha $(c, e)>0$ volna, akkor van olyan j, melyre $e_j=e$. Ekkor $X_{j-1}=V$, $X_j=V'$. Igazoljuk, hogy ebben az esetben a c_{j-1n} $X_{j-1}X_n$-kitérő zárt kitérő. Valóban $X_{j-1}=X_n=V$ miatt c_{j-1n} zárt lánc, (2. 4. 13) szerint pedig

$$|a+c_{j-1n}, V|=|a+c_{jn}, V|-\frac{1}{2} \leqq \varphi(V).$$

Mivel c_{0j-1} X_0X_{j-1}-kitérő és $c_{j-1n} \neq 0$, azért c_{j-1n} elhagyható része c-nek. Ez ellentmond c primitív voltának.

(II). Ha $(c, e)<0$, akkor $(c, -e)>0$, s így van olyan j, melyre $e_j=-e$. Most $X_{j-1}=V'$, $X_j=V$. Megmutatjuk, hogy a c_{jn} X_jX_n-kitérő zárt. Valóban c_{jn} zárt lánc, és mivel $c_{j-1n}=c_{jn}+(-e)$ és $(a, -e)>0$, azért (2. 4. 13) szerint

$$|a+c_{jn}, V|=|a+c_{j-1n}, V|-\frac{1}{2} \leqq \varphi(V).$$

Ha $j < n$ volna, akkor $c_{jn} \neq 0$, és c_{0j} X_0X_j-kitérő lévén c_{jn} a c lánc elhagyható része, és ez ellentmond c primitív voltának. E szerint csak $j = n$ lehetséges, amiből $(c, e) = -1$ következik.

(3. 3. 7). *Ha c primitív UV-kitérő és $e = VV'$ egy $\tilde{a}$-él, akkor $c' = c + e$ UV'-kitérő és c'-nek van olyan $\xi' = (X_0'e_1'X_1' \dots X_{m-1}'e_m'X_m')$ kanonikus UV'-bejárása,* melyre

$$(*) \qquad |a + c_{im}', V'| \leqq \varphi(V') + (V', X_i') - \frac{1}{2}. \qquad (i = 0, 1, \dots, m)$$

BIZONYÍTÁS: (3. 3. 5) és (3. 3. 6) szerint c' UV'-kitérő. Tekintsük c-nek egy $\xi = (X_0e_1X_1 \dots X_{n-1}e_nX_n)$ kanonikus UV-bejárását.

(I). Ha $(c, e) = 0$, akkor igazoljuk, hogy $\xi' = (X_0e_1X_1 \dots X_{n-1}e_nX_ne V')$ c-nek egy kanonikus UV'-bejárása. Először nyilvánvaló, hogy ξ' egy UV'-vonal, másodszor, hogy a ξ'-höz tartozó lánc $\sum_{i=1}^{n} e_i + e = c'$. E mellett az $i \leqq j \leqq n$ esetben $c_{ij}' = c_{ij}$ X_iX_j-kitérő. A c_{jn} X_jX_n-kitérőre és e-re alkalmazva a (3. 3. 5) tételt, kapjuk, hogy $c_{j\,n+1}' = c_{jn} + e$ X_jV'-kitérő, valamint látjuk, hogy $(*)$ valóban fennáll.

(II). Ha $(c, e) \neq 0$, akkor (3. 3. 6) miatt $(c, e) = -1$ és $e_n = -e$. Ekkor $e_n = V'V$, $X_{n-1} = V'$, $c' = c_{0\,n-1}$, s így $\xi' = (X_0e_1X_1 \dots X_{n-2}e_{n-1}X_{n-1})$ c'-nek egy kanonikus UV'-bejárása. A (3. 3. 5) tételt a $c_{j\,n-1}' = c_{jn} + e$ láncra alkalmazva kapjuk $(*)$-ot.

(3. 3. 8). Egy X pontot *a-pontnak*, ill. *b-pontnak* nevezünk, ha $|a, X| > 0$, ill. $|a, X| = 0$.

Egy a-él, ill. egy $\tilde{a}$-él határpontjai a-pontok.

Az f pályát *a-pályának* nevezzük, ha minden éle a-él. Az $f = 0$ pályát is a-pályának mondjuk.

Az f pályát *$\tilde{a}$-pályának* mondjuk, ha $f \neq 0$, és ha f minden éle $\tilde{a}$-él.

Az f UV-pályát *h-pályának* nevezzük, ha (1) az $U \neq V$ esetben $|f, U| = |f, V| = 1/2$, az $U = V$ esetben $|f, U| = 1$, (2) f-nek U és V-től különböző pontjai (belső pontjai) b-pontok. (3) $af \geqq 0$, (4) f elférő, (5) f b-irányú.

Értelmezésünk szerint az $f = 0$ pálya is h-pálya.

Egy h-pálya vagy üres, vagy minden éle b-él, vagy egyetlen a-élből áll.

(3. 3. 9). *Ha d ált. UV-kitérő és az f VV'-pálya $\tilde{a}$-pálya, akkor $d' = d + f$ ált. UV'-kitérő.*

BIZONYÍTÁS: A tételt f éleinek számára vonatkozó indukcióval igazoljuk.

(I). $\nu(f) = 1$. Ekkor $f = e = VV'$ egyetlen $\tilde{a}$-élből áll. (3. 3. 4) szerint $d = c + \sum_{i=1}^{m} c_i$, ahol c primitív UV-kitérő, c_i pedig zárt kitérő $(i = 1, \dots, m)$.

(3. 3. 7) szerint ekkor $d''=c+e$ UV'-kitérő, s így $d'=d''+\sum_{i=1}^{m} c_i$ ált. UV'-kitérő.

(II). Tegyük fel, hogy a tétel érvényes a $\nu(f)=n-1$ esetben ($n\geqq 2$), és legyen most $\nu(f)=n$. Tekintsük f-nek egy $\xi=(X_0e_1X_1\dots X_{n-1}e_nX_n)$ VV'-bejárását. Nyilvánvalóan az f_{0n-1} X_0X_{n-1}-pálya is $\tilde{a}$-pálya és $\nu(f_{0n-1})=n-1$. Feltevésünk szerint ekkor $d_{n-1}=d+f_{0n-1}$ ált. UX_{n-1}-kitérő. Ha most (I)-et d_{n-1}-re és az $e_n=X_{n-1}V'$ $\tilde{a}$-élre alkalmazzuk, kapjuk, hogy $d'=d_{n-1}+e_n$ ált. UV'-kitérő.

(3. 3. 10). *Ha a c UV-kitérőre* $|a+c,V|\leqq\varphi(V)+(V,U)-\frac{1}{2}$, *és ha az f VW-pálya olyan h-pálya, melynek belső pontjai nem c-pontok, akkor $d=c+f$ UW-kitérő.*

BIZONYÍTÁS: Ha $f=0$, nincs mit bizonyítani. Legyen $f\neq 0$. (1). d egy b-irányú UW-lánc. (2). $a(a+d)=a(a+c)+af\geqq 0$. (3). Igazoljuk, hogy $a+d$ terhelései megfelelnek a (3. 1. 2) (3) kikötésnek.

Ha $|f,X|=0$, akkor $X\neq V$, és így (2. 4. 6) szerint $|a+d,X|=$ $=|a+c,X|\leqq\varphi(X)+(X,U)$.

Ha $|f,X|\neq 0$, és $X\neq V, X\neq W$, akkor $|a+d,X|=|f,X|\leqq\varphi(X)$. $|a+d,V|\leqq|a+c,V|+|f,V|\leqq\varphi(V)+(V,U)+(V,W)$, mert $|f,V|=1/2$, ha $V\neq W$, és $|f,V|\leqq 1$, ha $V=W$.

Ha $W\neq V$, akkor $|f,W|=1/2$, s így $|a+d,W|\leqq|a+c,W|+|f,W|\leqq$ $\leqq\varphi(W)+(W,U)+(W,W)$.

Megjegyzés: A tétel érvényes a $c=0$ esetben is, s ekkor c-vel kapcsolatban semminemű kikötést sem kell tenni.

(3. 3. 11). *Ha a c UV-kitérőnek van olyan $\xi=(X_0e_1X_1\dots X_{n-1}e_nX_n)$ kanonikus UV-bejárása, melyre*

$$(*)\qquad |a+c_{in},V|\leqq\varphi(V)+(V,X_i)-\frac{1}{2},\qquad (i=0,1,\dots,n-1)$$

és ha az f VW-pálya h-pálya, akkor $d=c+f$ ált. UW-kitérő.

BIZONYÍTÁS: c éleinek számára vonatkozó indukciót alkalmazunk. Ha $\nu(c)=0$, azaz $c=0$, akkor (3. 3. 10) szerint igaz a tétel. Tegyük fel, hogy a tétel igaz minden olyan esetben, amidőn $\nu(c)\leqq m$, és legyen most c olyan, melyre $0<\nu(c)\leqq m+1$.

Ha f-nek nincs belső pontja, vagy ha f belső pontjai nem c-pontok, akkor (3. 3. 10) szerint igaz a tétel. Feltesszük tehát, hogy van f-nek olyan belső pontja, mely c-nek is pontja. Tekintsük c-nek egy, a $(*)$ kikötésnek eleget tévő $\xi=(X_0e_1X_1\dots X_{n-1}e_nX_n)$ UV-bejárását ($n\geqq 1$), és legyen $\xi'=(X_0'e_1'X_1'\dots X_{t-1}'e_t'X_t')$ f-nek egy VW-bejárása ($t\geqq 2$). Feltevésünk szerint van olyan i és j index, melyekre $0<i<t$, $0 \leqq j \leqq n$ és $X_i' = X_j$. Az ilyen i és j indexpárokban előforduló legkisebb i indexet jelöljük r-rel. A rövidség kedvéért bevezetjük az $X_r' = Y$ jelölést. Ekkor

$$Y \neq V,\ Y \neq W,\ |a, Y| = 0,\ |c, Y| > 0 \text{ és}$$

$$|c, X_i'| = 0, \text{ ha } 0 < i < r,\ |f_{or}, Y| = \frac{1}{2}.$$

Legyen j a legkisebb, l a legnagyobb olyan index, melyekre $X_j = X_l = Y$. Ekkor

$$0 \leqq j \leqq l < n,\ |c_{ij}, Y| \leqq \frac{1}{2}\ (0 \leqq i \leqq j),\ |c_{ln}, Y| = \frac{1}{2}.$$

(I). Bebizonyítjuk, hogy a c_{jl} kitérő zárt kitérő. c_{jl} b-irányú zárt lánc. Csak az Y-beli terhelést kell megvizsgálni:

$$|c, Y| = |c_{0j}, Y| + |c_{jl}, Y| + |c_{ln}, Y| \geqq |c_{jl}, Y| + \frac{1}{2}.$$

Ebből és $|a, Y| = 0$-ból

$$|a + c_{jl}, Y| = |c_{jl}, Y| \leqq |c, Y| - \frac{1}{2} = |a + c, Y| - \frac{1}{2} \leqq \varphi(Y).$$

(II). Igazoljuk, hogy $\tilde{c} = c_{ln} + f_{or}$ zárt kitérő.

(1). $\tilde{c}$ b-irányú zárt lánc.

(2). $af \geqq 0$ és $f_{or} \subset f$-ből $af_{or} \geqq 0$, s így c_{ln} kitérő voltára tekintettel $a(a+\tilde{c}) = a(a+c_{ln}) + af_{or} \geqq 0$.

(3). c_{ln} és f_{or}-nek az Y és V pontokon kívül nincs más közös pontjuk. Ebből és c_{ln} $X_l X_n$-kitérő voltából következik, hogy ha $|f_{or}, X| = 0$, akkor $X \neq Y$, $X \neq V$ és $|a + \tilde{c}, X| = |a + c_{ln}, X| \leqq \varphi(X)$, ha $|f_{or}, X| \neq 0$ és $X \neq Y$, $X \neq V$, akkor $|c_{ln}, X| = 0$ és $|a, X| = 0$, tehát

$$|a + \tilde{c}, X| = |f_{or}, X| \leqq |f, X| \leqq \varphi(X). \qquad (f \text{ elférő lánc!})$$

$$|a + \tilde{c}, Y| = |\tilde{c}, Y| \leqq |c_{ln}, Y| + |f_{or}, Y| = 1 \leqq \varphi(Y),$$

miután f elférő volta miatt $\varphi(Y) \neq 0$.

Végül (*) és $X_l = Y \neq V$-re való tekintettel

$$|a + \tilde{c}, V| \leqq |a + c_{ln}, V| + |f_{or}, V| \leqq \varphi(V).$$

(III). Legyen s az a legnagyobb index, melyre $r \leqq s \leqq t$ és $X_s' = Y$. Ekkor $s < t$ és $|f_{st}, Y| = 1/2$. Igazoljuk, hogy f_{rs} zárt kitérő: f_{rs} b-irányú zárt pálya és $af_{rs} \geqq 0$. Ha $|f_{rs}, X| \neq 0$, akkor $|a, X| = 0$, tehát $|a + f_{rs}, X| = |f_{rs}, X| \leqq \varphi(X)$. Ha $|f_{rs}, X| = 0$, akkor $|a + f_{rs}, X| = |a, X| \leqq \varphi(X)$.

(IV). Legyen $d' = c_{0j} + f_{st}$. Ekkor

$$(\ast) \qquad d = d' + c_{jl} + \tilde{c} + f_{rs}.$$

Ha $j=0$, azaz $c_{0j}=0$, akkor c_{0j} és f_{st}-re alkalmazható a (3. 3. 10) tétel. E szerint d' UW-kitérő, és így d ált. UW-kitérő.

Ha $j \neq 0$, $X_j = Y \neq U$. Megmutatjuk, hogy ekkor a c_{0j} UY-kitérőre, valamint az f_{st} YW-pályára fennállnak a (3. 3. 11) tétel kikötései. $\xi_{0j} = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{j-1} e_j X_j)$ c_{0j}-nek egy kanonikus UY-bejárása, és

$$|a+c_{ij}, Y| = |c_{ij}, Y| = \frac{1}{2} \leqq \varphi(Y) + (Y, X_i) - \frac{1}{2}. \qquad (0 \leqq i < j).$$

f_{st} h-pálya, mert $|f_{st}, Y| = |f_{st}, W| = \frac{1}{2}$ és $f_{st} \subset f$.

$c_{ln} \neq 0$ miatt $\nu(c_{0j}) < \nu(c)$, ezért indukciós feltevésünk következtében d' ált. UW-kitérő, s így (*) miatt d is ált. UW-kitérő.

(3. 3. 12). *Ha c primitív UV-kitérő, $e = VV'$ $\tilde{a}$-él és az f $V'W$-pálya h-pálya, akkor $d = c+e+f$ ált. UW-kitérő.*

BIZONYÍTÁS: (3. 3. 7) szerint $c' = c+e$ UV'-kitérő és kielégíti a (3. 3. 11) tétel kikötéseit, s így e tétel szerint $d = c'+f$ ált. UW-kitérő.

(3. 3. 13). *Ha d ált. UV-kitérő, az f VV'-pálya $\tilde{a}$-pálya és az f' $V'W$-pálya h-pálya, akkor $d' = d+f+f'$ ált. UW-kitérő.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ f-nek egy VV'-bejárása ($n \geqq 1$). (3. 3. 9) szerint $d_1 = d + f_{0\,n-1}$ ált. UX_{n-1}-kitérő. Ekkor (3. 3. 4) szerint $d_1 = c + \sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_i$, ahol c primitív UX_{n-1}-kitérő, $\tilde{c}_i$ zárt kitérő ($i = 1, \ldots, m$).

(3. 3. 12) szerint ekkor $d_2 = c + e_n + f'$ ált. UW-kitérő, s így $d' = d_2 + \sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_i$ is ált. UW-kitérő.

(3. 3. 14). Az f UV-láncot *alternálónak* mondjuk, ha $f = \sum_{i=1}^{n} (f_i + f_i')$, ahol az f_i $X_{i-1}'X_i$-pálya $\tilde{a}$-pálya, az f_i' $X_i X_i'$-pálya h-pálya ($i = 1, \ldots, n$) és $X_0' = U$, $X_n' = V$.

A (3. 3. 13) tétel segítségével indukció útján könnyen igazolható a következő lemma:

(3. 3. 15). LEMMA: *Ha d ált. UV-kitérő és az f VW-lánc alternáló, akkor $d' = d+f$ ált. UW-kitérő.*

(3. 3. 16). *Ha c primitív UV-kitérő és $|a, V| \leqq \varphi(V) - 1$, akkor $|c, V| \leqq \frac{1}{2}$ és $|a+c, V| \leqq \varphi(V) - \frac{1}{2}$.*

BIZONYÍTÁS: Tekintsük c-nek egy $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ kanonikus UV-bejárását. Ha $|c, V| > \frac{1}{2}$ volna, akkor van olyan i index, melyre $i < n$ és

$X_i = V$. Legyen az ilyen i indexek közül a legnagyobb j. Ekkor $X_j = V$ és $|c_{jn}, V| = 1$. Ezért

$$|a+c_{jn}, V| \leqq |a, V| + |c_{jn}, V| \leqq \varphi(V).$$

A c_{jn} $X_j V$-kitérő tehát zárt kitérő. c_{0j} kitérő volta, valamint $c_{jn} \neq 0$ miatt c_{jn} c-nek elhagyható része. Ez ellentmond c primitív voltának.

Ha $|c, V| \leqq \frac{1}{2}$, akkor $|a+c, V| \leqq |a, V| + |c, V| \leqq \varphi(V) - \frac{1}{2}$.

(3. 3. 17). *Ha az a lánc zárt, c primitív UV-kitérő,* $|a, V| < \varphi(V)$ *és* $e = VV'$ *a-él, akkor* $c' = c + e$ *UV'-kitérő.*

BIZONYÍTÁS: Miután a zárt, (2, 5. 4) szerint $|a, V|$ egész, s így $|a, V| < \varphi(V)$-ből $|a, V| \leqq \varphi(V) - 1$ következik. (3. 3. 16) szerint ekkor $|a+c, V| \leqq \varphi(V) - \frac{1}{2}$. c-re és az e élre mint h-pályára alkalmazva a (3. 3. 10) tételt kapjuk, hogy c' UV'-kitérő.

4. §.

4. 1. Értékhozzárendelések. Lefogó pontláncok

(4. 1. 1). A gráf alapéleinek Ψ halmazán egy egész értékű $\psi(x)$ függvényt értelmezünk, és e függvény értékeit az alapélek *értékeinek* nevezzük.

(4. 1. 2). *Pontláncon* a gráf pontjainak halmazán értelmezett tetszőleges egész értékű $p(X)$ függvényt értünk. (E fogalom a topológiai 0-lánc fogalomnak felel meg.) Pontláncokra vonatkozó egyenlőségek és egyenlőtlenségek jelölésére a (2. 2. 1) alattinak megfelelő megállapodással élünk.

Nyilvánvalóan fennáll a következő megállapítás.

(4. 1. 3). *Ha* p_i *pontlánc és* λ_i *egész szám* $(i = 1, \ldots, n)$, *akkor* $p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$ *is pontlánc.*

(4. 1. 4). $p' \subset p$, *ha* $pp' \geqq 0$ *és* $|p'| \leqq |p|$.

(4. 1. 5). A $p(X)$ pontlánc, ill. az $f(x)$ éllánc *értékén* a

$$\varphi(p) = \sum_X p(X)\varphi(X), \quad \text{ill. a} \quad \psi(f) = \sum_x f(x)\psi(x)$$

számot értjük. Ha $p = 0$, ill. ha $f = 0$, akkor $\varphi(p) = 0$, ill. $\psi(f) = 0$,

Könnyen beláthatók a következő állítások:

(4. 1. 6). *Ha* p_i, *ill.* f_i *pont-, ill. éllánc,* λ_i *pedig egész szám* $(i = 1, \ldots, n)$, *akkor* $p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$ *és* $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$-re

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(p_i), \qquad \psi(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi(f_i).$$

(4. 1. 7). A p pontlánc és az f lánc *illeszkedési rendjén* a

$$|p,f| = |f,p| = \sum_X |p(X)|\,|f,X| = \sum_X \sum_x |f(x)|\,|p(X)|\,|x,X|$$

értéket értjük. Az $|f,X|$ terhelés f és X illeszkedési rendjének tekinthető.

Könnyen belátható az alábbi három állítás:

(4. 1. 8). *Ha a k kör pontjai: $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ ($k \neq 0$), akkor* $|p,k| = \sum_{i=0}^{n-1} |p(X_i)|$.

(4. 1. 9). *Ha $p' \subset p$ és $f' \subset f$, akkor $|p',f| \leqq |p,f|$ és $|f',p| \leqq |f,p|$.*

(4. 1. 10). Ha $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, $\lambda_i \geqq 0$, $f_i f_j = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $|p,f| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |p,f_i|$.

(4. 1. 11). A p pontlánc *pozitív*, ha $p \geqq 0$.

A p pontlánc *lefogó*, ha minden pozitív zárt g láncra $|p,g| \geqq \psi(g)$.

A lefogó pozitív pontláncok halmazát P_l-lel jelöljük.

A p pontlánc *körlefogó*, ha minden pozitív k körre $|p,k| \geqq \psi(k)$.

Nyilvánvaló, hogy ha p lefogó, akkor körlefogó is.

(4. 1. 12). *Ha p körlefogó, akkor lefogó.*

BIZONYÍTÁS: Legyen p körlefogó és g tetszőleges pozitív zárt lánc. **2.6** szerint $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i$, $\lambda_i > 0$, k_i pozitív kör, $\lambda_i k_i \subset g$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ekkor (4. 1. 10) és (4. 1. 6) szerint

$$|p,g| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |p,k_i| \geqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi(k_i) = \psi(g).$$

Látjuk, P_l azonos a körlefogó pozitív pontláncok halmazával.

(4. 1. 13). *P_l nem üres.*

BIZONYÍTÁS: Γ-nak csak véges számú különböző köre van, s így a $\psi(k)$ értékek halmaza korlátos. Ezért, ha a $p(X)$ értékeket elegendő nagynak választjuk, létrehozható pozitív lefogó p pontlánc.

Jelöljük az elférő pozitív zárt láncok halmazát G_e-vel.

(4. 1. 14). *Ha $p \in P_l$, $g \in G_e$, akkor $\psi(g) \leqq \varphi(p)$.*

BIZONYÍTÁS:

$$\psi(g) \leqq |p,g| = \sum_X p(X)\,|g,X| \leqq \sum_X p(X)\,\varphi(X) = \varphi(p).$$

(4. 1. 15). *Ha $\varphi \geqq 0$, akkor*

$$\max_{g \in G_e} \psi(g) \leqq \min_{p \in P_l} \varphi(p).$$

BIZONYÍTÁS: Ha $\varphi \geqq 0$, akkor $g=0$ elférő, tehát G_e nem üres. Ezt figyelembe véve (4. 1. 13)- és (4. 1. 14)-ből következik állításunk.

Megjegyzés: Mivel minden g láncra és minden X pontra $|g, X| \geqq 0$, elférő lánc csak a $\varphi \geqq 0$ esetben létezik.

A 4. § további részében az alábbi tételt igazoljuk:

(4. 1. 16). TÉTEL. *Ha* $\varphi \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{g \in G_e} \psi(g) = \min_{p \in Pl} \varphi(p).$$

4. 2. Kitérők értékének vizsgálata

(4. 2. 1). A továbbiakban feltesszük, hogy $\varphi \geqq 0$. Azokat az X pontokat, melyekre $\varphi(X)=0$ röviden *0-pontoknak* fogjuk nevezni.

Következőkben jelentsen $a(x)$ egy olyan pozitív zárt elférő láncot, melyre

$$\psi(a) = \max_{g \in G_e} \psi(g) = \mu.$$

Kitérőn e lánchoz tartozó b-irányú kitérőket értünk.

A (4. 1. 16) tételt bebizonyítjuk, ha kimutatjuk egy olyan pozitív lefogó q pontlánc létezését, melyre $\varphi(q)=\psi(a)$. Egy ilyen q pontláncot kitérők segítségével fogunk megszerkeszteni.

a definíciójából, valamint abból, hogy $g=0$ eleme G_e-nek következik az alábbi állítás:

(4. 2. 2). $\psi(a) \geqq 0$.

(4. 2. 3). *Ha* g *zárt lánc és* $g \subset a$, *akkor* $\psi(g) \geqq 0$.

BIZONYÍTÁS: $a-g$ zárt lánc. $a-g \subset a$ és minden X-re $|a-g, X| \leqq \leqq |a, X| \leqq \varphi(X)$. E szerint $a-g \in G_e$, s így $\psi(a)-\psi(g)=\psi(a-g) \leqq \mu$. Tehát $\psi(g) \geqq 0$.

(4. 2. 3) és (2. 5. 16) alapján megállapíthatjuk:

(4. 2. 4). *Ha a* k *kör a-pálya, akkor* $\psi(k) \geqq 0$.

(4. 2. 5). *Ha* c *zárt kitérő, akkor* $\psi(c) \leqq 0$.

BIZONYÍTÁS: $a+c$ pozitív zárt lánc és $|a+c, X| \leqq \varphi(X)$ minden X-re. E szerint $a+c \in G_e$, s így $\psi(a)+\psi(c)=\psi(a+c) \leqq \mu$, tehát $\psi(c) \leqq 0$.

(4. 2. 6). *Ha a pozitív* k *kör nem tartalmaz sem 0-pontot, sem a-pontot, akkor* $\psi(k) \leqq 0$.

BIZONYÍTÁS: $ak \geqq 0$. Bármelyik X pontra fennáll a $|k, X|=0$ és $|a, X|=0$ egyenlőségek egyike, s így bármelyik X-re igaz az alábbi két egyenlőtlenség egyike is:

$$|a+k, X| = |a, X| \leqq \varphi(X), \quad |a+k, X| = |k, X| = 1 \leqq \varphi(X).$$

E szerint k zárt kitérő, tehát (4. 2. 5) szerint igaz állításunk.

(3. 3. 4)-ből és (4. 2. 5)-ből következik az alábbi állítás:

(4. 2. 7). *Ha d ált. UV-kitérő, akkor létezik olyan c primitív UV-kitérő, melyre $\psi(d) \leqq \psi(c)$.*

(4. 2. 8). *Az általánosított kitérőkhöz tartozó értékek halmaza felülről korlátos.*

BIZONYÍTÁS: Legyen

$$\varphi_m = \max_{X \in \Phi} \varphi(X), \quad \psi_m = \max_{x \in \Psi} |\psi(x)|,$$

és jelöljük a gráf alapéleinek számát ν_Γ-val. Ekkor (3. 1. 4) szerint, ha c UV-kitérő és x tetszőleges alapél

$$|c(x)| \leqq 2\varphi_m + 2, \quad \text{s így} \quad |\psi(c)| = \left|\sum_x c(x)\psi(x)\right| \leqq (2\varphi_m + 2)\psi_m \nu_\Gamma.$$

Ha d ált. UV-kitérő, akkor (4. 2. 7) szerint van olyan c UV-kitérő, melyre $\psi(d) \leqq \psi(c)$, s így $\psi(d) \leqq (2\varphi_m + 2)\psi_m \nu_\Gamma$.

4. 3. Egy minimális értékű pontlánc megszerkesztése

(4. 3. 1). Legyen X tetszőleges a-pont és jelöljük $H(X)$-szel valamennyi ált. UX-kitérő halmazát (U tetszőleges pont). A $c = 0$ XX-kitérőre tekintettel megállapíthatjuk, hogy $H(X)$ nem üres. Legyen

$$s(X) = \max_{d \in H(X)} \psi(d).$$

(4. 2. 8) szerint $s(X)$ véges érték. A $c = 0$ XX-kitérőre való tekintettel $s(X) \geqq 0$.

(4. 3. 2). *Legyen X a-pont. Létezik olyan c primitív UX-kitérő, melyre $\psi(c) = s(X)$.*

BIZONYÍTÁS: Van d ált. UX-kitérő, melyre $\psi(d) = s(X)$. (4. 2. 7) szerint van olyan c primitív UX-kitérő, melyre $\psi(d) \leqq \psi(c)$. (4. 3. 1) miatt azonban $\psi(c) \leqq \psi(d)$, tehát $\psi(c) = \psi(d) = s(X)$.

(4. 3. 3). *Ha X és Y a-pontok és az f XY-lánc alternáló, akkor $s(X) + {}$ ${} + \psi(f) \leqq s(Y)$.*

BIZONYÍTÁS: Van olyan d ált. UX-kitérő, melyre $\psi(d) = s(X)$. (3. 3. 15) szerint $d' = d + f$ ált. UY-kitérő. Ezért $\psi(d) + \psi(f) = \psi(d') \leqq s(Y)$.

(4. 3. 4) *Legyen $e = XY$ és $e' = XY'$ két a-él. Ekkor $s(Y) - \psi(e) = {}$ ${} = s(Y') - \psi(e')$.*

BIZONYÍTÁS: Az $f=-e+e'$ YY'-lánc és az $f'=-e'+e$ $Y'Y$-lánc alternáló. (4. 3. 3) szerint ekkor $s(Y)-\psi(e)+\psi(e')\leqq s(Y')$ és $s(Y')-\psi(e')+$ $+\psi(e)\leqq s(Y)$. Ebből következik állításunk.

(4. 3. 5). Jelöljük ψ_0'-lal azon pozitív körök értékének maximumát, melyek 0-pontot tartalmaznak. Ha 0-pontot tartalmazó pozitív kör nincs, legyen $\psi_0'=0$. Legyen $\psi_0=\max(\psi_0', 0)$.

(4. 3. 6). A $q(X)$ pontláncot a következőképpen értelmezzük:

(1). Ha X a-pont, akkor (2. 5. 6) szerint van $e=XY$ a-él, és ekkor legyen

$$q(X)=s(X)-s(Y)+\psi(e).$$

(4. 3. 4) szerint $q(X)$ nem függ az e-él megválasztásától.

(2). Ha X b-pont és nem 0-pont, akkor legyen $q(X)=0$.

(3). Ha X 0-pont (ekkor csak b-pont lehet), legyen $q(X)=\psi_0$.

(4. 3. 7). *A q pontlánc pozitív.*

BIZONYÍTÁS: Az állítást csak a-pontokra kell igazolni. Legyen X a-pont és $e=XY$ egy a-él. Ekkor, a $-e=YX$ élt alternáló láncnak tekintve, (4. 3. 3) szerint $s(Y)-\psi(e)\leqq s(X)$, azaz $q(X)=s(X)-s(Y)+\psi(e)\geqq 0$.

(4. 3. 6)-ból egyszerűen belátható az alábbi állítás:

(4. 3. 8). *Legyen az f UV-út a-pálya és legyen $\xi=(X_0e_1X_1\ldots X_{n-1}e_nX_n)$ f-nek UV-bejárása, végül legyen $e=VW$ egy a-él, akkor az f út pontjaihoz tartozó q értékek összege*

$$\sum_{i=0}^{n} q(X_i)=s(U)-s(W)+\psi(f)+\psi(e).$$

Megjegyzés: A tétel állítása az $f=0$ esetben is igaz, ha az $f=0$ lánc egyetlen pontjának az $X_0=U=V$ a-pontot tekintjük.

(4. 3. 9). *Ha a k kör a-pálya, akkor* $|q, k|=\psi(k)$.

BIZONYÍTÁS: Feltehető, hogy $k\neq 0$. Legyen $\xi=(X_0e_1X_1\ldots X_{n-1}e_nX_n)$ a k kör egy bejárása ($n\geqq 2$, $X_n=X_0$). A (4. 3. 8) tételt az $f=k-e_n$ útra és az $e=e_n$ élre alkalmazva a

$$\sum_{i=0}^{n-1} q(X_i)=\psi(k)$$

egyenlőséget kapjuk. Mivel pedig $|k, X_i|=1$ ($i=0,\ldots,n-1$), és $|k, X|=0$, ha X valamennyi X_i-től különbözik, azért tekintettel (4. 3. 7)-re

$$|q, k|=\sum_{X}|q(X)|\,|k, X|=\sum_{i=0}^{n-1} q(X_i)=\psi(k).$$

(4. 3. 10). *A q pontlánc lefogó.*

BIZONYÍTÁS. Tekintettel (4. 1. 12)-re, elég megmutatni, hogy q körlefogó. Legyen k tetszőleges pozitív kör. A $|q, k| \leqq \psi(k)$ egyenlőtlenséget kell igazolnunk.

(I). Ha $\psi(k) \leqq 0$, az állítás triviális.

Ha k a-pálya, akkor (4. 3. 9) szerint a tétel igaz.

Ha k tartalmaz 0-pontot, akkor legyen Y egy ilyen 0-pont. Ekkor

$$|q, k| = \sum_X |q(X)|\,|k, X| \geqq q(Y)\,|k, Y| = q(Y) = \psi_0 \geqq \psi(k).$$

(II). Ha $\psi(k) > 0$ és k nem tartalmaz 0-pontot, akkor (4. 2. 6) szerint tartalmaz a-pontot. Ezért — az (I) alatt igazolt eseteket kizárva — feltehetjük, hogy a k kör elférő, tartalmaz a-pontot, és vagy csupa b-élből áll, vagy az a, b élfajtákat tekintve van két fajta éle.

Legyen $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_{n-1} X_n)$ k egy bejárása ($n \geqq 2, X_n = X_0$). Az $X_i = X_j$, $e_i = e_j$, ha $i \equiv j$ (mod n) egyenlőségekkel az X_i és e_i jeleket minden egész i-re értelmezzük. Ekkor $e_i = X_{i-1} X_i$ minden egész i-re.

Bevezetjük a következő elnevezéseket:

Az X_i pont *elválasztó,* ha az a és b élfajtákat tekintve e_i és e_{i+1} különböző fajtájúak, vagy ha e_i és e_{i+1} mindketten b-élek és X_i egy a-pont.

Ha $j < l \leqq j + n$, és ha X_j és X_l elválasztó pontok, valamint minden olyan i-re, melyre $j < i < l$ X_i nem elválasztó pont, akkor a $\tilde{k}_{jl} = \sum_{i=j+1}^{l} e_i$ $X_j X_l$-ív élei mind egyező fajtájúak, és aszerint, hogy az élek a-, ill. b-élek, az ívet a-, ill. *b-szakasznak* nevezzük. a-szakasznak fogjuk tekinteni még a $\tilde{k}_{jj} = 0$ $X_j X_j$-láncot is, ha X_j elválasztó pont és e_j, valamint e_{j+1} b-él.

Egy b-szakasz belső pontjai csak b-pontok lehetnek. (3. 3. 8) szerint e szakaszok h-pályák. Az a-szakaszok utak, vagy az $f = 0$ lánccal azonos pályák.

A most értelmezett szakaszokat a következő megállapodással rendezzük: a $\tilde{k}_{ij}$ szakasz megelőzi a $\tilde{k}_{uv}$ szakaszt, ha $i < v$.

Ha $X_i = X_u$ és $\tilde{k}_{ij} = \tilde{k}_{uv}$, akkor $\tilde{k}_{ij}$ és $\tilde{k}_{uv}$ *egybeeső* szakaszok.

Feltevéseink szerint létezik legalább egy a-szakasz és legalább egy b-szakasz. Két a-szakasznak — ha nem esnek egybe — nem lehet közös pontjuk. Két egybe nem eső b-szakasznak lehetnek közös határpontjaik, ha azonban X_i egy ilyen közös határpont, akkor létezik a $\tilde{k}_{ii} = 0$ a-szakasz. A fenti rendezés szerinti haladásnál az a- és b-szakaszok váltakoznak. Válasszunk ki egy tetszőleges a-szakaszt, és jelöljük ezt a_1-gyel. Ebből elindulva, és a rendezésnek megfelelően haladva jelöljük a sorra következő a- és b-szakaszokat rendre $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$-vel. Legyen m a legkisebb olyan egész szám, melyre

a_{m+1} egybeesik a_1-gyel. Ekkor az $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ szakaszok közt nincsenek egybeesők.

Ha $a_i \neq 0$, akkor jelöljük a_i kezdő- és végpontját A_i-, ill. A_i'-vel, ha $a_i = \tilde{k}_{jj} = 0$, akkor legyen $A_i = A_i' = X_j$. Ekkor b_i kezdő- és végpontja A_i' és A_{i+1}. (Az A_i és A_i' pontok mind a-pontok!)

Legyen $e_i' = A_i' C_i$ egy tetszőleges a-él.

Ha $\sum_{i=1}^{m}$ helyett röviden a Σ jelet írjuk, akkor

$$k = \Sigma(a_i + b_i) = \Sigma a_i + \Sigma b_i,$$
$$\psi(k) = \Sigma\psi(a_i) + \Sigma\psi(b_i).$$

(4. 3. 8) szerint az a_i szakasz pontjaihoz tartozó $q(X)$ értékek összege (az $a_i = 0$ esetben egyedül A_i-t tekintjük a_i-hez tartozónak)

$$q_i = s(A_i) - s(C_i) + \psi(a_i) + \psi(e_i').$$

Mivel az a_i $(i = 1, \ldots, m)$ szakaszok közül nincs kettőnek közös pontja, és a b_i szakaszok belső pontjai nem lehetnek sem a-pontok, sem 0-pontok, azért (4. 1. 8)-ra tekintettel $|q, k| = \Sigma q_i$. A $|q, k| \geqq \psi(k)$ egyenlőtlenség igazolásához a

$$(*) \qquad \Sigma s(A_i) \geqq \Sigma s(C_i) - \Sigma\psi(e_i') + \Sigma\psi(b_i)$$

egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk. E bizonyításhoz vegyük figyelembe a következőket: A $-e_i' = C_i A_i'$ él $\tilde{a}$-él, a b_i szakasz $A_i' A_{i+1}$-pálya és egyben h-pálya. Ennek következtében az $f_i = -e_i' + b_i$ $C_i A_{i+1}$-lánc alternáló [(3. 3. 14)]. Ekkor (4. 3. 3) alapján

$$s(C_i) + \psi(f_i) \leqq s(A_{i+1}).$$

Ha ezeket az egyenlőtlenségeket $i = 1$-től m-ig összegezzük és figyelembe vesszük a fenti összefüggéseket, megkapjuk a (*) egyenlőtlenséget.

Ezzel a (4. 3. 10) tétel bizonyítását befejeztük.

(4. 3. 11). *Ha X a-pont és $|a, X| < \varphi(X)$, akkor $q(X) = 0$.*

Bizonyítás: (4. 3. 2) szerint van olyan c primitív UX-kitérő, melyre $\psi(c) = s(X)$. Legyen $e = XY$ egy tetszőleges X-ből kifutó a-él. (3. 3. 17) szerint ekkor $c' = c + e$ UY-kitérő, tehát $s(X) + \psi(e) = \psi(c') \leqq s(Y)$. E szerint $q(X) = s(X) - s(Y) + \psi(e) \leqq 0$. Ezt egybevetve (4. 3. 7)-tel, kapjuk, hogy $q(X) = 0$.

(4. 3. 11)-ből adódik a következő megállapítás:

(4. 3. 12). *Ha X a-pont és $q(X) > 0$, akkor $|a, X| = \varphi(X)$.*

(4. 3. 13). $\varphi(q) = \psi(a)$.

Bizonyítás: Minden X-re

$$(*) \qquad q(X)\varphi(X) = q(X)|a, X|.$$

Ugyanis ha $q(X)=0$, akkor állításunk nyilvánvaló, ha $|a, X|=0$, akkor azért igaz, mert (4. 3. 6) szerint ekkor vagy $q(X)$, vagy $\varphi(X)$ eltűnik, ha $|a, X| \neq 0$, és $q(X) \neq 0$, akkor (4. 3. 12)-ből következik helyessége.

2. 6 szerint

$$a=\sum_{i=1}^{n} k_i, \quad k_i \subset a, \ k_i \text{ pozitív kör}, \qquad (i=1, \ldots, n),$$

és

$$|a, X|=\sum_{i=1}^{n} |k_i, X|.$$

Ekkor (*)-ból és (4. 3. 9)-ből következik, hogy

$$\varphi(q)=\sum_X q(X)\varphi(X)=\sum_X q(X)|a, X|=\sum_X q(X)\sum_{i=1}^{n}|k_i, X|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_X q(X)|k_i, X|\Big)=\sum_{i=1}^{n}|q, k_i|=\sum_{i=1}^{n}\psi(k_i)=\psi(a).$$

(4. 2. 1) szerint ezzel befejeztük a (4. 1. 16) tétel bizonyítását.

5. §.
Körláncok

(5. 1). A Γ gráf pontjain és élein legyenek továbbra is értelmezve a $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ egész értékű függvények. Jelöljük a Γ gráf pozitív köreinek halmazát K-val. A K halmazon értelmezett $\varkappa(k)$ nem negatív egész értékű függvényt *körláncnak* nevezzük. A $\varkappa=0$ körláncot abban az esetben is létezőnek vesszük, ha K üres.

A $\varkappa$ körlánc X-beli *terhelésén* a

$$|\varkappa, X|=\sum_k \varkappa(k)|k, X|$$

számot értjük, ahol a $\sum\limits_k$ jel azt jelenti, hogy az összegezést K valamennyi elemére ki kell terjeszteni. Ha K üres, akkor $\varkappa=0$-ra legyen $|\varkappa, X|=0$.

Ha minden X-re $|\varkappa, X| \leqq \varphi(X)$, a körláncot *elférőnek* mondjuk. Az elférő körláncok halmazát A_e-vel jelöljük. A_e akkor és csak akkor nem üres, ha $\varphi \geqq 0$.

A $\varkappa$ körlánc *értékén* a

$$\psi(\varkappa)=\sum_k \varkappa(k)\psi(k)$$

számot értjük. Ha K üres, akkor $\varkappa=0$-ra legyen $\psi(\varkappa)=0$.

(5. 2). *Ha* $\varphi \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{\varkappa \in A_e} \psi(\varkappa) = \max_{g \in G_e} \psi(g).$$

BIZONYÍTÁS: A_e és G_e nem üres halmazok. Ha $\varkappa \in A_e$, akkor a $g' = \sum_k \varkappa(k) k$ láncra $g' \in G_e$. Ugyanis, g' pozitív zárt lánc és bármely X-re $|g', X| = \sum_k \varkappa(k) |k, X| = |\varkappa, X| \leqq \varphi(X)$. Ebből és a $\psi(\varkappa) = \psi(g')$ egyenlőségből következik, hogy

$$\max_{\varkappa \in A_e} \psi(\varkappa) \leqq \max_{g \in G_e} \psi(g).$$

2. 6 szerint, ha $g \in G_e$, akkor $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i$, ahol $\lambda_i k_i \subset g$, k_i pozitív kör, λ_i pozitív egész ($i = 1, \ldots, n$) és a k_i körök között egyenlők nem fordulnak elő. Tekintsük a következő módon értelmezett $\varkappa'$ körláncot: $\varkappa'(k_i) = \lambda_i$ ($i = 1, \ldots, n$), $\varkappa'(k) = 0$, ha k valamennyi k_i-től különbözik. Ekkor bármely X-re

$$|\varkappa', X| = \sum_k \varkappa'(k) |k, X| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |k_i, X| = |g, X| \leqq \varphi(X),$$

tehát $\varkappa' \in A_e$. Ebből és a $\psi(\varkappa') = \psi(g)$ egyenlőségből következik, hogy

$$(\circledast) \qquad \max_{\varkappa \in A_e} \psi(\varkappa) \geqq \max_{g \in G_e} \psi(g).$$

($*$) és ($\circledast$)-ból következik állításunk.

(5. 2) és (4. 1. 16)-ból adódik a következő tétel:

(5. 3). TÉTEL: *Ha* $\varphi \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{\varkappa \in A_e} \psi(\varkappa) = \min_{p \in P_l} \varphi(p).$$

(5. 4). A körláncok és az 1. §-ban értelmezett körrendszerek az alábbi módon egy-egyértelműen megfeleltethetők egymásnak: egy $\varkappa(k)$ körlánchoz azt a körrendszert rendeljük, amelyben a $k \neq 0$ kör $\varkappa(k)$-szor szerepel; $\varkappa = 0$-hoz az üres rendszert rendeljük (k tetszőleges pozitív, azaz alapirányú kör). Ekkor $|\varkappa, X|$ egyenlő a megfelelő körrendszer X ponton áthaladó köreinek számával, elférő körlánchoz elférő körrendszer tartozik, és összetartozó körlánc és körrendszer értéke megegyezik.

Hasonló módon feleltethetők meg a pozitív pontláncok és az 1. §-ban értelmezett pontrendszerek. E megfeleltetésénél a körlefogó pozitív pontláncok és a lefogó pontrendszerek is egy-egyértelműen felelnek meg egymásnak. Összetartozó pontlánc és pontrendszer értéke egyenlő.

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy az (5. 3) tételből következik az (1. 2) tétel, illetve, hogy e két tétel lényegében azonos.

Terminológiajegyzék

Jelölések

(x, X) (2. 1); (f, e) (2. 3. 1); (f, X) (2. 3. 8); $|x, X|$, $|f, X|$ (2. 4. 1); $|\varkappa, X|$ (5. 1); (X, Y) (2. 5. 1); $fg \geqq 0$ (2. 2. 1); $f' \subset f$ (2. 2. 2); $\varphi \geqq 0$ (3. 1. 1); $\nu(f)$, $\nu_X(f)$, $\nu'_X(f)$, $\nu''_X(f)$ (2. 3. 7); ν'_+, ν'_-, ν''_+, ν''_- (2. 4. 16); $\varphi(X)$ (3. 1. 1); $\psi(x)$ (4. 1. 1), $\varphi(p)$, $\psi(f)$ (4. 1. 5); $\varphi(\pi)$ (1, 1); $\psi(\varkappa)$ (1. 1), (5. 1); G_e (4. 1. 13); P_l (4. 1. 11); Δ_e (1. 1), (5. 1); Δ_l, Π_e Π_l (1. 1).

Fogalmak

a-él, *ã*-él, *ab*-él (3. 1. 1); *alapél* (2. 3. 1); *alapirányú* kör (1. 1); *alternáló* lánc (3. 3. 14); *a*-pálya, *ã*-pálya (3. 3. 8); *a*-pont (3. 3. 8); *b*-él (3. 1. 1); *bejárás* (2. 5. 13); kanonikus- (3. 1. 7); *b-irányú* lánc (3. 1. 8); *b*-pont (3. 3. 8); *él* (2. 1), (2. 3. 1), alap- (2. 3. 1); *a*-él, *ã*-él, *ab*-él, *b*-él (3. 1. 1); *elhagyható rész* (3. 1. 6); él *értéke* (4. 1. 1); éllánc- (4. 1. 5); körlánc- (5. 1); körrendszer- (1. 1); pont- (3. 1. 1); pontlánc- (4. 1. 5), pontrendszer- (1. 1), *elférő* lánc (3. 1. 1); -körlánc (5. 1) -körrendszer, -pontrendszer (1. 1); *gráf* (2. 1); *h*-pálya (3. 3. 8); *ív* (2. 5. 16); *kanonikus* bejárás (3. 1. 7); *kitérő* (3. 1); ált.- (3. 3. 2), *b*-irányú- (3. 1. 8); *UV*- (3. 1. 2); zárt- (3. 1. 5), primitív- (3. 1. 6); *kör* (2. 5. 16); alapirányú- (1. 1); *körlánc,* elférő- (5. 1); *körlefogó* pontlánc (4. 1. 11); *körrendszer,* elférő-, lefogó- (1. 1); *lánc* (2. 2. 1); alternáló- (3. 3. 14); *b*-irányú- (3. 1. 8); él- (2. 2. 1); kör- (5. 1); pont- (4. 1. 2); pozitív- (2. 6); pozitív pont- (4. 1. 11); *UV*-lánc (2. 5. 3); zárt- (2. 5. 2); *lánc alapéle, lánc éle* (2. 3. 3); *lefogó* körrendszer (1. 1); -pontlánc (4. 1. 11); -pontrendszer (1. 1); *pálya* (2. 5. 14); *a*-pálya, *ã*-pálya, *h*-pálya (3. 3. 8); *pont* (2. 1); *a*-pont, *b*-pont (3. 3. 8); 0-pont (4. 2. 1); *pontlánc* (4. 1. 2); *pontrendszer* (1. 1); *pozitív* lánc (2. 6); -pontlánc (4. 1. 11); *út* (2. 5. 16); *ütközés* (2. 2. 2); *vonal* (2. 5. 13); *zárt* lánc (2. 5. 2).

IRODALOM

[1] G. B. Dantzig and D. R. Fulkerson: On the max-flow min-cut theorem of networks, Lienar Inequalities and Related System, *Annals of Math. Study,* **38** (1956) 215—221.

[2] R. P. Dilworth,: A decompocition theorem for partially ordered sets, *Annals of Math.,* **51** (1950) 161—166.

[3] EGERVÁRY J.: Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól, *Mat. és Fiz. Lapok*, XXXVIII (1931) 16—27.

[4] L. R. FORD, JR and D. R. FULKERSON: Maximal flow through a network, *Canadian J. of Math.*, **VIII** (1956) 399—404.

[5] L. R. FORD, JR. and D. R. FULKERSON: A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, *Canadian J. of Math.* **IX** (1957) 210—218.

[6] T. GALLAI (GRÜNWALD): Ein neuer Beweis eines Mengerschen Zatzes, *J. of the London Math. Soc.*, **13** (1938) 188—192.

[7] D. KÖNIG: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, (1936).

[8] K. MENGER: Kurventheorie, Leipzig und Berlin, (1932) 221—228.

[9] W. T. TUTTE: The 1-factors of oriented graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 (1953) 922—931.

(Beérkezett: 1957. VI. 11. Átdolgozva: 1957. VII. 6.)

SZTOCHASZTIKUS HALMAZFÜGGVÉNYEKRŐL. II.

(EGY ÚJ SZTOCHASZTIKUS INTEGRÁL)

PRÉKOPA ANDRÁS

Bevezetés

Jelen dolgozat tárgya a [13] dolgozatban bevezetett sztochasztikus halmazfüggvényekre vonatkozó integrál elméletének a felépítése.

A valószínűségszámítási irodalomban több különböző típusú sztochasztikus integrál ismeretes. Történetileg az első N. WIENERtől [16] származik. A stacionárius sztochasztikus folyamatok elméletében fellépő sztochasztikus Riemann- és Stieltjes-integrálokat A. N. KOLMOGOROV [9], [10] vezette be 1940-ben. Az utóbbihoz hasonló integrált a funkcionális analízisben is használnak önadjungált operátorok spektrális előállításánál. Egy független növekményű folyamatokkal definiált sztochasztikus Stieltjes-integrált vezetett be K. Ito 1951-ben [8].

Mindkettőt általánosította könyvében [5] J. L. DOOB. Az eddig felsorolt sztochasztikus integrálok esetében az alaptér, amelyben integrálunk, a számegyenes valamilyen halmaza. S. BOCHNERtől [1] származik egy olyan sztochasztikus integrál, amelyben absztrakt alaptér szerepel, azonban a véletlen értékű halmazfüggvény általában csak végesen additív és ezért az absztrakt Lebesgue-integrál elmélete nem általánosítható erre az esetre. Az e dolgozatban bevezetett integrál általános egyrészt abból a szempontból, hogy absztrakt alaptérben integrálunk, másrészt az integrálban fellépő valószínűségi változók momentumairól semmit sem teszünk fel, ellentétben az összes korábban bevezetett sztochasztikus integrálokkal, amelyekben valamilyen p-edrendű momentumok létezésére mindig szükség van, ahol $p \geqq 1$. A speciálitása abban van, hogy a mértéket helyettesítő $\xi(A)$ halmazfüggvény olyan tulajdonságú, hogy diszjunkt halmazokhoz független valószínűségi változókat rendel hozzá. Viszont éppen ez az a tulajdonság, amely lehetővé teszi az I. FEJEZET 1. §-ában definiált integrál általános feltételek mellett való exisztenciájának és számos tulajdonságának a bebizonyítását.

Az (1. 3) integrál a Lebesgue-integrál általánosítása és a legtöbb tulajdonság, amellyel a Lebesgue-integrál rendelkezik, itt is érvényes.

Az egyes tételek megfogalmazásánál nem voltam tekintettel arra a triviális általánosításra, hogy elég, ha valamilyen tulajdonság csak majdnem mindenütt teljesül. Ezeket az általánosításokat ugyanis mindenütt bizonyítás nélkül ki lehet mondani.

Az egész elmélet a teljesen additív $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ sztochasztikus halmazfüggvényeknek azon a tulajdonságán alapul, hogy az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ eloszlásfüggvény-halmaz (feltételesen) kompakt.

A gyakorlati alkalmazásokra szerző későbbi dolgozataiban kíván visszatérni.

Alapfogalmak és jelölések

A [13] dolgozat elején bevezetett fogalmakat és jelöléseket teljes egészében átvesszük. Végig az egész dolgozatban $\xi(A)$ egy H halmaz bizonyos részhalmazaiból alkotott $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvényt jelent. H egy tetszőleges elemét h-val jelöljük. Csupán a III. FEJEZETben beszélünk egyszerre több olyan sztochasztikus halmazfüggvényről, amelyre integrálunk és a IV. FEJEZETben egy-két állítás bizonyításánál nincs szükségünk arra, hogy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű, elegendő, ha csak gyűrű.

Ha azt mondjuk, hogy egy $\varphi(h)$ függvény integrálható, akkor — hacsak más megjegyzést nem teszünk — mindig a $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ teljesen additív halmazfüggvényre vonatkozó integrálhatóságra gondolunk. Ha egy függvényt integrálhatónak nevezünk, akkor természetesen eleve feltesszük, hogy a szóbanforgó függvény mérhető.

Csupán egy új fogalmat kell bevezetnünk, amely a [11] dolgozatban nem fordult elő és ez a következő: azt mondjuk, hogy egy $X \in \mathfrak{S}$ halmaz 0-halmaz a $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ teljesen additív halmazfüggvényre vonatkozólag, ha minden $Y \in X\mathfrak{S}$ halmazra $\xi(Y) = 0$.

I. FEJEZET

AZ INTEGRÁL DEFINÍCIÓJA ÉS EXISZTENCIÁJA

1. §. Definíciók

A tárgyalás egyszerűsítése céljából bevezetjük a következő definíciókat:

1. DEFINÍCIÓ: Egy kétirányban végtelen $\{y_k\}$ számsorozatot *osztópontsorozatnak* nevezünk, ha $y_k < y_{k+1}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = \infty$, $\lim\limits_{k \to -\infty} y_k = -\infty$ és $\sup\limits_k (y_{k+1} - y_k) < \infty$. Az osztópontsorozatok egy $\{y_k^{(n)}\}$ sorozatát *osztópont-kettőssorozatnak* fogjuk nevezni.

2. DEFINÍCIÓ: Egy $\{y_k^{(n)}\}$ osztópont-kettőssorozatot *végtelenül finomnak* nevezünk, ha

$$\lim_{n \to \infty} \sup_k (y_{k+1}^{(n)} - y_k^{(n)}) = 0.$$

Legyen $\varphi(h)$ egy a H térben értelmezett, az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűre nézve mérhető, valós értékű függvény és $\{y_k\}$ egy osztópontsorozat. Tekintsük a következő végtelen sort

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \xi(AH_k), \tag{1.1}$$

ahol $A \in \mathfrak{S}$, $H_k = \{h : y_k \leqq \varphi(h) < y_{k+1}\}$. A H_k halmazok diszjunktak és összegük egyenlő H-val.

A $\{H_k\}$ halmazrendszert az $\{y_k\}$ osztópontsorozat és a $\varphi(h)$ függvény által meghatározott *felosztásnak* fogjuk nevezni.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha minden elég finom osztópont-sorozatra a független valószinűségi változókból álló (1.1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál és $\{y_k^{(n)}\}$ az osztópontok egy végtelenül finom kettőssorozata, akkor az

$$\eta_n(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k^{(n)} \xi(AH_k^{(n)}) \tag{1.2}$$

sorozat sztochasztikusan konvergál egy valószínűségi változóhoz. Ezt a határértéket, amely nyilván független az $\{y_k^{(n)}\}$ sorozat speciális választásától, a $\varphi(h)$ függvény A halmazon vett integráljának nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$\int_A \varphi(h) \xi(dA). \tag{1.3}$$

Az (1.3) integrál definíciójából következik, hogy ha $\varphi(h)$ mérhető, és $|\varphi(h)|$ integrálható az $A \in \mathfrak{S}$ halmazon, akkor ugyanez érvényes a $\varphi(h)$ függvényre is. Valóban, $|\varphi(h)|$ akkor integrálható, ha minden elég finom $\{y_k\}$ osztópontsorozatra a

$$\sum_{k: y_k \geqq 0} y_k \xi(AH_k), \qquad -\sum_{k: y_k < 0} y_{k+1} \xi(AH_k)$$

sorok minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergálnak. Ám a $\sup(y_{k+1} - y_k) < \infty$ feltétel miatt a második sor akkor és csak akkor konvergál minden sorrendben 1 valószínűséggel, ha ugyanez érvényes a

$$\sum_{k: y_k < 0} y_k \xi(AH_k)$$

sorra (vö. a 345. oldalon álló megjegyzéssel).

2. §. Két segédtétel

A [13] dolgozatban szerepel a következő halmazfüggvény

$$W(T, A) = \mathrm{Var}_{\alpha}(A) \qquad (A \in \mathfrak{S}), \tag{1.4}$$

ahol

$$\alpha(T, B) = \sup_{|t| \leqq T} |1 - f(t, B)| \qquad (B \in \mathfrak{S}) \tag{1.5}$$

és T tetszőleges, de rögzített pozitív szám. A [13] dolgozat 3.2 TÉTELének bizonyítása közben adódott az az eredmény, hogy minden pozitív T-re az (1.4) halmazfüggvény véges (tehát egyúttal korlátos) mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn. A továbbiakban ez a mérték alapvető szerepet fog játszani, első segédtételünk erre és egy vele szorosan összefüggő halmazfüggvényre vonatkozik.

1.1 TÉTEL: *Minden rögzített $A \in \mathfrak{S}$ halmazra*

$$\lim_{T \to 0} W(T, A) = 0, \tag{1.6}$$

azaz $W(T, A)$ folytonos a $T = 0$ pontban ($W(0, A)$ ugyanis nyilvánvalóan 0). *Igaz továbbá az is, hogy minden $A \in \mathfrak{S}$ halmazra az „a" számtól függő*

$$\mathrm{Var}_{\mu(a)}(A), \quad \mu(a, B) = \mathbf{P}(|\xi(B)| > a) \qquad (B \in \mathfrak{S}) \tag{1.7}$$

függvény folytonos az $a = \infty$ helyen, azaz

$$\lim_{a \to \infty} \mathrm{Var}_{\mu(a)}(A) = 0. \tag{1.8}$$

BIZONYÍTÁS: Legyenek $B_1, \ldots, B_r$ az $A\mathfrak{S}$ σ-gyűrűhöz tartozó diszjunkt halmazok. A [13] dolgozat 3.4 TÉTELe szerint minden pozitív ε-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy

$$-\log |f(t, C)| \leqq \varepsilon, \quad |\arg f(t, C)| \leqq \varepsilon,\text{[1]} \tag{1.9}$$

hacsak $|t| \leqq \delta$. Soroljuk a $B_1, \ldots, B_r$ halmazokat két csoportba, aszerint, hogy $\arg f(t, B_k) > 0$, illetve $\arg f(t, B_k) \leqq 0$. Ekkor (1.9) szerint $\left(\text{ha } \varepsilon < \frac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \sum_k{}' \arg f(t, B_k) &= \arg f(t, B') \leqq \varepsilon, \\ -\sum_k{}'' \arg f(t, B_k) &= -\arg f(t, B'') \leqq \varepsilon, \end{aligned} \tag{1.10}$$

ahol a Σ', ill. Σ'' összegezés az első, ill. második csoportba tartozó halmazok indexeire vonatkozik, B', ill. B'' pedig az első, illetve második csoportba tartozó halmazok összegét jelenti. (1.10) szerint

$$\sum_{k=1}^{r} |\arg f(t, B_k)| \leqq 2\varepsilon, \tag{1.11}$$

[1] arg z alatt itt csak a függvény főértékét értjük: $-\pi < \arg z \leqq \pi$.

hacsak $|t| \leqq \delta$. Másrészt (1.9)-ből az is következik, hogy

$$-\log|f(t, B)| \leqq \varepsilon \qquad (B = B' + B''), \tag{1.12}$$

hacsak $|t| \leqq \delta$. (1.11) és (1.12) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{r} |1-f(t, B_k)| &= \sum_{k=1}^{r} \left|1-e^{i \arg f(t, B_k)} |f(t, B_k)|\right| \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{r} |1-e^{i \arg f(t, B_k)}| + \sum_{k=1}^{r} (1-|f(t, B_k)|) \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{r} |\arg f(t, B_k)| - \sum_{k=1}^{r} \log|f(t, B_k)| \leqq \\ &\leqq 2\varepsilon - \log|f(t, B)| \leqq 3\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Alkalmazva az

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |1-f(t)|\, dt \geqq \frac{1}{10} \int_{|x|>\frac{1}{a}} dF(x) \tag{1.14}$$

egyenlőtlenséget, amelyben $F(x)$ egy tetszőleges eloszlásfüggvény, $f(t)$ ennek karakterisztikus függvénye és a pozitív szám (vö. [13] 295. old.), (1.13)-ból következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}\left(|\xi(B_k)| > \frac{1}{a}\right) \leqq \frac{10}{2a} \sum_{k=1}^{r} \int_{-a}^{a} |1-f(t, B_k)|\, dt \leqq 30\varepsilon, \tag{1.15}$$

hacsak $\frac{1}{a} > \frac{1}{\delta}$. Ezzel tételünk második állítását igazoltuk.

A tétel első állítása ebből, [13] 3.8 TÉTELéből és az

$$\begin{aligned} |1-f(t, B_k)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{itx})\, dF(x, B_k) \right| \leqq |t| \left| \int_{|x| \leqq a} x\, dF(x, B_k) \right| + \\ &+ \frac{t^2}{2} \int_{|x| \leqq a} x^2\, dF(x, B_k) + 2\mathbf{P}(|\xi(B_k)| > a) \end{aligned} \tag{1.16}$$

egyenlőtlenségből adódik, ahol a tetszőleges pozitív szám. Ezzel az 1.1 TÉTELt bebizonyítottuk.

A következő tételre elsősorban az (1.3) integrál exisztenciájának bizonyításánál lesz szükség.

1.2 TÉTEL: *Legyen* $C_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ *az* $A\mathfrak{S}$ $(A \in S)$ *σ-gyűrű olyan halmazrendszere, melyre teljesül, hogy* $C_i^{(n)} C_k^{(n)} = 0$, *ha* $i \neq k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *és* $\delta_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ *olyan, valós számokból álló* *kettőssorozat, melyre* $\limsup\limits_{n\to\infty}\,\sup\limits_{k}|\delta_k^{(n)}|=0$. *Ez esetben*

$$\sum_k \xi(C_k^{(n)})\delta_k^{(n)} \Longrightarrow 0, \tag{1.17}$$

ha $n\to\infty$.

BIZONYÍTÁS: Rögzített n mellett az (1.17) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, mert a $\sum\limits_k \xi(C_k^{(n)})$ sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál és a $\delta_k^{(n)}$ számok korlátosak. Egy (1.16)-típusú egyenlőtlenség felhasználásával a következőkre jutunk

$$\begin{aligned} \Big|1-\prod_k f(t\delta_k^{(n)}, C_k^{(n)})\Big| &\leqq \sum_k \big|1-f(t\delta_k^{(n)}, C_k^{(n)})\big| \leqq \\ &\leqq |t|\sum_k |\delta_k^{(n)}|\,\Big|\int\limits_{|x|\leqq a} x\,dF(x, C_k^{(n)})\Big| + \\ &+\frac{t^2}{2}\sum_k (\delta_k^{(n)})^2 \int\limits_{|x|\leqq a} x^2\,dF(x, C_k^{(n)}) + \\ &+2\sum_k \mathbf{P}(|\xi(C_k^{(n)})|>a), \end{aligned} \tag{1.18}$$

ahol a pozitív szám. A [13] dolgozat 3.8 TÉTELe szerint van olyan $K_a>0$ szám, hogy

$$\sum_k \Big|\int\limits_{|x|\leqq a} x\,dF(x, C_k^{(n)})\Big| \leqq K_a,$$

$$\sum_k \int\limits_{|x|\leqq a} x^2\,dF(x, C_k^{(n)}) \leqq K_a.$$

Feltehetjük, hogy $K_a\geqq 1$. Az 1.1 TÉTEL szerint a megválasztható oly módon, hogy (1.18) jobboldalán a harmadik tag kisebb, mint $\varepsilon(\varepsilon\leqq 1)$. Ezután n-et olyan nagynak választjuk, hogy $|\delta_k^{(n)}|\leqq \frac{\varepsilon}{K_a}\leqq 1$ $(k=1,2,\ldots)$. Ekkor az (1.18) egyenlőtlenség jobboldalán álló összeg nem nagyobb, mint $\varepsilon(|t|+t^2/2+1)$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

3. §. Az integrál exisztenciája

Most visszatérünk eredeti célunkhoz, az (1.3) integrál exisztenciaproblémáinak vizsgálatához. Bebizonyítjuk, hogy fennáll az

1.3. TÉTEL: *Legyen $\varphi(h)$ egy az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűre nézve mérhető, valós értékű függvény és $A\in\mathfrak{S}$ egy halmaz. Tegyük fel, hogy van olyan $\delta>0$ szám, hogy minden $\{y_k\}$ osztópontsorozatra, melyre $\sup\limits_k (y_{k+1}-y_k)\leqq\delta$, az* (1.1) *sor minden sorrendben* 1 *valószínűséggel konvergál. Ebben az esetben létezik az* (1.3) *integrál. Speciálisan minden korlátos és mérhető $\varphi(h)$ függvény integrálható.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $\{y_k^{(n)}\}$ az osztópontok egy végtelenül finom kettőssorozata. Egyesítsük az $\{y_k^{(n)}\}$ és $\{y_k^{(m)}\}$ sorozatokat és jelöljük az egyesített sorozatot $\{z_k\}$-val[2] $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Definiáljuk az L_j halmazokat a következőképpen: $L_j=\{h: z_j \leqq \varphi(h) < z_{j+1}\}$ és tekintsük a következő kifejezést

$$
\begin{aligned}
&\sum_k y_k^{(n)} \xi(AH_k^{(n)}) - \sum_k y_k^{(m)} \xi(AH_k^{(m)}) = \\
(1.19) \qquad &= \sum_k \sum_{j: L_j \subseteq H_k^{(n)}} (y_k^{(n)} - z_j) \xi(L_j A) - \\
&- \sum_k \sum_{j: L_j \subseteq H_k^{(m)}} (y_k^{(m)} - z_j) \xi(L_j A).
\end{aligned}
$$

A jobboldalon álló összegekben az $y_k^{(n)}-z_j$ és $y_k^{(m)}-z_j$ számok az 1. DEFINÍCIÓ értelmében korlátosak, sőt, ha $\delta_{kj}^{(n)}=y_k^{(n)}-z_j$, akkor az $\{y_k^{(n)}\}$ kettőssorozat végtelenül finom volta miatt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_k \max_{j: L_j \subseteq H_k^{(n)}} |\delta_{kj}^{(n)}| = 0.$$

Alkalmazva az 1.2 TÉTELt, azt kapjuk, hogy az (1.19) különbség sztochasztikusan 0-hoz tart, ha $n, m \to \infty$.

Mivel a Cauchy-féle konvergenciakritérium teljesül, következik, hogy van olyan valószínűségi változó, melyhez az (1.19) kifejezés baloldalán álló első tag sztochasztikusan konvergál. Ám ez a valószínűségi változó független az $\{y_k^{(n)}\}$ kettőssorozat speciális választásától, amint az a megszokott módon igen egyszerűen belátható. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS: Egyszerűen belátható, hogy ha az (1.1) összeg minden elég finom osztópontsorozatra minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, akkor ugyanez fennáll tetszőleges osztópontsorozatra is. Ez és még több más állítás, mely tárgyalásunkban elő fog fordulni, abból a tényből következik, hogy ha egy független valószínűségi változókból álló

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, akkor ugyanez érvényes a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$$

sorra is, ahol c_k tetszőleges, korlátos, valós számsorozat.[3]

Most levezetünk egy egyenlőtlenséget, amely alapvető szerepet játszik bizonyításainkban. Ezt fejezi ki az

[2] Az n-től és m-től való függést a rövidség kedvéért nem írjuk ki.

[3] Ez belátható például az ún. három sor tétel segítségével.

1.4. TÉTEL: *Legyen $\varphi(h)$ olyan mérhető függvény, melyre teljesül, hogy $|\varphi(h)| \leqq K < \infty$. Ekkor $g(t, A)$-val jelölve a $\varphi(h)$ függvény A ($A \in \mathfrak{S}$) halmazon vett integráljának karakterisztikus függvényét, fennáll az*

$$|1-g(t, A)| \leqq W(tK, A)$$

egyenlőtlenség.

BIZONYÍTÁS: Válasszunk egy végtelenül finom $\{y_k^{(n)}\}$ osztópont-kettőssorozatot és jelölje $\{H_k^{(n)}\}$ a megfelelő felosztássorozatot. Ha a

$$\sum_k y_k^{(n)} \xi(AH_k^{(n)})$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvényét $g_n(t, A)$-val jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$|1-g_n(t, A)| \leqq \sum_k |1-f(ty_k^{(n)}, AH_k^{(n)})| \leqq$$

$$\leqq \sum_k W(ty_k^{(n)}, AH_k^{(n)}) \leqq \sum_k W(tK, AH_k^{(n)}) =$$

$$= W(tK, A).$$

Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet, a keresett egyenlőtlenségre jutunk. Q. e. d.

4. §. Az (1.3) integrál létezésének egy szükséges feltétele

Ebben a §-ban a következő tételt bizonyítjuk be:

1.5. TÉTEL: *Ha egy $\varphi(h)$ mérhető függvény integrálható az $A \in \mathfrak{S}$ halmazon, akkor minden olyan a_n, b_n sorozatpárra, melyre $a_{n+1} < a_n$, $b_{n+1} > b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, az*

$$\eta(A_n) = \int_{A_n} \varphi(h)\xi(dA), \quad A_n = \{h: A, a_n \leqq \varphi(h) < b_n\} \tag{1.20}$$

sorozat 1 *valószínűséggel konvergál. Ez esetben*

$$\int_A \varphi(h)\, \xi(dA) = \lim_{n\to\infty} \eta(A_n). \tag{1.21}$$

BIZONYÍTÁS: Feltehetjük, hogy $\sup\limits_n |a_{n+1} - a_n| < \infty$, $\sup\limits_n (b_{n+1} - b_n) < \infty$, $a_n < 0$, $b_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Egyesítsük ezt a két sorozatot egy $\{y_n\}$ osztópontsorozattá és vizsgáljuk a

$$\sum_n \int_{AH_n} (y_n - \varphi(h))\, \xi(dA) \tag{1.22}$$

sort, amelyről még nem tudjuk, hogy konvergens; itt $\{H_n\}$ az $\{y_n\}$ osztópontsorozathoz és a $\varphi(h)$ függvényhez tartozó felosztást jelenti. Az (1.22) sor

n-edik tagjának a karakterisztikus függvényét $f_n(t)$-vel jelölve, az 1.4 TÉTEL következtében fennáll az

$$|1-f_n(t)| \leqq W(\delta t, AH_n) \tag{1.23}$$

reláció, ahol $\delta = \sup(y_{n+1}-y_n)$. (1.23)-ból következik, hogy

$$\sum_n |1-f_n(t)| \leqq W(\delta t, A). \tag{1.24}$$

Eszerint az (1.22) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Átírva az (1.22) sort a

$$\sum_n y_n(AH_n) - \sum_n \int_{AH_n} \varphi(h)\,\xi(dA)$$

alakba[4] és figyelembe véve az 1.3 TÉTELt, látható, hogy az (1.20) típusú sorozatok 1 valószínűséggel konvergálnak.

Most bebizonyítjuk az (1.21) relációt. Jelölje $\eta(A)$ az $\eta(A_n)$ sorozat határértékét. Válasszunk egy olyan $\{y_n^{(N)}\}$ végtelenül finom osztópont-kettőssorozatot, melyre teljesül, hogy $\{y_n^{(N+1)}\}$ tagjai között $\{y_n^{(N)}\}$ tagjai mind előfordulnak és $\{y_n^{(1)}\} = \{y_n\}$. Ha $\{H_n^{(N)}\}$ jelenti a megfelelő felosztássorozatot, akkor, az előbbieket felhasználva, következik, hogy minden rögzített N-re

$$\sum_n \int_{AH_n^{(N)}} \varphi(h)\,\xi(dA) = \eta(A). \tag{1.25}$$

Másrészt a

$$\sum_n \int_{AH_n^{(N)}} (y_n^{(N)} - \varphi(h))\,\xi(dA) \tag{1.26}$$

sor n-edik tagjának karakterisztikus függvényét $f_n^{(N)}(t)$-vel, az összeg karakterisztikus függvényét pedig $f^{(N)}(t)$-vel jelölve, az 1.4 TÉTELből következik, hogy

$$|1-f^{(N)}(t)| \leqq \sum_n |1-f_n^{(N)}(t)| \leqq W(\delta^{(N)} t, A), \tag{1.27}$$

ahol $\delta^{(N)} = \sup\limits_n (y_{n+1}^{(N)} - y_n^{(N)})$. (1.27)-ből, figyelembe véve az 1.1 TÉTELt, következik, hogy $f^{(N)}(t) \Longrightarrow 1$, ha $N \to \infty$. Ámde (1.25) alapján az (1.26) (N-től függő) sorozat sztochasztikusan konvergál az

$$\int_A \varphi(h)\,\xi(dA) - \eta(A)$$

valószínűségi változóhoz. Ez utóbbi tehát 1 valószínűséggel 0. Q. e. d.

[4] Ez nyilvánvalóan megtehető. A 2.4 TÉTELnek itt felhasznált speciális esete triviális.

II. FEJEZET

AZ $\int\limits_A \varphi(h)\,\xi(dA)$ INTEGRÁL TULAJDONSÁGAI

1. §. Az integrál elemi tulajdonságai

A rendszeres tárgyalás céljából először kimondjuk a következő két, nyilvánvalóan igaz tételt.

2. 1 TÉTEL: *Ha a $\varphi(h)$ mérhető függvény integrálható az $A \in \mathfrak{S}$ halmazon, akkor $c\varphi(h)$ is integrálható ugyanott és*

$$\int\limits_A c\,\varphi(h)\,\xi(dA) = c\int\limits_A \varphi(h)\,\xi(dA). \tag{2. 1}$$

2. 2 TÉTEL: *Ha a $\varphi(h)$ mérhető függvény integrálható az $A_1 \in \mathfrak{S}$ és $A_2 \in \mathfrak{S}$ halmazokon, ahol $A_1A_2 = 0$, akkor integrálható az $A_1 + A_2$ halmazon is és*

$$\int\limits_{A_1+A_2} \varphi(h)\,\xi(dA) = \int\limits_{A_1} \varphi(h)\,\xi(dA) + \int\limits_{A_2} \varphi(h)\,\xi(dA). \tag{2. 2}$$

Az integrál definíciójából kitűnik, hogy ha egy $\varphi(h)$ korlátos függvény állandó az $A_1, A_2, \ldots$ halmazokon, ahol $A_i \in \mathfrak{S}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $A_iA_k = 0$, ha $i \neq k$ és $\varphi(h) = \varphi_i$, ha $h \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, akkor

$$\int\limits_A \varphi(h)\,\xi(dA) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\,\xi(A_i),\quad A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{2. 3}$$

A jobboldalon álló végtelen sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Bebizonyítható, hogy a (2. 3) reláció és a jobboldalon álló sor konvergenciájára tett megjegyzés nem korlátos integrálható $\varphi(h)$ függvény esetén is fennáll, ha még feltesszük, hogy $\varphi(h)$ az $A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots$ típusú halmazokon is integrálható, ahol $i_1, i_2, \ldots$ tetszőleges, természetes számokból álló sorozat.

2. §. A határozatlan integrál teljes additívitása

Ebben a §-ban a következő tételt bizonyítjuk be.

2. 3 TÉTEL: *Legyen $\varphi(h)$ egy az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű minden halmazán integrálható függvény. Ekkor az*

$$\eta(A) = \int\limits_A \varphi(h)\,\xi(dA) \tag{2. 4}$$

halmazfüggvény teljesen additív.

BIZONYÍTÁS: A (2.4) halmazfüggvény additív volta a 2.2 TÉTELből következik. Másrészt az integrál definíciójából nyilvánvaló, hogy diszjunkt $A_1, A_2, \ldots$ halmazokhoz független $\eta(A_1), \eta(A_2), \ldots$ valószínűségi változók tartoznak. Csupán azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy

$$\eta\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(A_k). \tag{2.5}$$

Tekintsük előbb a korlátos függvény esetét és tegyük fel, hogy $|\varphi(h)| \leqq K$. Legyen $B_1, B_2, \ldots$ az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű egy olyan nem-növekvő halmazsorozata, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$. $f_n(t)$-vel jelölve az $\eta(B_n)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét, az 1.4 TÉTEL szerint fennáll a következő egyenlőtlenség

$$|1-f_n(t)| \leqq W(Kt, B_n). \tag{2.6}$$

Mivel $W(t, A)$ minden pozitív t-re véges mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn, következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} W(Kt, B_n) = 0. \tag{2.7}$$

Felhasználva [13] 2.1 TÉTELét, a (2.6) és (2.7) relációkból állításunk leolvasható.

Most rátérünk a nem-korlátos függvények esetére. Legyen $\mathfrak{S}_i = D_i\mathfrak{S}$, ahol $D_i = \{h: -i \leqq \varphi(h) < i\}$. Jelölje $\mathfrak{R}$ a következő típusú halmazokból alkotott gyűrűt

$$A = A_{l_1} + \cdots + A_{l_r}, \quad A_{l_k} \in \mathfrak{S}_{l_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Az előbbiek szerint $\eta(A)$ teljesen additív az $\mathfrak{R}$ gyűrűn. Ha ugyanis $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazokból álló elemsorozata, $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, akkor valamilyen i-re $A \in \mathfrak{S}_i$ és így minden k-ra $A_k \in \mathfrak{S}_i$. Ámde η teljesen additív az $\mathfrak{S}_i$ gyűrűn, tehát

$$\eta(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(A_k).$$

Most bebizonyítjuk, hogy az η halmazfüggvény kiterjeszthető az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{S}$ σ-gyűrűre (vö. [13] 233. old.) Tekintsünk egy diszjunkt, $\mathfrak{R}$-hez tartozó halmazokból álló $B_1, B_2, \ldots$ sorozatot. Bebizonyítjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta(B_k) \tag{2.8}$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Ez bizonyítani fogja a kiterjesztés elvégezhetőségét (vö. [13] 3. 2 TÉTEL). Legyen

$$C_{i_r k_s^{(r)}} = (D_{i_r+1} - D_{i_r})\, B_{k_s^{(r)}} \quad (i_r < i_{r+1},\ k_s^{(r)} < k_{s+1}^{(r)},\ r, s = 1, 2, \ldots).$$[5]

Mivel $|\varphi(h)| \leqq i_r + 1$, ha $h \in C_{i_r} = \sum_{s=1}^{\infty} C_{i_r k_s^{(r)}}$, következik, hogy

$$\eta(C_{i_r}) = \sum_{s=1}^{\infty} \eta(C_{i_r k_s^{(r)}}) \tag{2.9}$$

és a (2. 9) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Másrészt $\varphi(h)$ integrálható a $C = \sum_{r=1}^{\infty} C_{i_r}$ halmazon is, tehát az 1. 5 TÉTEL szerint (az $a_r = -i_r - 1$, $b_r = i_r + 1$ sorozatokat választva)

$$\eta(C) = \sum_{r=1}^{\infty} \eta(C_{i_r}). \tag{2.10}$$

A (2. 9) és (2. 10) relációkat egybevetve, azt kapjuk, hogy a

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \eta(C_{i_r k_s^{(r)}}) \tag{2.11}$$

sor 1 valószínűséggel konvergál. Most bebizonyítunk egy lemmát.

LEMMA: *Ha egy független valószínűségi változókból álló*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{ik} \tag{2.12}$$

sor (ebben a sorrendben) 1 *valószínűséggel konvergál, továbbá minden* $i_1 < i_2 < \cdots$ *és* $k_1 < k_2 < \cdots$ *indexsorozatpárra a*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \xi_{i_r k_s^{(r)}} \tag{2.13}$$

sor 1 *valószínűséggel konvergál, akkor a* (2. 12) *sor minden sorrendben* 1 *valószínűséggel konvergál.*

BIZONYÍTÁS: Jelölje $f_{ik}(t)$ a ξ_{ik} valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Feltevésünk szerint a

$$\prod_{r=1}^{\infty} \prod_{s=1}^{\infty} f_{i_r k_s^{(r)}}(t)$$

végtelen kettőssorozat minden t-re és minden indexsorozatpárra konvergens, ami nyilván csak úgy lehet, ha minden t-re

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |1 - f_{ik}(t)| < \infty.$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

[5] Az s index esetleg csak véges sok természetes számot fut be.

Alkalmazva a LEMMÁT a $\xi_{ik} = \eta(C_{ik})$ valószínűségi változókra, következik, hogy a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \eta(C_{ik}) \tag{2.14}$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Mivel az 1.5 TÉTEL szerint

$$\eta(B_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta(C_{ik}), \tag{2.15}$$

következik, hogy a (2.8) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál.

Jelölje $\eta^*(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ az $\eta(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ halmazfüggvény kiterjesztettjét és legyen $B \in \mathfrak{S}$. Jelölje továbbá B_N a következő halmazt

$$B_N = \{h : B, \ -N \leqq \varphi(h) < N\}.$$

Az 1.5 TÉTEL szerint

$$\lim_{N \to \infty} \int_{B_N} \varphi(h)\xi(dA) = \int_B \varphi(h)\xi(dA). \tag{2.16}$$

Másrészt

$$\eta^*(B) = \lim_{N \to \infty} \eta^*(B_N) = \lim_{N \to \infty} \eta(B_N) = \lim_{N \to \infty} \int_{B_N} \varphi(h)\xi(dA). \tag{2.17}$$

A (2.16) és (2.17) relációk szerint

$$\eta^*(B) = \int_B \varphi(h)\xi(dA),$$

amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

3. §. Az integrál további tulajdonságai

A közönséges Lebesgue-integrál két tulajdonsága nem vihető át szószerint erre az esetre. Az egyik az, hogy ha $\psi(h)$ integrálható függvény és $\varphi(h)$ olyan mérhető függvény, amelyre $|\varphi(h)| \leqq \psi(h)$, akkor $\varphi(h)$ is integrálható.

Erre ellenpélda a következő. Legyen H a természetes számok halmaza és $\mathfrak{S}$ az ennek valamennyi részhalmazából alkotott σ-algebra. Definiáljuk a $\xi(A)$ halmazfüggvényt a következőképpen:

$$\xi(A) = \sum_{h \in A} (-1)^{h+1} \frac{1}{h^2}. \tag{2.18}$$

Könnyen belátható, hogy a

$$\begin{aligned} \psi(2h-1) &= 2h \\ \psi(2h) &= 2h \end{aligned} \qquad (h = 1, 2, \ldots) \tag{2.19}$$

függvény integrálható az egész H halmazon, de a

$$\varphi(h) = h \qquad (h = 1, 2, \ldots) \tag{2.20}$$

függvény nem integrálható ugyanott, bár nyilván $0 < \varphi(h) \leqq \psi(h)$ minden h-ra. Hasonló példa adható arra, hogy bár a φ_1 és φ_2 függvények integrálhatók egy bizonyos halmazon, de az összegük nem.

Legyen H és $\mathfrak{S}$ ugyanaz, mint az előbb, és definiáljuk a $\varphi_1(h), \varphi_2(h)$ függvényeket a következőképpen

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_1(2h)=(-1)^h 2h,\\ \varphi_1(2h-1)=(-1)^h 2h,\end{array}\right. \qquad (h=1,2,\ldots), \tag{2.21}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_2(1)=0,\\ \varphi_2(2h)=(-1)^{h+1} 2h,\\ \varphi_2(2h+1)=(-1)^{h+1} 2h,\end{array}\right. \qquad (h=1,2,\ldots). \tag{2.22}$$

Ekkor $\varphi_1(h)+\varphi_2(h)$ a páros számokon eltűnik, a páratlan számokon pedig az integrálja nem létezik, mert az integrált definiáló összeg nem abszolút konvergens.

Látjuk tehát, hogy a Lebesgue-integrál e két tulajdonsága még konstans értékű $\xi(A)$ halmazfüggvények esetén sem teljesül. Ezek helyett olyan tételeket fogunk bebizonyítani, melyeknek itt fellépő, újszerű feltételei a Lebesgue-integrál esetében triviálisan teljesülnek. Úgy tűnik azonban, hogy a 2.4, 2.7 és 2.8 TÉTELek az általunk bevezetett (3.1) integrál váratlanul jó tulajdonságait fejezik ki. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk a [13] dolgozat V. fejezetére, ahol szerző egy példát adott pozitív és negatív részekre fel nem bontható sztochasztikus halmazfüggvényre (4. példa). A következő tétel két függvény összegének az integráljára vonatkozik, a 2.7 és 2.8 TÉTELekhez további előkészítés szükséges.

2.4. TÉTEL: *Ha a $\varphi_1(h)$ és $\varphi_2(h)$ függvények egy $A \in \mathfrak{S}$ halmaz minden mérhető részhalmazán integrálhatók, akkor ugyanez érvényes a $\varphi_1(h)+\varphi_2(h)$ függvényre is és*

$$\int_A (\varphi_1(h)+\varphi_2(h))\xi(dA) = \int_A \varphi_1(h)\xi(dA) + \int_A \varphi_2(h)\xi(dA). \tag{2.23}$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $\{y_k^{(n)}\}$ egy végtelenül finom osztópont-kettőssorozat és $\{H_k^{(n)}\}$ a $\varphi_1(h)+\varphi_2(h)$ függvény által meghatározott megfelelő felosztássorozat. Tekintsük a következő sort

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(y_k^{(n)}\xi(AH_k^{(n)}) - \int_{AH_k^{(n)}} \varphi_1(h)\xi(dA) - \int_{AH_k^{(n)}} \varphi_2(h)\xi(dA)\right) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k^{(n)}\xi(AH_k^{(n)}) - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{AH_k^{(n)}} \varphi_1(h)\xi(dA) - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{AH_k^{(n)}} \varphi_2(h)\xi(dA).\end{aligned} \tag{2.24}$$

A jobboldalon álló második és harmadik sor a 2.3 TÉTEL szerint minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál és a $\varphi_1(h)$, ill. $\varphi_2(h)$ függvény integrálját adja az A halmazon. A baloldalon álló sorról még nem tudjuk, hogy konvergens-e. Legyen $\{z_s^{(m)}\}$ egy végtelenül finom osztópont-kettőssorozat, továbbá $\{L_s^{(m)}\}$ a $\varphi_1(h)$, $\{M_s^{(m)}\}$ pedig a $\varphi_2(h)$ függvény által meghatározott felosztássorozat és jelölje $f_k^{(n)}(t)$ a (2.24) formula baloldalán álló sor k-adik tagjának karakterisztikus függvényét. Mivel

$$
\begin{aligned}
& y_k^{(n)}\xi(AH_k^{(n)}) - \int_{AH_k^{(n)}} \varphi_1(h)\xi(dA) - \int_{AH_k^{(n)}} \varphi_2(h)\xi(dA) = \\
& = \lim_{m\to\infty} \text{st.} \Big\{ y_k^{(n)}\xi(AH_k^{(n)}) - \sum_s z_s^{(m)}\xi(AH_k^{(n)}L_s^{(m)}) - \\
(2.25) \qquad & - \sum_r z_r^{(m)}\xi(AH_k^{(n)}M_r^{(m)}) \Big\} = \\
& = \lim_{m\to\infty} \text{st.} \sum_{s,r} (y_k^{(n)} - z_s^{(m)} - z_r^{(m)})\xi(AH_k^{(n)}L_s^{(m)}M_r^{(m)}),
\end{aligned}
$$

továbbá az utolsó összegben $|y_k^{(n)} - z_s^{(m)} - z_r^{(m)}| \leqq \delta_n$, ahol $\delta_n = \sup_k (y_{k+1}^{(n)} - y_k^{(n)})$, következik, hogy

$$|1 - f_k^{(n)}(t)| \leqq W(\delta_n t, AH_k^{(n)}).$$

Innen összegezés útján a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |1 - f_k^{(n)}(t)| \leqq W(\delta_n t, A) \tag{2.26}$$

formulára jutunk. Ez egyrészt bizonyítja, hogy a (2.24) baloldalán álló sor, tehát a jobboldalon álló első sor is minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Másrészt az $n \to \infty$ határátmenetet elvégezve és figyelembe véve az 1.1 TÉTELt, azt kapjuk, hogy a (2.24) kifejezés jobboldalán álló sor sztochasztikusan 0-hoz tart, vagyis fennáll a (2.23) formula. Az előbbi okoskodást az A halmaz egy tetszőleges mérhető részhalmazára elvégezve, azt találjuk, hogy a $\varphi_1(h) + \varphi_2(h)$ függvény ezen a halmazon is integrálható. Q. e. d.

4. §. Két segédtétel

2.5 TÉTEL: *Ahhoz, hogy egy $\varphi(h)$ függvény integrálható legyen az $A \in \mathfrak{S}$ halmaz minden mérhető részhalmazán, szükséges és elegendő, hogy minden $\{y_k\}$ osztópontsorozatra teljesüljön a*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} W(ty_k, AH_k) < \infty \tag{2.27}$$

reláció, ahol $\{H_k\}$ a $\varphi(h)$ függvény által meghatározott megfelelő felosztás.

BIZONYÍTÁS: Az elegendőség az 1.3 TÉTELből közvetlenül adódik. A szükségességet indirekt úton bizonyítjuk. Ha a (2.27) összeg végtelen, akkor találhatók olyan $B_{kl} \in AH_k\mathfrak{S}$ $(l=1,2,\ldots,l_k;\ k=1,2,\ldots)$ halmazok, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k}|1-f(ty_k,B_{kl})|=\infty. \tag{2.28}$$

Legyen $K=\sup_k(y_{k+1}-y_k)$ és jelölje $f_{kl}(t)$ az

$$\int_{B_{kl}}\varphi(h)\,\xi(dA)-y_k\,\xi(B_{kl})=\int_{B_{kl}}(\varphi(h)-y_k)\,\xi(dA) \tag{2.29}$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Az 1.4 TÉTEL szerint

$$|1-f_{kl}(t)|\leqq W(Kt,B_{kl}). \tag{2.30}$$

(2.30) szerint

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k}|1-f_{kl}(t)|<\infty, \tag{2.31}$$

tehát a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k}\left(\int_{B_{kl}}\varphi(h)\,\xi(dA)-y_k\,\xi(B_{kl})\right) \tag{2.32}$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Ámde ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k}\int_{B_{kl}}\varphi(h)\,\xi(dA) \tag{2.33}$$

sor is, hiszen $\varphi(h)$ az A halmaz minden mérhető részhalmazán integrálható, tehát alkalmazható a 2.3 TÉTEL az $A\mathfrak{S}$ σ-gyűrűre. Eszerint a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k}y_k\,\xi(B_{kl}) \tag{2.34}$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, ami ellentmond (2.28)-nak. Q. e. d.

2.6 TÉTEL: *Legyen $\varphi(h)$ és $\psi(h)$ két nem-negatív, mérhető függvény. Tegyük fel, hogy $\varphi(h)\leqq\psi(h)$ és $\psi(h)$ integrálható az $A\in\mathfrak{S}$ halmaz minden mérhető részhalmazán. Ez esetben minden $\{y_k\}$ $(y_0=0)$ osztópontsorozatra és minden t-re fennáll a*

$$\sum_{k=0}^{\infty}W(ty_k,AL_k)\leqq\sum_{k=0}^{\infty}W(ty_k,AH_k) \tag{2.35}$$

egyenlőtlenség, ahol $\{L_k\}$ a $\varphi(h)$, $\{H_k\}$ pedig a $\psi(h)$ függvények által meghatározott felosztás.

BIZONYÍTÁS: Mivel

$$L_k = \{h : y_k \leqq \varphi(h) < y_{k+1}\},$$
$$(k=0,1,2,\dots),$$
$$H_k = \{h : y_k \leqq \psi(h) < y_{k+1}\},$$

következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{j} H_k \subseteq \sum_{k=0}^{j} L_k \qquad (j=0,1,2,\dots), \tag{2.36}$$

$$H_j L_k = 0, \quad \text{ha} \quad k > j. \tag{2.37}$$

Ezeket felhasználva, a következőkre jutunk

$$\sum_{j=0}^{\infty} W(y_j t, AH_j) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} W(y_j t, AH_j L_k) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} W(y_j t, AH_j L_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} W(y_j t, AH_j L_k) \geqq$$
$$\geqq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} W(y_k t, AH_j L_k) = \sum_{k=0}^{\infty} W\left(y_k t, A\sum_{j=k}^{\infty} H_j L_k\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} W(y_k t, AL_k),$$

ami éppen állításunkat fejezi ki.

5. §. A majorált függvényre vonatkozó tétel és a nagy Lebesgue-tétel analogonja

E fejezet 3. §-ának elején láttunk arra példát, hogy ha egy függvénynek van egy adott halmazon integrálható majoránsa, ebből még nem következik, hogy a függvény integrálható. Az integrálhatóságra vonatkozó pozitív állítás bebizonyításához szükségünk van ugyanarra a feltételre, amely a 2. 4 TÉTELben szerepelt. Állításunkat tartalmazza a

2. 7 TÉTEL: *Legyen $\varphi(h)$ egy mérhető, $\psi(h)$ pedig egy, az $A \in \mathfrak{S}$ halmaz minden $\mathfrak{S}$-hez tartozó részhalmazán integrálható függvény, melyre $|\varphi(h)| \leqq \psi(h)$. Ekkor $\varphi(h)$ is integrálható az A halmaz valamennyi $\mathfrak{S}$-hez tartozó részhalmazán.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $B \in A\mathfrak{S}$. Jelölje B_1 (ill. B_2) a B halmaznak azt a részhalmazát, amelyen $\varphi(h) \geqq 0$ (ill. $\varphi(h) < 0$). A 2. 5 és 2. 6 TÉTELekből következik, hogy $\varphi(h)$ integrálható a B_1 és B_2 halmazok mindegyikén, tehát a 2. 2 TÉTEL szerint ezek összegén is integrálható. Q. e. d.

Most bebizonyítjuk az ún. nagy Lebesgue-tétel analogonját.

2. 8. TÉTEL: *Legyen* $\varphi_N(h)$ $(N=1, 2, \ldots)$ *egy mérhető függvényekből álló sorozat, melyre teljesül, hogy* $|\varphi_N(h)| \leqq \psi(h)$, *ahol* $\psi(h)$ *egy* $A \in \mathfrak{S}$ *halmaz minden mérhető részhalmazán integrálható függvény. Tegyük fel továbbá, hogy létezik a* $\varphi(h) = \lim\limits_{N\to\infty} \varphi_N(h)$ *határérték. Ekkor a* $\varphi_N(h)$, $\varphi(h)$ *függvények is integrálhatók az* A *halmaz minden mérhető részhalmazán és*

$$\int\limits_A \varphi_N(h)\,\xi(dA) \Longrightarrow \int\limits_A \varphi(h)\,\xi(dA). \tag{2. 38}$$

BIZONYÍTÁS: A $\varphi_N(h)$ és $\varphi(h)$ függvények integrálhatóságára vonatkozó állítás a 2. 7 TÉTELből következik. A 2. 6 TÉTEL szerint elegendő a $\varphi(h)=0$, $\varphi_N(h) \geqq 0$ $(N=1, 2, \ldots)$ esettel foglalkoznunk.

Először nézzük azt az esetet, amikor $\varphi_N(h) \leqq M < \infty$ $(N=1, 2, \ldots)$. Jelölje A_N az A halmaznak azt a részhalmazát, amelyen $\varphi_N(h) \leqq \varrho$, ahol $\varrho > 0$. Ha az

$$\int\limits_A \varphi_N(h)\,\xi(dA)$$

valószinűségi változó karakterisztikus függvényét $f_N(t)$-vel jelöljük, akkor, az 1. 4 TÉTEL felhasználásával a következőkre jutunk

$$\begin{aligned} |1-f_N(t)| &\leqq W(\varrho t, A_N) + W(Mt, A-A_N) \leqq \\ &\leqq W(\varrho t, A) + W(Mt, A-A_N). \end{aligned} \tag{2. 39}$$

Rögzített t mellett először megválasztjuk ϱ-t oly módon, hogy (2. 39) jobboldalán az első tag kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$. Ez az 1. 1 TÉTEL szerint megtehető. Ezután N-et olyan nagynak választjuk, hogy a második tag is kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$. Ez is megtehető, hiszen W korlátos mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn és $\lim\limits_{N\to\infty} \varphi_N(h) = 0$ miatt $\lim\limits_{N\to\infty} A_N = 0$. Eszerint minden t-re

$$\lim_{N\to\infty} f_N(t) = 1,$$

ami éppen az állítást fejezi ki.

Vizsgáljuk most az általános esetet. A $\varphi_N(h)$ függvény felbontható a következőképpen

$$\varphi_N(h) = \varphi_N^{(1)}(h) + \varphi_N^{(2)}(h),$$

ahol

$$\varphi_N^{(1)}(h) = \begin{cases} \varphi_N(h), & \text{ha } \varphi_N(h) \leqq M, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\varphi_N^{(2)}(h) = \varphi_N(h) - \varphi_N^{(1)}(h)$$

és M egy később meghatározandó konstans. Jelölje $f_N^{(1)}(t)$, ill. $f_N^{(2)}(t)$ az

$$\int_A \varphi_N^{(1)}(h)\,\xi(dA), \quad \text{ill.} \quad \int_A \varphi_N^{(2)}(h)\,\xi(dA)$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvényét és foglalkozzunk az utóbbival.

Legyen $\{y_k^{(n)}\}$ egy végtelenül finom osztópont-kettőssorozat, melyre $\{y_k^{(n)}\} \subseteq \{y_k^{(n+1)}\}$, $\{L_{Nk}^{(n)}\}$ a $\varphi_N^{(2)}(h)$ függvény által meghatározott megfelelő felosztássorozat és jelölje $f_{Nn}^{(2)}(t)$ a

$$\sum_k y_k^{(n)}\,\xi(AL_{Nk}^{(n)})$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Nyilvánvaló, hogy

$$f_{Nn}^{(2)}(t) \Longrightarrow f_N^{(2)}(t), \tag{2.40}$$

ha $n \to \infty$. Jelölje $\{H_k\}$ az $\{y_k^{(1)}\} = \{y_k\}$ osztópontsorozat és a $\psi(h)$ függvény által meghatározott felosztást, továbbá K a következő számot: $K = \sup\limits_k (y_{k+1} - y_k)$.

Ha $M \geqq 1$, akkor a 2.6 TÉTEL felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$|1 - f_{Nn}^{(2)}(t)| \leqq \sum_{k:y_k^{(n)} \geqq M} W(y_k^{(n)}t, AL_{Nk}^{(n)}) \leqq \sum_{k:y_k^{(1)} \geqq M} W(y_{k+1}^{(1)}t, AL_{Nk}^{(1)}) \leqq$$

$$\leqq \sum_{k:y_k^{(1)} \geqq M} W(y_k^{(1)}(K+1)t, AL_{Nk}^{(1)}) \leqq \sum_{k:y_k \geqq M} W(y_k(K+1)t, AH_k).$$

Eszerint

$$|1 - f_N^{(2)}(t)| \leqq \sum_{k:y_k \geqq M} W(y_k(K+1)t, AH_k). \tag{2.41}$$

Rögzítsük t értékét és válasszuk M-et oly nagynak, hogy a (2.41) egyenlőtlenség jobboldalán álló tag kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$. Rögzített M mellett N-et elég nagynak választva, fennáll az

$$|1 - f_N^{(1)}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenség. Ha úgy, mint az előbb, $f_N(t)$ jelöli az

$$\int_A \varphi_N(h)\xi(dA)$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvényét, akkor, $f_N(t) = f_N^{(1)}(t) f_N^{(2)}(t)$ és így az előbb rögzített t értékre fennáll az

$$|1 - f_N(t)| \leqq |1 - f_N^{(1)}(t)| + |1 - f_N^{(2)}(t)| < \varepsilon$$

reláció. Q. e. d.

6. §. A nem-negatív halmazfüggvény esete

Ha a $\xi(A)$ sztochasztikus halmazfüggvény valószínűségi változói nem-negatívak, akkor az integrált közelítő összeg nem csupán sztochasztikusan, hanem 1 valószínűséggel is konvergál a megfelelő integrálhoz. Igaz az is, hogy ha $\varphi(h)$ integrálható az $A \in \mathfrak{S}$ halmazon, akkor integrálható ennek minden mérhető részhalmazán. Az előbbi állítást speciális esetként tartalmazza a nagy Lebesgue-tétel analogonjának most bebizonyítandó erősebb alakja.

2.9 TÉTEL: *Ha minden $B \in \mathfrak{S}$ halmazra $\xi(B) \geqq 0$, továbbá $\varphi_N(h)$ $(N= = 1, 2, \ldots)$, $\varphi(h)$ és $\psi(h)$ olyan függvények, melyekre*

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(h) = \varphi(h)$$

$$|\varphi_N(h)| \leqq \psi(h) \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

és $\psi(h)$ integrálható az $A \in \mathfrak{S}$ halmazon, akkor ugyanez érvényes a $\varphi_N(h)$ $(N= = 1, 2, \ldots)$ és $\varphi(h)$ függvényekre is és

$$\lim_{N\to\infty} \int_A \varphi_N(h)\xi(dA) = \int_A \varphi(h)\xi(dA).$$

BIZONYÍTÁS: Elegendő a $\varphi(h) = 0$ és $\varphi_N(h) \geqq 0$ $(N = 1, 2, \ldots)$ esetet vizsgálnunk. Legyen $\varepsilon > 0$ és vezessük be a következő jelölést

$$A_N = \{h : A, \ \varphi_N(h) \geqq \varepsilon\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \int_A \varphi_N(h)\xi(dA) &= \int_{A_N} \varphi_N(h)\xi(dA) + \int_{A-A_N} \varphi_N(h)\xi(dA) \leqq \\ &\leqq \int_{A_N} \psi(h)\xi(dA) + \varepsilon\xi(A). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Felhasználva a 2.3 TÉTELt és [13] 4.2 TÉTELét, (2.42)-ből következik, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \int_A \varphi_N(h)\xi(dA) = 0.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

III. FEJEZET
ABSZOLUT FOLYTONOS HALMAZFÜGGVÉNYEK

1. §. Definíció és unicitás

Egy az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett $\eta(A)$ teljesen additív halmazfüggvényt abszolut folytonosnak nevezünk a $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvényre vonatkozólag, ha van olyan $\varphi(h)$ mérhető függvény, hogy

$$\eta(A)=\int_A \varphi(h)\xi(dA) \tag{3. 1}$$

minden $A\in\mathfrak{S}$ halmazra. Ezt a kapcsolatot a következőképpen jelöljük: $\eta\ll\xi$.

Először bebizonyítjuk, hogy a ξ és η halmazfüggvények egyértelműen meghatározzák a $\varphi(h)$ függvényt. Ezt fejezi ki a

3. 1 TÉTEL: *Ha $\varphi_1(h)$ és $\varphi_2(h)$ két mérhető, minden $A\in\mathfrak{S}$ halmazon a ξ teljesen additív halmazfüggvényre nézve integrálható függvény és*

$$\int_A \varphi_1(h)\xi(dA)=\int_A \varphi_2(h)\xi(dA)\quad (A\in\mathfrak{S}), \tag{3. 2}$$

akkor van olyan E, a ξ halmazfüggvényre nézve 0-halmaz, hogy

$$\varphi_1(h)=\varphi_2(h),\quad \text{ha}\quad h\in H-E.$$

BIZONYÍTÁS: Tekintsük a $\psi(h)=\varphi_1(h)-\varphi_2(h)$ függvényt. (3. 2) szerint minden $A\in\mathfrak{S}$ halmazra

$$\int_A \psi(h)\xi(dA)=0. \tag{3. 3}$$

Ennek a relációnak a teljesülése nyilván csak a $\xi(A)$ $(A\in\mathfrak{S})$ valószínűségi változók valószínűségi viszonyaitól, pontosabban a $(\xi(A_1),\ldots,\xi(A_n))$ $(A_1\in\mathfrak{S},\ldots,A_n\in\mathfrak{S})$ vektorok eloszlásaitól függ és nem függ attól, hogy milyen eseménytérben reprezentáljuk őket. Tekintsük az eredeti Ω eseménytér önmagával való Descartes-féle szorzatát a megfelelő szorzat valószínűségi mértékkel. Jelölje a szorzatteret $\bar{\Omega}=\Omega_1\times\Omega_2=\{(\omega_1,\omega_2)\}$ $(\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2)$. Legyen

$$\begin{aligned}\xi_1(A)&=\xi_1((\omega_1,\omega_2),A)=\xi(\omega_1,A),\\ \xi_2(A)&=\xi_2((\omega_1,\omega_2),A)=\xi(\omega_2,A),\end{aligned} \tag{3. 4}$$

Nyilvánvaló, hogy az $A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n$, $\mathfrak{S}$-hez tartozó halmazok tetszőleges megválasztása mellett a $(\xi_1(A_1),\ldots,\xi_1(A_m)),(\xi_2(B_1),\ldots,\xi_2(B_n))$ vektorok függetlenek. Ebből következik, hogy a

$$\xi_3(A)=\xi_1(A)-\xi_2(A)\qquad (A\in\mathfrak{S}) \tag{3. 5}$$

halmazfüggvény teljesen additív és $\xi_3(A)$ minden $A\in\mathfrak{S}$ halmazra a 0 pontra nézve szimmetrikus eloszlással rendelkezik. Igaz továbbá az is, hogy

$$\int_A \psi(h)\xi_3(dA)=\int_A \psi(h)\xi_1(dA)-\int_A \psi(h)\xi_2(dA)=0-0=0. \tag{3.6}$$

Jelölje $A_N\in\mathfrak{S}$ azt a halmazt, ahol $\frac{1}{N}\leqq|\psi(h)|\leqq N$. Nyilvánvaló, hogy

$$A_N\subseteq A_{N+1}\qquad (N=1,2,\ldots). \tag{3.7}$$

Legyen $\{y_k^{(n)}\}$ az osztópontok egy végtelenül finom kettőssorozata és $\{H_k^{(n)}\}$ a megfelelő, $\psi(h)$ által meghatározott felosztássorozat. Ekkor, rögzített N mellett

$$\sum_k y_k^{(n)}\xi_3(A_N H_k^{(n)})\Longrightarrow 0, \tag{3.8}$$

ha $n\to\infty$. Azt kaptuk tehát, hogy a (3.8) összegre teljesül a nagy számok törvénye és így (vö. [6] 22. §)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k M\left[\frac{(y_k^{(n)}\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}{1+(y_k^{(n)}\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}\right]=0. \tag{3.9}$$

Mivel az A_N halmazon $\frac{1}{N}\leqq|\psi(h)|\leqq N$, következik, hogy

$$\begin{aligned}0&=\lim_{n\to\infty}\sum_k M\left[\frac{(y_k^{(n)}\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}{1+(y_k^{(n)}\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}\right]\geqq\\ &\geqq\frac{1}{N^4}\lim_{n\to\infty}\sum_k M\left[\frac{(\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}{1+(\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}\right].\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ismét a nagy számok törvényét alkalmazva, következik, hogy rögzített N mellett

$$\sum_k \xi_3(A_N H_k^{(n)})\Longrightarrow 0, \tag{3.11}$$

ha $n\to\infty$. Ámde a (3.11) összeg minden n-re $\xi_3(A_N)$-nel egyenlő, tehát $\xi_3(A_N)=0$. Eszerint, ha L azt a halmazt jelenti, amelyen $\psi(h)\neq 0$, akkor

$$\xi_3(L)=\lim_{N\to\infty}\xi_3(A_N)=0. \tag{3.12}$$

Legyen $B\in L\mathfrak{S}$. Mivel (3.12) szerint

$$\xi_3(B)+\xi_3(L-B)=0, \tag{3.13}$$

továbbá $\xi_3(B)$, $\xi_3(L-B)$ függetlenek és 0-ra nézve szimmetrikus eloszlásúak, következik, hogy $\xi_3(B)=0$. Így a $\xi_3(B)=\xi_1(B)-\xi_2(B)$ reláció és a $\xi_1(B)$, $\xi_2(B)$ valószínűségi változók függetlensége miatt kell, hogy $\xi_1(B)=\text{const.}$ legyen. Mivel $\xi_1(B)$ ugyanolyan eloszlású, mint $\xi(B)$, következik, hogy (visszatérve az eredeti eseménytérre és az eredeti valószínűségi változókra) van olyan

$\mu(B)$, az $L\mathfrak{S}$ σ-gyűrün értelmezett, teljesen additív, számértékű halmazfüggvény, melyre

$$\xi(B) = \mu(B) \qquad (B \in L\mathfrak{S}). \tag{3. 14}$$

Mivel tudjuk, hogy

$$\int_A \psi(h)\mu(dA) = \int_A \psi(h)\xi(dA) = 0 \qquad (A \in L\mathfrak{S}), \tag{3. 15}$$

a Radon-integrálra vonatkozó jólismert tételek szerint van olyan $E \in L\mathfrak{S}$, μ-re (ill. ξ-re) nézve 0-halmaz, hogy

$$\psi(h) = 0, \quad \text{ha} \quad h \in L - E. \tag{3. 16}$$

Ez az E halmaz kielégíti a tételben megszabott követelményeket. Q. e. d.

2. §. Az abszolút folytonosság tranzitivitása

Ugyanúgy, mint a számértékű halmazfüggvények esetében, az abszolút folytonosság itt is tranzitív tulajdonság. Ezt fejezi ki a

3. 2 TÉTEL: *Ha $\xi(A)$, $\eta(A)$, $\zeta(A)$ az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrün értelmezett teljesen additív halmazfüggvények és $\zeta \ll \eta$, $\eta \ll \xi$, akkor $\zeta \ll \xi$.*

BIZONYÍTÁS: Legyen

$$\eta(A) = \int_A \varphi(h)\,\xi(dA), \zeta(A) = \int_A \psi(h)\,\eta(dA) \qquad (A \in \mathfrak{S}),$$

és tegyük fel először, hogy $\varphi(h)$ és $\psi(h)$ korlátosak. Válasszunk egy végtelenül finom $\{y_k^{(n)}\}$ osztópont-kettőssorozatot és jelölje $\{H_k^{(n)}\}$ a megfelelő, $\psi(h)$ által meghatározott felosztássorozatot. Definiáljuk a $\psi_n(h)$, $\varphi_n(h)$ függvényeket a következőképpen

$$\psi_n(h) = y_k^{(n)}, \quad \text{ha} \quad h \in H_k^{(n)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_n(h) = \varphi(h)\,\psi_n(h) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Feltételeinkből következik, hogy

$$\sum_k y_k^{(n)}\,\eta(AH_k^{(n)}) \Longrightarrow \zeta(A). \tag{3. 17}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} \sum_k y_k^{(n)}\,\eta(AH_k^{(n)}) &= \sum_k y_k^{(n)} \int_{AH_k^{(n)}} \varphi(h)\,\xi(dA) = \\ &= \sum_k \int_{AH_k^{(n)}} y_k^{(n)} \varphi(h)\,\xi(dA) = \sum_k \int_{AH_k^{(n)}} \varphi(h)\,\psi_n(h)\,\xi(dA) = \\ &= \int_A \varphi_n(h)\,\xi(dA). \end{aligned} \tag{3. 18}$$

A. (3. 17) és (3. 18) relációkból következik, hogy

(3. 19) $$\zeta(A)=\int_A \varphi(h)\,\psi(h)\,\xi(dA).$$

Nézzük most azt az esetet, amikor a $\varphi(h)$ és $\psi(h)$ függvények nem feltétlenül korlátosak. Jelölje A_{NM} a következő halmazt:

$$A_{NM}=\{h: A, |\varphi(h)|\geqq\frac{1}{M}, |\psi(h)|\geqq\frac{1}{M}, -N\leqq\varphi(h)\,\psi(h)<N\}$$
$$(M,N=1,2,\ldots).$$

Mivel a $\varphi(h), \psi(h)$ függvények korlátosak az A_{NM} halmazon, tehát alkalmazva az előbbieket az $A_{NM}\mathfrak{S}$ σ-gyűrűre, speciálisan azt kapjuk, hogy

(3. 20) $$\zeta(A_{NM})=\int_{A_{NM}}\varphi(h)\,\psi(h)\,\xi(dA).$$

Az A_{NM} halmazok definíciójából következik, hogy $A_{NM}\subseteq A_{NM+1}$. Ha $A_N=\lim\limits_{M\to\infty}A_{NM}$, akkor, mivel az A_N halmazon $\varphi(h)\,\psi(h)$ korlátos, alkalmazva a 2. 3 TÉTELt az $A_N\mathfrak{S}$ σ-gyűrűre, következik, hogy

(3. 21) $$\zeta(A_N)=\int_{A_N}\varphi(h)\,\psi(h)\,\xi(dA).$$

Jelölje B azt a halmazt, ahol $\varphi(h)\,\psi(h)=0$. Ekkor $\lim\limits_{N\to\infty}A_N=A-B$, $\lim\limits_{N\to\infty}\zeta(A_N)=\zeta(A-B)$, tehát az 1. 5 TÉTEL felhasználásával (3. 21)-ből azt kapjuk, hogy

(3. 22) $$\zeta(A-B)=\int_{A-B}\varphi(h)\,\psi(h)\,\xi(dA).$$

Ámde egyszerűen belátható, hogy $\zeta(B)=0$, tehát végül azt kapjuk, hogy

(3. 23) $$\zeta(A)=\int_A\varphi(h)\,\psi(h)\,\xi(dA).$$

Ezzel a 3. 2 TÉTELt bebizonyítottuk.

Ha a (3. 1) reláció által definiált $\varphi(h)$ függvényre bevezetjük a

(3. 24) $$\varphi=\frac{d\eta}{d\xi}$$

jelölést, akkor nyilvánvaló, hogy

(3. 25) $$\frac{d(\eta_1+\eta_2)}{d\xi}=\frac{d\eta_1}{d\xi}+\frac{d\eta_2}{d\xi},$$

ahol $\eta_1(A), \eta_2(A)$ teljesen additív és $\xi(A)$-ra nézve abszolút folytonos halmazfüggvények. A 3. 2 TÉTEL azt állítja, hogy ha létezik $\frac{d\zeta}{d\eta}$ és $\frac{d\eta}{d\xi}$, akkor létezik $\frac{d\zeta}{d\xi}$ is és a (3. 23) reláció szerint

$$\frac{d\zeta}{d\xi}=\frac{d\zeta}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}. \tag{3.26}$$

MEGJEGYZÉS: A sztochasztikus halmazfüggvények esetére a Radon—Nikodym-tétel nem általánosítható szószerint. Legyen pl. H a $[0, 1]$ intervallum, $\mathfrak{S}$ az ennek Lebesgue-szerint mérhető részhalmazaiból alkotott σ-gyűrű. Ha $\xi(A)$ és $\eta(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ két teljesen additív halmazfüggvény, melyek karakterisztikus függvényei

$$e^{im(A)t-m(A)\frac{t^2}{2}}, \quad \text{ill.} \quad e^{-m(A)\frac{t^2}{2}},$$

ahol $m(A)$ az A halmaz Lebesgue-mértéke, akkor a $\xi(A)=0$ reláció maga után vonja, hogy $\eta(A)=0$. Ennek ellenére nem található olyan $\varphi(h)$ függvény, melyre

$$\eta(A)=\int_A\varphi(h)\,\xi(dA) \qquad (A \in \mathfrak{S}).$$

IV. FEJEZET

A VÁRHATÓ ÉRTÉKRE ÉS A SZÓRÁSRA VONATKOZÓ TÉTELEK

1. §. Általános megjegyzések

Ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvény és minden $A \in \mathfrak{S}$ halmazra létezik az

$$M(A)=\mathbf{M}(\xi(A)) \tag{4.1}$$

várható érték, akkor $M(A)$ nyilván additív számértékű halmazfüggvény. Ugyanez érvényes a

$$D^2(A)=\mathbf{D}^2(\xi(A)) \tag{4.2}$$

szórásnégyzetre is, amennyiben az létezik. A (4. 1) és (4. 2) számértékű halmazfüggvények teljes additívitásának a bizonyítása azonban már mélyebb segédeszközöket igényel. Erre vonatkozik a

4. 1 TÉTEL: *Ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény és $\mathbf{M}(\xi(A))$ (ill. $\mathbf{D}^2(\xi(A))$) létezik minden $A \in \mathfrak{R}$ halmazra, akkor a* (4. 1) *(ill.* (4. 2)*) számértékű halmazfüggvény teljesen additív.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, melyre $A=\sum_{k=1}^{\infty}A_k \in \mathfrak{R}$. DOOB egy tétele szerint ([5] 339. old.

THEOREM 5. 2)

$$\mathbf{M}(\xi(A)) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \mathbf{M}(\xi(A_k)),$$

tehát

(4. 3)
$$M(A) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' M(A_k).$$

Lássuk most a szórásra vonatkozó állítás bizonyítását. Feltehetjük, hogy $M(B) = 0$ minden $B \in \mathfrak{R}$ halmazra. DOOB előbb idézett tételéből az is következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left[\left(\xi(A) - \sum_{k=1}^{n}{}' \xi(A_k)\right)^2\right] = 0.$$

Mivel

$$\xi(A) - \sum_{k=1}^{n}{}' \xi(A_k) = \xi(B_{n+1}),$$

ahol $B_n = \sum_{k=n}^{\infty}{}' A_k$, tehát

(4. 4)
$$\lim_{n\to\infty} D^2(B_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} D^2(\xi(B_{n+1})) = 0.$$

Másrészt

$$D^2(A) = \sum_{k=1}^{n}{}' D^2(A_k) + D^2(B_{n+1}),$$

ahonnan állításunk leolvasható. Q. e. d.

1. MEGJEGYZÉS: Abból, hogy egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett és $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re kiterjeszthető halmazfüggvényre az $\mathbf{M}(\xi(A))$ $(A \in \mathfrak{R})$ várható értékek léteznek, nem következik, hogy a kiterjesztett halmazfüggvény valószínűségi változói is véges várható értékkel rendelkeznek. Egy egyszerű példa erre a következő, független valószínűségi változókból álló sor ($\mathfrak{R}$ a természetes számok véges halmazainak gyűrűje). Legyen

(4. 5)
$$\mathbf{P}\left(\xi_n = \begin{matrix} n^2 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{matrix} \dfrac{1}{n^2} \\ 1 - \dfrac{1}{n^2} \end{matrix},$$

akkor $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \xi_n$ minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, tehát a $\xi(A) = \sum_{n \in A}{}' \xi_n$ $(A \in \mathfrak{R})$ halmazfüggvény kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re. Ámde

$$\mathbf{M}(\xi_n) = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

tehát $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \mathbf{M}(\xi_n) = \infty$ és így $\mathbf{M}\left(\sum_{n=1}^{\infty}{}' \xi_n\right) = \infty$.

2. MEGJEGYZÉS: Lehetséges az is, hogy a $\xi(A)$ és $M(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ halmazfüggvények mindegyike kiterjeszthető, de $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-en a kiterjesztett halmazfüggvény valószínűségi változói nem feltétlenül véges várható értékűek. Ismét egy független valószínűségi változókból álló $\sum_{n=2}^{\infty} \xi_n$ végtelen sort tekintve, legyen ξ_n összetett Poisson-eloszlású, karakterisztikus függvényének a logaritmusa legyen a következő

$$\sum_{k \neq 0} C_k^{(n)} (e^{ikt} - 1), \text{ ahol } C_k^{(n)} = \frac{1}{|k|(\log |k|)^n} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor a $\sum_{n=2}^{\infty} \xi_n$ minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál (vö. [5] 115. old. THEOREM 2. 7 (II)) és az összeg karakterisztikus függvénye

$$\sum_{k \neq 0} C_k (e^{ikt} - 1), \quad \text{ahol} \quad C_k = \sum_{n=2}^{\infty} C_k^{(n)} = \frac{1}{|k|} \frac{1}{\log^2 |k| - 1}.$$

Ámde $\mathbf{M}(\xi_n) = 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$ és a $\sum_{n=2}^{\infty} \xi_n$ összeg várható értéke nem létezik, mert

$$\sum_{k \neq 0} |k| C_k = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\log^2 |k| - 1} = \infty,$$

aminek éppen az abszolut várható értéket kellene megadnia. Így a

$$\xi(A) = \sum_{k \in A} \xi_k \qquad (A \in \mathfrak{R})$$

sztochasztikus és az

$$M(A) = \mathbf{M}(\xi(A)) = 0$$

számértékű halmazfüggvény kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re, de a kiterjesztett halmazfüggvény valószínűségi változói nem mind véges várható értékűek.

3. MEGJEGYZÉS: Ha $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re és $\xi^*(B)$ véges várható értékkel rendelkezik minden $B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ halmazra, akkor a 4. 1 TÉTELből következik, hogy $M(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ is kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re és

$$M^*(B) = \mathbf{M}(\xi^*(B)) \qquad (B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})),$$

ahol M^* az M számértékű halmazfüggvény kiterjesztettje.

4. MEGJEGYZÉS: Ha $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ teljesen additív halmazfüggvény, továbbá minden $A \in \mathfrak{R}$ halmazra létezik a $D^2(A) = \mathbf{D}^2(\xi(A))$ mennyiség és ez $M(A)$-val együtt mint halmazfüggvény kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re, akkor $\xi(A)$ is kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re és

$$\text{(4. 6)} \qquad \mathbf{D}^2(\xi^*(B)) = D^{*2}(B), \quad \mathbf{M}(\xi^*(B)) = M^*(B) \quad (B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})),$$

ahol D^{*2}, ill. M^* a D^2, ill. M halmazfüggvény kiterjesztettje.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük a $\xi(A)-M(A)$ teljesen additív halmazfüggvényt. Ez [13] 3. 11 TÉTELe szerint kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re. Jelölje $\mathfrak{M}$ azoknak a B halmazoknak az összességét, amelyekre (4. 6) fennáll. A független valószínűségi változókból álló végtelen sorokra vonatkozó jólismert tételekből (vö. [5] 108. old. THEOREM 2. 3) egyszerűen következik, hogy $\mathfrak{M}$ monoton osztály. Mivel $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$, következik, hogy $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ (vö. [7] 27. old. THEOREM).

2. §. Az (1. 3) integrál várható értékére és szórására vonatkozó tételek

Most rátérünk az (1. 3) integrál várható értékének és szórásának a vizsgálatára.

4. 2 TÉTEL: *Legyen $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ teljesen additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy minden $B \in \mathfrak{S}$ halmazra létezik az $M(B) = \mathbf{M}(\xi(B))$ várható érték és van olyan ζ valószínűségi változó, hogy $\mathfrak{S}$ minden $A_1, \ldots, A_r$ diszjunkt halmazrendszerére*

$$\sum_{k=1}^{r} |\xi(A_k)| \leqq \zeta.$$

Ez esetben korlátos $\varphi(h)$ függvényre léteznek az

$$\eta(B) = \int_B \varphi(h)\xi(dA) \tag{4.7}$$

valószínűségi változók várható értékei és

$$\mathbf{M}(\eta(B)) = \int_B \varphi(h)M(dA), \tag{4.8}$$

ahol a jobboldalon Radon-integrál áll.

BIZONYÍTÁS: Állításunk a Lebesgue-féle korlátos konvergencia-tétel felhasználásával igen egyszerűen belátható.

4. 3 TÉTEL: *Legyen $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ teljesen additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy minden $B \in \mathfrak{S}$ halmazra létezik a $D(B) = \mathbf{D}(\xi(B))$ szórás és $\varphi(h)$ olyan függvény, melyre létezik a (4. 8) jobboldalán álló Radon- és a következő*

$$\int_B \varphi^2(h)\, D^2(dA)$$

Lebesgue-integrál. Ez esetben léteznek az $\mathbf{M}(\eta(B))$, $\mathbf{D}^2(\eta(B))$ mennyiségek és fennáll a (4. 8) és a

$$\mathbf{D}^2(\eta(B)) = \int_B \varphi^2(h)\, D^2(dA). \tag{4.9}$$

reláció.

BIZONYÍTÁS: Válasszunk egy $\{y_k^{(n)}\}$ osztópont-kettőssorozatot és legyen $\{H_k^{(n)}\}$ a $\varphi(h)$ függvény által meghatározott megfelelő felosztássorozat. Könynyen belátható, hogy a

$$\zeta_n = \sum_k y_k^{(n)} \xi(BH_k^{(n)}) \tag{4.10}$$

sorozat négyzetes középben konvergens. Mivel ilyen értelemben (0 valószínűségű halmaztól eltekintve) a sorozat csak egy valószínűségi változóhoz tarthat, következik, hogy ez a határérték $\eta(B)$. Ebből azonban az is következik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\zeta_n) &\to \mathbf{M}(\eta(B)), \\ \mathbf{M}(\zeta_n^2) &\to \mathbf{M}(\eta^2(B)), \end{aligned} \quad \text{ha } n \to \infty. \tag{4.11}$$

Felhasználva azt, hogy a $\xi(BH_k^{(n)})$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ valószínűségi változók függetlenek, következik, hogy

$$\mathbf{D}^2(\zeta_n) = \mathbf{M}(\zeta_n^2) - \mathbf{M}^2(\zeta_n) = \sum_k (y_k^{(n)})^2 D^2(BH_k^{(n)}), \tag{4.12}$$

ahonnan a (4. 9) reláció leolvasható. A (4. 8) reláció ekvivalens (4. 11) első sorával. Q. e. d.

Hasonló formulát lehetne levezetni a harmadik centrális momentumra, ugyanis független valószínűségi változók esetében ezek is összeadódnak. Mivel ennek nincs különösebb jelentősége, ezt a kérdést nem tárgyaljuk.

V. FEJEZET

A KARAKTERISZTIKUS FUNKCIONÁL

Jelölje $\mathfrak{B}$ a H térben értelmezett, $\mathfrak{S}$-re nézve mérhető és egy $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvényre nézve majdnem mindenütt[5] korlátos $\varphi(h)$ függvények terét. $\mathfrak{B}$ Banach-tér, ha egy függvény normáján az abszolut értékének valódi maximumát értjük. Tekintsük a $\mathfrak{B}$ térben értelmezett

$$\mathbf{L}(f) = \mathbf{M}\left[\exp\left(i \int_H \varphi(h)\xi(dA)\right)\right] \tag{5.1}$$

funkcionált. Ezt a $\xi(A)$ halmazfüggvény *karakterisztikus funkcionáljának* nevezzük. A 2. 8 TÉTEL szerint az $\mathbf{L}(\varphi)$ funkcionál folytonos.

A karakterisztikus funkcionált, mint a Fourier-integrál általánosítását, KOLMOGOROV [11] vezette be 1935-ben. Valószínűségszámítási alkalmazás céljából LE CAM [3] vezette be sztochasztikus folyamatokra 1947-ben és ugyancsak ebben az évben S. BOCHNER [1] véletlen értékű *additív* halmazfüggvényekre. Az általunk definiált (5. 1) funkcionál sem nem általánosítása sem nem speciális esete az előbbieknek. Ha $\xi(A)$ realizációi teljesen additív halmazfüggvények, akkor (5. 1) speciális esete a KOLMOGOROV által definiált

[5] Vö. 340. old.

karakterisztikus funkcionálnak. A BOCHNER által bevezetett fogalom definíciója lényegesen eltér az előbbitől.

Az (5. 1) karakterisztikus funkcionál ismeretében ismerjük a $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ valószínűségi változók valószínűségi viszonyait. Ezt fejezi ki pontosabban az

5. 1 TÉTEL: *Az* $\mathbf{L}(\varphi)$ *funkcionál teljesen meghatározza az* Ω *eseménytérben annak a legkisebb* σ*-gyűrűnek az elemein értelmezett valószínűséget, amelyen a* $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ *valószínűségi változók mérhetők.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű n tetszőleges halmaza. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{L}(\varphi)$ meghatározza a $\xi(A_1), \ldots, \xi(A_n)$ valószínűségi változók együttes karakterisztikus függvényét. Definiáljuk a következő függvényeket:

$$\varphi_{t_k}(h) = \begin{cases} t_k, & \text{ha } h \in A_k, \\ 0 & \text{egyébként}, \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}[\exp i(t_1\xi(A_1) + \cdots + t_n\xi(A_n)] = \\ &= \mathbf{M}\left[\exp i \int_H \varphi_{t_1, \ldots, t_n}(h)\xi(dA)\right], \end{aligned} \tag{5. 2}$$

ahol

$$\varphi_{t_1, \ldots, t_n}(h) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{t_k}(h), \tag{5. 3}$$

tehát, ha $t_1, \ldots, t_n$ befutják a valós számokat, $\mathbf{L}(\varphi_{t_1}, \ldots, t_n(h))$ megadja a $\xi(A_1), \ldots, \xi(A_n)$ vektor karakterisztikus függvényét. Ezek az ún. végesdimenziós eloszlások már meghatározzák a valószínűséget a szóbanforgó σ-gyűrűn. Q. e. d.

Ha léteznek az $\int_H \varphi(h)\xi(dA)$ valószínűségi változók n-edik momentumai minden $\varphi(h) \in \mathfrak{F}$ függvényre, akkor az

$$\mathbf{L}_n(\varphi) = \mathbf{M}\left[\left(\int_H \varphi(h)\xi(dA)\right)^n\right] \tag{5. 4}$$

funkcionált a $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ halmazfüggvény n-edik momentumának nevezzük. (5. 1)-ből sorfejtéssel belátható, hogy

$$\mathbf{L}(\varphi) = 1 + i\mathbf{L}_1(\varphi) + i^2 \frac{\mathbf{L}_2(\varphi)}{2!} + \cdots + i^{n-1} \frac{\mathbf{L}_{n-1}(\varphi)}{(n-1)!} + i^n \frac{\mathbf{L}_n'(\varphi)}{n!} \mathbf{R}_n(\varphi), \tag{5. 5}$$

ahol

$$\mathbf{L}_n'(f) = \mathbf{M}\left(\left|\int_H \varphi(h)\xi(dA)\right|^n\right) \tag{5. 6}$$

és $\mathbf{R}_n(\varphi)$ olyan funkcinál, melyre $|\mathbf{R}_n(\varphi)| \leq 1$.

Most felírjuk néhány egyszerű sztochasztikus halmazfüggvény-típus karakterisztikus funkcionálját. Mindegyik esetben eleve feltesszük, hogy a szóbanforgó halmazfüggvény teljesen additív.

1. Poisson-típusú halmazfüggvények. Ez esetben

(5. 7) $$f(t, A) = e^{\lambda(A)(e^{it}-1)} \qquad (A \in \mathfrak{S}),$$

ahol $\lambda(A)$ az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett véges mérték. Egyszerűen belátható, hogy

(5. 8) $$\mathsf{L}(\varphi) = \exp\left\{ \int_H (e^{i\varphi(h)} - 1)\lambda(dA) \right\}.$$

2. Összetett Poisson-típusú halmazfüggvények. Ez esetben

(5. 9) $$f(t, A) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} C_k(A)(e^{i\lambda_k t} - 1) \right\} \qquad (A \in \mathfrak{S}),$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ valós számokból álló additív félcsoport, továbbá $C_k(A)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ és

(5. 10) $$C(A) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(A)$$

véges mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn. Egyszerűen belátható, hogy

(5. 11) $$\mathsf{L}(\varphi) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_H (e^{i\lambda_k \varphi(h)} - 1) C_k(dA) \right\}.$$

3. Laplace—Gauss-típusú halmazfüggvények. Ez esetben

(5. 12) $$f(t, A) = e^{itM(A) - \frac{D^2(A)}{2}t^2} \qquad (A \in \mathfrak{S}),$$

ahol $M(A)$ teljesen additív számértékű halmazfüggvény, $D^2(A)$ pedig véges mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn. A karakterisztikus funkcionál — amint az a 4. 3 TÉTEL alapján közvetlenül is adódik, — a következő alakú

(5. 13) $$\mathsf{L}(\varphi) = \exp\left\{ it \int_H \varphi(h) M(dA) - \frac{t^2}{2} \int_H \varphi^2(h) D^2(dA) \right\},$$

ahol a jobboldalon az exponensben Radon-, illetve absztrakt Lebesgue-integrál áll.

Az (5. 1) karakterisztikus funkcionált lehetne általánosabban a ξ halmazfüggvényre nézve a H halmazon integrálható függvények terében értelmezni. Ez a tér azonban általában nem lesz Banach-tér.

IRODALOM

[1] S. Bochner: Stochastic processes, *Ann. Math.*, **48** (1947) 1014—1061.

[2] S. Bochner: *Harmonic analysis and the theory of probability*, Berkeley and Los Angeles, 1955.

[3] L. Le Cam: Un instrument d'étude des fonctions aléatoires: la fonctionelle caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **224** (1947) 710—711.

[4] H. Cramér: *A contribution to the theory of stochastic processes*, Proc. Sec. Berkeley Symp., Berkeley and Los Angeles, 1951, 329—340.

[5] J. L. Doob: *Stochastic processes*, New York, London, 1953.

[6] B. V. Gnyegyenko és A. N. Kolmogorov, *Független valószínűségi változók összegeinek összegeinek határeloszlásai* (Budapest, 1951).

[7] P. Halmos: *Measure Theory*, New York, 1950.

[8] K. Ito, On stochastic differential equations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, n. **4** (1951).

[9] A. N. Kolmogorov: Kurven in Hilbertschen Raum die gegenüber eine einparametrigen Gruppe von Bewegungen invariant sind, *Doklady Akad. Nauk. S. S. S. R. (N. S.)*, **26** (1940) 6—9.

[10] A. N. Kolmogorov: Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum, *Doklady Akad. Nauk. S. S. S. R. (N. S.)*, **26** (1940), 115—118.

[11] A. N. Kolmogorov: La transformation de Laplace dans les espaces linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **200** (1935) 1717—1718.

[12] A. Obukhov: On the energy distribution in the spectrum of a turbulent flow, *Doklady Akad Nauk S. S. S. R.*, **32** (1941) 19—21.

[13] Prékopa A.: Sztochasztikus halmazfüggvényekről, I. *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **6** (1956) 289—337.

[14] J. Radon: Théorie und Anwendung der absolut-additiven Mengenfunktionen, *Sitzsber. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Kl.*, **122** (1913) 1295—1438.

[15] F. Riesz, B. Sz.-Nagy: *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest, 1952.

[16] N. Wiener: Differential space, *J. Math. Phys. Math. Inst. Tech.*, **2** (1923) 131—174.

(Beérkezett: 1957. VII. 15.)

TARTÓZKODÁSI IDŐ PROBLÉMÁKRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

Tekintsük a $\{\xi(t), 0 \leqq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot, ahol a $\xi(t)$ valószínűségi változók értékkészletét valamilyen X absztrakt tér elemei alkotják. Legyen $X = A + B$, ahol A és B rögzített közös pont nélküli halmazok. Tegyük fel, hogy $\xi(0) \in A$. Ekkor a $\{\xi(t)\}$ folyamat növekvő t értékekre váltakozva A és B állapotot vesz fel. Jelölje az egymásutáni A állapotban való tartózkodási időtartamokat rendre $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ és a B állapotban való tartózkodási időtartamokat rendre $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ valószínűségi változó. Feltesszük, hogy a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ nem-negatív független valószínűségi változók, amelyekre

$$\mathbf{P}\{\xi_n < x\} = G(x) \quad \text{és} \quad \mathbf{P}\{\eta_n \leqq x\} = H(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Megjegyezzük, hogy a fenti értelmezés szerint $G(x)$ balról folytonos és $H(x)$ jobbról folytonos eloszlásfüggvény.

Értelmezzük most a $\{\chi(t), 0 \leqq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot olymódon, hogy

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \xi(t) \in B \\ 0, & \text{ha} \quad \xi(t) \in A. \end{cases}$$

Legyen

$$\beta(t) = \int_0^t \chi(u)\, du.$$

A $\beta(t)$ valószínűségi változó a $(0, t)$ intervallum azon u pontjaiból álló halmaz mértéke, amelyekre $\xi(u) \in B$. Következőleg $\alpha(t) = t - \beta(t)$ a $(0, t)$ intervallum azon u pontjaiból álló halmaz mértéke, amelyekre $\xi(u) \in A$.

A következőkben meghatározzuk a $\beta(t)$ valószínűségi változó eloszlását, továbbá $\beta(t)$ aszimptotikus eloszlását és $\mathbf{M}\{\beta(t)\}$ és $\mathbf{D}\{\beta(t)\}$ aszimptotikus viselkedését, midőn $t \to \infty$. Ezenkívül több példát ismertetünk.

Hasonló kérdésekkel Markov-láncok esetén P. Lévy [11], A. N. Kolmogorov [10] és R. L. Dobrusin [4], [6] foglalkozott. A $\beta(t)$ eloszlását bizonyos rekurrens folyamatok esetén szerző [14], [15], [16] munkáiban vizsgálta. A jelenleg ismertetendő eredmények legnagyobb része bentfoglaltatik szerző [18], [19], [20] munkáiban.

A következő jelöléseket vezetjük be. Legyen $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\eta_0 \equiv 0$ és $\chi_n = \eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Továbbá legyen

$$\mathbf{P}\{\zeta_n < x\} = G_n(x), \quad \text{ha} \quad n = 1, 2, \ldots$$

és

$$\mathbf{P}\{\chi_n \leq x\} = H_n(x), \quad \text{ha} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ekkor $H_0(x) = 1$, ha $x \geq 0$ és $H_0(x) = 0$, ha $x < 0$ és állapodjunk meg abban, hogy $G_0(x) \equiv 1$.

A $\beta(t)$ eloszlásfüggvénye legyen

$$\mathbf{P}\{\beta(t) \leq x\} = \Omega(t, x).$$

Ekkor $\mathbf{P}\{\alpha(t) < x\} = 1 - \Omega(t, t-x)$. Végül legyen

$$\alpha = \int_0^\infty x\, dG(x) \quad \text{és} \quad \beta = \int_0^\infty x\, dH(x),$$

továbbá

$$\sigma_\alpha^2 = \int_0^\infty (x-\alpha)^2\, dG(x) \quad \text{és} \quad \sigma_\beta^2 = \int_0^\infty (x-\beta)^2\, dH(x).$$

1. §. A $\beta(t)$ eloszlásának meghatározása

1. TÉTEL: *A $\beta(t)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye*

$$\Omega(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,[G_n(t-x) - G_{n+1}(t-x)]. \tag{1}$$

BIZONYÍTÁS: Adott $x\,(0 \leq x \leq t)$ esetén jelölje τ azt a legkisebb időpontot, amelyre $\alpha(\tau) = t - x$. Ekkor nyilvánvalóan $\xi(\tau) \in A$. A τ egyértelműen meghatározott valószínűségi változó. Most megmutatjuk, hogy

$$\mathbf{P}\{\beta(t) \leq x\} = \mathbf{P}\{\beta(\tau) \leq x\}.$$

Ugyanis ha tekintetbe vesszük, hogy $\alpha(t) + \beta(t) = t$ minden t értékre $(0 \leq t < \infty)$ és $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ a t-nek monoton nemcsökkenő függvényei, akkor könnyen beláthatóak az alábbi azonosságok

$$\{\beta(t) \leq x\} \equiv \{\alpha(\tau) \leq \alpha(t)\} \equiv \{\tau \leq t\} \equiv \{\alpha(\tau) + \beta(\tau) \leq t\} \equiv \{\beta(\tau) \leq x\}.$$

Így tehát felírható, hogy

$$\Omega(t, x) = \mathbf{P}\{\beta(t) \leq x\} = \mathbf{P}\{\beta(\tau) \leq x\},$$

vagyis $\Omega(t, x)$ kiszámitását visszavezettük $\mathbf{P}\{\beta(\tau) \leq x\}$ meghatározására. A $\beta(\tau) \leq x$ esemény több egymást kizáró módon valósulhat meg, még pedig a τ időpont lehet az első, második, ..., s. i. t „A szakaszon". Ha τ az $n+1$ -edik $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ „A szakaszon" van, akkor $\beta(\tau) = \chi_n$. Így tehát felírható, hogy $\beta(\tau)=\eta_0+\eta_1+\cdots+\eta_\nu$, ahol ν maga is valószínűségi változó. Mivel a ν változó értékét a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ változók értékei egyértelműen meghatározzák, tehát fennáll, hogy ν *független* az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ változóktól. Most $\mathbf{P}\{\nu<n\}=\mathbf{P}\{\zeta_n \geqq t-x\}$ $(n=1,2,\ldots)$, azaz $\mathbf{P}\{\nu=n\}=G_n(t-x)-G_{n+1}(t-x)$, ha $n=0,1,2,\ldots$. Így a teljes valószínűségi tétel szerint

$$\mathbf{P}\{\beta(\tau)\leqq x\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\{\nu=n\}\,\mathbf{P}\{\chi_n\leqq x\},$$

azaz $0\leqq x<t$ értékekre

$$\Omega(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}[G_n(t-x)-G_{n+1}(t-x)]\,H_n(x),$$

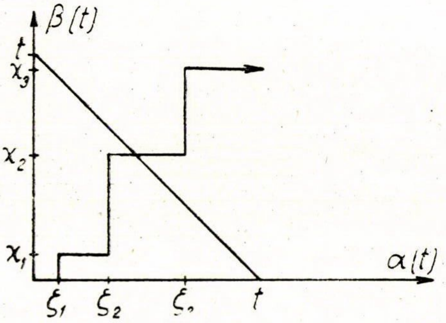
ami bizonyitandó volt. Egyéb x értékekre (1) triviálisan igaz.

1. MEGJEGYZÉS: A fenti bizonyításból kiderül, hogy az 1. TÉTEL akkor is fennáll, ha nem tesszük fel, hogy a $\{\xi_n\}$ és $\{\eta_n\}$ változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Ehelyett elegendő annyit feltenni, hogy a ζ_n és χ_n és a ζ_{n+1} és χ_n változópárok $n=1,2,\ldots$-ra legyenek függetlenek.

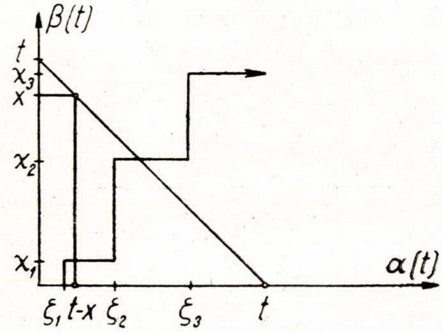
2. MEGJEGYZÉS: A $\beta(t)$ valószínűségi változó bizonyos „B szakaszok" hosszának összegeként állítható elő, ahol az utolsó „B szakasz" esetleg csonka. Ennek dacára meglepő, hogy a $\beta(t)$ változó eloszlását meghatározó (1) képlet nem tartalmazza ennek a csonka szakasznak az eloszlását. Még meglepőbb, hogy a $\beta(t)$ eloszlásának kiszámítása visszavezethető véletlen tagszámú független valószínűségi változók összege eloszlásának kiszámítására, ahol a tagok száma független a változóktól, holott a $\beta(t)$-nek valószínűségi változók összegeként való előállításában a tagok száma függ maguktól a változóktól.

3. MEGJEGYZÉS: A $\mathbf{P}\{\beta(\tau)\leqq x\}=\mathbf{P}\{\beta(t)\leqq x\}$ összefüggés fennállása meglepő, hiszen $\beta(\tau)\leqq\beta(t)$, sőt $\beta(\tau)<\beta(t)$ is lehet.

4. MEGJEGYZÉS: Tekintsük az $\{\alpha(t),\beta(t)\}$ vektor változók sorozatát $0\leqq t<\infty$ értékekre. Ez a változó sorozat a sík origójából elinduló bolyongó pont pályáját írja le (vö. 1. ábra). A bolyongó pont helyzete t időpontban a $(0,t)$ és $(t,0)$ pontokat összekötő egyenes szakaszon van, ugyanis $\alpha(t)+\beta(t)=t$. Ezen modellen egyszerűen lehet szemléltetni a $\beta(t)\leqq x$ és $\beta(\tau)\leqq x$ eseményeket. A $\beta(t)\leqq x$ esemény azt jelenti, hogy a bolyongó pont eléri a $(t-x,x)$ és $(t,0)$ pontokat összekötő egyenes szakaszt és a $\beta(\tau)\leqq x$, esemény pedig azt, hogy eléri a $(t-x,x)$ és $(t-x,0)$ pontokat összekötő egyenes szakaszt (vö. 2. ábra). Nyilvánvaló, hogy a bolyongó pont vagy mindkét egyenes szakaszt eléri vagy egyiket sem, azaz fennáll $\{\beta(t)\leqq x\}\equiv\{\beta(\tau)\leqq x\}$. Bár a probléma vizsgálatára a fenti bolyongási modellt is alkalmaztam, mégis elkerülte figyelmemet, hogy az ábrából közvetlenül leolvasható a két esemény azonossága. Erre a tényre RÉNYI ALFRÉD volt szíves a figyelmemet felhívni.



1. ábra



2. ábra

5. MEGJEGYZÉS: Tekintsük azt a speciális esetet, amidőn

$$G(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{ha } x\geqq 0\\ 0, & \text{ha } x<0.\end{cases}$$

Ekkor

$$\Omega(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda(t-x)}\frac{[\lambda(t-x)]^n}{n!}H_n(x). \tag{2}$$

Ha $t-x=a$ rögzített érték, akkor

$$\Omega(a+x,x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda a}\frac{(\lambda a)^n}{n!}H_n(x).$$

Az $\Omega(a+x,x)$ függvény x-ben eloszlásfüggvény és Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}\,d_x\Omega(a+x,x)=e^{-\lambda a[1-\Psi(s)]}, \tag{3}$$

ahol

$$\Psi(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\,dH(x).$$

1. PÉLDA: (Vö. F. J. KARPELEVICS és V. A. USZPENSZKIJ ([4] p. 296)). Legyen $\{\xi(t),\ 0\leqq t<\infty\}$ Markov-folyamat két lehetséges állapottal A és B-vel. Legyen annak a valószínűsége, hogy $\xi(t)\in A$ esetén a $(t,t+\Delta t)$ időközben $A\to B$ átmenet történik $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ és ha $\xi(t)\in B$, akkor annak a valószínűsége, hogy a $(t,t+\Delta t)$ időközben $B\to A$ átmenet történik $\mu\Delta t+o(\Delta t)$. Ebben az esetben $G(x)=1-e^{-\lambda x}$ (ha $x\geqq 0$) és $H(x)=1-e^{-\mu x}$ (ha $x\geqq 0$). Továbbá $\Psi(s)=\mu/(\mu+s)$. Így (3) szerint

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}\,d_x\Omega(a+x,x)=e^{-\frac{\lambda as}{\mu+s}}$$

és inverz transzformációval

$$\Omega(a+x, x) = e^{-\lambda a}\left[1 + \sqrt{\lambda\mu a}\int_0^x \frac{e^{-\mu y}}{y^{1/2}} I_1(2\sqrt{\lambda\mu a y})\, dy\right],$$

ahol $I_1(x)$ az első rendű imaginárius argumentumú Bessel-függvény,

$$I_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2j+1}}{j!\,(j+1)!}.$$

Ha $a = t - x$, akkor

$$\Omega(t, x) = e^{-\lambda(t-x)}\left[1 + \sqrt{\lambda\mu(t-x)}\int_0^x \frac{e^{-\mu y}}{y^{1/2}} I_1(2\sqrt{\lambda\mu(t-x)y})dy\right].$$

2. §. A $\beta(t)$ aszimptotikus eloszlásának meghatározása

Láttuk, hogy fennáll $\mathbf{P}\{\beta(t) \leqq x\} = \mathbf{P}\{\beta(\tau) \leqq x\}$, ha $0 \leqq x \leqq t$ és a $\beta(\tau)$ előállítható véletlen tagszámú egyforma eloszlású független valószínűségi változók összegeként, ahol a tagok száma független a változóktól. Így tehát a $\beta(t)$ változó aszimptotikus eloszlásának meghatározására visszavezethető véletlen tagszámú független valószínűségi változók összege eloszlásának vizsgálatára. Ezen az alapon tekintsük a $0 \leqq y < \infty$ értékekre a következőképpen értelmezett nem negatív egészértékű ν_y valószínűségi változók sorozatát: $\{\nu_y < n\} = \{\zeta_n \geqq y\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ekkor $\mathbf{P}\{\nu_y < n\} = \mathbf{P}\{\zeta_n \geqq y\} = 1 - G_n(y)$, tehát

$$\mathbf{P}\{\nu_y = n\} = G_n(y) - G_{n+1}(y) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Tekintsük most a

$$\chi_{\nu_y} = \eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_{\nu_y}$$

összeget. Itt a ν_y változó független az $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ változóktól, hiszen ν_y értékét $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ egyértelműen meghatározza. Legyen $\mathbf{P}\{\chi_{\nu_y} \leqq x\} = \Psi(x, y)$. A teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\chi_{\nu_y} \leqq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_y = n\}\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\},$$

azaz

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)[G_n(y) - G_{n+1}(y)]. \tag{5}$$

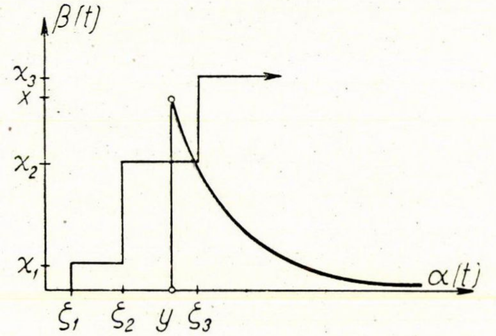
A fentiek szerint

$$\Omega(t, x) = \Psi(x, t-x) \tag{6}$$

és így az $\Omega(t, x)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálata visszavezethető a $\Psi(x, y)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálatára. Ezen utóbbira pedig felhasználhatjuk R. L. DOBRUSIN [5] tételét.

6. MEGJEGYZÉS: Ahhoz, hogy a fenti visszavezetést alkalmazhassuk, ismét elegendő lenne csupán annyit feltenni, hogy a ζ_n és χ_n és a ζ_{n+1} és χ_n változó párok függetlenek $n=1,2,\ldots$-re.

7. MEGJEGYZÉS: Tekintsük a 4. MEGJEGYZÉS-ben említett bolyongási modellt. Ennek segítségével $\Psi(x,y)$ úgy interpretálható, mint annak a valószínűsége, hogy a bolyongó pont eléri az (y,x) és $(y,0)$ pontokat összekötő egyenes szakaszt. Ez viszont nyilvánvalóan megegyezik annak a valószínűségével, hogy a bolyongó pont eléri az (y,x) pontból kiinduló és monoton csökkenve $(\infty,0)$-hoz tartó, egyébként tetszőleges görbét. (Vö. 3. ábra.)



3. ábra

Nyilvánvaló, hogy $\beta(t)$-nek akkor és csakis akkor létezik aszimptotikus eloszlása, ha $\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$ és $\chi_n=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n$ változóknak van aszimptotikus eloszlása midőn $n\to\infty$. Erre nézve pedig szükséges és elegendő feltételt adott W. DOEBLIN [7] (Vö. W. FELLER [8]). Kissé megszorítva DOEBLIN feltételeit és elhagyva néhány extrém esetet, fel fogjuk tenni, hogy a $H(x)$ és $G(x)$ eloszlásfüggvények kielégítik a következő (h_1), (h_2), (h_3), illetve (g_1), (g_2), (g_3) feltételek egyikét. Ilyenkor mindig létezik határeloszlás. Előrebocsátjuk, hogy a következőkben $F_\gamma(x)$ $(0<\gamma<2, \gamma\neq 1)$ azt a stabilis eloszlásfüggvényt jelöli, amelyiknek karakterisztikus függvénye

$$\varphi_\gamma(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}dF_\gamma(x)=\exp\left\{-|z|^\gamma\left(\cos\frac{\pi\gamma}{2}-i\sin\frac{\pi\gamma}{2}\operatorname{sign} z\right)\Gamma(1-\gamma)\right\}$$

és

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy,$$

továbbá A és B véges pozitív állandók.

A $H(x)$-re vonatkozó feltevések:

(h_1): $\sigma_\beta < \infty$. Ekkor a centrális határeloszlástétel szerint fennáll

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_n - n\beta}{n^{1/2}\sigma_\beta} \leqq x\right\} = \Phi(x).$$

(h_2): $\lim_{x\to\infty} [1-H(x)]x^{\gamma_2} = B$, ahol $1 < \gamma_2 < 2$. Ekkor W. DOEBLIN [7] tétele szerint

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_n - n\beta}{(nB)^{1/\gamma_2}} \leqq x\right\} = F_{\gamma_2}(x).$$

(h_3): $\lim_{x\to\infty} [1-H(x)]x^{\gamma_2} = B$, ahol $0 < \gamma_2 < 1$. Ekkor W. DOEBLIN [7] tétele szerint

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_n}{(nB)^{1/\gamma_2}} \leqq x\right\} = F_{\gamma_2}(x).$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy $\mathbf{P}\{\nu_y < n\} = \mathbf{P}\{\zeta_n \geqq x\}$, akkor láthatjuk, hogy ν_y aszimptotikus eloszlásának meghatározására visszavezethető $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ aszimptotikus viselkedésének meghatározása. W. FELLER [8] módszerét alkalmazva nyerjük a következő határeloszlásokat.

A $G(x)$-re vonatkozó feltevések:

(g_1): $\sigma_\alpha < \infty$. Ekkor fennáll

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_y - \dfrac{y}{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma_\alpha^2 y}{\alpha^3}\right)^{1/2}} \leqq x\right\} = \Phi(x).$$

(g_2): $\lim_{x\to\infty} [1-G(x)]x^{\gamma_1} = A$, ahol $1 < \gamma_1 < 2$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_y - \dfrac{y}{\alpha}}{\left(\dfrac{Ay}{\alpha^{1+\gamma_1}}\right)^{1/\gamma_1}} \leqq x\right\} = F_{\gamma_1}(x).$$

(g_3): $\lim_{x\to\infty} [1-H(x)]x^{\gamma_1} = A$, ahol $0 < \gamma_1 < 1$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_y A}{y^{\gamma_1}} \leqq x\right\} = F_{\gamma_1}(x).$$

Ha $H(x)$ kielégíti a $(h_1), (h_2), (h_3)$ feltételek egyikét és $G(x)$ a $(g_1), (g_2), (g_3)$ feltételek egyikét, akkor R. L. DOBRUSIN [5] tételének alkalmazásával azt nyerjük, hogy létezik a következő határeloszlás

$$\lim_{y\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_{\nu_y} - My^\lambda}{Dy^\mu} \leqq z\right\} = P(z) \tag{7}$$

megfelelő M, λ, D, μ állandókkal és $P(z)$ eloszlásfüggvénnyel. Az állandók és a $P(z)$ eloszlásfüggvény könnyen meghatározhatók az említett tétel segítségégével. Az I. TÁBLÁZAT tartalmazza a különböző feltevéseknek megfelelő határeloszlások alakját. A táblázatban ξ és η független valószínűségi változók $\mathbf{P}\{\xi \leqq x\} = F_{\gamma_1}(x)$ és $\mathbf{P}\{\eta \leqq x\} = F_{\gamma_2}(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

Így tehát megmutattuk, hogy a fenti esetekben fennáll a

$$\lim_{y \to \infty} \Psi(My^\lambda + zDy^\mu, y) = P(z)$$

határérték megfelelő $P(z)$ eloszlásfüggvénnyel és M, λ, D, μ állandókkal. Megjegyezzük, hogy ha y_t és z_t egy t paraméter függvényei és $\lim_{t \to \infty} y_t = \infty$, $\lim_{t \to \infty} z_t = z$, akkor az is fennáll, hogy

$$\lim_{t \to \infty} \Psi(My_t^\lambda + z_t D y_t^\mu, y_t) = P(z), \tag{8}$$

ugyanis $P(z)$ valamennyi esetben folytonos eloszlásfüggvény. A (8) határérték segítségével könnyen bebizonyíthatjuk az alábbi tételt.

2. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy $H(x)$ kielégíti a (h_1), (h_2), (h_3) feltételek egyikét és $G(x)$ kielégíti a (g_1), (g_2), (g_3) feltételek egyikét. Ekkor a $\beta(t)$ valószínűségi változónak létezik aszimptotikus eloszlása, midőn $t \to \infty$. A különböző feltételeknek megfelelő határeloszlásokat a* II. TÁBLÁZAT *tartalmazza.*

A II. TÁBLÁZAT-ban ξ és η független valószínűségi változók, amelyekre $\mathbf{P}\{\xi \leqq x\} = F_{\gamma_1}(x)$ és $\mathbf{P}\{\eta \leqq x\} = F_{\gamma_2}(x)$.

A 2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA:

Az 1., 2., 4., 5., 6., 7. állítás bizonyítása: Legyen (8)-ban

$$y_t = \frac{\alpha t}{\alpha+\beta} - x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^\mu$$

és

$$z_t = \frac{\dfrac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\dfrac{t}{\alpha+\beta}\right)^\mu - \dfrac{\beta}{\alpha} y_t}{D y_t^\mu}$$

a megfelelő D és μ-vel. Ekkor $\lim_{t \to \infty} y_t = \infty$ és

$$\lim_{t \to \infty} z_t = z = \frac{x(\alpha+\beta)}{D\alpha^{1+\mu}}.$$

(6) szerint

$$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^\mu\right) = \Psi\left(\frac{\beta}{\alpha} y_t + z_t D y_t^\mu, y_t\right)$$

I. TÁBLÁZAT

	$H(x)$	$G(x)$	γ	M	λ	D	μ	$P(z)$
1.	h_1	g_1		$\frac{\beta}{\alpha}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\Phi\left(\frac{\alpha^{3/2}z}{\sqrt{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}}\right)$
2.	h_1	g_2		$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{A}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}$	$\frac{1}{\gamma_1}$	$1-F_{\gamma_1}(-z)$
3.	h_1	g_3		0	—	$\frac{\beta}{A}$	γ_1	$1-F_{\gamma_1}\left(z^{-\frac{1}{\gamma_1}}\right)$
4.	h_2	g_1		$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2}(z)$
5.	h_2	g_2	$\gamma_2>\gamma_1$	$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{A}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}$	$\frac{1}{\gamma_1}$	$1-F_{\gamma_1}(-z)$
6.	h_2	g_2	$\gamma_i=\gamma$ $(i=1,2)$	$\frac{\beta}{\alpha}$	1	1	$\frac{1}{\gamma}$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\alpha B^{1/\gamma}\eta-\beta A^{1/\gamma}\xi}{\alpha^{\frac{1+\gamma}{\gamma}}}\leqq z\right\}$
7.	h_2	g_2	$\gamma_2<\gamma_1$	$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2}(z)$
8.	h_2	g_3		0	—	$\frac{\beta}{A}$	γ_1	$1-F_{\gamma_1}\left(z^{-\frac{1}{\gamma_1}}\right)$
9.	h_3	g_1		0	—	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2}(z)$
10.	h_3	g_2		0	—	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2}(z)$
11.	h_3	g_3	$\gamma_2>\gamma_1$	0	—	$\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	$\mathbf{P}\left\{\eta\xi^{-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\leqq z\right\}$
12.	h_3	g_3	$\gamma_i=\gamma$ $(i=1,2)$	0	—	$\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$	1	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta}{\xi}\leqq z\right\}$
13.	h_3	g_3	$\gamma_2<\gamma_1$	0	—	$\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	$\mathbf{P}\left\{\eta\xi^{-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\leqq z\right\}$

II. TÁBLÁZAT

	$H(x)$	$G(x)$	γ	Ω_t	$\lim\limits_{t\to\infty} \Omega_t$	x
1.	h_1	g_1		$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$	$\Phi\left(\frac{(\alpha+\beta)x}{\sqrt{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
2.	h_1	g_2		$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$	$1-F_{\gamma_1}\left(\frac{-(\alpha+\beta)x}{\beta A^{\frac{1}{\gamma_1}}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
3.	h_1	g_3		$\Omega(t, xt^{\gamma_1})$	$1-F_{\gamma_1}\left(\left(\frac{\beta}{Ax}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$	$(0, \infty)$
4.	h_2	g_1		$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)$	$F_{\gamma_2}\left(\frac{(\alpha+\beta)x}{\alpha B^{\frac{1}{\gamma_2}}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
5.	h_2	g_2	$\gamma_2 > \gamma_1$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)$	$1-F_{\gamma_1}\left(\frac{-(\alpha+\beta)x}{\beta A^{\frac{1}{\gamma_1}}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
6.	h_2	g_2	$\gamma_i = \gamma$ $(i = 1, 2)$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\alpha B^{\frac{1}{\gamma}}\eta - \beta A^{\frac{1}{\gamma}}\xi}{(\alpha+\beta)} \leqq x\right\}$	$(-\infty, \infty)$
7.	h_2	g_2	$\gamma_2 < \gamma_1$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$	$F_{\gamma_2}\left(\frac{(\alpha+\beta)x}{\alpha B^{\frac{1}{\gamma_2}}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
8.	h_2	g_3		$\Omega(t, xt^{\gamma_1})$	$1-F_{\gamma_1}\left(\left(\frac{\beta}{Ax}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$	$(0, \infty)$
9.	h_3	g_1		$\Omega(t, t-xt^{\gamma_2})$	$F_{\gamma_2}\left(\left(\frac{\alpha}{Bx}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)$	$(0, \infty)$
10.	h_3	g_2		$\Omega(t, t-xt^{\gamma_2})$	$F_{\gamma_2}\left(\left(\frac{\alpha}{Bx}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)$	$(0, \infty)$
11.	h_3	g_3	$\gamma_2 > \gamma_1$	$\Omega\left(t, xt^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\right)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{\gamma_2}}{\xi^{\gamma_1}} \leq \frac{Ax^{\gamma_2}}{B}\right\}$	$(0, \infty)$
12.	h_3	g_3	$\gamma_i = \gamma$ $(i = 1, 2)$	$\Omega(t, tx)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta}{\xi} \leq \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{x}{1-x}\right\}$	$(0, 1)$
13.	h_3	g_3	$\gamma_2 < \gamma_1$	$\Omega\left(t, t-xt^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}\right)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{\gamma_2}}{\xi^{\gamma_1}} \leq \frac{A}{Bx^{\gamma_1}}\right\}$	$(0, \infty)$

és (8) szerint

$$\lim_{t\to\infty} \Psi\left(\frac{\beta}{\alpha} y_t + z_t D y_t^\mu, y_t\right) = P(z) = P\left(\frac{x(\alpha+\beta)}{D\alpha^{1+\mu}}\right)$$

a megfelelő D és μ állandókkal és $P(z)$ eloszlásfüggvénnyel.

A 3., 8., 11., 12. állítás bizonyítása: Legyen (8)-ban

$$y_t = t - x t^\mu$$

és

$$z_t = \frac{x t^\mu}{D y_t^\mu}.$$

Ekkor $\lim\limits_{t\to\infty} y_t = \infty$ és

$$\lim_{t\to\infty} z_t = z = \begin{cases} \dfrac{x}{D}, & \text{ha} \quad \mu < 1 \\ \dfrac{x}{D(1-x)}, & \text{ha} \quad \mu = 1. \end{cases}$$

(6) szerint

$$\Omega(t, x t^\mu) = \Psi(z_t D y_t^\mu, y_t)$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(z_t D y_t^\mu, y_t) = P(z) = \begin{cases} P\left(\dfrac{x}{D}\right), & \text{ha} \quad \mu < 1 \\ P\left(\dfrac{x}{D(1-x)}\right), & \text{ha} \quad \mu = 1, \end{cases}$$

a megfelelő D állandóval és $P(z)$ eloszlásfüggvénnyel.

A 9., 10., 13. állítás bizonyítása: Legyen (8)-ban

$$y_t = x t^{1/\mu}$$

és

$$z_t = \frac{t - y_t}{D y_t^\mu}.$$

Ekkor $\lim\limits_{t\to\infty} y_t = \infty$ és

$$\lim_{t\to\infty} z_t = z = \frac{1}{D x^\mu}.$$

(6) szerint

$$\Omega(t, t - x t^{1/\mu}) = \Psi(z_t D y_t^\mu, y_t)$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(z_t D y_t^\mu, y_t) = P(z) = P\left(\frac{1}{D x^\mu}\right)$$

a megfelelő D és μ állandókkal és $P(z)$ eloszlásfüggvénnyel.

8. MEGJEGYZÉS: Ha a fentieknél általánosabb feltevéssel élünk a $\{\xi_n\}$ és $\{\eta_n\}$ változókra vonatkozóan, mint azt az 1. MEGJEGYZÉS-ben említettük,

akkor is kifejezhető $\beta(t)$ aszimptotikus eloszlása a fenti módon ζ_n és χ_n aszimptotikus eloszlásai segítségével.

2. PÉLDA. Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to\infty}[1-G(x)]x^{\frac{1}{2}}=A$ és $\lim_{x\to\infty}[1-H(x)]x^{\frac{1}{2}}=B$. Ekkor a 2. TÉTEL 12. állítása szerint fennáll

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\beta(t)\leqq tx\}=\begin{cases}0 & \text{, ha } x\leqq 0\\ \dfrac{2}{\pi}\arc\sin\sqrt{\dfrac{A^2x}{A^2x+B^2(1-x)}}, & \text{ha } 0<x<1\\ 1 & \text{, ha } x\geqq 1.\end{cases}\tag{9}$$

(9) bizonyítására megjegyezzük, hogy $\gamma=\frac{1}{2}$ esetén

$$F_{\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases}2\left[1-\Phi\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\right)\right], & \text{ha } x\geqq 0,\\ 0 & \text{, ha } x<0.\end{cases}$$

Most a 12. állításban a ξ és η valószínűségi változók helyettesíthetők $\xi=\pi/2\xi^{*2}$ és $\eta=\pi/2\eta^{*2}$ valószínűségi változókkal, ahol ξ^* és η^* független normális eloszlású változók, amelyekre $\mathbf{M}\{\xi^*\}=\mathbf{M}\{\eta^*\}=0$ és $\mathbf{D}\{\xi^*\}=$ $=\mathbf{D}\{\eta^*\}=1$. Így a 12. állítást $\gamma=\frac{1}{2}$ esetre alkalmazva

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\beta(t)\leqq tx\}=\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{*2}}{\xi^{*2}}\leqq\frac{A^2}{B^2}\frac{x}{1-x}\right\}=\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\eta^*}{\xi^*}\right|\leqq\frac{A}{B}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right\}.$$

Jól ismert tény, hogy az η^*/ξ^* valószínűségi változó Cauchy-eloszlású, azaz $\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^*}{\xi^*}\leqq x\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x$. Tehát

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\eta^*}{\xi^*}\right|\leqq\frac{A}{B}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right\}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{A}{B}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{2}{\pi}\arc\sin\sqrt{\frac{A^2x}{A^2x+B^2(1-x)}}.$$

9. MEGJEGYZÉS. Ha az előbbi példában speciálisan $A=B$, akkor (9) szerint

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\beta(t)\leqq tx\}=\begin{cases}0 & \text{, ha } x\leqq 0\\ \dfrac{2}{\pi}\arc\sin\sqrt{x}, & \text{ha } 0<x<1\\ 1 & \text{, ha } x\geqq 1.\end{cases}\tag{10}$$

Ez az eredmény speciális esetként tartalmazza P. LÉVY [11] következő tételét. (Vö. W. FELLER [9] p. 252). Legyenek $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n,\ldots$ független valószínűségi változók, amelyekre $\mathbf{P}\{\delta_n=1\}=\mathbf{P}\{\delta_n=-1\}=\frac{1}{2}$. Legyen $\xi(t)=\delta_0+$ $+\delta_1+\cdots+\delta_{[t]}$, ahol $\delta_0\equiv 0$ és $[t]$ jelöli t egész részét. A $\{\xi(t)\}$ sztochasztikus folyamat egy bolyongó részecske pályáját írja le. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban B állapotban van, ha $\xi(t) > 0$ és A állapotban, ha $\xi(t) \leqq 0$. Esetünkben

$$\mathbf{P}\{\xi_n = 2j\} = \mathbf{P}\{\eta_n = 2j\} = \frac{1}{2j-1}\binom{2j}{j}\frac{1}{2^{2j}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}j^{3/2}},$$

ha $j \to \infty$ és így

$$\lim_{x\to\infty}[1-G(x)]x^{1/2} = \lim_{x\to\infty}[1-H(x)]x^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Tehát teljesül $A = B$ és így fennáll (10).

3. PÉLDA: Elégítse ki $G(x)$ a (g_1), vagy (g_2) feltételeket és legyen $\lim\limits_{x\to\infty}[1-H(x)]x^{1/2} = B$. Ekkor a 9., illetve 10. állítások szerint fennáll

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\alpha(t) \leqq xt^{\frac{1}{2}}\} = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{Bx}{\alpha}\right)-1, \tag{11}$$

ha $0 \leqq x < \infty$.

A (11) eredmény speciális esetként tartalmazza a következő tételt, amelyet R. L. DOBRUSIN [6] bizonyított be (Vö. K. L. CHUNG és M. KAC [3]). Tekintsük a 2. PÉLDÁban értelmezett $\{\xi(t), 0 \leqq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot. Legyen c előírt poztív egészszám. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban A állapotban van, ha $\xi(t) = 0, 1, 2, \ldots, c-1$ és egyébként B állapotban. Ebben az esetben $\mathbf{M}\{\xi_n\} = \alpha = c$ és $\mathbf{P}\{\eta_n = 2j\} = \frac{1}{2j-1}\binom{2j}{j}\frac{1}{2^{2j}}$, azaz $\lim\limits_{x\to\infty}[1-H(x)]x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, vagyis $B = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Így tehát (11)-ből speciálisan

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\alpha(t) \leqq xt^{\frac{1}{2}}\} = 2\Phi\left(\frac{x}{c}\right)-1,$$

ha $0 \leqq x < \infty$.

A 2. TÉTEL 1. állítása szerint $\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 < \infty$ esetén fennáll

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\beta(t)-\frac{\beta t}{\alpha+\beta}}{\sqrt{\frac{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}t}} \leqq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \tag{12}$$

A következő példák ezen tétel alkalmazására vonatkoznak.

4. PÉLDA: Tekintsünk egy sorbanállási folyamatot egyetlen kiszolgáló esetén. Tegyük fel, hogy a személyek érkezési időpontjai λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat eseményeit alkotják és a kiszolgálási időtartamok egyforma eloszlású független valószínűségi változók $R(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen

$\varrho = \int\limits_0^\infty x\,dR(x)$, $\sigma_\varrho^2 = \int\limits_0^\infty (x-\varrho)^2\,dR(x)$ és $\pi(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dR(x)$. Jelölje $\xi(t)$ a t időpontban sorban álló személyek számát, beleértve az esetleg kiszolgálás alatt álló személyt is. Legyen $\xi(0)=0$ és vizsgáljuk a $\{\xi(t), 0 \leq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban A állapotban van, ha $\xi(t)=0$ és B állapotban, ha $\xi(t)>0$. Könnyen látható, hogy a $\{\xi(t)\}$ folyamatra fennállnak az említett feltételek és így alkalmazhatjuk tételeinket. Most $\beta(t)$ jelöli a $(0, t)$ időintervallumban kiszolgálással töltött időtartamot. Esetünkben fennáll, hogy a $G(x) = 1-e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$ és $H(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja $\psi(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}dH(x)$ egyértelműen meghatározható, mint a $\psi(s) = \pi(s+\lambda-\lambda\psi(s))$ függvényegyenlet $\psi(\infty)=0$ feltételnek elegettevő analitikus megoldása. (Vö. [17] 6. TÉTEL.) Ha $\lambda\varrho<1$, akkor $H(x)$ valódi eloszlásfüggvény. A függvényegyenlet segítségével könnyen meghatározhatjuk $H(x)$ momentumait. Így $\beta = \varrho/(1-\lambda\varrho)$ és $\sigma_\beta^2 = (\sigma_\varrho^2 + \lambda\varrho^3)/(1-\lambda\varrho)^3$. Továbbá nyilvánvalóan $\alpha = 1/\lambda$ és $\sigma_\alpha^2 = 1/\lambda^2$. Ha $\lambda\varrho<1$ és $\sigma_\varrho^2 < \infty$, akkor a 2. TÉTEL 1. állítása szerint fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\beta(t)-\lambda\varrho t}{\sqrt{\lambda(\sigma_\varrho^2+\varrho^2)t}} \leqq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

5. PÉLDA: Tekintsünk m fogyasztó gépet, amelyek valamilyen szolgáltatást (áram, gáz, víz stb.) egymástól függetlenül szakaszosan vesznek igénybe. Tegyük fel, hogy minden egyes gépre $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy ha t időpontban a gép működik, akkor $t+\Delta t$ időpontban megszűnik a működése és $\mu\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy ha t időpontban a gép áll, akkor $t+\Delta t$ időpontban működik. Jelölje $\xi(t)$ a t időpontban működő gépek számát. Legyen $\xi(0)=k$, ahol k rögzített egész szám $(0<k<m)$ és legyen $A=\{0, 1, \ldots, k\}$ és $B=\{k+1, k+2, \ldots, m\}$. Könnyen látható, hogy a $\{\xi(t)\, 0 \leqq t < \infty\}$ folyamat kielégíti feltételeinket. Esetünkben a $\beta(t)$ jelenti $(0, t)$ időközben azt az időtartamot, amely alatt a működő gépek száma meghaladja k-t. Végül megállapodunk még abban, hogy azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban E_k állapotban van, ha $\xi(t)=k$. Most bebizonyítjuk a következő tételt.

3. TÉTEL: *Fennáll*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\beta(t)-\dfrac{\beta t}{\alpha+\beta}}{\sqrt{\dfrac{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}}} \leqq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \tag{13}$$

Itt

$$(14)\qquad \alpha = \frac{\mathfrak{P}_k}{(m-k)\mu P_k}$$

és

$$(15)\qquad \beta = \frac{1-\mathfrak{P}_k}{(m-k)\mu P_k},$$

ahol

$$(16)\qquad P_j = \binom{m}{j}\frac{\mu^j \lambda^{m-j}}{(\mu+\lambda)^m} \qquad (j=0,1,\ldots,m)$$

és

$$(17)\qquad \mathfrak{P}_j = P_0 + P_1 + \cdots + P_j \qquad (j=0,1,\ldots,m).$$

Továbbá

$$(18)\qquad \sigma_\alpha^2 = \alpha\left(2\frac{R_k}{P_k}+\alpha\right) + 2\,\frac{R_0+R_1+\cdots+R_k}{(m-k)\mu P_k}$$

és

$$(19)\qquad \sigma_\beta^2 = \beta\left(2\frac{R_k}{P_k}-\beta\right) - 2\,\frac{R_0+R_1+\cdots+R_k}{(m-k)\mu P_k},$$

ahol

$$(20)\qquad R_0 = \frac{P_0}{\mu+\lambda}\left[\frac{k}{P_k}\sum_{j=k+1}^{m}\frac{P_j}{j-k} - \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right]$$

és $j=1,2,\ldots,m$-re

$$(21)\qquad R_j = P_j\left[\frac{R_0}{P_0} + \sum_{i=0}^{j-1}\frac{\mathfrak{P}_i}{(m-i)\mu P_i} - \sum_{i=k}^{j-1}\frac{1}{(m-i)\mu P_i}\right].$$

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt meghatározzuk $G(x)$ és $H(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltjait, amelyeket jelöljünk a következőképpen

$$\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dG(x) \quad \text{és} \quad \psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x).$$

Erre a célra vezessük be a következő átmenet valószínűségeket

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=j \mid \xi(0)=k\} = P_j(t) \qquad (j=0,1,\ldots,m).$$

$P_j(t)$ közvetlenül meghatározható. Jelölje $P(t)$ annak a valószínűségét, hogy egy olyan gép működik t időpontban, amelyik $t=0$ időpontban is működött és jelölje $Q(t)$ annak a valószínűségét, hogy egy olyan gép működik t időpontban, amelyik $t=0$ időpontban nem működött. Most

$$P(t) = \frac{1}{\mu+\lambda}\left(\mu + \lambda e^{-(\mu+\lambda)t}\right),$$

ugyanis $P(0)=1$ és fennáll $P(t+\Delta t)=P(t)(1-\lambda\Delta t)+(1-P(t))\mu\Delta t+$ $+o(\Delta t)$ azaz $P'(t)+(\lambda+\mu)P(t)=1$. Hasonlóan nyerjük, hogy

$$Q(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}(1-e^{-(\mu+\lambda)t}).$$

Ezek segítségével könnyen felírható, hogy

$$P_j(t)=\sum_{j_1+j_2=j}\binom{k}{j_1}\binom{m-k}{j_2}[P(t)]^{j_1}[1-P(t)]^{k-j_1}[Q(t)]^{j_2}[1-Q(t)]^{m-k-j_2}. \tag{22}$$

Jelölje most $M(t)$ a $(0,t)$ időközben előforduló $E_k\to E_{k+1}$ átmenetek várható számát és $N(t)$ a $(0,t)$ időközben előforduló $E_{k+1}\to E_k$ átmenetek várható számát. Könnyen adódik, hogy

$$M'(t)=(m-k)\mu P_k(t)$$

és

$$N'(t)=(k+1)\lambda P_{k+1}(t).$$

Továbbá felírható, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st}dM(t)=(m-k)\mu\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)dt=\frac{\gamma(s)}{1-\gamma(s)\psi(s)}$$

és

$$\int_0^\infty e^{-st}dN(t)=(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)dt=\frac{\gamma(s)\psi(s)}{1-\gamma(s)\psi(s)}.$$

A fenti két egyenlet összevetéséből azt kapjuk, hogy

$$\gamma(s)=\frac{(m-k)\mu\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)dt}{1+(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)dt} \tag{23}$$

és

$$\psi(s)=\frac{(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)dt}{1+(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)dt}. \tag{24}$$

Ezek megfordításával $G(x)$ és $H(x)$ egyértelműen meghatározható és így az 1. TÉTEL segítségével $\beta(t)$ pontos eloszlását is meghatározhatjuk. $\beta(t)$ aszimptotikus eloszlásának meghatározására alkalmazhatjuk a 2. TÉTEL 1. állítását, amelyhez csak $\alpha,\beta,\sigma_\alpha^2$ és σ_β^2 ismerete szükséges. Ezek a következőképpen nyerhetők $\alpha=-\gamma'(0)$, $\sigma_\alpha^2=\gamma''(0)-[\gamma'(0)]^2$, $\beta=-\psi'(0)$ és $\sigma_\beta^2=\psi''(0)-$ $-[\psi'(0)]^2$. Ezek kiszámítására vezessük be a következő jelöléseket:

$$P_j=\lim_{t\to\infty} P_j(t), \tag{25}$$

$$R_j=\int_0^\infty [P_j(t)-P_j]\,dt, \tag{26}$$

$$S_j=\int_0^\infty t[P_j(t)-P_j]\,dt, \tag{27}$$

$j=0,1,\ldots,m$-re. (22)-ből könnyen adódik, hogy a (25) alatti határérték létezik és megegyezik (16)-tal. A (26) és (27) alatti határértékek szintén léteznek, mivel (25)-ben a konvergencia exponenciális jellegű. A fentiek szerint felírható, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st}P_j(t)\,dt=P_js^{-1}+R_j+S_js+o(s),$$

ha $s\to 0$. Ennek alkalmazásával és $(m-k)\mu P_k=(k+1)\lambda P_{k+1}$ tekintetbe vételével (23) és (24)-ből azt nyerjük, hogy

$$\alpha=\frac{1+(k+1)\lambda R_{k+1}-(m-k)\mu R_k}{(m-k)\mu P_k}. \tag{28}$$

$$\beta=\frac{(m-k)\mu R_k-(k+1)\lambda R_{k+1}}{(m-k)\mu P_k}, \tag{29}$$

$$\sigma_\alpha^2=\alpha\left(\frac{2R_k}{P_k}+\alpha\right)+\frac{2[(m-k)\mu S_k-(k+1)\lambda S_{k+1}]}{(m-k)\mu P_k} \tag{30}$$

és

$$\sigma_\beta^2=\beta\left(\frac{2R_k}{P_k}-\beta\right)-\frac{2[(m-k)\mu S_k-(k+1)\lambda S_{k+1}]}{(m-k)\mu P_k}. \tag{31}$$

Itt már csak az R_j és S_j mennyiségek ismeretlenek. Ezek meghatározására vegyük észre, hogy $P_j(t)$ $(j=0,1,\ldots,m)$ kielégíti a következő differenciálegyenletrendszert

$$\frac{dP_j(t)}{dt}=\Phi_j(t)-\Phi_{j-1}(t) \qquad (j=0,1,\ldots,m), \tag{32}$$

ahol

$$\Phi_j(t)=(j+1)\lambda P_{j+1}(t)-(m-j)\mu P_j(t)$$

(nyilvánvalóan $\Phi_m(t)=\Phi_{-1}(t)=0$) és a kezdeti feltételek

$$P_j(0)=\begin{cases}1, & \text{ha } j=k\\ 0, & \text{ha } j\neq k.\end{cases}$$

(32)-ből következik, hogy

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \int_0^\infty \Phi_{j-1}(t)\,dt + P_j - P_j(0)$$

és ennek ismételt alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \sum_{i=0}^{j} [P_i - P_i(0)].$$

Másrészt könnyen belátható, hogy

$$(j+1)\lambda R_{j+1} - (m-j)\mu R_j = \int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \sum_{i=0}^{j} [P_i - P_i(0)]. \tag{33}$$

Innen speciálisan $j = k$ helyettesítéssel

$$(k+1)R_{k+1} - (m-k)\mu R_k = \mathfrak{P}_k - 1,$$

amely igazolja (14) és (15)-t.

(32)-ből az is következik, hogy

$$\int_0^\infty t\,\Phi_j(t)\,dt = \int_0^\infty t\,\Phi_{j-1}(t)\,dt - R_j$$

és ennek ismételt alkalmazásával

$$\int_0^\infty t\,\Phi_j(t)\,dt = -(R_0 + R_1 + \cdots + R_j).$$

Mivel

$$(k+1)\lambda S_{k+1} - (m-k)\mu S_k = \int_0^\infty t\,\Phi_k(t)\,dt = -(R_0 + R_1 + \cdots + R_k),$$

tehát ezzel (18) és (19) is igazolást nyert. Végül az R_j ismeretlenek explicit meghatározása marad csak hátra. Ezek a (33) egyenletrendszer megoldásával nyerhetők. Eszerint fennáll

$$(j+1)\lambda R_{j+1} - (m-j)\mu R_j = \begin{cases} \mathfrak{P}_j & (j = 0, 1, \ldots, k-1) \\ \mathfrak{P}_j - 1 & (j = k, k+1, \ldots, m) \end{cases}$$

és nyilvánvalóan

$$R_0 + R_1 + \cdots + R_m = 0. \tag{34}$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy $(j+1)\lambda P_{j+1} = (m-j)\mu P_j$, úgy a fenti képlet szerint fennáll

$$\frac{R_{j+1}}{P_{j+1}} - \frac{R_j}{P_j} = \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{P}_j}{(m-j)\mu P_j} & (j = 0, 1, \ldots, k-1) \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{P}_j - 1}{(m-j)\mu P_j} & (j = k, k+1, \ldots, m). \end{cases} \tag{35}$$

Ha a (35) egyenletrendszer első j-számú egyenletét összegezzük, megkapjuk (21)-et. Végül R_0 meghatározható (34) segítségével, vagy közvetlenül is megkapható (22) szerint. Mégpedig

$$\frac{R_0}{P_0} = \int_0^\infty \left[\frac{P_0(t)}{P_0} - 1\right] dt = \frac{1}{\mu+\lambda} \int_0^1 \frac{(1-z)^k \left(1+\frac{\mu}{\lambda} z\right)^{m-k} - 1}{z} dz,$$

ahol $z = e^{-(\mu+\lambda)t}$ helyettesítéssel éltünk. Az integrál kiszámításával nyerjük (20)-at.

10. MEGJEGYZÉS: A 2. TÉTEL valamennyi állítására közvetlen bizonyítást adtunk korábbi [18] és [19] dolgozatunkban. A 2. TÉTEL 1. állítása bebizonyítható F. J. ANSCOMBE [1] tétele segítségével is, amely véletlen számú független és egyforma eloszlású valószínűségi változók összegének határeloszlására vonatkozik, ahol azonban a tagok száma függhet maguktól a változóktól. Megjegyezzük, hogy lényegében hasonló módszerrel RÉNYI A. [12] is bebizonyította a 2. TÉTEL 1. állítását.

F. J. ANSCOMBE tétele némi változtatással azt mondja ki, hogy ha $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n, \ldots$ azonos eloszlású független valószínűségi változók, amelyekre létezik a következő határeloszlás

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n-na}{bn^\delta} \leq x\right\} = P(x), \tag{36}$$

ahol $\delta < 1$ és $\nu_t (0 \leq t < \infty)$ nem negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változók sokasága, amelyek függhetnek a $\{\vartheta_n\}$ változóktól, és amelyekre tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\nu_t}{t^\lambda} - c\right| < \varepsilon\right\} = 1, \tag{37}$$

akkor

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_{\nu_t}-\nu_t a}{bc^\delta t^{\lambda\delta}} \leq x\right\} = P(x). \tag{38}$$

A fentiek szerint nyilvánvaló, hogy ha (37) helyett az erősebb

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\nu_t - ct^\lambda}{t^{\lambda\delta}}\right| < \varepsilon\right\} = 1 \tag{39}$$

feltevéssel élünk, akkor fennáll az is, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_{\nu_t}-act^\lambda}{bc^\delta t^{\lambda\delta}} \leq x\right\} = P(x). \tag{40}$$

Ha feltesszük, hogy ν_t független a $\{\vartheta_n\}$ változóktól, akkor R. L. DOBRUSIN [5] tételéből is következik (40).

A 2. TÉTEL 1. állításának bizonyítására a (38) tétel alkalmazható, ha feltesszük, hogy $\vartheta_n = \alpha\eta_n - \beta\xi_n$ és ν_t jelöli a $(0, t)$ időközben előforduló $A \to B$ átmenetek számát. Ekkor ugyanis

$$\beta(t) - \frac{\beta t}{\alpha+\beta} \simeq \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_{\nu_t}}{\alpha+\beta} \tag{41}$$

és $\nu_t/t \Longrightarrow 1/(\alpha+\beta)$. Továbbá a centrális határértéktétel szerint fennáll

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n}{\sqrt{(\beta^2\sigma_\alpha^2 + \alpha^2\sigma_\beta^2)\, n}} \leqq x \right\} = \Phi(x).$$

Innen (38) szerint

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_{\nu_t}}{\sqrt{\frac{(\beta^2\sigma_\alpha^2 + \alpha^2\sigma_\beta^2)}{\alpha+\beta}\, t}} \leqq x \right\} = \Phi(x),$$

ami (41)-re való tekintettel az 1. állítást igazolja.

Végül megjegyezzük, hogy a 2. TÉTEL többi 12 állítása ilyen módon nem bizonyítható be, kivéve a 6. állítást $A = B$ speciális esetben.

3. §. A $\beta(t)$ várható értékének aszimptotikus viselkedése

Legyen rövidség kedvéért $\mathbf{M}\{\beta(t)\} = B(t)$ és $\mathbf{M}\{\alpha(t)\} = A(t)$. Nyilvánvalóan $A(t) + B(t) = t$ és így $A(t)$ aszimptotikus viselkedésének ismerete megadja a $B(t)$-ét és viszont. Az (1) képlet szerint explicit alakban kiszámítható

$$\mathbf{M}\{\beta(t)\} = \int_0^t [1 - \Omega(t, x)]\, dx. \tag{42}$$

Ha bevezetjük a

$$\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x) \quad \text{és} \quad \psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x)$$

Laplace-Stieltjes transzformáltakat $\Re(s) \geqq 0$-ra úgy (42)-ből könnyen nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} dB(t) = \frac{1}{s} \frac{\gamma(s)[1 - \psi(s)]}{1 - \gamma(s)\psi(s)} \tag{43}$$

és innen

$$\int_0^\infty e^{-st} dA(t) = \frac{1}{s} \frac{1 - \gamma(s)}{1 - \gamma(s)\,\psi(s)}. \tag{44}$$

A (43) és (44) képletek segítségével meghatározhatjuk $\mathbf{M}\{\beta(t)\}$ és $\mathbf{M}\{\alpha(t)\}$ aszimptotikus viselkedését $t \to \infty$-re. Így a következő tételeket nyerjük:

4. TÉTEL: *Ha* $\alpha+\beta<\infty$, *akkor*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta(t)\}}{t}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}. \tag{45}$$

Ha $\beta<\infty$ *és* $G(x)$ *kielégíti* (g_3)*-at, akkor*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta(t)\}}{t}=\frac{\beta\sin\pi\gamma_1}{A\pi}. \tag{46}$$

Ha $\alpha<\infty$ *és* $H(x)$ *kielégíti* (h_3)*-at, akkor*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\alpha(t)\}}{t}=\frac{\alpha\sin\pi\gamma_2}{B\pi}. \tag{47}$$

Ha $G(x)$ *kielégíti* (g_3)*-at és* $H(x)$ *a* (h_3)*-at, akkor*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta(t)\}}{t^{1-\gamma_2+\gamma_1}}=\frac{B\Gamma(1-\gamma_2)}{A\Gamma(1-\gamma_1)\Gamma(1-\gamma_2+\gamma_1)},\quad \text{ha}\quad \gamma_2>\gamma_1 \tag{48}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta(t)\}}{t}=\frac{B}{A+B},\quad \text{ha}\quad \gamma_2=\gamma_1 \tag{49}$$

és

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\alpha(t)\}}{t^{1+\gamma_2-\gamma_1}}=\frac{A\Gamma(1-\gamma_1)}{B\Gamma(1-\gamma_2)\Gamma(1-\gamma_1+\gamma_2)},\quad \text{ha}\quad \gamma_2<\gamma_1. \tag{50}$$

BIZONYÍTÁS: Szorítkozzunk valós $s>0$ értékekre. Ha $G(x)$-re fennáll, hogy $\alpha<\infty$, akkor

$$\gamma(s)=1-\alpha s+o(s),\quad \text{ha}\quad s\to 0$$

és ha (γ_3) áll fenn, akkor

$$\gamma(s)=1-A\Gamma(1-\gamma_1)s^{\gamma_1}+o(s^{\gamma_1}),\quad \text{ha}\quad s\to 0.$$

Hasonlóan, ha $H(x)$-re fennáll, hogy $\beta<\infty$, akkor

$$\psi(s)=1-\beta s+o(s),\quad \text{ha}\quad s\to 0,$$

és ha (h_3) áll fenn, akkor

$$\psi(s)=1-B\Gamma(1-\gamma_2)s^{\gamma_2}+o(s^{\gamma_2}),\quad \text{ha}\quad s\to 0.$$

Ezek segítségével valamennyi esetben meghatározhatjuk $\int_0^\infty e^{-st}dB(t)$ és $\int_0^\infty e^{-st}dA(t)$ aszimptotikus viselkedését $s\to 0$-ra. Valamennyi esetben $C/s^{\mu}(\mu \geqq 1)$ alakú aszimptotikus kifejezést nyerünk $s\to 0$-ra. Mivel $B(t)$ és $A(t)$ a t-nek nemcsökkenő függvényei tehát jól ismert Tauber-típusú tételből következik, hogy $B(t)$ illetve $A(t)$ aszimptotikus alakja $Ct^{\mu-1}/\Gamma(\mu)$. Ily módon megkapjuk a (45)—(50) képleteket.

A fentiekhez kapcsolódnak a következő eredmények. Vezessük be a következő valószínűségeket $P_B(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) \in B\} = \mathbf{P}\{\chi(t) = 1\}$ és $P_A(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) \in A\} = \mathbf{P}\{\chi(t) = 1\}$. Nyilvánvalóan $P_A(t) + P_B(t) = 1$, valamennyi t értékre. Most bebizonyítjuk a következő tételt.

5. TÉTEL: *Ha $\alpha + \beta < \infty$, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_B(u)\,du = \frac{\beta}{\alpha+\beta}. \tag{51}$$

Ha $\alpha + \beta < \infty$ és $F(x) = G(x) * H(x)$ nem rácsos eloszlás-függvény, akkor

$$\lim_{t\to\infty} P_B(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}. \tag{52}$$

BIZONYÍTÁS: Mivel $P_B(t) = 1 - P_A(t)$ tehát elegendő a megfelelő állításokat $P_A(t)$-re bizonyítani. Jelölje $F_n(x)$ az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolúcióját és legyen $F_0(x) = 1$, ha $x \geqq 0$ és $F_0(x) = 0$, ha $x < 0$. Ekkor a $[0, t]$ intervallumban előforduló $B \to A$ átmenetek várható száma, ha feltesszük, hogy $t = 0$ időpontban $B \to A$ átmenet történt,

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t).$$

Most a teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$P_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t [1 - G(t-y)]\,dF_n(y) = \int_0^t [1 - G(t-y)]\,dM(y). \tag{53}$$

Ha $\alpha + \beta < \infty$, akkor fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\alpha+\beta}, \tag{54}$$

(S. TÄCKLIND [21]) és ha $\alpha + \beta < \infty$ és $F(x)$ nem rácsos eloszlás, akkor valamennyi $h > 0$-ra:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{1}{\alpha+\beta} \tag{55}$$

(D. BLACKWELL [2]).

(51) bizonyítása. Fennáll

$$\frac{1}{t} \int_0^t P_A(u)\,du = \frac{1}{t} \int_0^t \left[\int_0^{t-x} (1 - G(y))\,dy \right] dM(x),$$

és innen tetszőleges τ-val $(0 < \tau < t)$

$$\frac{M(t-\tau)}{t}\int_0^\tau [1-G(y)]\,dy \leqq \frac{1}{t}\int_0^t P_A(u)\,du \leqq \alpha\frac{M(t)}{t}.$$

Ha most először $t \to \infty$ és azután $\tau \to \infty$, akkor (54) szerint fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P_A(u)\,du = \frac{1}{\alpha+\beta}$$

ami egyúttal (51)-et is igazolja.

11. MEGJEGYZÉS: (51) fennállása (45)-ből is következik, ugyanis

$$\mathbf{M}\{\beta(t)\} = \mathbf{M}\{\int_0^t \chi(u)\,du\} = \int_0^t \mathbf{M}\{\chi(u)\}\,du = \int_0^t \mathbf{P}\{\chi(u)=1\}\,du = \int_0^t P_B(u)\,du. \tag{56}$$

(52) bizonyítása: Írjuk (53)-at a következő alakban

$$P_A(t) = \int_0^{t/2}[1-G(t-y)]\,dM(y) + \int_{t/2}^t [1-G(t-y)]\,dM(y). \tag{57}$$

Itt a jobboldal első tagja zérushoz tart, ha $t \to \infty$. Ugyanis

$$0 \leqq \int_0^{t/2}[1-G(t-y)]\,dM(y) \leqq \frac{t}{2}\left[1-G\left(\frac{t}{2}\right)\right]\frac{M\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}$$

és itt (54) szerint

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\alpha+\beta}$$

és mivel $\alpha < \infty$, tehát

$$\lim_{t\to\infty} t[1-G(t)] = 0$$

is fennáll,

$$0 \leqq t[1-G(t)] \leqq \int_t^\infty x\,dG(x) \to 0, \qquad \text{ha } t \to \infty,$$

következtében. Az (57) jobboldalán álló második tagról könnyen kimutatható, hogy $1/(\alpha+\beta)$-hez tart, ha tekintetbe vesszük (55) fennállását. Így (52) is igazolást nyert.

12. MEGJEGYZÉS: Megemlítjük, hogy [18] dolgozatunkban bebizonyítottuk, hogy $\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 < \infty$ esetén fennáll

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{D}^2\{\beta(t)\}}{t} = \frac{\alpha^2\sigma_\beta^2 + \beta^2\sigma_\alpha^2}{(\alpha+\beta)^3}. \tag{58}$$

13. MEGJEGYZÉS: A (43) és (56) képlet tekintetbevételével azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} P_B(t)\,dt = \frac{1}{s}\frac{\gamma(s)[1-\psi(s)]}{1-\gamma(s)\psi(s)}. \tag{59}$$

Ebből a képletből kitűnik, hogy ha folyamatunkra vonatkozóan ismerjük a $G(x)$ eloszlásfüggvényt és a $P_B(t)$ valószínűségeket úgy $\psi(s)$ egyértelműen meghatározható. Ha például

$$G(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x \geqq 0, \\ 0 \quad , & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

akkor $\gamma(s) = \lambda/(\lambda+s)$ és így

$$\psi(s) = 1 - \frac{s^2 \int_0^\infty e^{-st} P_B(t)\,dt}{\lambda\left[1 - s\int_0^\infty e^{-st} P_B(t)\,dt\right]}.$$

$\psi(s)$ megfordításával $H(x)$ egyértelműen meghatározható.

Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete.

IRODALOM

[1] F. J. ANSCOMBE: Large-sample theory of sequential estimation. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **48** (1952) 600—607.

[2] D. BLACKWELL: A renewal theorem. *Duke Math. Journal* **15** (1948) 145—150.

[3] K. L. CHUNG and M. KAC: Remarks on fluctuations of sums of independent random variables. *Memoirs of the American Mathematical Society* No. **6** (1951) 1—11.

[4] Р. Л. Доврушин: Предельные теоремы для цепи Маркова из двух состояний. Изв. Акад. Наук. СССР Сер. Мат. **17** (1953) 291—330.

[5] Р. Л. Доврушин: О пределе сложной случайной функции. Усп. Мат. Наук **10** (1955) в. 4, 157—159.

[6] Р. Л. Доврушин: Две пределные теоремы для простейщего случайного олуждания по прямой. Усп. Мат. Наук **10** (1955), в. 5, 139—146.

[7] W. DOEBLIN: Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité. *Studia Mathematica* **9** (1941) 71—96.

[8] W. FELLER: Fluctiation theory of recurrent events. *Transactions of the American Mathematical Society* **67** (1949) 98—119.

[9] W. FELLER: An Introduction to Probability Theory and its Applications (New York, 1950).

[10] А. Н. Колмогоров: Локалная предельная теорема дла классических цепей Маркова Изв. Акад. Наук. СССР сер. мат. **13** (1949) 281—300.

[11] P. LÉVY: Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositio Mathematica* 7 (1939) 283—339.

[12] A. RÉNYI: On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957)

[13] H. ROBBINS: The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variable. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948) 1151—1161.

[14] TAKÁCS L.: Bekövetkezési és koincidencia jelenségek tárgyalása időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. *A Magy. Tud. Akad. III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.* **1** (1951) 371—386.

[15] TAKÁCS L.: Poisson-folyamat által származtatott történés folyamatokról. *A Magy. Tud. Akad. III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.* **4** (1954) 525—541.

[16] TAKÁCS L.: Bizonyos típusú rekurrens sztochasztikus folyamatok vizsgálatáról. *A Magy. Tud. Akad. Alk. Mat. Int. Közl.* **3** (1954) 115—128.

[17] TAKÁCS L.: „Várakozási idő" problémák tárgyalása Markov-folyamatok segítségével. *A Magy. Tud. Akad. III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.* **4** (1954) 543—570.

[18] L. TAKÁCS: On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 169—191.

[19] L. TAKÁCS: On limiting distributions concerning a sojourn time problem. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957).

[20] L. TAKÁCS: On a sojourn time problem. Теория вероятностей и ее применения.

[21] S. TÄCKLIND: Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem für den stationären Fall. *Skandinavisk Aktuarietidskrift* **27** (1944) 1—15.

(Beérkezett: 1957. VI. 10.)

ORTOGONÁLIS SOROK SZUMMÁCIÓJÁRÓL

TANDORI KÁROLY (Szeged)

Ebben a dolgozatban néhány, az ortogonális sorok Cesàro-szummációjával kapcsolatos eredményt ismertetünk.[1]

Ismeretes, hogy ha $\{a_n\} \in l^2$, azaz

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

akkor bármely $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormált függvényrendszer esetén a

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

ortogonális sor részletösszegeire az alapintervallumon majdnem mindenütt érvényes a

(3) $$\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) = o(\log N)$$

becslés (lásd RADEMACHER [1], 122.)

Egy előző dolgozatomban (lásd TANDORI [1], III. tétel) megmutattam, hogy ez a becslés általában nem javítható.

Tegyük fel, hogy a (2) sor valamely $\alpha > 0$ paraméterértékre az alapintervallumon majdnem mindenütt (C, α)-szummálható. Ekkor a (2) sor 2^n-edik részletösszegeinek a sorozata az alapintervallumon majdnem mindenütt konvergál.[2] Elképzelhető lenne, hogy ebben az esetben a (3) becslés javítható. Megmutatható azonban, hogy a (3) becslés még a (C, α)-szummálható, négyzetesen integrálható kifejtések esetén is általában éles. Érvényes ugyanis a következő tétel:

[1] A tételek részletes bizonyítását az *Acta Sci. Math. Szeged* folyóirat **18.** kötete „Über die orthogonalen Funktionen. II." cimen közli.

[2] ZYGMUND [1] egy tétele szerint abból, hogy a (2) sor valamilyen $\alpha > 0$ paraméterértékre az alapintervallumon majdnem mindenütt (C, α)-szummálható, következik, hogy az alapintervallumon majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható. Ebből pedig KOLMOGOROFF [1] tétele alapján adódik, hogy a 2^n-edik részletösszegek sorozata az alapintervallumon majdnem mindenütt konvergál.

I. TÉTEL. *Legyen* $\{w(n)\}$ *pozitív, monoton nem-csökkenő számsorozat, amelyre teljesül a*

$$w(n) = o(\log n)$$

feltétel. Ehhez megadható olyan $\{a_n\} \in l^2$ *együtthatósorozat és olyan, az* $[a, b]$ *alapintervallumon ortonormált* $\{\Phi_n(x)\}$ *függvényrendszer, hogy a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \tag{4}$$

ortogonális sor bármely pozitív α*-ra az* $[a, b]$ *intervallumon majdnem mindenütt* (C, α)*-szummálható, mégis az* $[a, b]$ *intervallumon mindenütt*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x) \right| = \infty.$$

A $\{\Phi_n(x)\}$ *függvényrendszer az alapintervallumon egyenletesen korlátosnak is választható.*

MENCHOFF [1] bebizonyította a következő tételt:

a) *Ha*

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 < \infty, \tag{5}$$

akkor bármely $\{\varphi_n(x)\}$ *ortonormált függvényrendszer esetén a* (2) *sor bármely* $\alpha > 0$ *paraméterértékkel az alapintervallumon majdnem mindenütt* (C, α)*-szummálható.*

MENCHOFF [1] azt is megmutatta, hogy az (5) feltétel már nem gyengíthető. Érvényes ugyanis a következő tétel:

b) *Legyen* $\{W(n)\}$ *pozitív számsorozat, amelyre teljesül a*

$$W(n) = o(\log\log n) \tag{6}$$

feltétel. Ekkor megadható olyan $\{a_n\}$ *együtthatósorozat és olyan, az* $[a, b]$ *alapintervallumon ortonormált* $\{\Phi_n(x)\}$ *függvényrendszer, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 W^2(n) < \infty,$$

mégis a (4) *sor bármely* $\alpha > 0$ *paraméterértékre az* $[a, b]$ *intervallumon sehol-sem* (C, α)*-szummálható.*

A $\{\Phi_n(x)\}$ *függvényrendszer az* $[a, b]$ *intervallumon egyenletesen korlátosnak is választható* (lásd TANDORI [1], 7 §).

Megmutatható az utóbbi MENCHOFF-féle tételnek a következő élesítése.

II. TÉTEL. *Legyen* $\{a_n^*\}$ *pozitív számsorozat, amelyre teljesülnek a*

$$\sqrt{n}\, a_n^* \geqq \sqrt{n+1}\, a_{n+1}^* \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

és

(8) $$\sum_{n=4}^{\infty}(a_n^*)^2(\log\log n)^2=\infty$$

feltételek. Ha

$$a_n \geqq \eta\, a_n^* \qquad (n=0,1,\ldots;\ \eta>0)$$

és

(9) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2<\infty,$$

akkor megadható olyan, az $[a, b]$ *alapintervallumon ortonormált* $\{\Phi_n(x)\}$ *függvényrendszer, hogy a* (4) *sor bármely* $\alpha>0$ *paraméterértékre az* $[a, b]$ *alapintervallumon seholsem* (C, α)*-szummálható.*

Megjegyezzük, hogy a (9) feltétel nem jelent lényeges megszorítást. Ha ugyanis

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2=\infty,$$

akkor egy ismert tétel szerint (ZYGMUND [2]) a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x) \qquad (r_n(x)=\operatorname{sign}\sin 2^n \pi x,\ n=0,1,\ldots)$$

Rademacher-sor (C, α)-közepei bármely $\alpha>0$ paraméterérték mellett a $[0, 1]$ alapintervallumon majdnem mindenütt divergálnak.

Megjegyezzük továbbá, hogy a (7) feltételből következik, hogy az $\{a_n^*\}$ sorozat monoton nem-növő. Viszont a II. tétel érvényességéhez nem elegendő (7) helyett csak azt kikötni, hogy az $\{a_n^*\}$ sorozat monoton nem-növő. ALEXITS [1] alább idézett tétele alapján ugyanis előfordulhat az, hogy az $\{a_n^*\}$ pozitív, monoton nem-növő együtthatósorozatra teljesül a (8) feltétel, mégis bármely $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormált függvényrendszer esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \varphi_n(x)$$

sor bármely $\alpha(>0)$-ra az alapintervallumon majdnem mindenütt (C, α)-szummálható.

A MENCHOFF-féle a) tétel alapján a II. tétel a következőképpen is megfogalmazható.

Legyen $\{a_n\}\in l^2$ *pozitív számsorozat, amely eleget tesz a* $\sqrt{n}\,a_n \geqq \sqrt{n+1}\,a_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ *feltételnek. Ekkor az* (5) MENCHOFF*-féle feltétel nemcsak elegendő, hanem szükséges is ahhoz, hogy a* (2) *ortogonális sor bármely* $\{\varphi_n(x)\}$ *ortonormált függvényrendszer esetén bármely* $\alpha>0$ *paraméterértékkel az alapintervallumon majdnem mindenütt* (C, α)*-szummálható legyen.*

Könnyen belátható, hogy a II. tétel tartalmazza a MENCHOFF-féle b) tételt. Legyen ugyanis $\{W(n)\}$ pozitív számsorozat, amelyre teljesül a (6) feltétel. Ekkor a

$$\left(\frac{W(n)}{\log\log n}\right)^2 \qquad (n=4,5,\ldots)$$

sorozat, pozitív nullsorozat. Mivel továbbá

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} = \infty,$$

így megadható olyan $\{N_k\}$ indexsorozat, $N_0=4$, hogy teljesüljenek következő feltételek:

$$\left(\frac{W(n)}{\log\log n}\right)^2 \leqq \frac{1}{k^2}, \quad \text{ha} \quad n \geqq N_{k-1} \quad (k=1,2,\ldots) \tag{10}$$

és

$$(0<) \sum_{m=N_{k-1}}^{N_k-1} \frac{1}{m(\log m)(\log\log m)} \leqq \sum_{m=N_k}^{N_{k+1}-1} \frac{1}{m(\log m)(\log\log m)} \tag{11}$$
$$(k=1,2,\ldots).$$

Legyen

$$\mu_n = \sum_{m=N_{k-1}}^{N_k-1} \frac{1}{m(\log m)(\log\log m)}, \text{ ha } N_{k-1} \leqq n < N_k \quad (k=1,2,\ldots).$$

Az így definiált $\{\mu_n\}$ sorozat pozitív és (11) szerint monoton nem-csökkenő. Legyen

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(\log n)(\log\log n)^3\mu_n}}, \text{ha } n \geqq 4, a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ ha } n=1,2,3 \text{ és } a_0 = 1.$$

Nyilvánvaló, hogy az $\{a_n\}$ számsorozat pozitív, $\{a_n\} \in l^2$ és eleget tesz a $\sqrt{n}\,a_n \geqq \sqrt{n+1}\,a_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ feltételnek. Továbbá (10) alapján

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2 W^2(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)\mu_n} \left(\frac{W(n)}{\log\log n}\right)^2 \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Viszont

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)\mu_n} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Így alkalmazható a II. tétel és adódik olyan $\{\Phi_n(x)\}$ ortonormált függvényrendszernek a létezése, amelyre a (4) sor bármely $\alpha > 0$ paraméterértékre az alapintervallumon seholsem (C, α)-szummálható.

Az előbbiekben definiált $\{a_n\}$ együtthatósorozat és az így adódó $\{\Phi_n(x)\}$ függvényrendszer eleget tesz a MENCHOFF-féle b) tétel állításában szereplő összes feltételeknek. Ezzel megmutattuk, hogy a II. tétel tartalmazza a MENCHOFF-féle b) tételt.

Ortogonális sorok majdnem mindenütt való $(C, \alpha > 0)$-szummálhatóságára az (5) feltételtől különböző és azzal össze nem hasonlítható elegendő feltételt adott ALEXITS [1]. Tétele a következő:

Legyen $\{a_n^*\}$ pozitív, monoton nem-növő számsorozat, amelyre teljesül a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*}{\sqrt{n}} < \infty$$

feltétel. Ha

$$a_n = O(a_n^*),$$

akkor a (2) ortogonális sor bármely $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormált függvényrendszer esetén bármely $\alpha > 0$ paraméterértékre az alapintervallumon majdnem mindenütt (C, α)-szummálható.

Megmutatható, hogy az Alexits-féle feltétel nem gyengíthető. Érvényes ugyanis a következő

III. TÉTEL. *Legyen $\{w(n)\}$ pozitív számsorozat, amely eleget tesz a*

$$\sqrt{n} = o(w(n))$$

feltételnek. Ekkor megadható olyan pozitív, monoton nem növő $\{a_n\} \in l^2$ együtthatósorozat és olyan az $[a, b]$ alapintervallumon ortonormált $\{\Phi_n(x)\}$ függvényrendszer, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{w(n)} < \infty,$$

mégis a (4) sor bármely $\alpha > 0$ paraméterérték mellett az $[a, b]$ intervallumon seholsem (C, α)-szummálható.

Az I—III. tételek bizonyítása a következő segédtétel felhasználásával történik:

Legyenek $p (\geqq 2)$ és $c (\geqq 1)$ természetes számok. Ezekhez a $[0,5)$ alapintervallumon megadható olyan, lépcsős függvényekből álló ortonormált $\{f_l(c, p; x)\}$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ függvényrendszer, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik. A $\left(\frac{2}{c}, \frac{3}{c}\right)$ intervallum minden x pontjához megadható olyan x-től függő $m(x) (< p)$ természetes szám, hogy az $f_1(c, p; x), \ldots$ $\ldots, f_{p+m(x)}(c, p; x)$ függvényértékek pozitívok és

$$f_1(c, p; x) + \cdots + f_{p+m(x)}(c, p; x) \geqq A \sqrt{cp} \log p,$$

ahol A c-től, p-től és x-től független pozitív szám.

Ezt a segédtételt a $c=1$ esetre MENCHOFF [2] alapgondolatainak a felhasználásával KACZMARZ [1] bizonyította be. A segédtételt általános esetben TANDORI [1] mutatta meg. Ennek a segédtételnek és az I—III. tételeknek a bizonyításai MENCHOFF módszereinek élesítésén alapulnak.

Az, hogy a II. és III. tételekben a $\{\Phi_n(x)\}$ függvényrendszer választható-e az alapintervallumon egyenletesen korlátosnak, még kérdéses.

IRODALOM

ALEXITS, G., [1] Ein Summationssatz für Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956) 5—9.

KACZMARZ, S., [1] Notes on orthogonal series. II, *Studia Math.*, **5** (1934) 103—106.

KOLMOGOROFF, A. N., [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924) 96—97.

MENCHOFF, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales, Deuxième partie, *Fundamenta, Math.*, **8** (1926) 56—108;

[2] Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923) 82—105.

RADEMACHER, H., [1] Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922) 112—138.

TANDORI, K., [1] Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math., Szeged*, **18** (1957) 57—130.

ZYGMUND, A., [1] Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamentha Math.*, **10** (1927) 356—362.

[2] On the convergence of lacunary trigonometric series, *Fundamentha Math.*, **16** (1930) 90—107.

(Beérkezett: 1957. VI. 28.)

A LEGJOBB POLINOMAPPROXIMÁCIÓ LOKALIZÁLÁSÁRÓL. I.

FREY TAMÁS kandidátus

(Bemutatta Alexits György akadémikus 1954-ben)

Bevezetés

Arra a fontos kérdésre, hogy egy 2π periódusú folytonos függvény milyen jól approximálható (Csebisev-féle értelemben) trigonometrikus polinomok sorozatával, JACKSON, DE LA VALLÉE-POUSSIN és BERNSTEIN alapvető vizsgálatai nyomán válaszolni tudunk. Ismeretes, hogy a legjobb megközelítés nagyságrendjét az approximálandó függvény azon struktúrális tulajdonságai határozzák meg, amelyek *bármely* zárt, 2π hosszúságú szakaszon egyformán megtalálhatók, — sőt a Bernstein-féle fordított tételek értelmében ez az összefüggés a legjobb approximáció rendje és a függvény struktúrális tulajdonságai között lényegében megfordítható.

Meg kell jegyeznünk, hogy a Csebisev-féle értelemben legjobban approximáló trigonometrikus polinomsorozatokat általában nem tudjuk felírni. Ismeretesek azonban olyan explicit formulát adó eljárások — pl. DE LA VALLÉE-POUSSIN adott meg egy ilyet [1] — amelyek a legjobb approximációval megegyező nagyságrendű közelítést szolgáltatnak.

A gyakorlatban nem ritkán teljesen különbözőek az alapintervallum egyes szakaszain a függvény struktúrális jellemzői. A legjobb közelítés nagyságrendjét ezesetben természetesen a „legrosszabbul approximálható" szakasz struktúrája határozza meg. Arról azonban semmit sem tudunk, hogy az ún. „Csebisev-pontok" ilyenkor hol helyezkednek el; még kevésbé tudjuk azt, hogy a legjobban approximáló polinomsorozat az alapintervallum különböző struktúrájú szakaszai felett milyen közelítést biztosít.

Ebben a dolgozatban éppen arra a kérdésre adunk választ, hogy miképpen konstruálható olyan trigonometrikus polinomsorozat, amely bármely részintervallum felett olyan megközelítési nagyságrendet szolgáltat, amilyent a függvénynek e szakaszon mutatkozó struktúrális tulajdonságai alapján egyáltalán várni lehet. A sorozat heurisztikus konstrukcióját az 1. §-ban találjuk; ki kell emelnünk, hogy explicite könnyen megadható formuláról van szó.

A 3. §-ban a Bernstein-féle fordított tételeket élesítjük és lokalizáljuk, a 4. §-ban pedig a folytonos függvények periodikus folytatásának egy olyan kivitelezését ismertetjük, amely megőrzi a kiindulási szakasz struktúrális jellemzőit. Ezek alapján egyrészt pontosan értelmezzük, hogy az egyes részintervallumok felett milyen megközelítési nagyságrendre lehet egyáltalán számítani és igazoljuk, hogy a megadott polinomsorozat e megközelítési nagyságrendet valóban el is éri (2. §). A dolgozat második része a 2—4. §-t tartalmazza. A következőkben az eljárást tovább finomítjuk és így pontonként is biztosítjuk a várható approximációs nagyságrendet (5. §), megvizsgáljuk a polinomsorozat deriváltjainak viselkedését (6. §), végül az egyes függvényklasszisokat jellemezzük, az eljárás szolgáltatta approximációs nagyságrendek alapján (7. §). A harmadik részben emellett az eljárást általánosítjuk interpoláció sorozatok esetére is (8. §).

A nyert eredmények természetesen átvihetőek a $C[a, b]$ osztály függvényeinek polinomokkal történő approximációjának esetére is.

01. **Bochner eredményeiről.** S. BOCHNER „Localization of best approximation" c. dolgozatában [2] ugyanezt a kérdést veti fel, szűkebb fogalmazásban. Approximációs tétele ezért szűkebb esetcsoportra vonatkozik, itt gyengébb, mint az általunk e csoportra adandó tétel, emellett explicit formulát általában nem is ad. BOCHNER egyik tételével igazolni akarja, hogy approximációs eredménye nem élesíthető: "If for a sequence of exponential polynomials $\{\sigma_n(x)\}$ we have[1]

$$|\sigma_n(x)| \leqq 1,$$

or more generally

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)|\, dx \leqq 1,$$

and if for three constants $\alpha > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $C_1 > 0$ we have

$$|\sigma_n(x)| \leqq C_1 \cdot e^{-n\varepsilon_0}$$

for x in

$$-\alpha \leqq x \leqq \alpha,$$

then the sequence $\sigma_n(x)$ converges to 0 uniformly in all of $-\pi \leqq x \leqq \pi$."[2]

1 $$\sigma_n(x) \equiv \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}.$$

2 „Amennyiben a $\{\sigma_n(x)\}$ exponenciális polinomsorozatra érvényes a

$$|\sigma_n(x)| \leqq 1,$$

vagy általánosabb esetben az

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)|\, dx \leqq 1$$

egyenlőtlenség, továbbá található három állandó: $\alpha > 0$; $\varepsilon_0 > 0$; $C_1 > 0$, amelyekkel teljesül az

$$|\sigma_n(x)| \leqq C_1 \cdot e^{-n\varepsilon_0}$$

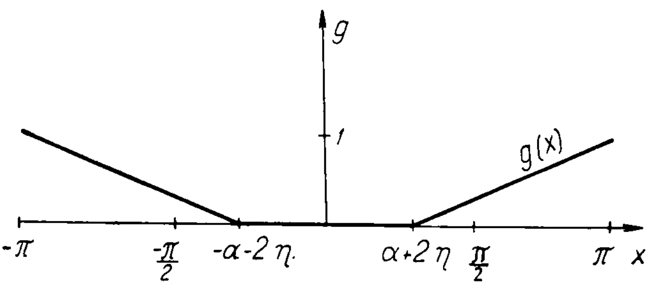
egyenlőtlenség a $-\alpha \leqq x \leqq \alpha$ intervallumon, akkor a $\{\sigma_n(x)\}$ sorozat az egész $-\pi \leqq x \leqq \pi$ intervallumon egyenletesen 0-hoz tart."

Ez azonban téves állítás, *amint azt a következő ellenpélda mutatja:* legyen $g(x) \in C[-\pi, \pi]$:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < -\alpha - 2\eta \leqq x \leqq \alpha + 2\eta \\ 1, & \text{ha } x = \pm\pi, \\ \text{másutt lineáris és folytonos,} & \end{cases}$$

$(0 < 2\eta < \alpha)$, továbbá

$$V_n(g; x) = \frac{1}{2\pi} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cdot \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt.$$



1. ábra

Könnyű belátni, hogy egyrészt

$$(01.1) \qquad |V_n(g; x)| \leqq C \cdot e^{-n\varepsilon_0},$$

ha

$$-\alpha \leqq x \leqq \alpha; \ 0 < \varepsilon_0 < -2 \log \cos \eta;$$
$$C \geqq \max_{x>0} 2\pi\sqrt{x}\, e^{-x|2\log\cos\eta + \varepsilon_0|};$$

másrészt viszont

$$(01.2) \qquad V_n(g; x) > \frac{1}{2} \frac{x - \alpha - 2\eta}{\pi - \alpha - 2\eta},$$

ha

$$\alpha + 3\eta \leqq x \leqq \pi \quad \text{és} \quad n \geqq N_0(\alpha; \eta).$$

A (01. 1) reláció $V_n(g; x)$ becslésével olvasható le, ha felhasználjuk, hogy

$$|g(x)| \leqq 1; \quad \frac{1}{2\pi} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} < \sqrt{n}$$

és

$$\left| \cos^{2n} \frac{t-x}{2} \right| < e^{-n|2\log\cos\eta|}; \ \text{ha} \ \pi - \eta > \left| \frac{t-x}{2} \right| > \eta,$$

a (01.2) reláció viszont annak a ténynek egyszerű következménye, hogy a de la Vallée-Poussin-féle $\{V_n(g; x)\}$ polinomsorozat $[-\pi, \pi]$-ben egyenletesen a folytonos $g(x)$-hez konvergál.

Megjegyezzük, hogy a BOCHNER által közölt bizonyítás a Poisson—Jensen-féle egyenlőtlenséget tévesen használja fel ([2], 16. old.).

1. §. A trigonometrikus polinomsorozat konstrukciója

11. **A Lebesgue-függvényről.** Jelölje $\{L_n(f; x)\}$ a lineáris operációk egy olyan sorozatát, amelynek segítségével az $f(x) \in L$ függvényhez hozzárendeljük a

$$(11.1) \qquad g_n(x) \equiv L_n(f; x)$$

függvénysorozatot. Az operációsorozathoz tartozó $\{\lambda_n(x)\}$ Lebesgue-függvények, ill. $\{\lambda_n\}$ Lebesgue-konstansok sorozatát a következőképp definiálják:

$$(11.2) \qquad \lambda_n(x) = \sup_{\psi \in L^*} L_n(\psi; x); \quad \lambda_n = \sup_x \lambda_n(x),$$

ahol L^* az L-tér mindazon ψ függvényeinek halmaza, amelyek csak a -1 és $+1$ értéket vehetik fel.

A következőkben célszerűen használhatjuk e fogalom általánosításait: a külső és belső Lebesgue-függvényt, ill. Lebesgue-konstanst:

$$(11.3) \qquad \Lambda_n^{(k)}(x; \delta) = \sup_{\varphi \in L^{**}_{x;\delta}} L_n(\varphi; x); \quad \Lambda_n^{(k)}(\delta) = \sup_x \Lambda_n^{(k)}(x; \delta);$$

$$(11.4) \qquad \Lambda_n^{(b)}(x; \delta) = \lambda_n(x) - \Lambda_n^{(k)}(x; \delta); \quad \Lambda_n^{(b)}(\delta) = \sup_x \Lambda_n^{(b)}(x; \delta),$$

aholis $L^{**}_{x;\delta}$ az L-tér mindazon valósértékű φ függvényeinek halmaza, amelyekre

$$\varphi(z) \equiv 0, \quad \text{ha} \quad z \in [x-\delta; x+\delta]; \ |\varphi(z)| = 1, \quad \text{ha} \quad z \notin [x-\delta; x+\delta].$$

Trigonometrikus polinomsorozattal történő approximáció esetén az operációsorozat alábbi speciálizálása jön szóba: Jelöljük $\{M_n(t)\}$-vel az $N(n)$-ed rendű trigonometrikus polinomok normált sorozatát:

$$\int_a^{a+2\pi} M_n(t)\, dt = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

amelynek segítségével bármely $f(x) \in L[-\pi, \pi]$ függvényhez hozzárendeljük a

$$(11.5) \qquad T_n(f; x) = \int_{-\pi}^{\pi} M_n(t-x) f(t)\, dt$$

$N(n)$-edrendű trigonometrikus polinomsorozatot. Ez esetben

$$(11.6) \qquad \lambda_n(x) \equiv \lambda_n = \int_{-\pi}^{\pi} |M_n(t)|\, dt$$

és

$$\Lambda_n^{(b)}(x;\delta)\equiv\Lambda_n^{(\delta)}(\delta)=\int_{-\delta}^{\delta}|M_n(t)|\,dt, \tag{11.7}$$

ill.

$$\Lambda_n^{(k)}(x;\delta)\equiv\Lambda_n^{(k)}(\delta)=\left[\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right]|M_n(t)|\,dt \qquad (0<\delta<\pi). \tag{11.8}$$

12. **A magsorozat konstrukciója.** A lokális approximáció biztosítása céljából DE LA VALLÉE-POUSSIN egy gondolatát fejlesztjük tovább, akinek a — bevezetésében [1] alatt említett — konstrukciója egy olyan magfüggvénysorozat megalkotásán alapszik, amelynek

1°. Lebesgue-konstansai összességükben korlátosak, továbbá

2° az $N(n)=(2n-1)$-edrendű polinommag bármely legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomot rekonstruál.

Mi ezt még kiegészítjük azzal, hogy a magfüggvénysorozat

3° külső Lebesgue-konstansai legalább exponenciális rendben tartsanak 0-hoz.

Ez biztosítja ti., hogy a függvénynek a vizsgált részintervallumon kívül mutatott struktúrális tulajdonságai a kérdéses szakasz belsejében az approximációt csak egy exponenciális rendben 0-hoz tartó faktorral gyengítve befolyásolják.

DE LA VALLÉE-POUSSINhez hasonlóan a

$$S_k(t)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} \tag{12.1}$$

Dirichlet-mag bizonyos közepeire támaszkodunk; a 2° követelményt ismét úgy elégítjük ki, hogy a középképzésben szereplő legalacsonyabb rendszámot az n-edik magnál n-nek választjuk. A 3°. követelmény ekkor egy Euler-típusú középképzéssel elégíthető ki:

$$E_n(t)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=n}^{2n}\binom{n}{k-n}S_k(t), \tag{12.2}$$

a 1°. követelmény viszont e polinomok számtani közepével:

$$F_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{l=n}^{2n-1}E_l(t). \tag{12.3}$$

12. 1. TÉTEL: *A* (12. 1)—(12. 3) *alatt definiált* $N(n)=(4n-2)$*-edrendű trigonometrikus polinomsorozat által származtatott eljárás*

1°. *belső Lebesgue-függvényei összességükben korlátosak:*

(12. 4) $$\Lambda_n^{(b)}(\delta) < 1 + \frac{16}{\sqrt{1+8\cos^2\frac{\delta}{2}}}; \qquad n = 3, 4, 5, \ldots:$$

2°. *bármely legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomot a „$\nu \geqq$ n-edik lépésben" rekonstruál:*

(12. 5) $$\int_{-\pi}^{\pi} F_\nu(t-x) f(t)\,dt \equiv f(x),$$

hacsak $f(x) \in H_n^{(T)}$ *és* $\nu \geqq n$, *ahol* $H_n^{(T)}$ *a legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomok halmaza;*

3°. *Külső Lebesgue-függvényei exponenciális rendben 0-hoz tartanak:*

(12. 6) $$\Lambda_n^{(k)}(\delta) \leqq \frac{4}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot\frac{q^n}{n}; \; 0 < q = q(\delta) = \cos\frac{\delta}{2} < 1.$$

BIZONYÍTÁS: $F_n(t)$ zárt alakban is előállítható:

$$F_n(t) = \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{\sin\left(k+l+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} =$$

$$= \frac{1}{2n\pi\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\operatorname{Im}\left\{\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}e^{i\left(k+l+\frac{1}{2}\right)t}\right\} =$$

(12. 7) $$= \frac{1}{2n\pi\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\operatorname{Im}\left\{e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\cdot 2^k\cos^k\frac{t}{2}e^{ik\frac{t}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2n\pi\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=n}^{2n-1}\operatorname{Im}\left\{\cos^k\frac{t}{2}\cdot e^{i(3k+1)\frac{t}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{\cos^n\frac{t}{2}}{2n\pi\sin\frac{t}{2}}\cdot\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i\frac{3n+1}{2}t} - \cos^n\frac{t}{2}e^{i\left(3n+\frac{1}{2}\right)t}}{1-\cos\frac{t}{2}e^{i\frac{3}{2}t}}\right\},$$

ahol felhasználtuk az

(12. 8) $$(1+e^{it}) \equiv 2\cos\frac{t}{2}e^{i\frac{t}{2}}$$

azonosságot.

A belső Lebesgue-függvény becslése céljából a szereplő integrált két részre bontjuk:

$$(12.9)\qquad \frac{1}{2}\Lambda_n^{(b)}(\delta)=\int_0^{\delta}|F_n(t)|\,dt=\left[\int_0^{\frac{\pi}{8n-4}}+\int_{\frac{\pi}{8n-4}}^{\delta}\right]|F_n(t)|\,dt;\quad \left(\delta\geqq\frac{\pi}{8n-4}\right).$$

Az első tag becslése egyszerű: a $\left[0,\frac{\pi}{8n-4}\right]$ intervallumon az abszolútértékjel elhagyható, hiszen — mint a (12. 1)—(12. 3) relációk mutatják — itt egyetlen, a középképzésben fellépő tag sem negatív. Ez az integrál tehát így becsülhető:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8n-4}}|F_n(t)|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{8n-4}}F_n(t)\,dt=\frac{1}{2n\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\int_0^{\frac{\pi}{8n-4}}\frac{\sin\left(k+l+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt<$$

$$(12.10)\qquad <\frac{1}{2n\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{\pi\left(k+l+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}(8n-4)}<\frac{1}{2n\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\cdot\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\pi=\frac{1}{2}.$$

A második tag becslésénél felhasználjuk az

$$\left|\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i\frac{3n+1}{2}t}-\cos^n\frac{t}{2}e^{i\left(3n+\frac{1}{2}\right)t}}{1-\cos\frac{t}{2}e^{i\frac{3}{2}t}}\right\}\right|\leqq$$

$$(12.11)\qquad \leqq\frac{\left|e^{i\frac{3n+1}{2}t}-\cos^n\frac{t}{2}e^{i\left(3n+\frac{1}{2}\right)t}\right|}{\left|1-\cos\frac{t}{2}e^{i\frac{3}{2}t}\right|}\leqq\frac{2}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|\sqrt{1+8\cos^2\frac{t}{2}}}$$

egyenlőtlenséget, ami az

$$\left|1-\cos\frac{t}{2}e^{i\frac{3}{2}t}\right|=\left|1-\cos\frac{t}{2}\cos\frac{3}{2}t-i\cos\frac{t}{2}\sin\frac{3}{2}t\right|=$$

$$(12.12)\qquad =\sqrt{1-2\cos\frac{t}{2}\cos\frac{3}{2}t+\cos^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{3}{2}t+\cos^2\frac{t}{2}\sin^2\frac{3}{2}t}=$$

$$=\sqrt{1-2\cos\frac{t}{2}\cos\frac{3}{2}t+\cos^2\frac{t}{2}}=\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}\left(1+8\cos^2\frac{t}{2}\right)}=$$

$$=\left|\sin\frac{t}{2}\right|\cdot\sqrt{1+8\cos^2\frac{t}{2}}$$

elemi átalakítás felhasználásával közvetlenül adódik. Így, $\left(\text{ha } \frac{\pi}{8n-4} \leqq \delta\right)$:

$$(12.13)\quad \begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{8n-4}}^{\delta} |F_n(t)|\,dt &\leqq \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\pi}{8n-4}}^{\delta} \frac{2}{\frac{t^2}{\pi^2}\sqrt{1+8\cos^2\frac{t}{2}}}\,dt < \\ &< \frac{\pi^2\cdot(8n-4)}{n\pi^2\sqrt{1+8\cos^2\frac{\delta}{2}}} < \frac{8}{\sqrt{1+8\cos^2\frac{\delta}{2}}}, \end{aligned}$$

hiszen $\left|\sin\frac{t}{2}\right| \geqq \frac{2}{\pi}\frac{|t|}{2}$, hacsak $|t| \leqq \pi$.

A (12. 10) és (12. 13) alatti relációkból pedig 1°. alatti állításunk leolvasható. (12. 11) alapján egyébként a külső Lebesgue-függvény is könnyen becsülhető:

$$(12.14)\quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\Lambda_n^{(k)}(\delta) &\leqq \frac{1}{2n\pi}\cdot\cos^n\frac{\delta}{2}\int_{\delta}^{\pi}\frac{2}{\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{1+8\cos^2\frac{t}{2}}}\,dt < \\ &< \frac{1}{n\pi}\cos^n\frac{\delta}{2}\int_{\delta}^{\pi}\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{2}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot\frac{\cos^n\frac{\delta}{2}}{n}, \end{aligned}$$

amivel 3°. alatti állításunkat is igazoltuk. A 2°. alatti rekonstrukciós reláció viszont a konstrukció triviális következménye.

13. **A polinomsorozat explicit előállítása.** A Fourier-sor ismeretében a lokálisan approximáló polinomsorozat könnyen — éspedig ugyanazon közepelő-lépésekben, mint a magfüggvény — állítható elő; $S_n(f;x)$-szel jelölve f Fourier-sorának n-edik szeletét:

$$(13.1)\quad A_n(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t-x)f(t)\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}S_{k+l}(f;x),$$

illetve:

$$(13.2)\quad A_n(f;x) = \sum_{k=0}^{4n-2}\alpha_k(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

aholis

$$(13.3)\quad \alpha_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \leqq n \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{l=n}^{2n-1}\frac{1}{2^l}\sum\limits_{m=[k-l]^+}^{l}\binom{l}{m}, & \text{ha } n < k < 2n \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{l=\{\frac{k}{2}\}}^{2n-1}\frac{1}{2^l}\sum\limits_{m=[k-l]^+}^{l}\binom{l}{m}, & \text{ha } 2n \leqq k \leqq 4n-2, \end{cases}$$

$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, végül $\left\{\frac{k}{2}\right\}$ a $\frac{k}{2}$-nél nem kisebb legkisebb természetes számot, $[k-l]^+$ pedig az $\frac{1}{2}\{|k-l|+(k-l)\}$ mennyiséget jelöli.

14. **Az alapvető approximációs becslés.** Az alábbiakban az $A_n(f; x)$ polinomsorozat által szolgáltatott lokális approximációt egy tetszőleges polinomsorozat által elérhető közelítéssel fogjuk összehasonlítani. Legyen tehát $f(x) \in C_{2\pi}$; x_0 egy tetszőleges rögzített pont, a $\tau_n(x) \in H_n^{(T)}$ trigonometrikus polinom pedig közelítse $f(x)$-et az alábbi mértékben:

$$(14.1) \quad |f(x)-\tau(x)| \leqq \begin{cases} \varepsilon_n^{(b)}, & \text{ha} \quad x_0-\delta \leqq x \leqq x_0+\delta;\ (0<\delta<\pi) \\ \varepsilon_n^{(k)}, & \text{ha} \quad -\infty < x < \infty.^3 \end{cases}$$

14. 1. TÉTEL: A fenti jelöléseket és feltételeket megtartva, érvényes az alábbi becslés:

$$(14.2) \quad |f(x_0)-A_n(f; x_0)| \leqq \left(2+\frac{16}{\sqrt{1+8\cos^2\frac{\delta}{2}}}\right)\varepsilon_n^{(b)} + \frac{4}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot\frac{\cos^n\frac{\delta}{2}}{n}\varepsilon_n^{(k)}.$$

BIZONYÍTÁS: Az A_n-operáció linearitását és rekonstrukciós tulajdonságát felhasználva, nyilván:

$$(14.3) \quad |f(x_0)-A_n(f; x_0)| \leqq |f(x_0)-\tau_n(x_0)| + |A_n(f-\tau_n; x_0)|.$$

Csak a jobboldal második tagját kell becsülnünk:

$$(14.4) \quad \begin{aligned} |A_n(f-\tau_n; x_0)| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t-x_0)[f(t)-\tau_n(t)]\,dt\right| = \\ &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)[f(t+x_0)-\tau_n(t+x_0)]\,dt\right| \leqq \\ &\leqq \left[\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)+\int_{-\delta}^{\delta}\right]|F_n(t)|\cdot|f(t+x_0)-\tau_n(t+x_0)|\,dt \\ \leqq \Lambda_n^{(b)}(\delta)\cdot \max_{x_0-\delta\leqq t\leqq x_0+\delta} &|f(t)-\tau_n(t)| + \Lambda_n^{(k)}(\delta)\max|f(t)-\tau_n(t)|. \end{aligned}$$

Mármost (14. 4), (14. 3), (14. 1) és (12. 4), ill. (12. 6) alapján a tétel állítása közvetlenül leolvasható.

[3] A $\{\tau_n(x)\}$ sorozat legjobb megválasztásával, ill. az $\{\varepsilon_n^{(b)}\}$ és $\{\varepsilon_n^{(k)}\}$ sorozatok nagyságrendjét és az $f(x)$ struktúrális tulajdonságait összekapcsoló tételekkel a 2—3. §-ban foglalkozunk majd.

Megjegyezzük még, hogy a 6., ill. 7. §-ban az $f(x) \in C_{2\pi}$ feltétel helyett az $f(x) \in L_{2\pi}$ feltételre támaszkodva is ugyanilyen „értékű" lokális approximációs tételt fogunk kimondani.

IRODALOM

[1] De la Vallée—Poussin, Ch.: *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Paris, 1919.

[2] Bochner, S.: Localisation of best approximation, *Annals Math. Study*, No. **25**. (1950). Princetown.

(Beérkezett: 1957. VI. 3.)

TÉRBELI PONTHALMAZOK FELOSZTÁSA KISEBB ÁTMÉRŐJŰ RÉSZHALMAZOK ÖSSZEGÉRE

HEPPES ALADÁR

Tekintsünk egy korlátos ponthalmazt az n-dimenziós térben. Egy adott irányra merőleges két $n-1$-dimenziós támaszsíkjának távolságát a halmaz adott irányú szélességének nevezzük. A ponthalmaz *átmérőjén* a különböző irányú szélességek maximumát, *szélességén* pedig ezek minimumát értjük. Állandó szélességű az olyan test, amelynek átmérője és szélessége megegyezik, azaz bármely két párhuzamos támaszsíkjának távolsága ugyanannyi.

H. G. EGGLESTON [1] 1955-ben bizonyította be először az $n=3$ esetre K. BORSUK alábbi, már 1933-ban kimondott sejtését [2]:

Az n-dimenziós tér minden egységátmérőjű ponthalmaza szétbontható $n+1$ kisebb átmérőjű részhalmazra.

BORSUK sejtése egészében még ma is megoldatlan, részeredményeket azonban többen is értek el a problémával kapcsolatban, ugymint H. HADWIGER [3], H. G. EGGLESTON [1], H. LENZ [4], HEPPES A.—RÉVÉSZ P. [5], B. GRÜNBAUM [1].

E dolgozat célja EGGLESTON tételére egyszerűbb bizonyítást adni.

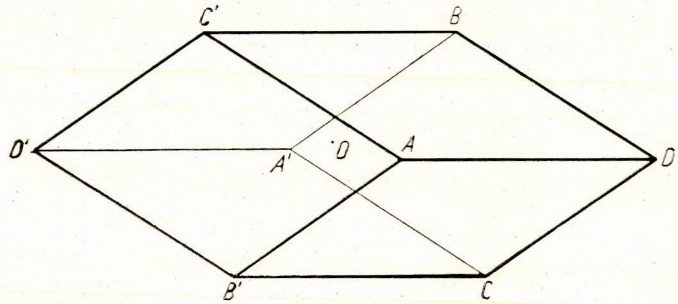
Az $n=2$-esetre — mint H. LENZ is megjegyzi — a következőképp is igazolható a sejtés. Ismeretes [6], hogy minden síkbeli egységátmérőjű ponthalmaz lefedhető egy egységnyi széles szabályos hatszöggel. E hatszög azonban középpontjából minden második oldalára bocsátott merőlegesekkel három $\frac{\sqrt{3}}{2}$ átmérőjű részre vágható. Minthogy ennél kisebb részekre maga a kör sem osztható, felvetődik a kérdés, vajon kettőnél magasabb dimenziós terekben is igaz-e BORSUK sejtésén túlmenően, hogy alkalmas feldarabolásnál a keletkező részek átmérője nem csupán 1-nél kisebb, hanem a gömb felosztásánál keletkező darabok átmérőjét sem haladhatja meg.

TÉTEL: *A háromdimenziós tér minden egységátmérőjű halmaza felosztható négy, egynél kisebb átmérőjű halmazra.*

BIZONYÍTÁS: Minthogy minden egységátmérőjű ponthalmaz része egy egységnyi állandó szélességű testnek [6], elegendő ilyen testek szétdarabolásával foglalkozni.

[1] ERDŐS PÁL szóbeli közlése.

Legyen T a háromdimenziós térben egy 1 átmérőjű állandó szélességű test, P pedig egy tetszőleges olyan parallelepipedon, amely három 1 szélességű térréteg közös részeként keletkezik. Minthogy T átmérője 1, a P-nek egyik, másik, majd harmadik irányú élével párhuzamos eltolással az egyik, másik, majd a harmadik térrétegbe vihető. A harmadik eltolás eredményképp a T test a rétegek közös részébe, P-be kerül, minthogy a három eltolás közül bármely réteggel kettő párhuzamos. Az eredő eltolás, amellyel T a P-be jut, egyértelműen meghatározott, hiszen az állandó szélességű T a P-be tolva annak minden lapját érinti, így további eltolás P-n belül nem lehetséges. Minden T-hez tartozik tehát egy belőle eltolással kelelkező T' test, amelyet

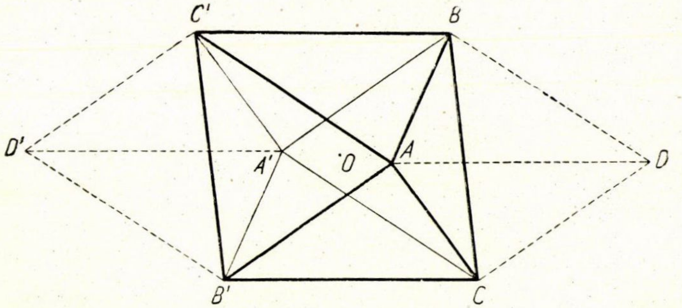


1. ábra

a P parallelepipedon tartalmaz. Könnyen belátható, hogy T folytonos forgatásakor T' is folytonosan változtatja helyzetét P-ben. Tekintsük ugyanis T-nek egy tetszőleges pontját. Minthogy e pontnak T egy rögzített irányra merőleges támaszsíkjától mért távolsága T forgatásakor folytonosan változik, a T' megfelelő pontjának P lapjaitól való távolsága és így e pont helye is folytonosan függ T forgatásától.

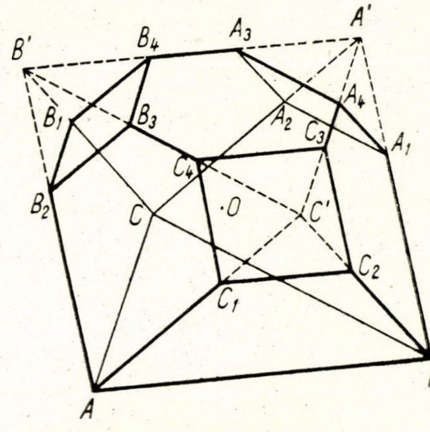
Válasszuk most a P parallelepipedont úgy, hogy oldallapjai 60°-os hegyesszögű rombuszok legyenek. Legyen D a P egyik olyan csúcsa, ahol három hegyesszög találkozik, A, B és C pedig a D-vel szomszédos csúcsok. A', B', C' és D' az A, B, C, illetve D pontoknak a parallelepipedon O középpontjára vonatkozó tükörképe.

Kimutatjuk, hogy T alkalmas elforgatásához tartozó T'-t nemcsak P, hanem az $ABCA'B'C'$ szabályos oktaéder is tartalmazza. Tekintsük a T test valamely állásához tartozó T' testet és tegyük fel, hogy ennek egy Q pontja az $ABCD$ tetraéder belsejében van. Forgassuk el T-t az AB' és az $A'B$ szakaszok felezőpontjain át fektetett tengely körül fél fordulattal. Eközben T' átmegy e tengelyre való tükörképébe, a Q pont tehát az $A'B'C'D'$ tetraéder belsejébe kerül. Előbbi helyzetéből az utóbbiba T' — a fentiek értelmében — folytonosan megy át, van tehát olyan közbülső helyzete, amikor az egymástól egységnyire lévő ABC és $A'B'C'$ lapokat csak érinti, figyelembevéve, hogy egyidejűleg az $ABCD$ és az $A'B'C'D'$ tetraéderek egyikében lehet csak pontja. A T'-t tartalmazó oktaéderbe írt gömbnek az oktaéder egy-egy tengelyére merőleges két érintősíkja közül legalább egyik nem metsz bele T'-be, hiszen e síkok egymástól való távolsága 1. Egy-egy ilyen síkkal levághatjuk tehát az oktaéder három tengelyének egy-egy végét egy-egy négyzetalapú gúlával



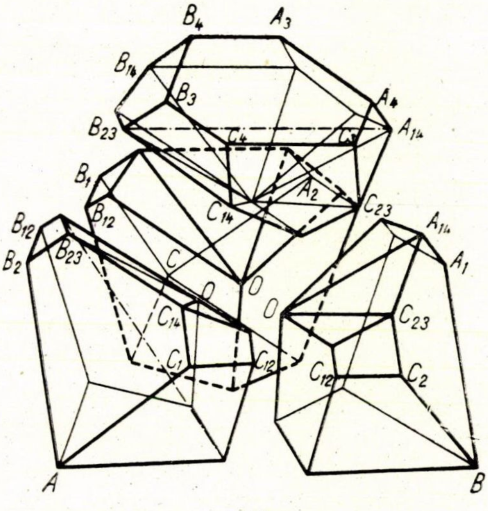
2. ábra

együtt anélkül, hogy a T' testet megcsonkítanánk. Minthogy az oktaéder bármely nem szemköztes csúcspárja szomszédos, az eljárás során az oktaéderből — bármilyen adott T-ből indultunk is ki — három páronként szomszédos csúcsot, azaz egy lapjának három csúcsát vágjuk le. Legyen a három levágott csúcs $A'B'$ és C', és legyenek az A', ill. B', ill. C'-ből kiinduló és a B, C, B', C', ill. C, A, C', A', ill. A, B, A', B' csúcsokba futó éleken keletkező új csúcsok rendre A_1, A_2, A_3, A_4; illetve B_1, B_2, B_3, B_4; illetve C_1, C_2, C_3, C_4.



3. ábra

A tétel igazolására kimutatjuk, hogy a szabályos oktaéder fent leírt csonkításával keletkező 1 szélességű P^* poliéder — amelyben minden 1 átmérőjű ponthalmaz elhelyezhető — szétdarabolható négy részre úgy, hogy a részek mindegyikének átmérője kisebb legyen 1-nél. Jelöljük A_{ij}-vel az A_iA_j szakasz felezőpontját és értelmezzük hasonlóan a B_{ij} és C_{ij} jeleket. Ha most P^* egyik részeként az $A_3, A_4, B_3, B_4, C_3, C_4, A_{14}, A_{23}, B_{14}, B_{23}, C_{14}, C_{23}$ és O pontok, továbbá az A_1A_{23}, B_1B_{23} és C_1C_{23} szakaszok felezőpontjainak konvex burkát választjuk, a P^*-ból ennek elhagyásával keletkezett „maradékpoliédert" pedig az ABC háromszög súlypontjában emelt merőleges által határolt és a háromszög egy-egy oldalfelzőpontján átmenő félsíkokkal három egybevágó részre vágjuk, akkor P^* négy 1-nél kisebb átmérőjű darabra esik szét. — (Annak igazolására, hogy a keletkezett részek átmérője kisebb 1-nél, célszerű bevezetni az O középpontú és az A, B, illetve C pontokon átmenő tengelyekkel rendelkező koordinátarendszert.) — Az először definiált rész átmérője az A_{14} és B_{23} pontok közt lép fel: $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 0{,}9659\ldots$, a másik három egybevágó rész átmérője pedig az AB és a B_1B_{23} szakaszok felezőpontjainak távolsága: $\frac{\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{4} = 0{,}99776\ldots$.



4. ábra

P^* ilyen szétdarabolásával a bennelévő T' test, illetve az abba ágyazott 1 átmérőjű ponthalmaz is szétesik négy 1-nél kisebb átmérőjű részre és ezzel a tétel igazolást nyert.

IRODALOM

[1] H. G. Eggleston: Covering a three dimensional set with sets of smaller diameter. *Journal of the London Math. Soc.*, **30** (1955) 11—24.

[2] K. Borsuk: Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Math.*, **20** (1933) 177—190.

[3] H. Hadwiger: Über die Zerstückung eines Eikörpers. *Math. Zeitschrift*, **51** (1949) 161—165.

[4] H. Lenz: Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Duchmessers. *Arch. Math.*, **6** (1955) 413—416.

[5] Heppes A.—Révész P.: A Borsuk-féle feldarabolási problémához. *Mat. Lapok*, **7** (1956) 108—111.

[6] T. Bonnesen—W. Fenchel: Theorie der konvexen Körper. *Ergebnisse d. Math. Chelsea Publishing Company, New-York*, 1948.

(Beérkezett: 1957. VII. 1.)

HÁLÓK IDEÁLJAI ÉS KONGRUENCIARELÁCIÓI, II.

GRÄTZER GYÖRGY és SCHMIDT E. TAMÁS

Bevezetés

Ezen dolgozatunk [6] folytatása. Célunk a [6]-ban felvetett kérdéskör további kidolgozása: az L háló kongruenciarelációinak vizsgálata, és az ideál-kongruenciareláció kapcsolat elmélyítése. Dolgozatunk három részből áll. Az I. részben $\Theta(L)$ néhány tulajdonságát vesszük szemügyre. Ezt főképp két eszköz segítségével érjük el. Egyik segédeszközünk az 1. TÉTEL, mely G. BIRKHOFF közismert tételét élesíti hálók esetében, a másik a szeparábilis kongruenciareláció fogalma; az utóbbi tulajdonságainak vizsgálata az I. rész főcélja. Végeredményül két tételt kapunk, melyek egyike G. BIRKHOFF 72. problémájára ad egy újabb választ, másika pedig disztributív hálók esetében a kongruenciarelációk hálójának duális végtelen disztributivitására ad szükséges és elegendő feltételt.

A II. részben az L háló I ideáljainak és a hozzájuk tartozó minimális Θ_I kongruenciarelációknak kapcsolatát nézzük meg. Bebizonyítjuk, hogy az $I \to \Theta_I$ megfeleltetés komplett egyesítés-homomorf leképezés, továbbá, hogy disztributív esetben izomorfizmus. A III. részben a hozzárendelt elempár és a kongruencia terjedését leíró klasszikus eszköznek, a projektív intervallumoknak kapcsolatát vizsgáljuk. Végül a disztributivitás egy új fajta jellemzését mutatjuk be, a hozzárendelt elempár segítségével.

I.

Jelölje $\Theta(L)$ az L háló kongruenciarelációinak halmazát. $\Theta(L)$-et részben rendezzük, ha benne a $\leqq$ relációt a következő módon definiáljuk: $\Theta \leqq \Phi$ $(\Theta, \Phi \in \Theta(L))$ akkor és csak akkor, ha $x \equiv y(\Theta)$ maga után vonja $x \equiv y(\Phi)$-t. $\Theta(L)$ vizsgálatánál alapvető a következő eredmény (lásd [1] 23—24 old.):

G. BIRKHOFF TÉTELE: A fentebb értelmezett $\leqq$ reláció $\Theta(L)$-et komplett hálóvá teszi. Legyen $\Theta(L)$ egy részhalmaza A. Értelmezzük a ξ és η relációkat: $x \equiv y(\xi)$ akkor és csak akkor, ha $x \equiv y(\Theta)$ minden $\Theta \in A$-ra; $x \equiv y(\eta)$

ekvivalens azzal, hogy létezik olyan $x=z_0, z_1, \ldots, z_n=y$ sorozat, hogy $z_{i-1}\equiv z_i(\Theta_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ alkalmas $\Theta_i\in A$-val. ξ és η kongruenciareláció, mégpedig az A-beli kongruenciarelációk metszete, illetve egyesítése, azaz $\xi=\bigwedge_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha$ és $\eta=\bigvee_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha$.

G. BIRKHOFF ezen tételét, melyet véges operációjú struktúrákra mondott ki, hálókban kedvezőbb alakra hozhatjuk.

1. TÉTEL: *Legyen $\Theta(L)$ egy részhalmaza A. Értelmezzük L-ben az η relációt úgy, hogy $x\equiv y(\eta)$ akkor és csak akkor, ha van olyan $x\cup y=$ $=u_0\geqq u_1\geqq\ldots\geqq u_n=x\cap y$ sorozat, hogy $u_{i-1}\equiv u_i(\Theta_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ alkalmas $\Theta_i\in A$-ra. η ekkor kongruenciareláció és $\eta=\bigvee_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha$.*

I. BIZONYÍTÁS: Nyilván, ha $x\equiv y(\eta)$, akkor G. BIRKHOFF tétele szerint $x\equiv y(\bigvee_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha)$. Megfordítva legyen $x\equiv y(\bigvee_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha)$. Ismeretes, hogy akkor egyszersmind $x\cup y\equiv x\cap y(\bigvee_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha)$. Ezért létezik olyan $x\cup y=z_0, z_1, \ldots$ $\ldots, z_n=x\cap y$ sorozat, hogy $z_{i-1}\equiv z_i(\Theta_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ alkalmas $\Theta_i\in A$-val. Tekintsük az $u_i=(x\cap y)\cup\bigwedge_{j=0}^{i} z_j$ elemeket. Világos, hogy $u_0=(x\cap y)\cup z_0=$ $=x\cup y$, $u_n=(x\cap y)\cup\bigwedge_{j=0}^{n} z_j=x\cap y$, továbbá a hálóoperációk monotonitásából $u_0\geqq u_1\geqq\ldots\geqq u_n$, végül $u_{i-1}\equiv u_i(\Theta_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Az u_i elemek tehát kielégítik az 1. TÉTEL követelményeit.

Az 1. TÉTELt szeretnénk G. BIRKHOFF tételére való támaszkodás nélkül is bizonyítani. Előrebocsátjuk a következőt:

1. LEMMA: *Az L hálóban értelmezett ξ reláció akkor és csak akkor kongruenciareláció, ha*

(a) *$x\equiv x(\xi)$ minden $x\in L$-re;*

(b) *$x\equiv y(\xi)$ ekvivalens $y\equiv x(\xi)$-vel;*

(c) *$x\geqq y\geqq z$, $x\equiv y(\xi)$ és $y\equiv z(\xi)$ esetén $x\equiv z(\xi)$;*

(d) *$x\geqq y$, $x\equiv y(\xi)$ esetén $x\cup t\equiv y\cup t(\xi)$ és $x\cap t\equiv y\cap t(\xi)$ minden $t\in L$-re;*

(e) *$x\equiv y(\xi)$ ekvivalens $x\cup y\equiv x\cap y(\xi)$-vel.*

Az 1. LEMMA szerint elegendő, ha a kongruenciareláció szokásos ismérvei összehasonlítható elempárokra teljesülnek. Az (a) és (b) a reflexivitás és szimmetricitás, (c) és (d) a tranzitivitás, illetve a helyettesítési elv összehasonlítható elempárokra. Érdemes megjegyezni, hogy a fenti öt feltétel független, amint az egyszerű példákkal kimutatható.

BIZONYÍTÁS: Nyilván elegendő azt bizonyítanunk, hogy ha ξ eleget tesz a fenti feltételeknek, akkor kongruenciareláció. Az (a) és (b) szerint ξ *reflexív* és *szimmetrikus*. Legyen $u \geqq v, u \equiv v(\xi)$ és $a, b \in [v, u]$, azaz $u \geqq a \cup b \geqq a \cap b \geqq v$. (d)-ből $u \cap (a \cup b) \equiv v \cap (a \cup b)$ és $u \cap (a \cup b) \geqq \geqq v \cap (a \cup b)$, így ismét (d)-t alkalmazva $a \cup b = [u \cap (a \cup b)] \cup (a \cap b) \equiv \equiv [v \cap (a \cup b)] \cup (a \cap b) = a \cap b(\xi)$, vagyis (e)-ből $a \equiv b(\xi)$. Ezek után legyen $x \equiv y(\xi)$ és $y \equiv z(\xi)$. (e) miatt $x \cup y \equiv x \cap y(\xi)$, így (d)-ből $x \cup y \cup z = = (x \cup y) \cup (y \cup z) \equiv (x \cap y) \cup (y \cup z) = y \cup z(\xi)$, hasonlóképp $x \cap y \cap z \equiv \equiv y \cap z(\xi)$, vagyis $x \cup y \cup z \geqq y \cup z \geqq y \cap z \geqq x \cap y \cap z$, és az egyenlőtlenség-sorozat szomszédos tagjai kongruensek modulo ξ, s így (c) kétszeri alkalmazásával $x \cup y \cup z \equiv x \cap y \cap z(\xi)$. Mivel $x, z \in [x \cap y \cap z, x \cup y \cup z]$ ezért a fentebb bizonyítottak miatt $x \equiv z(\xi)$, vagyis ξ *tranzitív*. *A helyettesítési elv* is könnyen adódik, mert ha $x \equiv y(\xi)$, akkor (e) és (d)-ből $x \cup y \equiv x \cap y(\xi)$ és $(x \cup y) \cup t \equiv (x \cap y) \cup t(\xi)$, de $x \cup t$ és $y \cup t \in [(x \cap y) \cup t, (x \cup y) \cup t]$, így $x \cup t \equiv y \cup t(\xi)$ és hasonlóképp $x \cap t \equiv y \cap t(\xi)$. ξ tehát reflexív, szimmetrikus, tranzitív és érvényes rá a helyettesítési elv, vagyis kongruenciareláció. Q. e. d.

Az 1. LEMMA segítségével most már könnyen adódik a

II. BIZONYÍTÁS: Az nyilvánvaló, hogy ha az 1. TÉTELben értelmezett η reláció kongruenciareláció, akkor $\eta = \bigvee_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha$. Elég tehát belátni, hogy η kongruenciareláció. η reflexív és szimmetrikus. Ha $x \geqq y \geqq z$ és $x \equiv y(\eta)$, $y \equiv z(\eta)$, akkor az x-et és y-t összekötő lánc az y-t és z-t összekötő lánccal együtt éppen egy az x és z elemeket összekötő kívánt tulajdonságú lánc, vagyis $x \equiv z(\eta)$. Végül, ha $x = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = y$, akkor $t \cup x = t \cup z_0 \geqq \geqq t \cup z_1 \geqq \cdots \geqq t \cup z_n = t \cup y$, így $x \equiv y(\eta)$ és $x \geqq y$ esetén rögtön találtunk $t \cup x$ és $t \cup y$-t összekötő megfelelő tulajdonságú láncot, vagyis $t \cup x \equiv t \cup y(\eta)$. Ugyanígy $t \cap x \equiv t \cap y(\eta)$. Látjuk, hogy η kielégíti az 1. LEMMA feltételeit, így η kongruenciareláció és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Az 1. TÉTEL hasznossága abban mutatkozik meg, hogy az $[a, b]$ intervallumon belül dönti el, hogy $a \equiv b(\bigvee_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha)$, vagy $a \not\equiv b(\bigvee_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha)$. Így például az 1. TÉTEL alapján minden nehézség nélkül bizonyítható FUNAYAMA és NAKAYAMA [3] azon nevezetes tétele, hogy $\Theta(L)$-ben teljesül a

(ID) $$\Theta \cap \bigvee_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha = \bigvee_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cap \Theta_\alpha)$$

végtelen disztributív törvény.

FUNAYAMA és NAKAYAMA rámutattak arra is, hogy (ID) duálisa

(DID) $$\Theta \cup \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha = \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha)$$

nem szükségképp igaz. Alább (2. lemma) egyszerű elégséges feltételt adunk meg (DID) fennállására. Ehhez bevezetünk egy új fogalmat.

1. DEFINÍCIÓ: Az L háló Θ kongruenciarelációját *szeparábilisnek* nevezzük, ha bármely $a > b$ $(a, b \in L)$-hez található olyan $a = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ sorozat, hogy minden i-re, vagy $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$, vagy $z_i \not\equiv z_{i-1}(\Theta)$ és ekkor $x \equiv y(\Theta)$, $x, y \in [z_i, z_{i-1}]$ esetén $x = y$.

Az ilyen $\{z_i\}$ láncot Θ-ra nézve szeparáltnak nevezzük, vagy azt is mondhatjuk, hogy a és b-t $\{z_i\}$ szeparálja Θ-ra nézve.

Ezen definíció létjogosultsága az 1. TÉTELen alapszik, amely szerint a Θ kongruenciareláció által létesített osztályok szeparáltságát a fentebb leírt módon biztosíthatjuk.

A definícióból látható, hogyha L-ben bármely a, b $(a > b; a, b \in L)$ között található véges hosszúságú maximális lánc, akkor L minden kongruenciarelációja szeparábilis.

Nem szeparábilis kongruenciarelációra is rögtön láthatunk példát: legyen E a pozitív egészek lánca $+\infty$-nel lezárva. E-ben a Θ kongruenciarelációt definiáljuk úgy, hogy $2i \equiv 2i+1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ és minden $x \equiv y(\Theta)$ az előbbi alakú. Könnyű látni, hogy Θ nem szeparábilis, mert 1 és $+\infty$ nem szeparálható.

A definícióból azonnal adódik, hogy ha Θ szeparábilis, akkor bármely a és b $(a > b, a, b \in L)$ között van olyan maximális lánc, melyen Θ csak véges sok egynél több elemű osztályt létesít, és ezek az osztályok (mint intervallumok) zártak. Elég ugyanis egy tetszőleges a és b közti maximális láncot venni, mely mindegyik z_i-t tartalmazza.

Ezen állítás megfordítása azonban általában nem igaz. Nem áll, hogy ha minden a és b $(a > b)$ között van egy fentebb leírt tulajdonságú lánc, akkor bármely kongruenciareláció szeparábilis lenne, se az, hogy ha Θ szeparábilis, akkor minden a és b közti maximális lánc megfelelő tulajdonságú. Ezekre az I. rész végén látunk ellenpéldákat.

A következőkben bebizonyítunk nyolc lemmát, melyek előkészítik a 2. és 3. TÉTELt.

Először lássuk (DID) fennállásának egy elégséges feltételét.

2. LEMMA: *Legyen L egy szeparábilis kongruenciarelációja Θ, ekkor $\Theta(L)$ minden A részhalmazára*

$$\Theta \cup \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha = \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha).$$

BIZONYÍTÁS: Mivel $\Theta \cup \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha \leqq \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha)$ mindig igaz, ezért elég $\Theta \cup \bigwedge_{\Theta_\alpha \in \alpha} \Theta_\alpha \geqq \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha)$-t kimutatni. Legyen $x \equiv y(\bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha))$. Θ szeparábilitása miatt van olyan $x \cup y = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = x \cap y$ lánc, hogy $z_{i-1} \equiv z_i$ (Θ) vagy $[z_{i-1}, z_i]$ egyetlen részintervalluma sem kongruens moduló

Θ. Az utóbbinak elegettevő i-kre $z_{i-1} \equiv z_i \; (\bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha))$ miatt $z_{i-1} \equiv z_i (\bigwedge \Theta_\alpha)$. Így $x \equiv y(\Theta \cup \bigwedge \Theta_\alpha)$, ami épp a bizonyítandó állítást jelenti.

A 2. LEMMA nem fordítható meg. Később mutatunk példát olyan hálóra (amely, mint a későbbiekből nyilvánvaló, szükségképp nem disztributiv), amelyben (DID) korlátlanul fennáll, mégis van nem szeparábilis kongruenciarelációja.

Sok példát lehetne felsorolni szeparábilis és nem szeparábilis kongruenciarelációra. Illusztrációként álljon itt a következő.

3. LEMMA: *Legyen I az L háló neutrális ideálja,*[1] *és tegyük fel, hogy van olyan $x \in L$, melyre $x \geqq i$ minden $i \in I$-re.*[2] *Az I ideálhoz tartozó Θ minimális kongruenciareláció akkor és csak akkor szeparábilis, ha I főideál.*

BIZONYÍTÁS: Ha I nem főideál, akkor x, y $(y \in I)$ nem szeparálható, mert $x > z > y$, $z \equiv y(\Theta)$ esetén csak akkor lehetne $[z, x]$ egyetlen részintervalluma sem kongruens Θ-nál, ha z generálóeleme volna I-nek. Megfordítva, ha I főideál, $I = (a]$, akkor $x > y$ szeparálható $z = y \cup a$-val.

4. LEMMA: *L szeparábilis kongruenciarelációi $\Theta(L)$-nek $\Theta_S(L)$ részhálóját alkotják.*

A bizonyítás előtt felhívjuk a figyelmet arra, hogy $\Theta_S(L)$ nem üres, mert a definícióból adódólag $\Theta(L)$ legnagyobb és legkisebb eleme benne van.

BIZONYÍTÁS: Legyen $\Theta, \Phi \in \Theta_S(L)$, továbbá $b < a$ $(a, b \in L)$. Θ szeparábilitása miatt van olyan $a = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ összekötő sorozat, mely a definícióban előírt tulajdonságokkal rendelkezik. Φ szeparábilitása miatt minden i-re z_{i-1} és z_i összeköthető egy Φ-re nézve szeparált lánccal:

$$z_{i-1} = u_{i,0} \geqq \cdots \geqq u_{i,k} = z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Az $\{u_{ij}\}$ lánc $\Theta \cap \Phi$ és $\Theta \cup \Phi$-re nézve is szeparált, amint az a definícióból közvetlenül adódik, így $\Theta \cap \Phi$ és $\Theta \cup \Phi \in \Theta_S(L)$.

Mivel $\Theta(L)$ disztributív, ezért centruma, $\Theta_Z(L)$, azon kongruenciarelációk összessége, melyeknek van komplementumuk. Ismeretes, hogy $\Theta_Z(L)$ részhálója $\Theta(L)$-nek (ez egyébként nyilvánvaló, mert[3] $(\Theta \cup \Phi)' = \Theta' \cap \Phi'$ és $(\Theta \cap \Phi)' = \Theta' \cup \Phi'$). Fennáll az

[1] Az L háló I ideálját neutrálisnak nevezzük, ha L ideáljainak hálójában I neutrális elem, vagyis minden $\{I, J, K\}$ részháló disztributív. Ha értelmezzük a Θ relációt úgy, hogy $x \equiv y(\Theta)$, akkor és csak akkor, ha $(x \cap y) \cup t \geqq x \cup y$ valamilyen $t \in I$-re, akkor Θ kongruenciareláció lesz, mégpedig modulo Θ I osztály, és Θ az ilyen tulajdonságú kongruenciarelációk közt minimális. (Ezekre nézve lásd [1] 28, 79, 119, és 124. oldalát, vagy [2] 167. oldalát.)

[2] Ez teljesül például, ha van L-ben legnagyobb elem.

[3] Θ' a Θ komplementumát jelöli.

5. LEMMA: *Ha a Θ kongruenciarelációnak van komplementuma, akkor Θ szeparábilis, azaz $\Theta_Z(L) \subseteq \Theta_S(L)$.*

BIZONYÍTÁS: Θ komplementumát jelölje Θ'. Minden $a \geqq b$-hez $a \equiv b(\Theta \cup \Theta')$ miatt az 1. TÉTEL szerint van olyan $a = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ lánc, hogy $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$, vagy $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta')$. Belátjuk, hogy a $\{z_i\}$ lánc Θ-ra nézve szeparált. Valóban, ha $z_i \not\equiv z_{i-1}(\Theta)$ és $x, y \in [z_i, z_{i-1}]$ mellett $x \equiv y(\Theta)$, akkor $z_{i-1} \equiv z_i(\Theta')$-ből $x \equiv y(\Theta \cap \Theta')$, azaz $x = y$.

A továbbiakban (mint ahogy ezt [6]-ban is tettük) $\Theta_{a,b}$-vel jelöljük az L hálóban az $a \equiv b$ által indukált kongruenciarelációt. Érvényes a következő

6. LEMMA: *Az L disztributív hálóban, ha $a > b \geqq c > d$, akkor $\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d} = 0$.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $x \equiv y(\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d})$ $(x > y)$. Ekkor [6] 2. TÉTELe értelmében $(c \cup y) \cap x = x$ és $(d \cup y) \cap x = y$. Azonban $c \cap (d \cup y) < c$ (ugyanis $c \cap (d \cup y) = c$-ből $c \cap (c \cup y) = c$ és $c \cup (d \cup y) = c \cup y$ miatt a relatív komplementumok egyértelműsége folytán $c \cup y = d \cup y$, ebből pedig $x = y$ következnék, ellentmondásban az $x > y$ feltevéssel) és $c \equiv c \cap (d \cup y)(\Theta_{x,y})$, ami $\Theta_{x,y} < \Theta_{a,b}$ miatt azt jelenti, hogy $c \equiv c \cap (d \cup y)(\Theta_{a,b})$, de $c \cap (d \cup y) < c \leqq b < a$ ellentmondásban van [6] második tételének 2. korolláriumával.

Az 5. és 6. LEMMÁból könnyen adódik a

7. LEMMA: *Az L disztributív hálóban $\Theta_{a,b}$-nek $(a > b;\ a, b \in L)$ van komplementuma, tehát szeparábilis.*

BIZONYÍTÁS: Jelölje Φ az $[a)$ duális főideálhoz és $(b]$ főideálhoz tartozó minimális kongruenciarelációk egyesítését s $\Theta_{a,b}$ helyett írjunk röviden Θ-t. Ekkor $\Theta \cup \Phi = I$ (I a $\Theta_S(L)$ legnagyobb eleme, s $I \in \Theta_S(L)$, mint már említettük), mert minden $x > y$-ra $[y, x] \subseteq [y \cap b, x \cup a]$ és $x \cup a \equiv y \cap b(\Theta \cup \Phi)$ miatt $x \equiv y(\Theta \cup \Phi)$. Ha $x \equiv y(\Theta \cap \Phi)$ és $x < y$ fennállna, akkor egyrészt $x \equiv y(\Phi)$, azaz $x \equiv y(\bigvee_{a_1 \in [a)} \Theta_{a,a_1} \cup \bigvee_{b_1 \in (b]} \Theta_{b,b_1})$ lenne, s így az 1. TÉTEL szerint volna olyan $x \geqq u > v \geqq y$, hogy $u \equiv v(\Theta_{a,a_1})$ vagy $u \equiv v(\Theta_{b,b_1})$ alkalmas $a_1 (> a)$-val vagy $b_1 (< b)$-vel. Másrészt $x \equiv y(\Theta)$ miatt $u \equiv v(\Theta)$ is fennállna, s így mindkét előbbi eset, $a_1 > a > b > b_1$ miatt, ellentmond a 6. LEMMÁnak.

Nem szeparábilis kongruenciarelációra most már újabb fontos példát is tudunk mutatni.

8. LEMMA: *Legyen L disztributív háló, melyben adottak az $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$ intervallumok, úgy hogy $a < a_1 < b_1 < \cdots a_i < b_i < \cdots < b$, akkor $\bigvee_{i=1}^{\infty} \Theta_{a_i, b_i}$ nem szeparábilis kongruenciareláció.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy $\Theta = \bigvee_{i=1}^{\infty} \Theta_{a_i, b_i}$ szeparábilis, ekkor van olyan $a = z_0 > z_1 > \cdots > z_n = b$, hogy $z_{i-1} \equiv z_i(\Theta)$, avagy $[z_i, z_{i-1}]$ egyetlen részintervalluma sem kongruens Θ-nál. Ha $z_{i-1} \equiv z_i(\Theta)$, akkor $z_i \equiv z_{i-1}\left(\bigvee_{i=1}^{r} \Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}}\right)$, vagyis *véges sok* $[a_i, b_i]$ által generált kongruenciareláció már indukálja a $\{z_i\}$ láncon az összes $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$ kongruenciát. Legyen $[a_t, b_t]$ ezen véges sok intervallumtól különböző intervallum. $a \equiv b(\Theta_{a_t, b_t} \cup \Theta'_{a_t, b_t})$ (Θ_{a_t, b_t} komplementuma Θ'_{a_t, b_t}, amely a 7. LEMMA szerint létezik), viszont $a \not\equiv b(\Theta'_{a_t, b_t})$, mert $a \equiv b(\Theta'_{a_t, b_t})$-ből $a_t \equiv b_t(\Theta'_{a_t, b_t})$ adódna ellentétben $a_t \equiv b_t(\Theta_{a_t, b_t})$-vel. Következésképp nem lehet minden i-re $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta'_{a_t, b_t})$, így van olyan i, hogy $z_i \not\equiv z_{i-1}(\Theta'_{a_t, b_t})$. Az 1. TÉTEL értelmében [mivel $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta_{a_t, b_t} \cup \Theta'_{a_t, b_t})$], ekkor van olyan u, v hogy $z_i \leqq u < v \leqq z_{i-1}$ és $u \equiv v(\Theta_{a_t, b_t})$. Erre az i-re azonban $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$, azaz $z_i \equiv z_{i-1}\left(\bigvee_{i=1}^{r} \Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}}\right)$, vagyis $u \equiv v\left(\bigvee_{i=1}^{r} \Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}}\right)$. Az előzővel összevetve $u \equiv v\left(\Theta_{a_t, b_t} \cap \bigvee_{i=1}^{r} \Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}}\right)$; azaz $u \equiv v\left(\bigvee_{i=1}^{r} (\Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}} \cap \Theta_{a_t, b_t})\right)$. A LEMMA feltételei és $[a_{j_i}, b_{j_i}] \neq [a_t, b_t]$ miatt minden i-re, vagy $a_{j_i} < b_{j_i} < a_t < b_t$, vagy $a_t < b_t < a_{j_i} < b_{j_i}$, azaz teljesülnek a 6. LEMMA feltételei ezért $\Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}} \cap \Theta_{a_t, b_t} = 0$ minden i-re. Így az előbbi kongruencia $u \equiv v(0)$-ba megy át, azaz $u = v$ adódik, ellentmondásban a fentebbi $u < v$-vel. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat.

A továbbiakban ismét szükségünk lesz a hozzárendelt elempár fogalmára. Emlékeztetünk arra, hogyan definiáltuk [6]-ban a hozzárendelt elempár fogalmát.

Azt mondjuk, hogy az a, b elempárhoz c, d ($a, b, c, d \in L$) hozzá van rendelve, jelben $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$, ha alkalmas $x_1, \ldots, x_n \in L$ elemekkel

(1) $$\{\cdots\{[(a \cup b) \cap x_1] \cup x_2\} \cap \cdots\} \cap x_n = c \cup d,$$

(2) $$\{\cdots\{[(a \cap b) \cap x_1] \cup x_2\} \cap \cdots\} \cap x_n = c \cap d.$$

A hozzárendelt elempár[4] segítségével megadhatunk egy feltételt arra, hogy $\Theta_s(L)$ és $\Theta_z(L)$ megegyezzék.

Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő elnevezést:

2. DEFINÍCIÓ: Az L hálót *gyengén modulárisnak* nevezzük, ha valahányszor $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ ($a, b, c, d \in L$; $a < b$, $c \neq d$), mindannyiszor található olyan $a_1, b_1 \in L$, ($a_1 < b_1$), hogy $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$ és $\overline{c, d} \to \overline{a_1, b_1}$.

[4] Megengedett az is, hogy x_1 előtt $\cup$, x_2 előtt $\cap$ stb. legyen (1) és (2)-ben. Ez nyilvánvalóan ekvivalens az előbbivel. Az azonban már fölösleges, hogy egymás után többször álljon pl. az $\cup$ jel; az asszociativitás miatt ezek a lépések összevonhatók.

9. LEMMA: *Az L gyengén moduláris hálóban minden szeparábilis kongruenciarelációnak van komplementuma és így*

$$\Theta_S(L) = \Theta_Z(L).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen Θ szeparábilis kongruenciareláció. Definiáljuk a Φ relációt a következőképp:

$x \equiv y(\Phi)$ akkor és csak akkor, ha $[x \frown y, x \smile y]$-ban nincs Θ-nak több, mint egy elemű osztálya.

Per definitionem $x \equiv x(\Phi)$ és a Φ reláció szimmetrikus. Legyen $x \equiv y(\Phi)$, $y \equiv z(\Phi)$ és $x > y > z$, s tegyük fel, hogy valamely u, v-re emellett $u \equiv v(\Theta), x \geqq u > v \geqq z$. Φ definíciója miatt kell, hogy $[v, u]$-nak $[z, y]$-nal és $[y, x]$-szel legfeljebb egy közös eleme legyen. Ez a közös elem y nyilván nem lehet, ezért $y \smile v > v$. Feltesszük, hogy $y \smile v \geqq u$, mert ha ez nem áll, akkor okoskodásunkat az u, v elempár helyett az $y \smile v$, $y \smile u \smile v$ elempárral folytatnánk. Ebben az esetben viszont a gyenge modularitásból, mivel $\overline{y, z} \rightarrow \overline{v, v \smile y}$ s ezért $\overline{y, z} \rightarrow \overline{u, v}$ is fennáll, olyan $y > y_1 > z_1 > z$ adódik, hogy $\overline{u, v} \rightarrow \overline{y_1, z_1}$ azonban akkor $y_1 \equiv z_1(\Theta)$, amely ellentmondás igazolja $x \equiv z(\Phi)$-t. Végül legyen $x > y$, $x \equiv y(\Phi)$, belátjuk, hogy $x \smile t \equiv y \smile t(\Phi)$. Ellenkező esetben ugyanis volna $x \smile t \geqq u > v \geqq y \smile t$, hogy $u \equiv v(\Theta)$. Viszont $\overline{x, y} \rightarrow \overline{u, v}$, ezért a gyenge modularitás miatt van olyan x_1, y_1 $(x \geqq x_1 > y_1 \geqq y)$, hogy $\overline{u, v} \rightarrow \overline{x_1, y_1}$, de akkor $x_1 \equiv y_1(\Theta)$, ami ellentmond $x \equiv y(\Phi)$-nek. Bebizonyítottuk, hogy Φ eleget tesz az 1. LEMMA (a)—(d) feltételeinek, mivel (e) triviálisan igaz, ezért Φ kongruenciareláció. Φ definíciójából $\Theta \frown \Phi = 0$ következik; $\Theta \smile \Phi = I$ pedig így látható be. Legyen $a > b$ két tetszőleges eleme L-nek. Tekintsük a és b között azt az $a = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ láncot, amely Θ-t szeparálja. Ekkor vagy $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$, vagy $[z_i, z_{i-1}]$ egyetlen (több mint egy elemű) részintervalluma sem kongruens Θ-nál, azaz Φ definíciójából folyólag $z_i \equiv z_{i-1}(\Phi)$, vagyis $a \equiv b(\Theta \smile \Phi)$. Ezzel beláttuk, hogy Φ komplementuma Θ-nak, amivel a 9. LEMMA bizonyítását befejeztük.

Eddigi diszkussziónk egyik célja volt, hogy feleletet adjunk a következő, G. BIRKHOFF által felvetett (lásd [1], 153 old., 72. probléma) kérdésre:

Keressük annak szükséges és elegendő feltételét az L hálóra, hogy kongruenciarelációi Boole-algebrát alkossanak.

T. TANAKA [4] adott először erre a kérdésre feleletet:

Az L háló kongruenciarelációi akkor és csak akkor alkotnak Boole-algebrát, ha L egyszerű hálók diszkrét szubdirekt szorzata — azaz olyan szubdirekt szorzata, melyben bármely két elem csak véges sok komponensében különbözik.

T. TANAKA tétele azon L hálók struktúratételének tekinthető, melyekre $\Theta(L)$ Boole-algebra. Nem látszik azonban érdektelennek ezen hálókat a fentebb bevezetett fogalmak segítségével is leírni.

2. TÉTEL: *Az L háló kongruenciarelációi akkor és csak akkor alkotnak Boole-algebrát, ha*

(W) *L gyengén moduláris;*

(S) *L minden kongruenciarelációja szeparábilis.*

BIZONYÍTÁS:

Szükségesség. Tegyük fel, hogy L kongruenciarelációinak hálója Boole-algebra. Ekkor minden kongruenciarelációnak van komplementuma, így az 5. LEMMA szerint mind szeparábilis, vagyis (S) teljesül. Tegyük fel, hogy L-ben $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$, s erre a hozzárendelésre a gyenge modularitás feltétele nem teljesülne. Állítjuk, hogy ekkor $\Theta_{c,d}$-nek nincs komplementuma; ugyanis, ha $\Theta_{c,d}$ komplementuma Φ lenne, akkor $a \equiv b(\Theta_{c,d} \cup \Phi)$, $a \not\equiv b(\Phi)$ esetén az 1. TÉTELből olyan $a \cup b \geqq a_1 > b_1 \geqq a \cap b$ létezése adódna, melyre $a_1 \equiv b_1(\Theta_{c,d})$. [6] 5. tétele szerint ez viszont éppen olyan $a_1 \geqq a_2 > b_2 \geqq b_1$ létezését jelenti, hogy $\overline{c, d} \rightarrow \overline{a_2, b_2}$, azaz a gyenge modularitás teljesülne, ellentétben a feltevéssel. Kell tehát, hogy $a \equiv b(\Phi)$ fennálljon, de ekkor $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$ miatt $c \equiv d(\Phi)$ is fennállana, ellentétben $\Theta_{c,d} \cap \Phi = 0$-val.

Elégségesség. A (W) feltétel miatt, mint azt a 9. LEMMAban bebizonyítottuk, $\Theta_Z(L) = \Theta_S(L)$. Az ($S$) feltétel így is írható: $\Theta_S(L) = \Theta(L)$, ami az előbbivel összevetve $\Theta(L) = \Theta_Z(L)$-et adja, ami bizonyítandó volt.

A gyenge modularitás valóban a modularitás általánosítása. Ezt a következőképp láthatjuk be: Legyen $a > b$ és $t \cup a \geqq c > d \geqq t \cup b$. $a \cup c = a \cup d$, ezért $a \cap c > a \cap d$ (lásd [1] 66. old.), vagyis $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$-ből ezesetben $\overline{c, d} \rightarrow \overline{a \cap c, a \cap d}$ következik. Az általános eset tárgyalása triviális teljes indukcióval történhet a hozzárendelés lépésszámára (az (1) és (2) képletekben szereplő n-re) vonatkozólag. A következő eredményt kaptuk:

1. KOROLLÁRIUM: *Az L moduláris háló kongruenciarelációinak hálója akkor és csak akkor Boole-algebra, ha (S) teljesül.*

Megjegyezzük, hogy a gyenge modularitás más irányú általánosítása a modularitásnak, mint a féligmodularitás, ugyanis már a legegyszerűbb féligmoduláris háló, amely nem moduláris ([1]-ben a 7a ábrán látható háló duálisa) egyúttal nem is gyengén moduláris.

Disztributív hálókra a 2. TÉTEL tovább élesíthető.

2. KOROLLÁRIUM (J. HASHIMOTO TÉTELE [2]): *Az L disztributív háló kongruenciarelációinak hálója akkor és csok akkor Boole-algebra, ha L lokálisan véges.*

BIZONYÍTÁS: Az 1. korollárium értelmében elég belátnunk, hogy (S) ekvivalens a lokális végességgel. Valóban, ha L lokálisan véges, akkor per definitionem minden kongruenciarelációja szeparábilis, megfordítva, ha L nem lokálisan véges, akkor van $[a, b]$ $(a < b)$ nem véges hosszúságú intervalluma s ekkor a szokásos „felezési-eljárás"-sal konstruálható a 8. LEMMÁban szereplő intervallum-sorozat, s így a 8. LEMMA szerint van nem szeparábilis kongruenciarelációja. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Az 1. KOROLLÁRIUM más irányú specializálása a következő:

3. KOROLLÁRIUM (SHIH-CHIANG WANG TÉTELE [5]): *Az L komplementumos moduláris háló kongruenciarelációinak hálója akkor és csak akkor Boole-algebra, ha minden neutrális ideálja főideál.*

BIZONYÍTÁS: G. BIRKHOFF egyik tétele szerint a fenti feltételek mellett L minden kongruenciarelációja egy neutrális ideálhoz tartozó minimális kongruenciareláció (lásd [1] 125. old.). A 3. LEMMA szerint viszont L bármely neutrális ideáljához tartozó minimális kongruenciareláció akkor és csak akkor szeparábilis, ha ez a neutrális ideál főideál.

Disztributív hálók esetében most már nehézség nélkül válaszolhatunk arra a kérdésre, hogy $\Theta(L)$-ben mikor teljesül (DID).

3. TÉTEL: *Az L disztributív háló kongruenciarelációinak hálójában* (DID) *akkor és csak akkor teljesül korlátlanul, ha L lokálisan véges.*

BIZONYÍTÁS: Ha L lokálisan véges, akkor minden kongruenciarelációja szeparábilis és így a 2. LEMMA szerint (DID) fennáll.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\Theta(L)$-ben (DID) korlátlanul teljesül. Nyilván $\Theta = \bigvee_{a \equiv b(\Theta)} \Theta_{a,b}$. A 7. LEMMA szerint $\Theta_{a,b}$-nek van komplementuma, $\Theta'_{a,b}$. Tekintsük a $\Phi = \bigwedge \Theta'_{a,b}$ kongruenciarelációt,[5] (ID)-ből

$$\Theta \cap \Phi = \bigvee \cdot \Theta_{a,b} \cap (\cdot \bigwedge \Theta'_{a,b}) = \bigvee (\Theta_{a,b} \cap \bigwedge \Theta'_{a,b}) \leqq \bigvee (\Theta_{a,b} \cap \Theta'_{a,b}) = \bigvee 0 = 0,$$

ezért $\Theta \cap \Phi = 0$ és (DID)-ből

$$\Theta \cup \Phi = \bigvee \Theta_{a,b} \cup (\bigwedge \Theta'_{a,b}) = \bigwedge (\Theta'_{a,b} \cup \bigvee \Theta_{a,b}) \geqq \bigwedge (\Theta'_{a,b} \cup \Theta_{a,b}) = I,$$

így $\Theta \cup \Phi = I$, vagyis Φ komplementuma Θ-nak. Beláttuk, hogy Θ(L) Boole-algebra, de ekkor a 2. TÉTEL 2. KOROLLÁRIUMa miatt L lokálisan véges. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Konstruáljuk meg a szeparábilis kongruenciareláció definíciójánál megígért ellenpéldákat. Először legyen E a nem pozitív egészek $-\infty$-nel lezárt lánca. $E \cdot E$-ben (E-nek önmagával vett kardinális szorzata, [1] 7. oldalának értelmében) tekintsük a $\Theta = \Theta_{(0,0),(-\infty,0)}$ kongruenciarelációt és egy, az összes (x, x) alakú elemet tartalmazó C maximális láncot. Θ a 7. LEMMA szerint

[5] A bizonyítás során $\bigvee$ és $\bigwedge$ mindig az összes olyan a, b-re értendő, melyekre $a \equiv b(\Theta)$.

szeparábilis kongruenciareláció, mégis a C láncon végtelen sok egynél több elemű osztályt létesít.

Tekintsünk most egy olyan nem szeparábilis kongruenciarelációt, amelynek megvan az a tulajdonsága, hogy bármely $a > b$-hez található olyan maximális lánc, melyen Θ csak véges sok egynél több elemű zárt osztályt létesít. Ezt megkonstruálandó, legyen P a pozitív egészek lánca, L a $P \cdot P$ háló I elemmel felülről lezárva, és $\Theta = \bigvee_{i=1}^{\infty} \Theta_{(2i, 0), (2i+1, 0)}$. Θ a 8. LEMMA szerint nem szeparábilis. Tekintsük egy tetszőleges $a > b$ elempárt. Feltehető, hogy $a = I$, különben $[b, a]$ véges. Ha viszont $a = I$, akkor az a és b közti kívánt tulajdonságú maximális láncot szolgáltatják az összes (b_1, x) alakú elemek, ahol b_1 első komponense b-nek és $x = b_2, b_2 + 1, b_2 + 2, \ldots$. Érdekes talán megjegyezni, hogy ebben a két ellenpéldában szereplő háló disztributív.

Végül konstruáljuk meg a 2. LEMMÁnál említett ellenpéldát. Legyen P ismét a pozitív egészek lánca, s tekintsük azt az L halmazt, amely P-ből és a O, x, y, I elemekből áll. L háló lesz a következő definícióval: P rendezése a szokásos, továbbá $i = 1, 2, \ldots$-re $x \cup i = y \cup i = x \cup y = x \cup I = y \cup I = I$ és $x \cap i = y \cap i = I \cap 0 = 0$. Tekintsük át L kongruenciarelációit. Könnyen kimutatható, hogy $I \equiv i$ vagy $i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ esetén az egész háló egybeesik, s ebből már az is adódik, hogy az egység-kongruenciareláción, ξ-n kívül L kongruenciarelációi lényegében P kongruenciarelációi, abban az értelemben, hogy L-nek P-n kívüli elemeit nem ejti egybe. Láthatjuk tehát, hogy $\Theta(L)$ $\Theta(P)$-ből úgy áll elő, hogy $\Theta(P)$-hez hozzávesszük még a ξ kongruenciarelációt, melyre $\xi > \Theta$ minden $\Theta \in \Theta(P)$-re. $\Theta(P)$ azonban duálisan végtelenül disztributív a 3. TÉTEL értelmében, ezért kis számolással belátható, hogy $\Theta(L)$ is duálisan végtelenül disztributív. L-nek azonban mégis van nem szeparábilis kongruenciarelációja, ilyen például az a kongruenciareláció, melyben $2i \equiv 2i + 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. (Pl. 1 és I nem szeparálhatók.)

Most már azt is láthatjuk, hogy minden harmadik típusú ellenpélda nem disztributív háló, ugyanis ha L disztributív volna, akkor (DID) fennállása maga után vonná a 3. TÉTEL szerint L lokális végességét, így nem lehetne nem szeparábilis kongruenciarelációja.

II.

A következőkben az L háló ideáljai $\mathfrak{L}$ hálójának és az ideálokhoz tartozó minimális kongruenciarelációknak kapcsolatával szeretnénk foglalkozni. A továbbiakhoz szükséges a következő:

10. LEMMA: *Az $I_\alpha(\alpha \in A)$ ideálok komplett-egyesítése létezik és azon c elemekből áll, melyekre*

$$c \leqq i_{\alpha_1} \cup \cdots \cup i_{\alpha_n}, \tag{3}$$

ahol $i_{\alpha_s} \in I_{\alpha_s}$, $\alpha_s \in A(s=1,2,\ldots,n)$ és n tetszőleges véges szám.

A bizonyítás az ideál és a komplett-egyesítés definíciójából automatikusan adódik. Láthatjuk továbbá, hogy *az $\bigvee\limits_{\alpha\in A}^{n} I_\alpha$ ideál az I_α ideálok véges egyesítéseinek halmazelméleti egyesítése,* és az is nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{L}$ *akkor és csak akkor komplett háló, ha L 0-elemes.* Disztributív hálókra több is igaz, nevezetesen, *ha L disztributív, akkor $\bigvee\limits_{\alpha\in A}^{n} I_\alpha$ elemei*

$$t = i_{\alpha_1} \cup \cdots \cup i_{\alpha_n} \quad (\alpha_j \in A,\, i_{\alpha_j} \in I_{\alpha_j} (j=1,\ldots,n)) \tag{4}$$

alakban írhatók.

Ehhez csak azt kell belátnunk, hogy ha t (4) alakú és $x \leqq t$, akkor x is (4) alakú, de valóban $x = x \cap t = \bigvee\limits_{r=1} (i_{\alpha_r} \cap x)$, ahol $i_{\alpha_r} \cap x \in I_{\alpha_r}$ $(r=1,2,\ldots,n)$, ami a bizonyítandó volt.

Jelölje a továbbiakban Θ_I az I ideálhoz tartozó minimális kongruenciarelációt, azaz azt a minimális kongruenciarelációt, melyben I minden eleme a homomorf kép 0 elemére képeződik le.[6] Θ_I létezése abból adódik, hogy az összes olyan kongruenciareláció metszete, melynél I a homomorf kép 0 elemére képeződik le, ugyanilyen tulajdonságú.

4. TÉTEL: *Az $\bigvee\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$ ideálhoz tartozó minimális kongruenciareláció $\bigvee\limits_{\alpha\in A} \Theta_{I_\alpha}$, vagyis*

$$\Theta_{\bigvee\limits_{\alpha\in A} I_\alpha} = \bigvee_{\alpha\in A} \Theta_{I_\alpha}. \tag{5}$$

BIZONYÍTÁS: Nyilvánvaló, hogy

$$\Theta_{I_\alpha} = \bigvee_{a,\, b\in A} \Theta_{a,\, b} \tag{6}$$

(lásd a dolgozat első részében a 2. TÉTEL 4. KOROLLÁRIUMának bizonyítását).

[6] Félreértések elkerülése végett megjegyezzük, hogy Θ_I-nél I-n kívüli elemek is képeződhetnek le a homomorf kép 0 elemére.

Először belátjuk, hogy ha $a \leqq b$ és $a \leqq c$, akkor

(7) $$\Theta_{a,b} \cup \Theta_{a,c} = \Theta_{a,b\cup c}.$$

Mivel $a \equiv b(\Theta_{a,b\cup c})$ és $a \equiv c(\Theta_{a,b\cup c})$, ezért $\Theta_{a,b} \cup \Theta_{a,c} \leqq \Theta_{a,b\cup c}$; megfordítva $a \equiv b(\Theta_{a,b})$ és $a \equiv c(\Theta_{a,c})$ miatt $a \equiv b \cup c(\Theta_{a,b} \cup \Theta_{a,c})$, azaz $\Theta_{a,b\cup c} \leqq \Theta_{a,c} \cup \Theta_{b,c}$. A két egyenlőtlenség összevetése éppen (7)-et adja.

(6) segítségével (5) a következő alakra hozható:

(8) $$\bigvee_{x,y \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha} \Theta_{x,y} = \bigvee_{\alpha \in A} \bigvee_{a,b \in I_\alpha} \Theta_{a,b}.$$

Tegyük fel, hogy $\Theta_{a,b}$ szerepel (8) jobboldalában az egyesítésben. Ekkor valamely $\alpha \in A$-ra $a, b \in I_\alpha$, így $a, b \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha$, s ezért $\Theta_{a,b}$ szerepel (8) baloldalában is; következésképp

$$\bigvee_{x,y \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha} \Theta_{x,y} \geqq \bigvee_{\alpha \in A} \bigvee_{a,b \in I_\alpha} \Theta_{a,b}.$$

Megfordítva, legyen $\Theta_{x,y}$ $(x, y \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha)$ (8) baloldalában az egyesítésnél az egyik tag. $x, y \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha$ a 10 LEMMA szerint olyan i_{α_r} $(\in I_{\alpha_r}, \alpha_r \in A, r = 1, 2, \ldots, n)$ elemek létezését jelenti, hogy $x, y \leqq i_{\alpha_1} \cup \cdots \cup i_{\alpha_r}$. Legyen $u = \bigwedge_{r=1}^{n} i_{\alpha_r} \cap (x \cap y)$. Nyilván $u \in I_{\alpha_r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, s így $\Theta_{u, i_{\alpha_r}}$ szerepel (8) jobboldalában. (7)-ből $\bigvee_{r=1}^{n} \Theta_{u, i_{\alpha_r}} = \Theta_{u, \bigvee_{r=1}^{n} i_{\alpha_r}} \geqq \Theta_{x,y}$, ezért

$$\bigvee_{x,y \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha} \Theta_{x,y} \leqq \bigvee_{\alpha \in A} \bigvee_{a,b \in I_\alpha} \Theta_{a,b},$$

vagyis (8) fennáll. Q. e. d.

$\bar{\Theta}_I$-vel jelöljük azt a minimális kongruenciarelációt, melynek I magja. $\bar{\Theta}_I$ nyilván nem szükségképp létezik, de ha létezik, akkor[7] $\bar{\Theta}_I = \Theta_I$.

KOROLLÁRIUM: Ha $\bar{\Theta}_{I_\alpha}$ minden $\alpha \in A$-ra létezik, akkor $\bar{\Theta}_{\bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha}$ is létezik és $\bigvee_{\alpha \in A} \bar{\Theta}_{I_\alpha} = \bar{\Theta}_{\bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha}$.

A 4. TÉTELből láthatjuk, hogy akárhány minimális osztályozás egyesítése újból minimális osztályozás. Ez a metszetre már általában nem igaz. Ezt mutatja már a nem moduláris ötelemű háló példája is. A $\bigwedge \bar{\Theta}_{I_\alpha} = \bar{\Theta}_{\bigwedge I_\alpha}$ egyenlet különben sem állhatna fenn korlátozás nélkül, mert $\bigwedge I_\alpha$ nem szükségképp létezik.

[7] Érdekes volna azon ideálok összességét vizsgálni, melyekhez $\bar{\Theta}_I$ létezik. Könnyű például beigazolni, hogy ezek disztributív hálót alkotnak. Valószínűleg több probléma nyerne megoldást ezen háló részletesebb vizsgálatával.

Érdekes volna megadni annak szükséges és elegendő feltételét, hogy az L hálóban az ideálokhoz tartozó minimális kongruenciarelációk metszete is valamely ideálhoz tartozó minimális kongruenciareláció legyen. Az alábbiakban erre két elégséges feltételt adunk.

11. LEMMA: *Tartozzék az L 0-elemes háló minden ideáljához legfeljebb egy osztályozás. Jelölje $\bar{\mathfrak{L}}$ azon ideálok összességét, amelyekhez tartozik osztályozás. $\bar{\mathfrak{L}}$ $\Theta(L)$-lel izomorf háló, azaz*

$$\Theta_{\bigvee\limits_{\alpha\in A} I_\alpha} = \bigvee_{\alpha\in A} \Theta_{I_\alpha}, \qquad (I_\alpha \in \bar{\mathfrak{L}}) \tag{9}$$

$$\Theta_{\bigwedge\limits_{\alpha\in A} I_\alpha} = \bigwedge_{\alpha\in A} \Theta_{I_\alpha}; \qquad (I_\alpha \in \bar{\mathfrak{L}}) \tag{10}$$

legyen $(\bar{I}, K, \bar{X}_i, \bar{Y}_j \in \bar{\mathfrak{L}})$,

$$\bar{I} = \bar{X}_0 \supset \bar{X}_1 \supset \cdots \supset \bar{X}_n = \bar{K}$$

és

$$\bar{I} = \bar{Y}_0 \supset \bar{Y}_1 \supset \cdots \supset \bar{Y}_s = \bar{K},$$

e két láncnak van közös hosszúságú finomítása.

BIZONYÍTÁS: (9)-et a 4. TÉTEL igazolja, (10) viszont abból adódik, hogy $0 \in L$ miatt $\bigwedge I_\alpha$ létezik, továbbá $\bigwedge \Theta_{I_\alpha}$ magja $\bigwedge I_\alpha$. A $\bigwedge I_\alpha$ ideálhoz legfeljebb egy osztályozás tartozik, ezért $\bigwedge \Theta_I = \Theta_{\bigwedge I_\alpha}$. Ezzel beláttuk, hogy az $\bar{I} \to \bar{\Theta}_{\bar{I}}$ $(\bar{I} \in \bar{\mathfrak{L}})$ megfeleltetés izomorfia, s így $\bar{\mathfrak{L}}$ disztributív. Alkalmazható tehát $\bar{\mathfrak{L}}$-ben a Jordan—Dedekind-tétel, amely rögtön megadja a láncok finomítására vonatkozó állítást.

Disztributív hálókban $\Theta_I = \Theta_I$ minden I-re (sőt ez a tulajdonság [6] 1. tétele szerint jellemzi is a disztributivitást). Érvényes a következő

5. TÉTEL: *Ha L disztributív háló, akkor az összes Θ_I-k $\Theta(L)$-nek részhálóját alkotják, azaz*

$$\Theta_{I_1} \cup \Theta_{I_2} = \Theta_{I_1 \cup I_2} \tag{11}$$

és

$$\Theta_{I_1} \cap \Theta_{I_2} = \Theta_{I_1 \cap I_2}. \tag{12}$$

BIZONYÍTÁS: Mivel (11)-et tetszőleges hálóban már igazoltuk, ezért elég (12)-t belátni. (12)-t (6) alapján átírjuk:

$$\bigvee_{a,\, b \in I_1} \Theta_{a,b} \cap \bigvee_{c,\, d \in I_2} \Theta_{c,d} = \bigvee_{x,\, y \in I_1 \cap I_2} \Theta_{x,y},$$

ami (ID) felhasználásával ekvivalens a következővel:

$$\bigvee_{a,\, b \in I_1;\, c,\, d \in I_2} (\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d}) = \bigvee_{x,\, y \in I_1 \cap I_2} \Theta_{x,y}. \tag{13}$$

Lássuk be, hogy ha $a \leqq b$ és $a \leqq c$, akkor

$$\Theta_{a,b} \cap \Theta_{a,c} = \Theta_{a,\, b \cap c}. \tag{14}$$

Felhasználva [6] 2. TÉTELét $u \equiv v(\Theta_{a,b})$ és $u \equiv v(\Theta_{a,c})$ az $u \geqq v$ feltétel mellett ekvivalens a következő egyenletek fennállásával.

$$(a \cup v) \cap u = v, \tag{15}$$

$$(b \cup v) \cap u = u, \tag{16}$$

$$(c \cup v) \cap u = u. \tag{17}$$

(16) és (17)-ből a disztributivitás segítségével

$$u = u \cap u = (b \cup v) \cap u \cap (c \cup v) \cap u = [(b \cap c) \cup v] \cap u. \tag{18}$$

(15) és (18) együtt az előbb idézett tétel szerint $u \equiv v(\Theta_{a, b \cap c})$-t jelenti. Beláttuk, hogy $\Theta_{a,b} \cap \Theta_{a,c} \leqq \Theta_{a, b \cap c}$; $\Theta_{a,b} \cap \Theta_{a,c} \geqq \Theta_{a, b \cap c}$ azonnal adódik abból, hogy $\Theta_{a,b}, \Theta_{a,c} \geqq \Theta_{a, b \cap c}$. Így (14) igazolását befejeztük.

Nyilván, ha $\Theta_{x,y}$ szerepel (13) jobboldalában, azaz $x, y \in I_1 \cap I_2$, akkor $\Theta_{x,y}$ szerepel (13) baloldalában is, azaz

$$\bigvee_{a, b \in I_1;\, c, d \in I_2} (\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d}) \geqq \bigvee_{x, y \in I_1 \cap I_2} \Theta_{x,y}.$$

Bizonyítjuk a fordított egyenlőtlenséget. Látjuk, hogy ha $t \leqq a \cap b \cap c \cap d$ $(a, b \in I_1;\, c, d \in I_2)$ akkor (14) felhasználásával

$$\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d} \leqq \Theta_{a \cup b, t} \cap \Theta_{c \cup d, t} = \Theta_{(a \cup b) \cap (c \cup d), t},$$

ahol $(a \cup b) \cap (c \cup d) \in I_1 \cap I_2$ és $t \in I_1 \cap I_2$, azaz (13) baloldalának bármely tagja $\leqq$ mint a jobboldal alkalmas eleme. Ezzel (13) bizonyítását befejeztük.

A tétel bizonyításából látható, hogy igaz a következő

KOROLLÁRIUM: *A Θ_I-k akkor és csak akkor alkotják $\Theta(L)$-nek részhálóját, ha* (14) *fennáll.*

E korollárium mégsem mondható a felvetett probléma megoldásának, inkább csak kényelmes átfogalmazásul szolgál.[8]

(9) és (10) fennállását elég sok kikötés mellett biztosítja a

6. TÉTEL: *Ha L 0-elemes komplett és duálisan végtelen disztributív háló, (azaz L-ben* (DID) *teljesül), akkor a Θ_I kongruenciarelációk $\Theta(L)$ komplett reszhálóját alkotják, azaz* (9) *és* (10) *fennáll.*

BIZONYÍTÁS: Megint elég csak (10)-et belátni. Ezt teljesen az 5. TÉTEL bizonyításának megfelelő úton tehetjük. Elegendő megjegyeznünk, hogy L 0-elemessége $\bigwedge I_\alpha$ létezéséhez szükséges, a (DID) feltétel pedig (14) analogonjának bizonyításához szükséges, azaz, hogy ha $b_\alpha \geqq a$, akkor

$$\bigwedge \Theta_{a, b_\alpha} = \Theta_{a, \wedge b_\alpha}. \tag{19}$$

(19) és a bizonyítás többi részének részletezése könnyen elvégezhető.

[8] Az 5. TÉTEL a [6] 2. tételének 4. korolláriuma alapján egyszerűbben igazolható. Ekkor azonban a fenti korolláriumot nem kaptuk volna meg.

III.

Az alábbiakban a hozzárendelt elempárral kapcsolatos néhány kérdéssel foglalkozunk. Tekintsük az L háló a, b, c, d elemeit, melyekre $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ és $\overline{c, d} \to \overline{a, b}$ is áll. Ekkor nyilván $a \equiv b$ és $c \equiv d$ bármely kongruenciarelációra nézve ekvivalensek. Ugyanez a helyzet, ha a, b és c, d projektívek[9] (lásd [1], 72. és 73. old.; ugyanitt a transzponáltság definíciója is megtalálható), amit $[a, b]\pi[c, d]$ módon jelölünk. Láthatjuk, hogy a, b és c, d akkor és csak akkor projektívek, ha $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ és hozzárendelés mindig relatív komplementummal történik. Felvetjük a következő problémát: a, b és c, d projektivitásának, mely L hálókban szükséges és elegendő feltétele

(20) $$\overline{a, b} \to \overline{c, d} \text{ és } \overline{c, d} \to \overline{a, b}.$$

A hálóknak két osztályát adhatjuk meg, melyekre ez a feltétel teljesül.

7. TÉTEL: *Ha az L hálóra teljesül, hogy*

A. *L disztributív, vagy*

B. *L lokálisan véges és moduláris,*

akkor a, b és c, d ($a < b, c < d; a, b, c, d \in L$) *projektivitásának szükséges és elegendő feltétele* (20) *fennállása.*

Nyilván mindig csak azt kell belátnunk, hogy (20)-ból következik $[a, b]\pi[c, d]$.

A. BIZONYÍTÁSA: [6] 2. tételének állítása szerint a (20) feltétel disztributív hálóban ekvivalens a következő négy egyenlettel:

(21) $$(a \cup c) \cap d = c,$$

(22) $$(b \cup c) \cap d = d,$$

(23) $$(a \cup c) \cap b = a,$$

(24) $$(a \cup d) \cap b = b.$$

Lássuk be a

$$b \cup (a \cup c) = d \cup (a \cup c)$$

egyenletet, vagyis, hogy

(25) $$b \cup c = d \cup a.$$

(22)-ből $b \cup c \geqq d$ és $b > a$ miatt $b \cup c \geqq d \cup a$, és megfordítva, (24)-ből $a \cup d \geqq b$ és $d > c$ miatt $a \cup d \geqq b \cup c$, amely egyenlőtlenségek (25)-öt adják. (21), (23) és (25) épp azt mutatják, hogy az $[a, b]$, $[a \cup c, b \cup c]$, $[c, d]$ intervallumok közül a szomszédosak transzponáltak, vagyis $[a, b]\pi[c, d]$, ami a bizonyítandó volt.

[9] Legtöbbször *intervallumok* projektivitásáról és transzponáltságáról szoktak írni, nekünk kényelmesebb a fenti terminológia.

Mellékeredményként azt kaptuk, hogy ha $[a, b]\pi[c, d]$, akkor már két lépésben eljuthatunk a, b-ből c, d-be.

B. BIZONYÍTÁSA több állításra bontható, melyek mindegyike teljes indukcióval bizonyítható, ezért a részletes okoskodást mellőzzük. Az $[a, b]$ intervallum maximális láncainak hosszát (ezek a hosszak megegyeznek) jelölje $l[a, b]$.

12. LEMMA: *A* B. *feltétel mellett*

$$l[a, b] \geqq l[a \cup c, b \cup c] \text{ és } l[a, b] \geqq l[a \cap c, b \cap c], \tag{26}$$

és ha (26)*-ban egyenlőségjel áll, akkor a megfelelő intervallumok transzponáltak.*

BIZONYÍTÁSA $l[a, b]$-re vonatkozó teljes indukcióval történik.

13. LEMMA: *Ha* $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$, *akkor*

$$l[a, b] \geqq l[c, d]. \tag{27}$$

BIZONYÍTÁSA (26)-ot felhasználva, a hozzárendelés lépésszámára vonatkozó teljes indukcióval végezhető el. Érdemes megjegyezni, hogy mind (26), mind (27) a lokálisan véges hálók körében jellemzi a modularitást.

A B. eset bizonyítása ezután a következőképpen fejezhető be: Ha a, b, c, d-re $(a<b, c<d)$ a (20) feltétel teljesül, akkor (27)-ből $l[a, b] = l[c, d]$; így a 12. LEMMÁból $[a, b]\pi[c, d]$ adódik.

Láthatjuk, hogy A.-ban a tétel állításánál általánosabb tételt bizonyítottunk:

7. A. TÉTEL: *Az L disztributív hálóban* $\Theta_{a, b} = \Theta_{c, d}$ *akkor és csak akkor érvényes, ha* $[a, b]$ *és* $[c, d]$ *projektívek.*

A disztributivitás ismételt alkalmazásából nyilvánvaló, hogy ha $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d} (a < b, c < d)$, akkor alkalmas p és q elemekkel

$$(a \cup p) \cap q = c \tag{28}$$

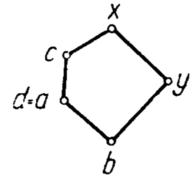
és

$$(b \cup p) \cap q = d \tag{29}$$

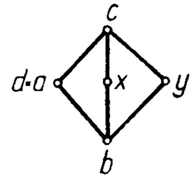
8. TÉTEL: *Az* $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$ $(a < b, c < d; a, b, c, d \in L)$ *feltétel akkor és csak akkor ekvivalens* (28) *és* (29)*-cel, ha L disztributív.*

BIZONYÍTÁS: A disztributivitás nyilván elegendő feltétel. Kimutatjuk, hogy szükséges is.

Tegyük fel, hogy az L hálóban teljesül a tétel feltétele. Belátjuk, hogy $c \geqq b$ nem lehetséges. Ugyanis, ha $c \geqq b$, akkor $(a \cup p) \cap q \geqq b$, tehát $a \cup p \geqq b$, de ekkor $c = (a \cup p) \cap q = [a \cup (b \cup p)] \cap q = (b \cup p) \cap q = d$ $c < d$-vel ellentétben.



1. ábra



2. ábra

Ha L nem disztributív, akkor van az 1., vagy 2. ábrán látható részhálója; viszont az 1. esetben

$$[(a \cup y) \cap c] \cup a = c \text{ és}$$
$$[(b \cup y) \cap c] \cup a = d;$$

és a 2. esetben:

$$[(a \cup x) \cap y] \cup a = c \text{ és}$$
$$[(b \cup x) \cap y] \cup a = d$$

és igy $d = a$, már pedig beláttuk, hogy $d \geqq a$ nem lehetséges. Ez az ellentmondás igazolja a disztributivitás szükségességét is.

IRODALOM

[1] G. Birkhoff: Lattice theory, *Amer. Math. Coll. Publ.*, **25**, Revised Edition (New-York, 1948).

[2] J. Hashimoto: Ideal Theory for Lattices, *Math. Japonicae*, **2** (1952) 149—186.

[3] N. Funayama and T. Nakayama: On the distributivity of a lattice of lattice-congruences, Proc. Imp. Acad Tokyo **18** (1942) 553—556.

[4] T. Tanaka: Canonical subdirect factorizations of lattices, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A.* **16** (1952) 239—246.

[5] Shih-Chiang Wang: On permutable congruence relations[10], 1953.

[6] Grätzer Gy. és Schmidt E. T.: Hálók ideáljai és kongruenciarelációi I., *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **7** (1957) 93—109.

Eötvös Loránd Tudományegyetem
III. év. alkalmazott-matematika szak.

(Beérkezett: 1957. VI. 7.)

[10] Ez a cikk kínai nyelven jelent meg, ezért nem idézzük a folyóirat címét.

KÖNYVISMERTETÉS

Nádor György: A természettörvény fogalmának kialakulása (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1957)

Autoreferátum

1. A mű célkitűzése

A könyv szűkebb célja, hogy megvilágítsa a napjainkban sokat vitatott természettörvény-fogalom történeti kialakulását és a tudománytörténeti kutatás *sajátos* eszközeivel hozzájáruljon a természettörvény-probléma elméleti tisztázásához. Emellett van a könyvnek egy átfogóbb célkitűzése is: egy lépést próbál tenni a filozófiai (természettudományi) kategóriák kialakulástörténetének tudományos vizsgálata felé:

Valamennyi természettudományi (filozófiai) kategória történetét egyszerre feldolgozni nem lehet. A referált könyv a természettudományok és a filozófia egyik *centrális* kategóriájával foglalkozik; az emberi megismerés történetét egy kategória kibontakozási folyamatának fényében mutatja be.

A természettörvény fogalma szervesen összefügg több más alapvető filozófiai fogalommal, mint amilyenek a *determinizmus,* a *kauzalitás,* a *szükségszerűség* kategóriái. Magától értetődik, hogy tárgyalásunk érinti a vizsgált fogalommal rokon, azzal egybekapcsolódó fogalmak történeti kialakulásának kérdését is. Filozófiai irodalmunkban meglehetősen tisztázatlan a filozófiai kategóriák szisztematikájának, az alapfogalmak egymáshoz való viszonyának kérdése, a szükségszerűség, törvényszerűség, okság fogalmainak logikai rendje és kapcsolata. Meggyőződésünk, hogy e fogalmak történeti kialakulásának vizsgálata elősegítheti — persze azért nem helyettesítheti — e fogalmak logikai kapcsolatának tisztázását.

A könyv műfaját tekintve: *kategória*történet és ez természetszerűen meghatározza a feldolgozás módját és jellegét. A kategóriatörténet művelése *gyakorlatilag* — és részben elvileg is — csak úgy lehetséges, ha a fejlődés általános kérdéseiben, a gondolkodók életművének egészére vonatkozó kérdésekben, — beleértve az általános történelmi fejlődésnek és a gondolkodók életművének társadalmi vonatkozásait is — a kutatás az általános feldolgozásokra (standard művek és monográfiák) támaszkodik és a maga részéről a vizsgálandó problémára és a vele szorosan kapcsolatos kérdésekre korlátozza a kutatást. Így jártunk el mi is — teljes tudatossággal.

2. A törvénykategória kibontakozásának fő szakaszai

A természettörvény-kategória kialakulástörténete egészében a következő képet mutatja, és az ismeretelmélet *általános* fejlődése szempontjából a következő tanulságokkal szolgál:

1. A természet objektív törvényszerűségének gondolata — legáltalánosabb formában — már az ókori görög gongolkodásban felmerül, legvilágosabban az *atomistáknál* és a HERAKLEITOS által megalapozott logos (*λόγος*) fogalomban. A középkor teleologikus világszemlélete akadálya e gondolat továbbfejlődésének; csak a renaissance-ban újjáébredő, a tekintélyekkel szembeforduló és a valóság *oksági viszonyát* kutató tudomány és filozófia bontakoztatja ki a természettörvény kategóriáját. — Az újkori tudomány nemcsak elvileg dolgozza ki a természettörvény fogalmát, hanem — KEPLER és GALILEI fellépésétől kezdődően — kísérleti úton számos törvényt ismer fel és fogalmaz meg a természettudományok különböző ágaiban, elsősorban a mechanikában. Éppen ezen — a kísérleti módszeren és az általa elért konkrét és exakt, *matematikai törvényekben* megfogalmazható eredményeken — mérhető le leginkább az újkori tudomány minőségi fölénye az elméletileg ugyan igen magas színvonalú, de a kísérletek széleskörű alkalmazásától meglehetősen távol álló ókori tudománnyal szemben. A polgárság, amely e korban a termelőerők rohamos fejlesztésében érdekelt, amely ezért a természet feletti uralom megszerzését írja zászlajára (BACON) — ezt a célját a természettudományban kísérletezés által és exakt, matematikailag megfogalmazható törvények feltárása által igyekszik elérni. LEONARDO DA VINCI, GALILEI, NEWTON és sok más nagy újkori természettudós világosan látja a természettudomány és mechanikai praxis, *természettudomány* és *technika* kapcsolatát.

A természettörvény-kategória fejlődéstörténete az absztrakt általánostól a konkrét általános felé való fejlődés — tartalmi gazdagodás — képět mutatja. Ez a megállapítás vonatkozik mind e gondolat *egész fejlődési útjára* — az ókori természetfilozofiától NEWTONig —, mind pedig ezen belül a törvénykategóriának az *újkori* gondolkodásban befutott történetére.

A törvényfogalom kibontakozásának szakaszait az újkorban nagyjában így lehetne körvonalazni: a) *A renaissance természetfilozófusainál* a természet rendjének és harmóniájának gondolata még homályosan dereng, misztikus és zavaros burokban jelentkezik; — LEONARDO DA VINCI persze kivétel, ő ezen a téren is messze megelőzi korát. — b) KEPLER és GALILEI nemcsak számos érvényes törvényt fogalmaz meg, hanem ezzel együtt módszertanilag is kidolgozza a természettörvény logikai szerkezetének és ismeretelméleti szerepének elvi alapjait. c) A további fejlődés a törvények *rendszerének* kidolgozása felé vezet. SPINOZA *elvi vonatkozásban* felismeri, hogy a törvények között rendszer áll fenn, de NEWTONra marad e koncepció exakt kidolgozása: a newtoni fizika tárja fel a természetben működő kauzalitás-viszonyok összefüggő rendszerét. A gravitáció-törvény megfogalmazásával NEWTON a klasszikus fizika talaján olyan alaptörvényt ismert fel, amelynek segítségével szintézisbe foglalta az addigi tudásanyagot: fizikája bázisát képezte egészen a XIX, század végéig a fizika további fejlődésének és a mechanikus materialista filozófiai általánosításnak.

2. Az a tudományos és filozófiai fejlődés, amelynek eredményeképpen a törvénykategória kialakult, súlyos *küzdelmeken* keresztül kibontakozó fejlődés volt. A haladó tudománynak szakadatlan harcot kellett vívnia az áltörvények hirdetőivel, az objektív törvénykoncepció ellenzőivel, a szubjektivista és voluntarista törvényfelfogás képviselőivel.

Leonardo, Bruno, Kepler, Galilei tevékenysége elválaszthatatlan az áltudományos, skolasztikus, misztikus irányzatok ellen vívott küzdelmeiktől, amelyeknek során megvédelmezték a *tudományos törvények* feltárására irányuló tevékenységet az *áltörvényeket* hirdető áltudományos törekvésekkel szemben. Természettudomány és materialista filozófia vállvetve e cél eléréséért küzdött (Bruno, Bacon, Descartes, Spinoza stb.).

Az alapvető ellentét a materialista és idealista irányzat között abban állott, hogy a materialisták a természetnek és törvényszerűségeinek objektivitását, változhatatlan és egyetemes jellegét vallották, az idealisták viszont teret adtak a csodáknak, a szabad akaratnak, a törvényeket felborító véletleneknek. Az idealista felfogás, ha egyáltalán elismerte a természetben működő törvényeket, azokat Isten rendeléséhez és akaratához kötötte és így elérte, hogy a csodák is beilleszthetők lettek a világképbe. (Isten bármely pillanatban megváltoztathatja, módosíthatja törvényeit.) A materializmus legkövetkezetesebben harcos irányzata (Hobbes — Spinoza) szembefordult az idealista törvényfelfogással és keményen harcolt ellene. A materializmus kevésbé harcos képviselői — mint Descartes — *formailag* elfogadták azt a feltevést, hogy isten helyezi törvényeit a természetbe, lényegében azonban megfosztották e koncepciót voluntarista és szubjektivista értelmezésétől és állást foglaltak a természettörvények változhatatlansága mellett.

3. A *törvény* a tudományok és a filozófia egyik központi kategóriája, amely a *világnézet* és a *tudományos módszerek szerves összetevőjeként* fejlődött és bontakozott ki.

a) Világnézeti vonatkozásban a törvényfogalom fejlődése legközvetlenebbül a *szubsztancia* és a *kauzalitás* kategóriáihoz és azok fejlődéséhez kapcsolódott. A *materialista* szubsztanciafogalom kibontakozása (Bruno, Spinoza) tette lehetővé a törvénykoncepció *materialista* filozófiai megalapozását (a törvények az *anyag* törvényei) és annak a szempontnak elvi igazolását, hogy *egységes* törvények érvényesek az egész mindenségben. Azok a természettudósok is, akik tudatos filozófiai meggyőződésüket tekintve nem a materialista filozófia elveit tették magukévá, tudományos munkásságukban spontán módon ezen alapelvek szerint dolgoztak (Descartes, Newton stb.).

Érvényes természettörvények kutatása csak a *kauzális világnézet,* a determinizmus talaján jöhetett létre és bontakozhatott ki. — Ezért a természettörvény-fogalom kialakulás-történetének hátterében — és e „háttér" nagyonis belejátszik magába a törvényfogalom történetébe! — szükségszerűen megjelenik az oksági szemlélet kibontakozásának története és az a harc, amit a kauzális magyarázat elvén alapuló tudomány vívott a teleológikus szemlélet hívei ellen. E küzdelem során a korabeli tudósok és filozófusok — persze a legkiválóbbak! — több-kevesebb világossággal felismerik a logikai kapcsolatot az okság, a szükségszerűség és törvényszerűség kategóriái között, felismerik annak szükségességét, hogy az oksági elvet elmélyítsék és *oksági világnézetté,* determinizmussá szélesítsék. Kísérletek történnek abban az irányban is, hogy az okság és a törvény logikai viszonyát tisztázzák (G. BRUNO.).

A törvényfogalom a *materialista világnézet* talaján született, mint szerves része a determinizmusnak, a természet objektív okozatiságát, objektív szükségszerűségét valló világnézetnek. Az objektív természettörvények elleni harcban, ami már ekkor is a determinizmus elleni harccal volt egyértelmű, lényegében *egy tábort* alkottak a klerikálisok, az arisztotelikusok és a misztikusok, a tudományos világnézet kibontakozásának legkülönbözőbb árnyalatú ellenségei.

b) A matematikai természettörvények megformulázása, általában a matematikai apparátus felhasználása a filozófiában elvi kérdésként vetette fel matematika és fizika, sőt szélesebben *matematika és valóság* viszonyának kérdését. KEPLERnek és GALILEInek még védelmeznie kell a matematika felhasználásának elvi jogosultságát a természettudományokban az arisztotelikusok „minőségi" fizikájával szemben. Külön veszélyt jelentett e korban a matematikai törvények újpythagoreus-misztikus szellemű eltorzítása az asztrológiában és a geometriai idealizmus (platonizmus) irányzata, amely szerint a geometriai (matematikai) kategóriák valóságelőttiek, és nem a valóságos viszonyok elvont visszatükrözései (amely állásponttal szemben már KEPLER fellépett).

Matematika és valóság viszonyának problémáját már a *bontakozó* újkori természettudománynak fel kellett vetnie, sőt bizonyos mértékig meg is kellett oldania, hogy saját módszerének elvi jogosultságát igazolja. És bátran el lehet mondani, hogy KEPLER és különösen GALILEI rendkívül mély és kielégítő — materialista — választ adtak e problémára, amellyel igazolták a matematikai természettudományok elvi jogosságát és megvetették az alapját a fizika gyors fejlődésének.

4. A természettörvény tudományos fogalma már a klasszikus fizikában kialakult — a mechanikus materializmus elvi alapján. A természettörvény-kategóriának több lényeges vonása nyert helyes — mindmáig érvényes — tisztázást már ebben a szakaszban; helyesen ismerték fel a kor fizikusai és materialista filozófusai a természeti (fizikai) törvények *objektivitását, örök és változatlan* jellegét, *egyetemes* érvényességét stb. Világosan látták a törvénykategóriának a determinizmussal való szerves kapcsolatát. A törvényfogalomnak ezek a vonásai mind a mai napig alapvető összetevői a törvény materialista felfogásának. Túlhaladottnak kell tekintenünk viszont a determinizmus *mechanikus* típusát és — ami ezzel összefügg —, a törvényfogalomnak egyoldalúan a mechanikai törvények alapján való kialakítását, a véletlen objektivitásának tagadását stb. Ezen a téren a *dialektikus* materializmus a természettudományok újabb fejlődése alapján *jelentős* mértékben tovább folytatta, elmélyítette és magasabb színvonalra emelte a természettörvény materialista felfogását.

A történeti vizsgálat fényében világossá válik: milyen tradícióra épít a törvényfogalom idealista felfogása és milyenre a materialista álláspont: kik az indeterminizmus és kik a determinizmus szellemi ősei. Az egyik oldalon: a skolasztikusok, a különböző áltudományok hívei stb., a másikon: LEONARDO DA VINCI, KEPLER, GALILEI, SPINOZA, NEWTON. Az *egyik oldalon a mítosz, a másikon a tudomány.*

3. Módszertani eredmények és tanulságok

1. A könyv a felvetett problémát NEWTONig követi nyomon. NEWTONnal a természetörvény-fogalom *kialakulástörténetének* első nagy szakasza lezárul: NEWTONhoz képest elvileg új mozzanatok és problémák a szaktudományok síkján főleg a XIX. században megerősödő biológiai tudományokban (DARWIN) és különösen a századforduló táján meginduló *fizikai forradalom* nyomán merülnek fel. Filozófiai vonatkozásban HEGEL, de különösen a *marxi filozófia* járult hozzá a törvényfogalom elmélyítéséhez és vetette meg elvi alapjait egy, a mechanikus kauzalitás-felfogásnál magasabbrendű új okságfogalomnak és természettörvény-felfogásnak. E problémakör feldolgozása azonban külön feladat, amely további széleskörű kutatásokat igényel.

2. A munka azzal az igénnyel lép fel, hogy újat ad a kutatás jelen állapotához képest: a vizsgált speciális problémának hiányzott eddig a mai tudományos igényeket kielégítő monográfikus feldolgozása, A részletek tekintetében sokat köszönhetek a tudománytörténeti speciális munkáknak, de sok vonatkozásban itt is önálló munkára volt szükség, nemcsak az adatok új szempontú értékelésében, hanem forrástanulmányok és adatkutatás terén is. A részletekre vonatkozó eredmények mellett fontosnak tartom felhívni a figyelmet az egész könyv felépítésében érvényrejutó metodikai elgondolásra és szempontokra:

a) A természeti törvény kategóriájának vizsgálatában úgy jártunk el — erre az eljárásmódra késztetett a kérdés logikája —, hogy a törvényfogalom történetét az okság és a determinizmus elvének kialakulástörténetével a legszorosabb kapcsolatban szemléltük. Ezen túlmenően erősen figyelembe kellett venni a törvényszerűség fogalmával közeli rokon *szükségszerűség* fogalmát, valamint ennek fogalompárját: a *véletlent is.*

Ez az eljárásmód — úgy véljük — egy bizonyos fokig általánosítható a kategóriatörténeti kutatás módszertana számára. Egy tudományos vagy filozófiai kategória kialakulástörténetét sohasem lehet teljesen izolálni és elvonatkoztatni a rokon kategóriáknak — gyakran — egész sorától. Másszóval: egyetlen kategória történeti kutatása mindig többé vagy kevésbé a kategóriák egész rendszerének, vagy legalábbis részleges rendszerének vizsgálatává szélesedik.

A kategóriák rendje, kapcsolata, egymáshoz való viszonya mármost legkevésbé sem örök és állandó. Nemcsak korszakonként változik, de egy korszakon belül is a különböző irányzatok másként építik ki a maguk kategóriarendszerét (pl. a kései ókorban a természettörvénnyel kapcsolatos kategóriáknak három rendszere volt ismeretes és elterjedt: az aristotelesi, a sztoikus és az epikureus).

A kategóriák történeti fejlődése, gazdagodása, átalakulása, értelem — és funkcióváltozása megköveteli, hogy minden kor és minden irány áttekinthető és szerves rendszerbe foglalja az általa érvényesnek elismert tudományos fogalmakat. Ezt a feladatot — a kategóriák szisztematizálását — az egyes korok filozófiai rendszerei végzik el.

b) A törvényfogalom keletkezéstörténetébe bele kellett foglalni annak a problémának a történetét is: mikor kezdték el és hogyan folytatták a tudományok a természeti törvények exakt kutatását és *milyen módszereket* dolgoztak ki e törvények kutatása számára.

Sőt ezen a nyomon egy lépéssel még tovább kellett mennünk: tekintettel arra, hogy a törvényszerűségek kutatása a gondolkodás magasfokú absztraháló és általánosító tevékenységét követeli, a logika és a módszertan történetének azokra a mozzanataira is ki kellett terjeszkednünk, amelyek az *általánosítás, a tudományos absztrakció* problémájának tisztázását pozitív módon előbbrevitték, vagy akárcsak jelentős kérdésfeltevéssel járultak hozzá a probléma megvilágításához.

c) A történész számára mindenképpen fontos továbbá, hogy ismerje az egyes korok domináló világnézeti áramlatait, a társadalmi tudat általános színvonalát és ennek alapján helyesen tudja megítélni és mérlegelni az új tudományos gondolatok és a haladó irányzatok korabeli helyzetét, a haladó eszmék súlyát, a közfelfogáshoz való viszonyát, az új és a régi harcát e kérdésben stb. Ezen tényezők ismerete ugyanis világosságot derít arra a kérdésre: milyen hallatlan erőfeszítéseket kellett tenniök a tudományos gondolkodás és a tudományos törvényfelfogás úttörőinek a — reakciós erők és hatalmak által szentesített és gyakran hatalmi eszközökkel is támogatott — korabeli hiedelmekkel és téveszmékkel szemben.

Hasonló meggondolás alapján tértünk ki sok esetben a nagy tudományos felismerések *elterjedésének, térhódításának* és az e körül lefolyó harcoknak történetére is. E harcok vizsgálata megmutatja: a haladó tudományos gondolatok nem spontán módon, hanem a haladó és a maradi erők közti küzdelem eredményeképpen váltak az emberi gondolkodás és tudomány közkincsévé. Ilymódon fény derül a haladó eszmék társadalmi szerepére.

d) Egy kategóriatörténeti munka módszere és előadásmódja semmi esetre sem lehet azonos, mondjuk egy általános filozófiatörténeti vagy általános tudománytörténeti mű módszerével, kifejtésmódjával. Az utóbbiaknak teljességre kell törekedniök, az értékelésben az egyes tudósok és gondolkodók összművét kell figyelembe venniök stb. A kategóriatörténész — munkája műfaji jellegének és követelményeinek megfelelően — másként jár el: az egyes gondolkodókat elsősorban a vizsgált probléma szempontjából tárgyalja, értékeli.

Mármost, mivel az általunk vizsgált probléma a tudományok és a filozófia egyik *centrális* kérdése, nagy eltolódások nincsenek a tárgyalás súlypontjaiban és az értékelésekben a monográfia sajátos szempontjai és az általános tudománytörténet szempontjai között. Mindemellett ilyen eltolódások elvileg lehetségesek és bizonyos mértékben a mi esetünkben is előfordultak (pl. PLATÓN pozitívabb értékeléshez jut, mint amilyent egy általános filozófiatörténeti munkában kaphatna).

A monográfia megkövetelte sajátos nézőponttól eltekintve is a mult nagy tudósainak és gondolkodóinak életművében erősebben hangsúlyoztuk a *pozitív vonásokat,* mint a ma már elavult gondolatelemeket. Ez azonban nem jelentette a mult idealizálását. KEPLER, DESCARTES, NEWTON, nem szorulnak arra, hogy idealizáljuk, átstilizáljuk gondolkodásuk ellentmondásait. Az a tény viszont, hogy jelenleg sokan megpróbálják a régi korok nagy tudósainak gondolkodásában kétségkívül meglévő ellentmondások ürügyén e tudósokat misztikusokká, a mágia hiveivé, idealistákká átfesteni, arra kötelezi a történelem elfogulatlan kutatóit, hogy helyrebillentsék a megzavart arányokat, hogy elsősorban ne a koruk tudományának színvonala által korlátozott, ne a multhoz kötődő, efemer elemeket, hanem az újat, az előbbrevivő eszméket domborítsák ki — anélkül, hogy a belső ellentmondásokat figyelmen kívül hagynák, elhallgatnák.

3. A természettörvény-probléma *aktuális* megoldásához vizsgálatunk, ha nem is közvetlenül, de közvetve hozzájárulhat azon „tanulságok" kiemelésével, amellyel a probléma történetének kutatása járt.

Mire tanít és milyen tanulságokat ad a törvénykategória története ebből a szempontból:

a) Kétezerötszáz éven keresztül a tudományok a kauzalitás elvének és az objektív törvényfelfogásnak többé vagy kevésbé tudatos alkalmazásával fejlődtek és érték el eredményeiket.

b) Azok az irányzatok, amelyek tagadták a természet objektív törvényszerűségeit, a természeti törvények egyetemes és változatlan jellegét — *nem* a tudományok fejlődését segítették elő, hanem a teológia és az áltudományok malmára hajtották a vizet.

c) A tudomány géniuszai, kiemelkedő képviselői legnagyobbrészt meg voltak győződve a tudományos igazságok, törvények, hipotézisek objektív érvényességéről és szembefordultak a tudományos tételek konvencionalista, relatívista felfogásával. Biztosak voltak abban, hogy az egyik tudományos elmélet nemcsak hasznosabb, de *igazabb* is a másiknál. Csak egy ilyen meggyőződés adott erkölcsi alapot és erőt nemcsak a kutatásokhoz, de ahhoz is, hogy tudományos meggyőződésükért áldozatokat vállaljanak.

d) A *tudományos determinizmus* igen korán elhatárolódott nemcsak a determinizmus elutasításának álláspontjától, de a hamis determinizmus fatalizmusától is (amilyen pl. az asztrológiában alakult ki). — A tudományos determinizmus nem maradt elvont, „metafizikusan" általános elméletet; a determinizmus alapján új és új, egyre adekvátabb tudományos módszerek jöttek létre a természeti törvények kutatására. GALLILEI determinizmusa ennélfogva hatékonyabb, gazdagabb volt, mint DÉMOKRITOSÉ. A mechanikus determinizmus módszertani lehetőségei mindamellett nem terjedhetnek egy bizonyos határon túl. A determinizmus régi *formájának* túlhaladása azonban nem jelentheti magának a determinista alapelvnek a feladását, mert ez — erre tanít a probléma története — a tudományok szilárd elvi alapjának feladásával volna egyértelmű.

4. Eredmények a részletekben

Több kérdésben az eddigi tudománytörténeti állásponttal szemben saját kutatásaim alapján más eredményekre jutottam. Ezek közül néhány fontosabbat megemlítek:

a) HÉRAKLEITOS $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$-(logos)-fogalmának elemzése azt mutatja, hogy e fogalmon a görög gondolkodó az objektív törvényszerűségeket értette, szemben az általa használt $\nu \acute{o} \mu o \varsigma$-fogalommal, amelyen a társadalmi-politikai törvényeket érti.

b) PLATON idea-tana a fogalomelmélet és a törvénykategória szempontjából sokkal pozitívabb méltánylást érdemel, mint amilyent a haladó szándékú tudománytörténetben (pl. BERNAL-nál) eddig nyert. Az idea-elmélet nagyszabású kísérlet az általánosítás műveletének, a fogalom „titkának" megfejtésére. Tekintettel a tudományos törvények „fogalomtermészetére" — a fogalom mivoltának felderítésére irányuló kutatás az alapja a tudományos törvény „titka" feltárásának. Nem véletlen, hogy a renaissance tudósai (KEPLER, GALILEI) a platoni fogalomelméletre nyúlnak vissza.

c) Újszerű megvilágítást adtunk KEPLER pythagoreizmusának. Kimutattuk: a *„világ harmóniájának"* tana KEPLER gondolkodásában nem dogmatikus, hanem heurisztikus szerepet tölt be: a világ harmóniájának meggyőződése fűti KEPLER tudományos lelkesedését, amellyel — analógiák és szimbólumok segítségét is igénybevéve — kutatja a természet törvényeit. KEPLER enthuziazmusa nélkül (amit ő *furor sacer*-nek nevez) úttörő munkásságát nem tudta volna folytatni.

d) Érdekes képet nyújt a fogalmak forma- és tartalomváltozása. A Sors-fogalom (*εἱμαρμένη*, Fatum) a renaissance korában egyes kutatók kezén elveszti mitikus tartalmát és határozott tudományos jelleget ölt: a determinizmusnak válik szinonimájává (pl. POMPONAZZInál, BOYLE-nál)

e) A renaissance filozófusok a természetmagyarázatnál általában az *organizmus* analógiáját használják (a világ — élőlény). Ezen modell segítségével a világ egységét és a jelenségek összefüggését érzékeltetik; kevéssé alkalmas azonban ez a szemléletmód ebben a korban még az exakt kutatás alátámasztására. Ezekben a századokban a mechanika lévén az egyetlen exakt módon művelt természettudomány, a mechanikai modell alapján lehet csak a részletekbe menő kutatást megalapozni.

Igen érdekes LEONARDO DA VINCI módszere, aki az organikus és a mechanikus szemléletmódot tevékenyen összehangolja: az organikus szemlélet nála nem zavarja meg, nem vezeti misztikába a természetkutatást; a mechanikai modell hatása biztosítja nála az exaktságot a részletekben is.

Nádor György

(Beérkezett: 1957. VII. 1.)

FELHÍVÁS!

A szerkesztőség kéri a t. Szerzőket, hogy cikkeikhez rövid *magyar nyelvű* kivonatot mellékeljenek. E kivonatokat a MTA oroszra fordíttatja és a *Szovjetunió Tudományos Akadémiájá*hoz tartozó és az A. N. MIHAILOV professzor vezetése alatt működő *Dokumentációs Intézet*nek küldi el.

A MTA III. Osztálya Közleményeinek
Szerkesztősége

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Tandori Károly doktori értekezésének nyilvános vitája

1957. április 5-én tartotta a Tudományos Minősítő Bizottság a Szegedi Tudományegyetemen TANDORI KÁROLY *„Ortogonális sorokról"* című doktori értekezésének nyilvános vitáját. Az értekezés opponensei ALEXITS GYÖRGY, SZ.-NAGY BÉLA és CSÁSZÁR ÁKOS voltak.

Ezután TANDORI KÁROLY ismertette doktori értekezését, amely tetszőleges normált ortogonális függvényrendszerekkel és ilyenek szerint haladó sorfejtésekkel foglalkozik. Az értekezés kiinduló pontjául az általános ortogonális függvénysorokra vonatkozó, RADEMACHER, MENSOV és KACZMARZ nevéhez fűződő eredmények szolgálnak.

Legyen $\{\varphi_n(x)\}$ az $[a, b]$ alapintervallumon ortogonális és normált függvényrendszer. Ismeretes, hogy ha az $\{a_n\}$ együtthatósorozat eleget tesz a

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

feltételnek, akkor az $[a, b]$ alapintervallumon majdnem mindenütt

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) = o(\log N).$$

Ismeretes továbbá, hogy ha a $\{\varepsilon(n)\}$ pozitív, monoton nem-csökkenő számsorozat eleget tesz a

$$(3)\qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n\, \varepsilon^2(n)} < \infty$$

feltételnek, akkor az $[a, b]$ alapintervallumon majdnem mindenütt

$$(4)\qquad \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x) = o\left(\sqrt{N \log^3 N}\, \varepsilon(N)\right), \quad (5)\qquad \sum_{n=0}^{N} \varphi_n^2(x) = o(N \log N \cdot \varepsilon^2(N))$$

és

$$(6)\qquad L_N(t) = \int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dx = o(\sqrt{N} \log N\, \varepsilon(N)).$$

TANDORI KÁROLY értekezésében kimutatta, hogy a (2), (4), (5) és (6) becslések lényegükben nem finomíthatók. A (4)-es becslés finomíthatatlanságának bizonyítása egy Mensov-féle tétel élesítésén alapul.

Az (5) becslés alapján adódik a következő tétel. Legyen $\{\nu(n)\}$ pozitív, monoton nem-csökkenő számsorozat, amely eleget tesz a (3) feltételnek. Ekkor az $[a, b]$ alapintervallumon majdnem mindenütt $\varphi_N(x) = o(\sqrt{N \log N \nu(N)})$. Ez a becslés sem finomítható.

A továbbiak során a dolgozat foglalkozik ALEXITS GYÖRGY és GÁL ISTVÁN ortogonális sorok Cesàro-közepeire vonatkozó tételeinek általánosításával, továbbá a Cesàro-közepekkel kapcsolatos Lebesgue-függvények nagyságrendjének meghatározásával és ismét kimutatja, hogy az adott nagyságrendi becslések tovább nem finomíthatók.

A jelölt előadása után az opponensek felolvasták opponensi véleményüket.

ALEXITS GYÖRGY kiemelte, hogy a dolgozat éles újabb eredményeket tartalmaz olyan problémákkal kapcsolatosan, amelyek már csaknem húsz éve nyugvópontra jutottak, továbbá, hogy a dolgozat igen egyéni bizonyítási módszereket alkalmaz; a legötletesebb és legegyénibb módszerek a Lebesgue-függvényekkel kapcsolatos részben találhatók.

SZ.-NAGY BÉLA opponensi véleményében megállapította, hogy az eredmények az általános ortogonális függvényrendszerekre vonatkozó ismereteinket igen jelentős mértékben kiszélesítik és egyben bizonyos lezártsághoz juttatják. Külön említésreméltónak tartotta a dolgozat gondos megfogalmazását, amelyet későbbi hozzászólásában az elnök is nagyon méltánylandónak tartott.

CSÁSZÁR ÁKOS rámutatott arra, hogy az értekezés egyik főcélja az általános ortogonális függvényrendszerek elméletében levő egyes hézagok kitöltése, nevezetesen bizonyos becslések javítható, vagy nem javítható voltának eldöntése. A későbbi vita folyamán megemlítette, hogy a disszertáció megírásával a szerző hálátlan feladatra vállalkozott, mert a disszertáció leglényegesebb része negatív eredményeknek, t. i. becslések nem javítható voltának igazolása.

Ez utóbbi megjegyzéshez KALMÁR LÁSZLÓ hozzátette, hogy igaz ugyan, hogy a dolgozat nagy részében ellenpéldákról van szó, de e tételeket pozitív tételeknek is fel lehet fogni. MENSOV említett tétele is inkább pozitív divergencia tételnek tekinthető, mint sejtés cáfolatának.

A vita során RÉNYI ALFRÉD a problémakörnek a valószínűségszámítással való kapcsolatára hívta fel a figyelmet.

A vita után a bírálóbizottság határozatában egyhangúan javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy TANDORI KÁROLYt nyilvánítsa a matematikai tudományok doktorává. A bírálóbizottság kiemelendőnek tartotta MENSOV említett, klasszikus tételének meglepő élesítését, továbbá azt, hogy TANDORI KÁROLY MENSOV és KACZMARZ meggondolásait számos új ideával lényegesen finomította és ezzel alkalmazási lehetőségeik sorát nagymértékben kiszélesítette.

Makai Endre
a matematikai tudományok doktora

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK

FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

Kutató fizikusok számára önálló eredményeket tartalmazó és összefoglaló jellegű fizikai, csillagászati dolgozatokat, könyvismertetéseket, laboratóriumi fogásokat és ma már klasszikussá vált dolgozatokat közöl hazai és külföldi szerzőktől.

Évenként 1 kötet (kb. 36 ív) jelenik meg 6 számban.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 42 forint, külföldi címre 60 forint.

Belföldi megrendeléseket az *Akadémiai Kiadó*, Budapest V. Alkotmány utca 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44) teljesít.

Külföldi megrendelések a „*Kultúra*" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI. Népköztársaság Útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

Ára: 34,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

KÖNYVISMERTETÉS

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Technikai szerkesztő: Alpár László

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1957. VII. 30. — Terjedelem: 15,75 (A/5) ív, 9 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 57-3011 — Felelős vezető: Vincze György