

UN MODELE SIMPLE POUR COMPRENDRE POURQUOI LA COUCHE DE GLACE A LA SURFACE D'UN PLAN D'EAU TEND A RESTER RELATIVEMENT MINCE

Eric Deleersnijder et Hugues Goosse

*Institut d'Astronomie et de Géophysique Georges Lemaître,
Université catholique de Louvain, 2 chemin du cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve*

*Invited plenary talk at the General Scientific Meeting of the Belgian Physical Society, Namur, May 19-20, 1998

Summary. The ice covering salty or fresh water tends to remain rather thin, even if the air temperature is low for a long time. This is due to the insulating role of the ice cover itself, which slows down the transfer to the atmosphere of the heat produced by the solidification of the water. A simple thermodynamic model is developed to investigate the heat transfer processes associated with ice accretion. It is seen that the ice thickness tends to increase as the square root of the time elapsed and that the temperature profile in the ice layer is approximately linear. The stability of the solution obtained is examined. Finally, the simple model is applied to sea ice in the Arctic and Antarctic. The magnitude of the oceanic heat flux is shown to be partially responsible for the ice cover being generally thicker in the Arctic than in the Antarctic.

Introduction

Sur les canaux gelés de la Frise — au nord des Pays-Bas —, on organise certains hivers la célèbre course de patineurs appelée “Elfstedentocht”, la “course des onze villes”. Comme le montre la Figure 1, cette épreuve n'est pas organisée fréquemment, essentiellement parce que la glace n'atteint que rarement une épaisseur suffisante pour supporter sans se briser les contraintes imposées par les patineurs. En fait, dès que la température de l'air descend sous 0 °C, une couche de glace se forme rapidement à la surface des plans d'eau douce. Par contre, même s'il gèle continûment pendant plusieurs semaines, l'épaisseur de la couche de glace dépasse rarement quelques dizaines de centimètres. On peut donc penser que la glace s'épaissit d'abord très vite mais que le taux de croissance de la couche de glace diminue drastiquement au fur et à mesure que le temps passe.

En Arctique et en Antarctique, où la température de l'air peut se maintenir sous un niveau aussi bas que - 20 °C pendant la durée de la nuit polaire, l'épaisseur de la banquise n'excède pas quelques mètres (Figure 2): pour la glace de mer, comme pour celle se formant sur les plans d'eau douce, il existe des processus freinant ou limitant l'épaississement de la couverture de glace. Bien que la glace de mer¹ et la glace couvrant les plans d'eau douce aient des

¹ Il ne faut pas confondre la banquise, qui est constituée de glace formée en mer, avec les icebergs, qui sont des “montagnes” de glace dérivant en mer après s'être détachées d'un glacier terrestre. Lors de la congélation de

caractéristiques — légèrement — différentes, le principal responsable du ralentissement de la croissance de la couverture de glace est identique pour les deux types de glace. L'atmosphère, étant plus froide que l'eau, refroidit cette dernière : l'atmosphère cède de la "froidure" à l'eau ou, en d'autres termes, l'eau fournit de la chaleur à l'atmosphère. Quand la température de l'eau atteint le point de solidification, la température de l'eau ne diminue plus, mais l'eau continue à céder de la chaleur à l'atmosphère en formant de la glace. Le flux de chaleur correspondant, qui est proportionnel à la vitesse d'accrétion de la glace, est alors transporté vers l'atmosphère à travers la glace. En première approximation, ce flux de chaleur est aussi inversement proportionnel à l'épaisseur de glace. Donc, l'accrétion à la base de la glace est d'autant plus lente que la glace est épaisse. Ainsi, la couche de glace joue le rôle d'un isolant thermique dont l'efficacité s'accroît à mesure que son épaisseur augmente.

De winnaars van de officiële Elfstedentocht waren:



Jaar	Winnaar	Plaats	Gereden in
1909	M.Hoekstra	Warga,	13.50 uur
1912	C.C.J de Koning,	Arnhem,	11.40 uur
1917	C.C.J de Koning,	Arnhem,	9.53 uur
1929	K. Leemburg	Leeuwarden,	11.09 uur
1933	A. de Vries	Dronrijp,	
	S. Castelein	Wartena,	9.05 uur
1940	A.Adema	Franeker,	
	D.van der Duim	Warga,	
	C.Jongert	Ilpendam,	
	P.Keizer	De Lier,	
	S.Westra	Warmenhuizen,	11.30 uur
1941	A.Adema	Franeker,	9.19 uur
1942	S. de Groot	Weidum,	8.44 uur
1947	J. van der Hoorn	Ter Aar,	10.51 uur
1954	J. van der Berg	Nijbeets	7.35 uur
1956	Geen prijs uitgereikt		
1963	R.Paping	Ommen	10.59 uur
1985	E. van Benthem	St. Jansklooster	6.47 uur
1986	E. Van Benthem	St. Jansklooster	6.55 uur
1997	H. Angenent	Alphen a. d. Rijn	6.49 uur

Figure 1. La liste des vainqueurs de la course de patineurs sur glace "Elfstedentocht", disputée sur les canaux de la Frise les années où les propriétés de la glace le permettent (source: le site web dont l'adresse est <http://www.drf.nl/sport/11steden/>).

l'eau de mer, une petite fraction du sel initialement dissous dans l'eau est incorporée dans la glace de mer, tandis que l'autre partie du sel, qui constitue la portion la plus large, est expulsée vers la colonne d'eau. Il en résulte que la glace de mer est légèrement salée. Les icebergs, par contre, sont composés uniquement d'eau douce.

Ci-dessous, on présente un modèle thermodynamique qui représente les flux de chaleur associés à la croissance d'une couche de glace. Ce modèle ne vise pas à simuler de la façon la plus réaliste possible la formation de la glace à la surface d'un plan d'eau. Au contraire, on cherche à mettre au point le modèle mathématique le plus simple capable de rendre compte de la cause première du ralentissement de la croissance d'une couche de glace séparant une couche d'eau liquide² et une couche d'air dont les températures sont constantes — de telle sorte que la variation du taux d'accrétion de la glace ne puisse être imputée à des changements de son environnement.

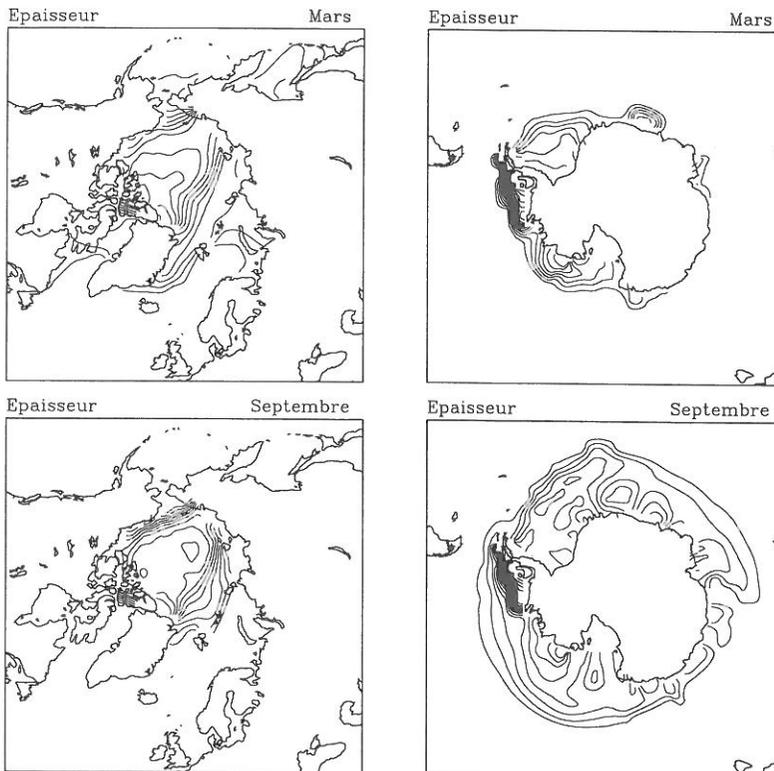


Figure 2. Epaisseur de la banquise modélisée par le modèle CLIO — Coupled Large-scale Ice-Ocean model, développé à l'Université catholique de Louvain (*e.g.* Goosse, 1997, Fichefet and Morales Maqueda, 1998) — en mars (au-dessus) et en septembre (en bas) d'une année "normale" dans l'Arctique (à gauche) et l'Antarctique (à droite). L'intervalle entre les courbes d'égale épaisseur de la glace est de 0.5 m en Arctique et 0.25 m en Antarctique. L'erreur affectant les prédictions du modèle est de l'ordre du mètre dans les régions où la banquise est la plus épaisse et de quelques dizaines de centimètres ailleurs.

² Il est sans doute inutile de rappeler que la densité de la glace est environ 10% inférieure à celle de l'eau, de sorte que la glace flotte toujours sur l'eau!

Equation de la chaleur

Puisque l'on souhaite développer le modèle le plus simple possible, il est naturel de considérer que la glace est un solide homogène indéformable dont la masse volumique, ρ , la chaleur spécifique, c , et la conductivité thermique, κ , sont constantes (Tableau I)³. On néglige les échanges radiatifs de chaleur dans la glace. Par conséquent, seule la conduction est susceptible de transporter la chaleur à travers la glace. Il s'ensuit que la température, T , à l'intérieur de la couche de glace considérée obéit à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

où $\lambda = \kappa / (\rho c)$ désigne la diffusivité thermique, qui est constante; t représente le temps; x , y et z sont des coordonnées cartésiennes dont la dernière, z , est associée à la direction verticale.

Tableau I. Les propriétés physiques de la glace utilisées dans le modèle simplifié développé ici (d'après Paterson, 1994, Fichetef and Morales Maqueda, 1997, et Lewis, 1998).

propriété physique	symbole	valeur	unité*
masse volumique	ρ	9.2×10^2	kg m^{-3}
chaleur spécifique	c	2.1×10^3	$\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
conductivité thermique	κ	2.1	$\text{W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
diffusivité thermique	$\lambda = \kappa / (\rho c)$	1.1×10^{-6}	$\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$
chaleur latente de fusion de la glace	L	3.0×10^8	J m^{-3}

(* : $^\circ\text{C}$ = degré Celsius, J = Joule, kg = kilogramme, m = mètre, s = seconde, W = Watt)

On modélise ici une couche de glace mince, c'est-à-dire un volume de glace dont une dimension caractéristique, l'épaisseur, est nettement plus petite que les deux autres. Bien entendu, on mesure l'épaisseur selon la direction verticale. Si l_x , l_y et l_z représentent les dimensions typiques du volume de glace étudié selon les axes de coordonnées x , y et z , alors le caractère mince de la glace implique que

$$l_z \ll \min(l_x, l_y). \quad (2)$$

En désignant par ΔT l'ordre de grandeur de la gamme de variation de la température dans le domaine d'intérêt, on peut montrer que l'ordre de grandeur des termes du laplacien apparaissant dans (1) obéissent à

³ Ces hypothèses ont des conséquences mineures car, dans la gamme de variation de la température, de la salinité et de la pression observée dans la nature, ρ , c et κ sont quasiment constantes.

$$\max\left(\left|\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|\right) \approx \frac{\Delta T}{\min(l_x^2, l_y^2)} \ll \frac{\Delta T}{l_z^2} \approx \left|\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right|. \quad (3)$$

Ainsi, on peut réduire l'équation (1) à la forme unidimensionnelle

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (4)$$

En d'autres termes, on peut ignorer les flux de chaleur horizontaux pour se concentrer sur les échanges thermiques verticaux — ce qui revient à modéliser une couche de glace horizontalement infinie dont la température ne dépend que de la coordonnée verticale (Figure 3). On perçoit aisément l'ampleur de la simplification du modèle qu'autorise l'hypothèse de la minceur de la couche de glace.

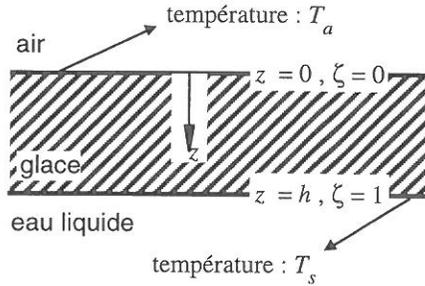


Figure3. Schéma de la couche de glace mince dont on modélise la croissance. La coordonnée verticale adimensionnelle ζ est définie plus bas, dans la relation (19).

Par souci de simplification, on suppose que la température de l'air au contact de la glace, T_a , est constante. On pose que l'interface air-glace est située en $z=0$. La température de la glace à cette altitude coïncide à tout instant avec celle de l'air:

$$[T]_{z=0} = T_a. \quad (5)$$

C'est à la base de la couche de glace, en $z=h$ — où h dénote l'épaisseur de la couche de glace, qui est fonction du temps —, que l'eau se solidifie. La température de solidification de l'eau, T_s , est une fonction de la pression et de la salinité seulement. Ici, ces deux variables sont aussi considérées comme constantes, de telle sorte que T_s est constante. Ainsi, la température à la base de la couche de glace vaut à tout instant

$$[T]_{z=h} = T_s. \quad (6)$$

Intuitivement, on comprend que la couche de glace ne peut pas s'épaissir si la température de l'air est supérieure au point de congélation de l'eau. En d'autres termes, il faut que T_s soit inférieure T_a .

On doit donc résoudre, dans le domaine d'intérêt $0 \leq z \leq h(t)$, le problème différentiel composé de l'équation (4) et des conditions aux limites (5)-(6). Ce problème n'est cependant pas complet, car le domaine d'intérêt possède une frontière libre située en $z=h(t)$, c'est-à-dire

une frontière dont on ne connaît pas *a priori* la position. Il faut donc établir la loi qui régit le déplacement de cette frontière.

Taux d'accrétion de la glace

De l'instant t à l'instant $t+\Delta t$, l'épaisseur de la couche de glace augmente de $h(t)$ à $h(t+\Delta t)$. La congélation de l'eau dégage, par unité de surface de la couche de glace, la quantité de chaleur

$$Q = L [h(t + \Delta t) - h(t)], \quad (7)$$

où L est la chaleur spécifique de fusion de la glace, qui est supposée constante (Tableau I). Par conséquent, le flux de chaleur produit par la congélation de la glace vaut

$$\phi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q}{(t + \Delta t) - t} = L \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = L \frac{dh}{dt}. \quad (8)$$

On doit maintenant aborder une question cruciale: le flux de chaleur ϕ est-il transmis intégralement à l'atmosphère *via* la couche de glace ou peut-il être cédé partiellement, voire totalement, à l'eau liquide? La réponse à cette question est claire : le flux de chaleur libéré par la formation de la glace est cédé intégralement à l'atmosphère. On va le montrer à l'aide d'arguments simples.

La température de l'eau au contact de la glace est égale au point de solidification. Plus bas dans la colonne d'eau, la température ne peut être inférieure au point de solidification, qui est la température minimum⁴ que peut atteindre l'eau liquide avant de changer de phase. Par conséquent, le gradient de température dans la colonne d'eau est dirigé vers le bas, ce qui implique que le flux de chaleur dans l'eau est dirigé vers le haut, de l'eau vers la glace. Puisque le maximum de densité de l'eau douce est atteint vers 4 °C, c'est-à-dire à une température supérieure au point de solidification (≈ 0 °C), l'eau au contact de la glace surmonte de l'eau plus chaude, mais plus lourde. La colonne d'eau tend donc à être stable, une situation peu propice au développement d'un flux de chaleur important. Pour l'eau de mer, par contre, le point de congélation correspond au maximum de densité. De plus, le sel libéré par la congélation de l'eau tend à augmenter la salinité à proximité de la base de la couche de glace. Il en résulte que la température minimale et la salinité maximale, et donc la densité maximale, de la colonne d'eau tendent à se placer immédiatement sous la glace, conduisant à une situation statiquement instable — puisque l'eau au contact de la glace tend à être plus lourde que celle située plus bas. Ceci favorise le mélange turbulent, voire la convection, qui induit notamment un flux de chaleur dirigé vers le haut qui est bien plus grand que le flux de diffusion moléculaire associé.

On voit donc que l'eau située sous la glace est quasiment toujours le siège d'un flux de chaleur dirigé vers le haut qui tend à ralentir la formation de la glace — même si ce flux est sans doute beaucoup plus grand dans l'océan que dans un plan d'eau douce. En tout cas, le flux de chaleur libéré par la formation de la glace ne peut être transmis à l'eau liquide et doit

⁴ La température de solidification dépend faiblement de la salinité et de la pression. Si l'on néglige ces effets, la température de solidification est le maximum absolu de température de toute colonne d'eau.

donc être évacué vers l'atmosphère à travers la couche de glace — ce qui est conforme à l'intuition, puisque c'est l'atmosphère qui "refroidit" l'eau, produisant ainsi de la glace. D'après la loi de Fourier, le flux de chaleur traversant la glace vaut⁵

$$\varphi = \kappa \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (9)$$

une expression qui est une des bases de l'équation de la chaleur (4).

Il résulte de la discussion ci-dessus que le flux de conduction de chaleur à la base de la couche de glace est la somme du flux de chaleur dû à la solidification de la glace, ϕ , et du flux se développant dans l'eau sous la glace, Φ :

$$[\varphi]_{z=h} = \phi + \Phi. \quad (10)$$

En combinant les relations (8)-(10), on obtient

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\kappa}{L} \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=h} - \frac{\Phi}{L}. \quad (11)$$

Si Φ est connu, le modèle mathématique d'évolution d'une couche de glace est complet: il est composé des relations (4), (5), (6) et (11). Comme on le verra plus loin, le flux de chaleur Φ n'est pas un ingrédient essentiel du présent modèle: on le néglige dans les premiers développements ci-dessous. De toute façon, ce flux de chaleur ne dépend pas directement de la thermodynamique de la couche de glace, mais plutôt de son environnement.

Une solution incorrecte, quoique...

Il est tentant de supposer que la température varie linéairement entre les deux extrémités de la couche de glace. Ainsi, dans le domaine d'intérêt, la température vaudrait

$$T = T_a + (T_s - T_a) \frac{z}{h}. \quad (12)$$

Cette expression satisfait les conditions aux limites (5) et (6), et correspond à un flux de chaleur indépendant de la position, à savoir

$$\varphi = \frac{T_s - T_a}{h}. \quad (13)$$

On introduit la fonction adimensionnelle

$$\varepsilon = \frac{h}{\lambda} \frac{dh}{dt} \quad (14)$$

et le paramètre adimensionnel

$$\alpha = \frac{\rho c (T_s - T_a)}{L}, \quad (15)$$

⁵ On considère que le flux de chaleur est positif s'il est dirigé vers le haut. La coordonnée verticale z croît vers le bas. En conséquence, le flux de chaleur paramétrisé selon (9) est, comme il se doit, dirigé dans le sens opposé au gradient de température — ce qui peut ne pas apparaître lors d'une lecture cursive de (9).

qui est une constante mesurant l'importance de la différence de température prévalant entre les deux frontières de la couche de glace. En combinant les relations (9)-(15), il vient

$$\varepsilon = \alpha \quad (16)$$

de sorte que, selon cette approche, l'épaisseur de la glace croît selon la racine carrée du temps écoulé,

$$h = (2\alpha\lambda)^{1/2} t^{1/2}. \quad (17)$$

Ces résultats sont en excellent accord avec l'intuition la plus élémentaire et avec les faits évoqués au début de la présente étude. En effet, d'après (17), le taux de croissance de la couche de glace

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{\alpha\lambda}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{t^{1/2}}, \quad (18)$$

diminue drastiquement au fil du temps — c'est-à-dire que la glace s'épaissit d'abord rapidement, puis de moins en moins vite. D'autre part, (15) et (17) indiquent que la glace s'épaissit d'autant plus vite que la température atmosphérique est basse. Finalement, le rôle d'isolant de la glace est mis en lumière puisque, au fur et à mesure qu'elle s'épaissit, le flux de chaleur qui la traverse diminue, imposant une réduction du taux d'accrétion de la glace.

Le modèle développé dans cette section constitue une version simplifiée de la théorie de Stefan (1891). Cette approche est très attirante, mais elle conduit à une solution incorrecte. En effet, le profil de température (12), s'il vérifie les conditions aux limites(5) et (6), ne satisfait pas à l'équation de la chaleur (4). En fait, ce profil de température serait la solution stationnaire du problème (4)-(6) si l'épaisseur de la couche de glace ne variait pas au cours du temps. Il faut donc s'orienter vers une approche qui tienne compte de façon adéquate de la dilatation progressive du domaine d'intérêt — due à l'épaississement de la couche de glace.

Solution auto-semblable

On reformule le problème à traiter à l'aide d'un système de nouvelles variables,

$$(\tau, \zeta) = \left(t, \frac{z}{h}\right), \quad (19)$$

dans lequel le domaine d'intérêt est fixe, c'est-à-dire qu'il est défini par l'intervalle figé $0 \leq \zeta \leq 1$ (Figure 3). Avec ces variables, les opérateurs différentiels deviennent

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\zeta}{h} \frac{dh}{dt} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (20)^6$$

et

⁶ Le temps étant identique dans les deux systèmes de variables indépendantes, on peut trouver étonnant que les opérateurs de différentiation temporelle soient différents. Ceci s'explique cependant aisément: la dérivée partielle par rapport à t s'effectue à z fixé, alors que celle par rapport à τ s'effectue à ζ fixé, c'est-à-dire en un point dont la coordonnée z n'est pas constante à cause de la croissance de h — comme le suggère (11). Donc, les deux dérivées partielles temporelles ne peuvent être équivalentes.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (21)$$

Par ailleurs, employer la température adimensionnelle

$$\theta = \frac{T - T_a}{T_s - T_a}. \quad (22)$$

permet de simplifier quelques calculs.

En utilisant les variables introduites plus haut, on peut écrire le problème différentiel à résoudre sous la forme suivante :

$$\frac{h^2}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \varepsilon \zeta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2}, \quad (23)$$

$$\varepsilon = \frac{h}{\lambda} \frac{dh}{dt} = \alpha \left[\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=1}, \quad (24)$$

avec les conditions aux limites

$$[\theta]_{\zeta=0} = 0 \quad (25)$$

et

$$[\theta]_{\zeta=1} = 1. \quad (26)$$

On ne fixe pas *a priori* de conditions initiales, de manière à bénéficier d'une certaine liberté dans la détermination d'une solution du problème différentiel à résoudre. De toute façon, on verra que les détails des conditions initiales importent probablement peu.

Le problème (23)-(26) admet une solution auto-semblable telle que la température dépend uniquement de la variable adimensionnelle ζ , c'est-à-dire que le profil de température apparaît comme stationnaire dans les nouvelles variables indépendantes τ et ζ . Dans ce cas, puisque θ ne dépend pas de τ , (23) implique que la fonction du temps ε devient en fait une constante. Il s'ensuit que l'épaisseur de la couche de glace évolue selon

$$h = (2\varepsilon\lambda)^{1/2} t^{1/2}. \quad (27)$$

En outre, en résolvant (23) — dans l'hypothèse où $\partial\theta/\partial\tau=0$ —, on obtient

$$\theta(\zeta) = \frac{\int_{\zeta}^1 e^{-\frac{\varepsilon\sigma^2}{2}} d\sigma}{\int_0^1 e^{-\frac{\varepsilon\sigma^2}{2}} d\sigma}. \quad (28)$$

Finalement, en combinant (24) et (28), on aboutit à l'équation transcendante qui permet de déterminer la constante ε :

$$\varepsilon \int_0^1 e^{-\frac{\varepsilon\sigma^2}{2}} d\sigma - \alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2}} = 0. \quad (29)$$

Pour des valeurs raisonnables de la différence de température $T_s - T_a$, le paramètre

adimensionnel α reste nettement plus petit que l'unité (Figure 4). C'est pourquoi il paraît naturel de rechercher des développements asymptotiques dont la validité augmente à mesure que α s'approche de zéro. On exprime alors les variables dépendantes comme des séries de puissances de α , que l'on introduit dans les équations (23)-(26). Les deux premiers termes de ces séries sont

$$\varepsilon = \alpha - \frac{\alpha^2}{3} + O(\alpha^3), \quad (30)$$

$$\theta = \zeta + \frac{\zeta(1-\zeta^2)}{6} \alpha + O(\alpha^2), \quad (31)$$

$$h = (2\lambda t)^{1/2} \alpha^{1/2} - \frac{(2\lambda t)^{1/2}}{6} \alpha^{3/2} + O(\alpha^{5/2}). \quad (32)$$

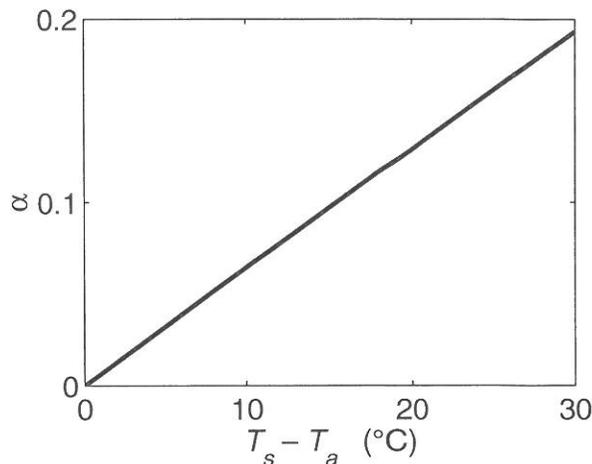


Figure 4. Représentation de l'écart adimensionnel de température α , défini en (15), en fonction de la différence de température entre la base et le sommet de la couche de glace.

Les termes dominants de ces développements asymptotiques correspondent à la solution du modèle simplifié de Stefan reproduite plus haut : à mesure que α s'approche de zéro, le profil de température tend vers le profil linéaire (12), tandis que l'épaisseur de la couche de glace tend vers l'expression (17). En d'autres termes, le modèle simplifié de Stefan apparaît comme une approximation de la solution auto-semblable — qui est une solution exacte. Ces deux solutions coïncident pour une raison qu'il est facile d'élucider.

L'échelle de temps caractérisant la conduction de chaleur dans la couche de glace peut être estimée par le quotient

$$t_c \equiv \frac{h^2}{\lambda}, \quad (33)$$

tandis que le temps caractéristique lié à l'épaississement de la glace est de l'ordre de

$$t_e \equiv \frac{h}{\frac{dh}{dt}} \quad (34)$$

Par conséquent, on peut interpréter ε comme le rapport de ces deux temps caractéristiques : en effet, en combinant (14), (33) et (34), il vient

$$\varepsilon = \frac{t_c}{t_e} \quad (35)$$

Le fait que ε soit généralement très inférieur à l'unité (Figure 5) signifie donc que la conduction de la chaleur dans la couche de glace procède plus rapidement que l'épaississement de cette couche. C'est pourquoi le profil de température tend à rester proche d'une fonction linéaire, qui est la solution stationnaire qui prévaudrait si la couche de glace ne s'épaississait pas. En d'autres termes, on peut regarder le profil linéaire de température comme une solution quasi-stationnaire — du point de vue de la conduction de chaleur.

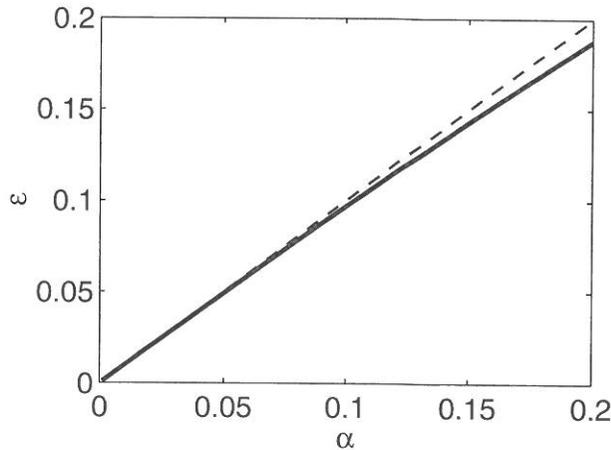


Figure 5. Représentation du paramètre adimensionnel ε en fonction de la différence adimensionnelle de température α (courbe pleine). La courbe en trait interrompu est le terme dominant de l'expression asymptotique (30), c'est-à-dire $\varepsilon \sim \alpha$.

A ce stade, on pourrait objecter que la solution auto-semblable est tellement particulière que les conditions initiales ne sont jamais, ou quasiment jamais, réunies pour qu'elle soit effectivement observée. Cet argument, s'il est *a priori* pertinent, ne résiste pas à une analyse de la stabilité de la solution auto-semblable.

On considère une perturbation du profil adimensionnel auto-semblable de température dont l'ordre de grandeur n'excède pas α . On suppose que cette perturbation de température a un impact d'ordre α sur l'épaisseur de la couche de glace. Ainsi, on envisage une solution du problème différentiel (23)-(26) de la forme

$$\theta = \zeta + \left[\frac{\zeta(1-\zeta^2)}{6} + \tilde{\theta} \right] \alpha + O(\alpha^2), \quad (36)$$

$$h = (2\lambda t)^{1/2} \alpha^{1/2} + \left[-\frac{(2\lambda t)^{1/2}}{6} + \tilde{h} \right] \alpha^{3/2} + O(\alpha^{5/2}), \quad (37)$$

avec

$$[\tilde{\theta}]_{\zeta=0,1} = 0, \quad (38)$$

où $\tilde{\theta}$ et \tilde{h} représentent les perturbations de la température et de l'épaisseur de la glace. En substituant (36) et (37) dans (23), on obtient

$$2t\alpha \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \zeta^2} \quad (39)$$

en se limitant aux termes du plus grand ordre de grandeur⁷ qui ne sont pas identiquement nuls. On multiplie (39) par $\tilde{\theta}$, on intègre sur le domaine d'intérêt et, en tenant compte des conditions aux limites (38), on aboutit finalement à

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 (\tilde{\theta})^2 d\zeta = -\frac{1}{2t\alpha} \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta, \quad (40)$$

une expression qui indique que la perturbation de température ne peut que décroître jusqu'à être nulle partout. Donc, la solution auto-semblable est stable vis-à-vis de petites⁸ perturbations dont l'ordre de grandeur est au plus α . Ceci signifie que la solution auto-semblable n'est pas du tout une solution exceptionnelle ou improbable, qui ne se développerait que si les conditions initiales étaient, par hasard, propices à son apparition. Au contraire, cette solution est sans doute la plus probable. Par conséquent, on a de fortes chances d'observer un profil de température qui varie à peu près linéairement entre les deux extrémités de la couche de glace.

Glace de mer

On va maintenant utiliser le modèle simple développé plus haut pour représenter de façon très schématique la croissance de la glace de mer en Arctique et en Antarctique. Dans cette optique, on impose $T_s - T_a = 20^\circ\text{C}$, et on considère que le flux de chaleur océanique, Φ , vaut 2 W m^{-2} en Arctique (McPhee and Untersteiner, 1982) et 20 W m^{-2} en Antarctique (Martinson, 1993). Par ailleurs, on a vu qu'il est raisonnable de se contenter du modèle simplifié, dans

⁷ Si l'on peut penser que le second membre de l'équation (39) est de l'ordre de l'unité, on peut douter qu'il en aille ainsi pour le premier membre de cette équation. On remarquera toutefois que le produit $2t\alpha$ est, dans le cadre de la solution auto-semblable, le terme dominant du temps caractéristique lié à la conduction de chaleur dans la glace tel qu'il est défini par la relation (33). Par conséquent, le premier membre de (39) est le produit de la dérivée temporelle d'une grandeur qui est de l'ordre de l'unité et de l'échelle de temps correspondante, une expression qui est *a priori* de l'ordre de l'unité.

⁸ Les auteurs sont persuadés que la solution auto-semblable est stable pour des perturbations d'une amplitude quelconque, mais il n'ont pas encore pu le démontrer.

lequel la température varie linéairement entre les deux extrémités de la couche de glace. On combine alors les relations (9)-(15) pour obtenir l'équation régissant l'approfondissement de la couverture de glace

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\lambda\alpha}{h} - \frac{\Phi}{L} \quad (41)$$

Cette équation admet un point d'équilibre stable — où $dh/dt = 0$ —, pour lequel l'épaisseur de la glace vaut (Tableau II)

$$h_{\Phi} = \frac{L\lambda\alpha}{\Phi}, \quad (42)$$

qui est d'autant plus grande que la différence de température $T_s - T_a$ est grande et d'autant plus petite que le flux de chaleur océanique Φ est grand — ce qui n'est guère surprenant. En outre, on identifie dans (41) l'échelle de temps (Tableau II)

$$t_{\Phi} = \frac{L^2\lambda\alpha}{\Phi^2}. \quad (43)$$

Tableau II. Valeurs de quelques paramètres importants du modèle applicables à la glace de mer en Arctique et en Antarctique. Une situation hypothétique — analysée en détail dans les sections précédentes — où $\Phi = 0$ est aussi envisagée. La Figure 7 représente l'évolution de la glace selon ces trois cas.

	Arctique	Antarctique	hypothétique
différence de température base-sommet : $T_s - T_a$	20 °C	20 °C	20 °C
flux de chaleur océanique : Φ	2 W m ⁻²	20 W m ⁻²	0 W m ⁻²
épaisseur d'équilibre de la glace : h_{Φ}	21 m	2.1 m	∞
temps caractéristique : t_{Φ}	1 an	10 ³ ans	∞

En imposant que l'épaisseur h soit nulle à l'instant initial, on trouve

$$\frac{h}{h_{\Phi}} + \log\left(1 - \frac{h}{h_{\Phi}}\right) = -\frac{t}{t_{\Phi}}, \quad (44)$$

une équation dont la solution est représentée dans la Figure 6. Quand $t \ll t_{\Phi}$, le flux de chaleur océanique est très inférieur à celui dû à l'accrétion de glace. D'où, la solution de (44) est asymptotique au terme dominant de la solution du problème où le flux de chaleur océanique est ignoré, à savoir $h \sim (2\alpha\lambda t)^{1/2}$, qui est équivalente à (17). Par contre, quand l'épaisseur s'approche de la valeur d'équilibre, le flux de chaleur produit par la formation de glace devient négligeable, de sorte que le flux de chaleur traversant la glace tend à être équivalent au flux de chaleur océanique imposé. Dans ce cas, la relation asymptotique

$$h \sim \left(1 - e^{-\frac{t}{t_\Phi}} \right) h_\Phi \quad (45)$$

s'applique.

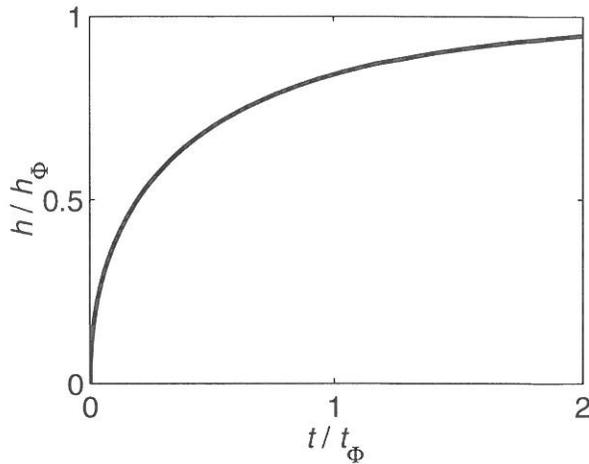


Figure 6. Représentation de la solution de l'équation (44), c'est-à-dire l'épaisseur adimensionnelle de la glace en fonction du temps adimensionnel.

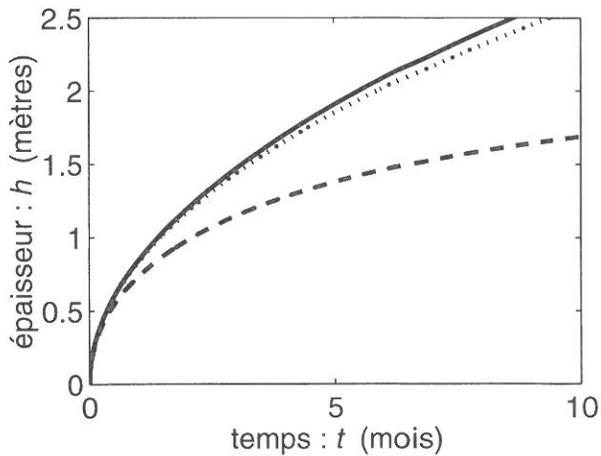


Figure 7. Evolution de l'épaisseur de la glace de mer, selon l'équation (44), en fonction des paramètres définis dans le Tableau II : les courbes en trait plein, interrompu et pointillé correspondent respectivement au cas hypothétique où le flux de chaleur océanique est nul, à l'Antarctique et à l'Arctique.

La Figure 7 représente l'évolution de la couverture de glace, pour 3 valeurs du flux de chaleur océanique, à partir d'une épaisseur nulle, pendant 10 mois, c'est-à-dire une durée un peu supérieure à la plus longue saison de croissance de la glace connue dans l'Océan Mondial. Sur la période considérée, le flux de chaleur océanique imposé ne modifie pas l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la glace même si les épaisseurs d'équilibre sont très différentes (Tableau II).

Le modèle simple suggère cependant que la glace devrait être sensiblement plus épaisse en Arctique que dans l'Océan Austral, ce qui correspond bien à la réalité (Figure 2). Toutefois, de part ses limitations, la présente étude ne peut expliquer complètement la différence entre les deux hémisphères. En effet, les développements présentés ici s'appliquent uniquement à la période d'accrétion de la glace. On n'a pas tenu compte de l'effet de la neige recouvrant généralement la glace de mer, ni des détails des échanges radiatifs avec l'atmosphère. On a aussi négligé l'effet considérable du déplacement de la glace — dû essentiellement à l'action du vent. Finalement, on a considéré que l'épaisseur de la glace est nulle au début de la période d'accrétion. Si cette hypothèse est valable dans l'Océan Austral, où la glace est majoritairement saisonnière, elle ne s'applique guère à l'Arctique où l'épaisseur est telle que la glace ne peut fondre totalement durant l'été. Ainsi, en Arctique, après la fonte estivale partielle, la glace s'épaissit à nouveau avec le retour de la saison froide. Au fil des hivers, le taux de croissance moyen de la couverture de glace diminue — car l'épaisseur augmente. Donc, on atteint finalement un régime quasiment périodique, où la fonte d'été est compensée par l'épaississement hivernal.

Conclusion

Si l'on veut prédire de façon réaliste l'évolution de la glace de mer, il faut employer un modèle suffisamment sophistiqué, comme celui de Fichet et Morales Maqueda (1997). Cette remarque s'applique aussi, quoique dans une moindre mesure, à la glace se formant à la surface d'un plan d'eau douce. Néanmoins, le modèle présenté ici est suffisant pour comprendre physiquement pourquoi l'effet d'isolation thermique d'une couche de glace augmente avec l'épaisseur, qui est la raison principale pour laquelle la couche de glace à la surface d'un plan d'eau tend à rester relativement mince. Le but que l'on s'était fixé est donc atteint!

Remerciements. Les auteurs sont des mandataires du Fonds National de la Recherche Scientifique de Belgique. Thierry Fichet et Miguel Morales Maqueda ont apporté une aide précieuse à la préparation de cet article.

Bibliographie

On a cité les travaux suivants :

- Fichefet T. and M.A. Morales Maqueda, 1997, Sensitivity of a global sea ice model to the treatment of ice thermodynamics and dynamics, *Journal of Geophysical Research*, 102 (C6) 12609-12646.
- Goosse H., 1997, *Modelling the Large-Scale Behaviour of the Coupled Ocean-Sea-Ice System*, Thèse de doctorat, Faculté des sciences appliquées, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
- Martinson D.G., 1993, Ocean heat and seasonal sea ice thickness in the Southern Ocean, in : *Ice in the Climate System*, W.R. Peltier (Editor), NATO ASI Series, Vol. I-12, Springer-Verlag, pp. 597-609.
- McPhee M.G. and N. Untersteiner, 1982, Using sea ice to measure heat flux in the ocean, *Journal of Geophysical Research*, 87 (C3), 2071-2074.
- Leppäranta M., 1993, A review of analytical models of sea-ice growth, *Atmosphere-Ocean*, 31 (1), 123-138.
- Lewis J.K., 1998, Thermomechanics of pack ice, *Journal of Geophysical Research*, 103 (C10), 21869-21882.
- Paterson W.S.B., 1994, *The Physics of Glaciers*, Elsevier.
- Stefan J., 1891, Über die Theorie des Eisbildung, insbesondere über Eisbildung im Polarmeere, *Annalen der Physik*, 42 (3rd Ser.), 269-286.
- Pour en savoir plus sur la glace de mer, on peut consulter :
- Barry R.G., M.C. Serreze, J.A. Maslanik and R.H. Preller, 1993, The Arctic sea ice-climate system : observations and modelling, *Reviews of Geophysics*, 31 (4), 397-422,
- Hanna E., 1996, The role of Antarctic sea ice in global climate change, *Progress in Physical Geography*, 20 (4), 371-401,
- Lorius C. et R. Gendrin, 1996, *L'Antarctique*, Flammarion, Dominos N° 125,
- Sciences et Avenir, *L'Océan Planétaire*, Hors Série N° 98, Août-Septembre 1994,
- Untersteiner N. (Editor), 1982, *The Geophysics of Sea Ice*, NATO ASI Series Vol 146, Plenum Press,
- ou visiter les sites web :
- <http://www.awi-bremerhaven.de/> (Alfred Wegener Institute for Polar and Marine Research, Bremerhaven, Allemagne),
- <http://www.nerc-bas.ac.uk/> (British Antarctic Survey, Cambridge, Royaume Uni),
- <http://www.scar-ggi.org.au> (Scientific Committee on Antarctic Research),
- <http://www.antarc.utas.edu.au/iasos.html> (Institute of Antarctic and Southern Ocean Studies, University of Tasmania, Hobart, Tasmanie, Australie).