

Château de Roch

JOURNEES NUMERIQUES 1990

27 - 28 Septembre

VLIZ (vzw)
VLAAMS INSTITUUT VOOR DE ZEE
FLANDERS MARINE INSTITUTE
Oostende - Belgium

COURANTS OCEANIQUES

OCEAN STREAMS

Edited by

**J.M. CROLET
P. LESANT**

Conférences Publiées dans le cadre des "Publications Mathématiques de Besançon"

The Conferences are edited in the "Publications Mathématiques de Besançon"

Du rôle de la dispersion horizontale de quantité de mouvement dans les modèles marins tridimensionnels

Eric Deleersnijder* et Eric Wolanski**



23757

Vlaams Instituut voor de Zee
Flanders Marine Institute

*Aspirant au Fonds National de la Recherche Scientifique de Belgique; GeoHydrodynamics and Environment Research (GHER), Université de Liège, Sart Tilman B5, B-4000 Liège, Belgique

**Australian Institute of Marine Science (AIMS), Cape Ferguson, PMB No 3, Townsville M.O., Qld 4810, Australie

Introduction

Les équations de base de la géohydrodynamique (e.g. Nihoul, 1980) décrivent, en principe, l'évolution des variables d'état macroscopiques des fluides géophysiques depuis les plus petites échelles spatio-temporelles, où se produit la dissipation visqueuse de la turbulence, jusqu'aux plus grandes, celles des phénomènes climatiques voire paléo-climatiques. Toutefois, aucun modèle numérique pratiquement réalisable ne peut ambitionner de représenter toute la gamme de processus couverte par les équations de base. Définir l'échelle spatio-temporelle des phénomènes à étudier s'avère un préambule indispensable à l'établissement d'un modèle mathématique focalisé sur les processus ainsi identifiés (Nihoul et Djenidi, 1987). Ce modèle mathématique constituera alors la base du modèle numérique.

Dans les mers peu profondes — profondeur ≤ 200 mètres, — un modèle à la méso-échelle vise à représenter des phénomènes dont le temps caractéristique, \mathcal{T} , est de l'ordre de 10^4 - 10^5 secondes. Ce sont, par exemple, les marées, les tempêtes, les oscillations d'inertie... Pour obtenir les équations d'évolution de ces processus, on filtre les équations de base de la géohydrodynamique de telle sorte que les phénomènes dont le temps caractéristique est inférieur à \mathcal{T} soient lissés. Plusieurs procédures de filtrage peuvent être envisagées (e.g. Bedford *et al.*, 1987; Ferziger, 1983). On choisit un filtre consistant en une moyenne temporelle des équations de base, les moyennes des variables d'état devenant alors les nouvelles inconnues du problème. Ainsi, la turbulence tridimensionnelle (micro-échelle) tout comme les ondes internes et la turbulence partiellement inhibée par la stratification (mésial-échelle) apparaissent comme des "fluctuations turbulentes" — nulles en moyenne — dont le modèle renonce à représenter le détail de l'évolution mais dont l'effet moyen, par le biais des non-linéarités des équations, n'est pas *a priori* négligeable. On paramétrise les corrélations issues des termes d'advection en faisant appel aux variables d'état moyennes dégagées par le filtre. Pour ce faire, les modèles de fermeture turbulente de type $k-\epsilon$ (e.g. Rodi, 1984; Nihoul et Djenidi, 1987) ou Mellor/Yamada (Mellor et Yamada, 1982) s'avèrent assez fiables.

Cependant, l'anisotropie des maillages numériques, imposée par les limitations de la capacité des ordinateurs, n'est pas en accord avec la relative isotropie des phénomènes paramétrisés. Il faut alors procéder à un filtrage spatial des équations et introduire des paramétrisations additionnelles, pour lesquelles aucun consensus ne semble exister. Nous exposons ici notre avis sur ce sujet.

Equations pour la méso-échelle

La masse volumique, ρ , de l'eau de mer varie très peu et s'identifie quasiment à une valeur de référence constante, ρ_0 : on applique donc l'approximation de Boussinesq.

Comme prévu, on filtre les mouvements à la méso- et la micro-échelle. Leur contribution aux équations de quantité de mouvement se réduit à la divergence du tenseur des tensions de Reynolds, T . On paramétrise T grâce au concept de viscosité turbulente \bar{V} (e.g. Rodi, 1984):

$$T = \bar{V} [\nabla v + (\nabla v)^T] - (2/3) \epsilon I. \quad (1)$$

Ci-dessus, v représente la vitesse moyenne de la méso-échelle, ϵ , l'énergie cinétique des fluctuations turbulentes (méso- et micro-échelle) et I , le tenseur identité. L'opérateur ∇ s'écrit $\nabla = e_1 \partial / \partial x_1 + e_2 \partial / \partial x_2 + e_3 \partial / \partial x_3$ où e_i ($i=1,2,3$) est le vecteur unitaire selon l'axe x_i (ces trois vecteurs forment une base orthonormée). De plus, e_3 pointe dans le sens opposé à la pesanteur.

Les mouvements filtrés peuvent être considérés comme relativement isotropes. Leurs longueurs caractéristiques horizontale et verticale sont comparables et sont, au maximum, de l'ordre de quelques mètres. Par conséquent, il convient de choisir une maille numérique légèrement plus grande. Ainsi, les mouvements filtrés par la moyenne temporelle le sont aussi par la discrétisation spatiale (Nihoul, 1975a). Si cette approche est, en pratique, réalisable sur la verticale, elle ne l'est, par contre, pas du tout dans le plan horizontal. En effet, le minimum d'extension horizontale des domaines de calcul propres à l'étude des processus à la méso-échelle peut être estimé à quelques kilomètres. Puisqu'il est vain de tenter de couvrir un tel domaine avec des mailles de l'ordre de quelques mètres au plus, il faut se contenter de mailles horizontales longues d'au moins quelques dizaines de mètres. En conséquence, le rapport de la hauteur des mailles, Δz , à leur longueur, Δx , est très nettement inférieur à l'unité ($\Delta z / \Delta x \ll 1$). Il en va de même pour le quotient d'aspect δ des phénomènes que peut représenter le modèle numérique,

$$\max(\delta) = \max(\lambda) / \min(\Lambda) \ll 1, \quad (2)$$

où λ et Λ désignent les longueurs caractéristiques verticale et horizontale. La profondeur de la mer limite λ tandis que Δx fixe la borne inférieure de Λ . Par conséquent, l'inégalité (2) s'applique à presque tous les modèles marins et, en tout cas, aux modèles à la méso-échelle.

Prendre en compte la faible valeur de δ dans les équations de quantité de mouvement amène deux modifications fondamentales:

1. Selon la verticale, l'équation de quantité de mouvement verticale se réduit, en bonne approximation, à l'équilibre hydrostatique, $\partial p / \partial x_3 = -\rho g$ (e.g. Pedlosky, 1984) où p et g dénotent, respectivement, la pression et l'accélération de la pesanteur.

2. En introduisant (2) dans (1) et en tenant compte du *scaling* classique de l'équation de continuité, $\nabla \cdot v = 0$, on montre que la contribution horizontale de $\nabla \cdot T$ se simplifie en $(\nabla \cdot T)_h \sim (\partial / \partial x_3) [\bar{V} (\partial u / \partial x_3)]$, où u symbolise la vitesse horizontale ($v = u + u_3 e_3$). La viscosité turbulente étant positive, $(\partial / \partial x_3) [\bar{V} (\partial u / \partial x_3)]$ représente la diffusion turbulente — ou dispersion — verticale de quantité de mouvement horizontale. La diffusion moléculaire s'avère moins efficace — de plusieurs ordres de grandeur — que la dispersion; par conséquent, on la néglige. Ceci implique, pour le moment, l'absence de toute diffusion/dispersion horizontale. Plus précisément, les méso- et micro-échelle ne contribuent pas à la dispersion horizontale. Toutefois, les mouvements dont l'échelle horizontale est comprise entre la méso-échelle et la maille horizontale ne peuvent être représentés par le modèles numérique puisqu'ils sont *sub-grid scale*. On peut imaginer qu'ils sont filtrés par la discrétisation spatiale horizontale mais, comme pour le filtrage temporel, leur contribution, par le biais des termes non-linéaires d'advection, doit être prise en considération. Elle sera notée d en attendant une paramétrisation adéquate.

Ainsi, il apparaît que d dépend, en toute généralité, de la résolution horizontale puisque d est issu d'une moyenne spatiale — ou d'un autre type de filtre — conçue en fonction du maillage. Il faut donc, avant tout, tracer la grille numérique que l'on va utiliser.

Certains auteurs adoptent la solution la plus simple sur le plan conceptuel: un maillage orthogonal à pas fixe dans les trois directions spatiales (Figure 1A) (e.g. Backhaus *et al.*, 1987; Leendertse,

1989; Liu et Leendertse, 1987). Ce type d'approche conduit cependant à une utilisation peu économique des ressources informatiques. Il faut stocker des valeurs inutiles correspondant aux points de discrétisation situés sous le fond de la mer car la taille des matrices du programme est fixe; ou alors, on a recours à l'adressage indirect mais cette façon de programmer s'accommode mal des exigences des compilateurs vectorisateurs des super-ordinateurs. De plus, la représentation précise du fond de la mer et des couches limites associées n'est pas possible. En effet, une série de surfaces planes alternativement verticales et horizontales constituent le fond numérique, ce qui est bien loin de la réalité.

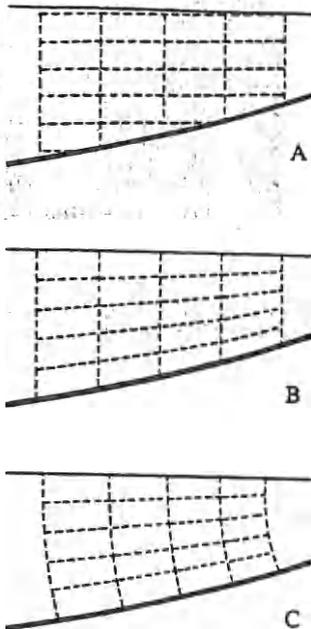


Figure 1. Coupes verticales illustrant différents types de maillage. Le fond de la mer est dessiné au trait gras, au contraire de la surface. Les volumes de contrôle de la grille A sont des parallélépipèdes rectangles dont les faces sont verticales ou horizontales. Dans la Figure 1B, les faces latérales des mailles sont planes et verticales; la colonne d'eau est divisée en un nombre égal de points de discrétisation. Le maillage 1C est orthogonal de telle sorte qu'une des familles de lignes de coordonnées soit perpendiculaire au fond et à la surface.

Pour remédier à ces inconvénients, il importe de choisir un système de coordonnées, et partant, un maillage, s'adaptant mieux aux variations de profondeur de la mer. Le quotient d'aspect étant petit, on peut s'inspirer des techniques généralement employées en modélisation des couches limites (*e.g.* Schlichting, 1979) — tout l'écoulement peut d'ailleurs être vu, à l'échelle de la planète, comme une couche limite. Dans cet esprit, on définit un maillage curviligne orthogonal comme celui de la Figure 1C. Mellor et Blumberg (1985) le désignent comme le plus approprié. Mais ils indiquent aussi qu'on peut l'approximer par celui de la Figure 1B afin de ne pas introduire de complications mathématiques, numériques et informatiques qui se révéleraient d'autant plus inutiles qu'aux échelles spatiales considérées ici la pente du fond n'excède pas 10^{-3} - 10^{-2} si bien que les maillages 1B et 1C sont, en réalité, très proches.

La première formulation d'un système de coordonnées susceptible de sous-tendre la grille 1B est souvent attribuée à Phillips (1957) — dans le cadre de simulations atmosphériques. Par la suite, de nombreux auteurs ont adapté la transformation de coordonnées de Phillips à leurs modèles (*e.g.* Beckers; Blumberg et Herring, 1987; Blumberg et Mellor, 1987; Davies, 1987; Deleersnijder, 1989; Freeman *et al.*, 1972; Nihoul *et al.*, 1986; Owen, 1980). Ici, on suit Nihoul *et al.* (1986) et on écrit

$$(\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \equiv (t, x_1, x_2, L(x_3+h)/H \equiv L\sigma), \quad (3)$$

où t représente le temps. On considère un maillage orthogonal à pas constant selon l'horizontale. La profondeur de la mer, H , est la somme de la profondeur $h(x_1, x_2)$ mesurée par rapport à un niveau de référence et de l'élévation $\eta(t, x_1, x_2)$ comptée positivement vers le haut à partir de ce niveau. Dans le nouvel espace, souvent appelé "espace σ ", L désigne la profondeur constante de la mer, $\bar{x}_3 \in [0, L]$.

On introduit aussi une nouvelle vitesse verticale qui est la vitesse "verticale" contravariante associée au changement de coordonnées (3):

$$\bar{u}_3 \equiv D\bar{x}_3 = L D\sigma \quad (4)$$

où D est l'opérateur "dérivée matérielle", $D = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla_h + u_3 \partial/\partial x_3$ où $\nabla_h = \nabla - \mathbf{e}_3 \partial/\partial x_3$. En vertu de (3) et (4), on voit immédiatement que $D = \partial/\partial \bar{t} + \mathbf{u} \cdot \bar{\nabla}_h + \bar{u}_3 \partial/\partial \bar{x}_3$ avec $\bar{\nabla}_h = \mathbf{e}_1 \partial/\partial \bar{x}_1 + \mathbf{e}_2 \partial/\partial \bar{x}_2$. Dans l'espace σ , il est donc avantageux d'écrire les équations en utilisant \bar{u}_3 au lieu de u_3 . De plus, l'imperméabilité du fond et de la surface de la mer s'exprime de façon simple, *viz.* $\bar{u}_3 = 0$ en $\bar{x}_3 = 0, L$. Enfin, $(H/L)\bar{u}_3$ représente \bar{u}_3 ramenée dans la métrique de l'espace réel et peut s'interpréter comme la vitesse effective d'upwelling (Deleersnijder, 1989), c'est-à-dire la vitesse verticale de traversée des surfaces iso- σ ou encore la vitesse verticale débarrassée de la composante nécessaire à suivre les irrégularités bathymétriques. Aussi l'introduction de \bar{u}_3 s'avère-t-elle utile au plan mathématique mais également en vue de l'interprétation physique des résultats du modèle.

Dans l'espace σ , on peut maintenant écrire, sous forme conservative, les équations exprimant, à la méso-échelle, la conservation locale de la masse (5), l'évolution de la surface libre (6) et enfin le bilan de quantité de mouvement selon l'horizontale (7) et la verticale (8):

$$\bar{\nabla}_h \cdot (H\hat{\mathbf{u}}) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} (H\bar{u}_3) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla}_h \cdot (H\bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (H\mathbf{u})}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla}_h \cdot (H\mathbf{u}\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} (H\bar{u}_3\mathbf{u}) + f\mathbf{e}_3 \times H\mathbf{u} = \\ - (H/\rho_0) \left\{ \bar{\nabla}_h p + \frac{L}{H} [(1-\sigma)\bar{\nabla}_h h - \sigma\bar{\nabla}_h \eta] \frac{\partial p}{\partial \bar{x}_3} \right\} + (L^2/H^2) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left[\bar{v} \frac{\partial (H\mathbf{u})}{\partial \bar{x}_3} \right] + Hd, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{x}_3} = - (H/L) \rho g. \quad (8)$$

Ci-dessus, f , le facteur de Coriolis, vaut $2\Omega \cdot \mathbf{e}_3$ où Ω est le vecteur rotation de la Terre. De plus, $\bar{\mathbf{u}}$ dénote la moyenne sur la profondeur de \mathbf{u} et on pose $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$. Selon les objectifs du modèle et le niveau de complexité requis, des équations pour la fermeture turbulente, la thermodynamique et la dispersion active ou passive de grandeurs scalaires doivent être ajoutées au système (5)-(8).

Dispersion horizontale

Au-delà de la méso-échelle, les mouvements marins, essentiellement horizontaux et anisotropes ($\delta \ll 1$), ont en général un effet diffusif. De nombreuses expériences de dispersion de contaminants passifs et de particules l'attestent (*e.g.* Okubo, 1980). Cette dispersion peut s'exprimer à l'aide d'une loi "de type Fick" où le coefficient de diffusion, $\bar{\kappa}$, est fonction de l'échelle du mouvement, Λ . On a (*e.g.* Okubo, 1980):

$$\bar{\kappa} = C\Lambda^{4/3}, \quad (9)$$

où C est une constante. D'autre part, dès les années soixante, Ozmidov (*e.g.* Monin et Ozmidov, 1985) a calculé les spectres d'énergie cinétique des mouvements océaniques horizontaux à grande échelle. De façon apparemment surprenante, il en ressort que la théorie de Kolmogorov peut s'appliquer à ces mouvements dans de larges bandes de valeurs de Λ . Dès lors, le coefficient de dispersion horizontale de quantité de mouvement équivaut à peu près à celui des quantités scalaires et se calcule par la relation (9). Toutefois, la valeur de C est fonction des situations particulières et il est

malaisé de la définir avec précision. Pour $\Lambda=200$ m — ordre de grandeur en relation avec les expériences numériques rapportées ci-dessous — on trouve selon divers auteurs, $1.5 \cdot 10^{-2} \leq \bar{\kappa} \leq 3 \cdot 10^{-1}$ (Okubo, 1980), $\bar{\kappa}=10^{-1}$ (Monin et Ozmidov, 1985), $\bar{\kappa}=2.5 \cdot 10^{-1}$ (Ronday, 1975) et $\bar{\kappa}=2.5$ (Nihoul, 1975a) (où $\bar{\kappa}$ s'évalue en m^2s^{-1}).

Dans le modèle numérique, on retient pour d une forme générique comme

$$d = \bar{\kappa} \nabla_h^2 u \quad (10)$$

et on estime $\bar{\kappa}$ à l'aide de la relation (9) avec $\Lambda=\Delta x$. Même en considérant les valeurs les plus élevées de $\bar{\kappa}$, le terme Hd dans l'équation (7) apparaît comme globalement négligeable. Néanmoins, dans les régions où u varie fortement selon l'horizontale, Hd peut affecter significativement l'écoulement car cette expression contient les dérivées spatiales d'ordre le plus élevé, c'est-à-dire celles qui sont les plus sensibles aux processus ayant les longueurs caractéristiques les plus courtes. Donc, localement, Hd peut jouer un rôle non-négligeable.

La stabilité de la méthode numérique exige souvent la présence d'un terme de dispersion horizontale. De surcroît, aucune méthode numérique n'étant capable de bien représenter l'évolution des phénomènes dont l'échelle est proche de Δx , il est souhaitable de filtrer au mieux les "ondes numériques" les plus courtes. Celles-ci sont générées en permanence par les non-linéarités des équations et peuvent être vues comme du bruit puisque le schéma numérique les traite de façon inadéquate (Blumberg et Mellor, 1987). La forme (10) dissipe plus énergiquement les "ondes courtes" mais certains (e.g. Holland, 1978) lui préfèrent un terme biharmonique en raison de sa sélectivité plus grande — dissipation plus grande (faible) des ondes courtes (longues).

Les raisons d'introduire de la dispersion horizontale de quantité de mouvement sont donc multiples mais aucune forme analytique de d ni aucune valeur de C , et donc de $\bar{\kappa}$, ne recueillent un large assentiment dans la littérature actuelle. Profitant de cette incertitude, nous estimons bénéficier d'une latitude suffisante pour formuler d en vue de contrôler et d'améliorer certains aspects du modèle numérique.

Nous suggérons d'examiner les trois points suivants:

1. Représentation des couches limites. Il faut que d autorise la représentation correcte des couches limites de fond et de surface telles que la couche d'Ekman (Mellor et Blumberg, 1985). Celle-ci s'entend comme une solution des équations où l'on suppose l'homogénéité horizontale. Au sens de la théorie des couches limites, cependant, "homogénéité horizontale" implique plutôt de négliger les dérivées dans la direction parallèle à la frontière associée à la couche limite (e.g. Schlichting, 1979). Puisque la pente du fond, et plus encore celle de la surface, sont faibles, le distinguo paraît inutile mais, en réalité, il n'en est rien.

Les surfaces iso- σ étant d'autant plus parallèles au fond que $\sigma \rightarrow 0$, on obtient la couche d'Ekman de fond en supprimant les termes comprenant $\bar{\nabla}_h$. Comme l'expression (10) contient ∇_h au lieu de $\bar{\nabla}_h$, il faut d'abord l'exprimer dans les nouvelles coordonnées:

$$d = \bar{\kappa} \left[\bar{\nabla}_h^2 u + \|\nabla_h \bar{x}_3\|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_3^2} + \text{dérivées croisées verticales/horizontales} \right]. \quad (11)$$

Si $\sigma \rightarrow 0$, $\|\nabla_h \bar{x}_3\|^2 \sim (L^2/H^2) \|\nabla_h h\|^2$. Le deuxième terme du membre de droite de (11) est susceptible de perturber sensiblement le terme de dispersion verticale de quantité de mouvement horizontale, $(L^2/H^2)(\partial/\partial \bar{x}_3)[\bar{\nabla}(\partial u/\partial \bar{x}_3)]$. En effet, bien que $\|\nabla_h h\|$ reste limité à 10^{-3} - 10^{-2} , $\bar{\kappa}\|\nabla_h h\|^2$ peut être comparable à $\bar{\nu}$ car $\bar{\nu}$ est beaucoup plus petit que $\bar{\kappa}$, viz. $\bar{\nu} \leq 10^{-2} m^2s^{-1}$. La solution asymptotique d'Ekman repose sur l'équilibre entre l'accélération de Coriolis et la diffusion turbulente verticale de quantité de mouvement; on voit donc que le second terme de (11) peut rendre cet équilibre impossible.

Près de la surface, on a $\nabla_h \sim \bar{\nabla}_h$ ($\sigma \rightarrow 1$), ce qui exclut toute difficulté dans cette région.

On peut discuter de façon similaire la représentation d'autres couches limites bien connues et aboutir à la même conclusion: d devrait contenir uniquement des dérivées dans les surfaces iso- σ , c'est-à-dire $\partial/\partial \bar{x}_j$ et non $\partial/\partial x_j$ ($j=1,2$) (Mellor et Blumberg, 1985).

Certains (*e.g.* Alpert et Neumann, 1984) utilisent le développement (11) pour justifier leur préférence pour la formulation (10) en argumentant de façon opposée.

Dans les modèles d'océan à grande échelle, en accord avec les observations, on utilise parfois un terme de dispersion comprenant des dérivées le long des surfaces d'égalité de densité. Dans cet esprit, on peut aussi effectuer un changement de variables dans lequel la masse volumique devient la nouvelle coordonnée verticale (Bleck et Smith, 1990; Boudra *et al.*, 1987). Mais ceci ne concerne pas les modèles à la méso-échelle en eaux peu profondes.

2. Action sur la vitesse horizontale. En transposant à trois dimensions la discussion de Nihoul (1975b) et en tenant compte de la remarque sur la modélisation correcte des couches limites, on aboutit à

$$Hd = H \bar{\kappa} \bar{\nabla}_h^2 \mathbf{u}, \text{ ou } \bar{\kappa} \bar{\nabla}_h^2 (Hu) \quad (12),(13)$$

selon que l'inconnue numérique est \mathbf{u} ou Hu . Cette formulation se distingue par sa grande simplicité — pourquoi élaborer une paramétrisation complexe, et donc informatiquement coûteuse, pour un processus qui, globalement, est loin d'être dominant?

Des modèles intégrés sur la profondeur (*e.g.* Peraire *et al.*, 1986), utilisent une expression qui, à trois dimensions, s'identifie à celle de Mellor et Blumberg (1985):

$$Hd = \bar{\nabla}_h \cdot \left\{ \frac{H\bar{\kappa}}{2} [\bar{\nabla}_h \mathbf{u} + (\bar{\nabla}_h \mathbf{u})^T] \right\}. \quad (14)$$

Cette formule, conservative, autorisant la variation de $\bar{\kappa}$, satisfait au principe d'indifférence matérielle — invariance vis-à-vis d'une rotation/translation des axes — au contraire de (13). Toutefois, cette dernière propriété ne nous paraît pas essentielle parce que la dispersion horizontale est intimement liée au maillage et que le reste du schéma numérique ne respecte pas non plus le principe d'indifférence matérielle.

Nous proposons de conserver, autant que possible, la simplicité de (12) ou (13) et de bâtir une forme conservative inspirée de (14). De plus, dans le but de contrôler la variabilité de la vitesse verticale, nous ajoutons aussi un terme lié, non plus au cisaillement du champ de vitesse, mais à sa divergence — et affecté d'un second coefficient de dispersion, $\bar{\kappa}'$. Avec Hu comme inconnue numérique, nous suggérons:

$$Hd = \bar{\nabla}_h \cdot [\bar{\kappa} \bar{\nabla}_h (Hu)] + \bar{\nabla}_h [\bar{\kappa}' \bar{\nabla}_h \cdot (Hu)]. \quad (15)$$

On examine maintenant l'influence de la paramétrisation de la dispersion horizontale sur le bilan de quantité de mouvement. Utilisant la forme (15), appliquant à l'équation (7) des opérations simples, on déduit facilement une série d'expressions intégrales du type

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \Psi \, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} (\bar{\kappa} \Phi + \bar{\kappa}' \Phi') \, d\mathcal{D} + \int_{\delta\mathcal{D}} (\bar{\kappa} \phi + \bar{\kappa}' \phi') \, d(\delta\mathcal{D}) + \Pi \quad (16)$$

où \mathcal{D} désigne le domaine d'intérêt dans l'espace σ ($d\mathcal{D} = d\bar{x}_1 \, d\bar{x}_2 \, d\bar{x}_3$) et $\delta\mathcal{D}$, la surface délimitant ce domaine. Si $\bar{\kappa}$ et $\bar{\kappa}'$ sont constants, alors Π ne dépend pas de la dispersion horizontale. L'intégrale de surface indique le rôle des conditions aux limites dans le bilan de Ψ .

D'après la Table 1, les termes en $\bar{\kappa}$ et $\bar{\kappa}'$ participent à la dissipation de l'énergie cinétique généralisée, $\|Hu\|^2/2$, car, à tout instant et en tout point, Φ et Φ' sont négatifs. Qualitativement, $\bar{\kappa}$ et $\bar{\kappa}'$ ont le même effet sur $\|Hu\|^2/2$. On peut aussi montrer que la dispersion horizontale de quantité de mouvement tend à faire diminuer certaines expressions, définies positives, mesurant la variation horizontale de \mathbf{u} . En particulier, le terme en $\bar{\kappa}$ contribue à la dissipation de vorticité généralisée, $\omega = \mathbf{e}_3 \cdot [\bar{\nabla}_h \mathbf{x} (Hu)]$. Par exemple, aux alentours d'un tourbillon, $\| \bar{\nabla}_h \omega \|$ peut devenir très grand si bien que $\bar{\kappa}$ est alors susceptible de contrôler la taille du tourbillon et l'intensité de sa circulation. Le second coefficient de dispersion, $\bar{\kappa}'$, ne joue par contre aucun rôle dans ce processus.

Il ne faut toutefois pas oublier qu'en dehors des zones où la variabilité horizontale de l'écoulement est grande la petitesse relative des termes en $\bar{\kappa}$ et $\bar{\kappa}'$ restreint fortement l'influence de d , qui se borne alors à assurer la stabilité numérique et à filtrer les "ondes courtes" indésirables. Aussi, on peut probablement considérer que d agit essentiellement sur la répartition du champ de vitesse dans le domaine et, en particulier, sur les structures bien marquées comme les tourbillons mais ne contrôle que peu le débit général du fluide. En effet, dans le cas où les flux entrant et sortant du domaine sont imposés à une ou plusieurs frontières latérales, le champ de vitesse à l'intérieur du domaine doit être compatible avec ces flux, quelle que soit la dispersion horizontale.

Table 1. Termes importants de différentes versions de l'équation (16).

Ψ	Φ	Φ'
$\frac{1}{2} \ Hu\ ^2$	$- [\bar{\nabla}_h(Hu)]:[\bar{\nabla}_h(Hu)]$	$- [\bar{\nabla}_h \cdot (Hu)]^2$
$\frac{1}{2} \ \bar{\nabla}_h x(Hu)\ ^2 \equiv \frac{1}{2} \omega^2$	$- \ \bar{\nabla}_h \omega\ ^2$	0
$\frac{1}{2} (H\bar{u}_3)^2$	$- \ \bar{\nabla}_h(H\bar{u}_3)\ ^2$	$- \ \bar{\nabla}_h(H\bar{u}_3)\ ^2$
$\frac{1}{2} \ \bar{\nabla}_h(H\bar{u}_3)\ ^2$	$- [\bar{\nabla}_h \bar{\nabla}_h(H\bar{u}_3)]:[\bar{\nabla}_h \bar{\nabla}_h(H\bar{u}_3)]$	$- [\bar{\nabla}_h \bar{\nabla}_h(H\bar{u}_3)]:[\bar{\nabla}_h \bar{\nabla}_h(H\bar{u}_3)]$

3. Action sur la vitesse verticale. Comme on l'a déjà expliqué, dans l'espace σ , seule \bar{u}_3 intervient dans les équations. On se contentera donc d'examiner le champ de \bar{u}_3 sans faire référence à u_3 . Dès le moment où l'on applique l'approximation hydrostatique, on n'a plus d'équation pour la vitesse verticale. Il s'ensuit que l'on n'a aucun moyen direct de contrôler ou de filtrer numériquement les valeurs issues du calcul numérique, au contraire de ce que l'on fait pour la vitesse horizontale. Ce problème se pose avec d'autant plus d'acuité que la procédure de calcul de \bar{u}_3 s'avère peu adéquate du strict point de vue numérique. En effet, dans tous les modèles marins tridimensionnels mentionnés dans ce texte, mais aussi dans les simulations atmosphériques (*e.g.* Steppeler, 1989), on évalue la vitesse verticale à l'aide de l'équation de continuité, *e.g.*

$$\bar{u}_3 = -\frac{1}{H} \int_0^{\bar{x}_3} \bar{\nabla}_h \cdot (H\hat{u}) \, d\bar{x}_3. \quad (17)$$

La divergence de $H\hat{u}$ a pour effet de mettre en évidence les composantes de $H\hat{u}$ dont la longueur caractéristique est la plus courte. On peut donc s'attendre à ce que la variabilité horizontale de \bar{u}_3 soit plus grande que celle de u ou de \hat{u} sans qu'il soit possible de vraiment savoir si cette variabilité correspond à une réalité physique ou à du bruit numérique. Puisqu'il n'existe aucune technique de mesure directe *in situ* de la vitesse verticale, il sera très difficile de juger la qualité du champ de vitesse verticale simulé. Il importe cependant de disposer d'un outil numérique permettant de contrôler la variabilité de \bar{u}_3 . Celle-ci pourra alors être ajustée dans le processus de calibration des solutions numériques. A défaut de pouvoir comparer la vitesse verticale simulée avec celle existant physiquement, on pourra au moins évaluer son effet au travers des quantités subissant une advection verticale. Cet aspect peut s'avérer crucial dans les zones d'upwellings ou de downwellings.

Puisqu'on ne dispose d'aucun moyen direct de filtrer \bar{u}_3 , il faut tenter de le réaliser "par la bande", par le biais du filtrage de la vitesse horizontale lié à la paramétrisation de la dispersion. En d'autres termes, il faut ajuster d pour agir aussi sur \bar{u}_3 . Les deux dernières lignes de la Table 1 indiquent que les termes en $\bar{\kappa}$ et $\bar{\kappa}'$ jouent qualitativement le même rôle: ils tendent à diminuer la mesure globale de $H\bar{u}_3$ et de la norme de son gradient horizontal. Or, comme Φ et Φ' influencent différemment — du point de vue qualitatif — les variations horizontales de u , on peut espérer agir distinctement sur u et \bar{u}_3 , en faisant varier séparément $\bar{\kappa}$ et $\bar{\kappa}'$.

Les équations à la méso-échelle étant non-linéaires et couplées, notre étude analytique n'a qu'une valeur heuristique. En conséquence, le contrôle de la variabilité de \bar{u}_3 doit être testé dans des expériences numériques adéquates.

Expériences numériques: discussion et conclusion

Les courants de marée en eau peu profonde, souvent intenses — $\|u\| \approx 10^{-1} - 10^0 \text{ ms}^{-1}$, — forment généralement des tourbillons en aval des caps ou des îles de petite taille. Dans leur voisinage sont retenues des particules en suspension et des substances dissoutes. La circulation des masses d'eau — et les temps de résidence — à grande échelle s'en trouve ainsi modifiée.

L'Australian Institute of Marine Science a entrepris en 1982 une étude *in situ* de la circulation de marée autour de l'île Rattray située dans la Grande Barrière de Corail par $148^{\circ}30'$ de longitude est et 20° de latitude sud. Les données recueillies ont été analysées par Wolanski *et al.* (1984). Des modèles bidimensionnels — intégrés sur la profondeur — ont été appliqués à ce site (Black et Gay, 1987; Falconer *et al.*, 1986; Wolanski, 1988). Ces modèles sont capables de représenter les caractéristiques principales des tourbillons formés en aval de l'île. Mais, pour obtenir des informations sur les remontées ou les descentes d'eau ainsi que leur effet sur l'écoulement, il faut avoir recours à un modèle tridimensionnel. C'est pourquoi on a utilisé le modèle du GHER — GeoHydrodynamics and Environment Research — (Deleersnijder *et al.*, 1989).

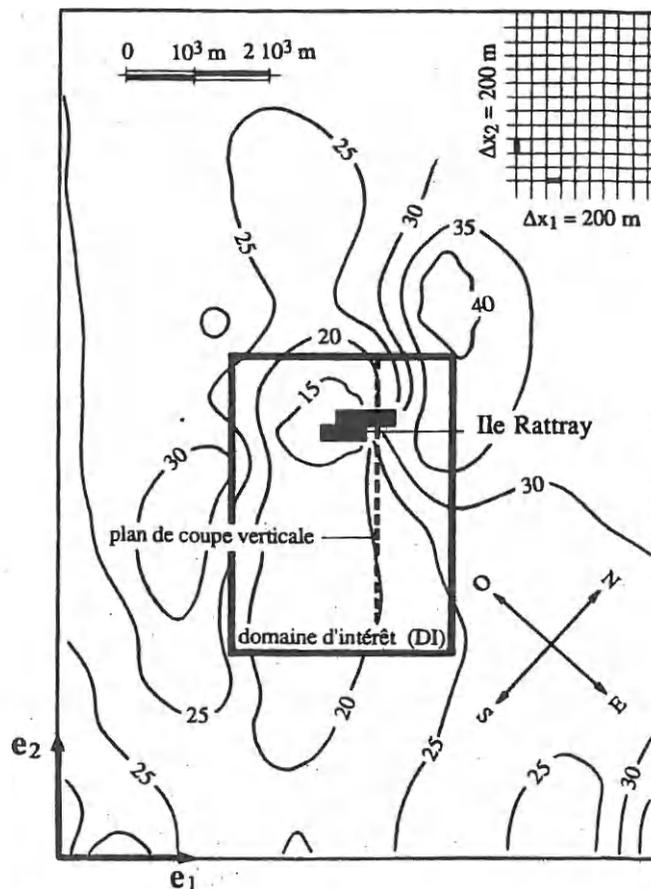


Figure 2. Bathymétrie du domaine de calcul entourant l'île Rattray. On mesure la profondeur en mètres.

La présence de tourbillons et de mouvements verticaux aux alentours de l'île fournit une excellente opportunité de mettre à l'épreuve les idées que nous venons de développer. Dans cette optique, on limitera l'analyse des résultats au domaine d'intérêt, plus petit que le domaine de calcul (Figure 2). On

examinera le champ de courant une heure environ avant la marée haute semi-diurne. D'après Wolanski *et al.* (1984), les variations de densité sont négligeables; d'où $\nabla_h p = \rho_0 g \nabla_h \eta$. On résout les équations (5)-(8) par la méthode du "volume fini" sur une grille *staggered-C*. On prend $L=10^3$ m et on divise chaque colonne d'eau en cinq mailles. Deleersnijder *et al.* (1989) fournissent d'autres détails. On effectue quatre simulations qui ne diffèrent que par les valeurs de $\tilde{\kappa}$ et $\tilde{\kappa}'$ (Table 2). Des simulations effectuées, il ressort que la valeur minimum admissible de $\tilde{\kappa}$ est d'environ $2.5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. En deçà de cette limite, le filtrage des "ondes courtes" est insuffisant et le schéma manifeste une tendance à l'instabilité numérique. Les considérations numériques fixent une borne minimale au coefficient de dispersion horizontale qui correspond à la très large borne maximale (Nihoul, 1975a) des valeurs trouvées dans la littérature pour $\Lambda=\Delta x=200$ m, ce qui montre bien que les raisons d'introduire de la dispersion horizontale sont essentiellement numériques (Pielke et Martin, 1981).

Table 2. Valeurs de $\tilde{\kappa}$ et $\tilde{\kappa}'$ dans les différentes simulations.

simulation	$\tilde{\kappa} \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$	$\tilde{\kappa}' \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$
S1	2.5	2.5
S2	10.0	10.0
S3	2.5	10.0
S4	10.0	2.5

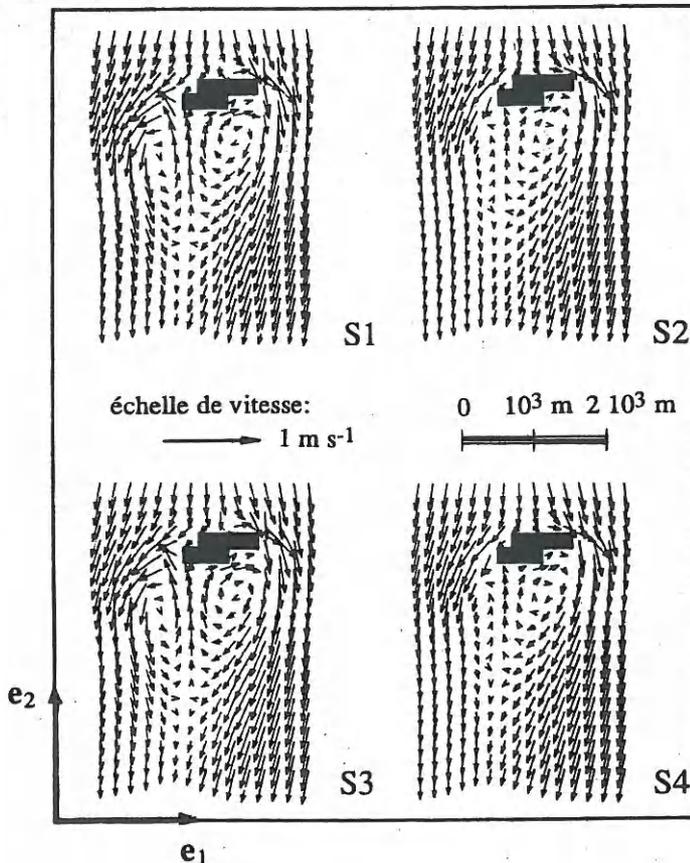


Figure 3. Champs de vitesse horizontale moyennée sur la profondeur, \bar{u} , dans les simulations S1, S2, S3 et S4.

La Figure 3 montre clairement que $\tilde{\kappa}$ contrôle la taille et l'intensité de la circulation des tourbillons alors que $\tilde{\kappa}'$ ne joue aucun rôle significatif — sur \bar{u} . Les simulations S1 et S3 semblent plus proches des observations de Wolanski *et al.* (1984) que S2 et S4: bien que les mesures *in situ* n'infirmant ni ne confirment la présence d'un tourbillon plus ténu à gauche du tourbillon principal, la taille de ce dernier semble correcte dans S1 et S3. La bathymétrie engendre l'asymétrie des deux tourbillons. En effet, quand on impose une profondeur constante, le modèle génère deux tourbillons de taille comparable.

On voit que $\tilde{\kappa}'$ exerce une influence sur la vitesse verticale (Figure 4) mais pratiquement aucune sur \bar{u} (Figure 3). Cette situation, en apparence paradoxale, s'explique aisément si l'on remarque que

$\|\hat{u}\|$ est généralement beaucoup plus petit que $\|\bar{u}\|$, ce qui implique qu'une modification de \hat{u} — et donc de \bar{u}_3 — affecte peu \bar{u} . En d'autres mots, l'écoulement n'est pas vraiment tridimensionnel, sauf au coeur des tourbillons mais la maille est trop grossière pour détailler suffisamment cette zone.

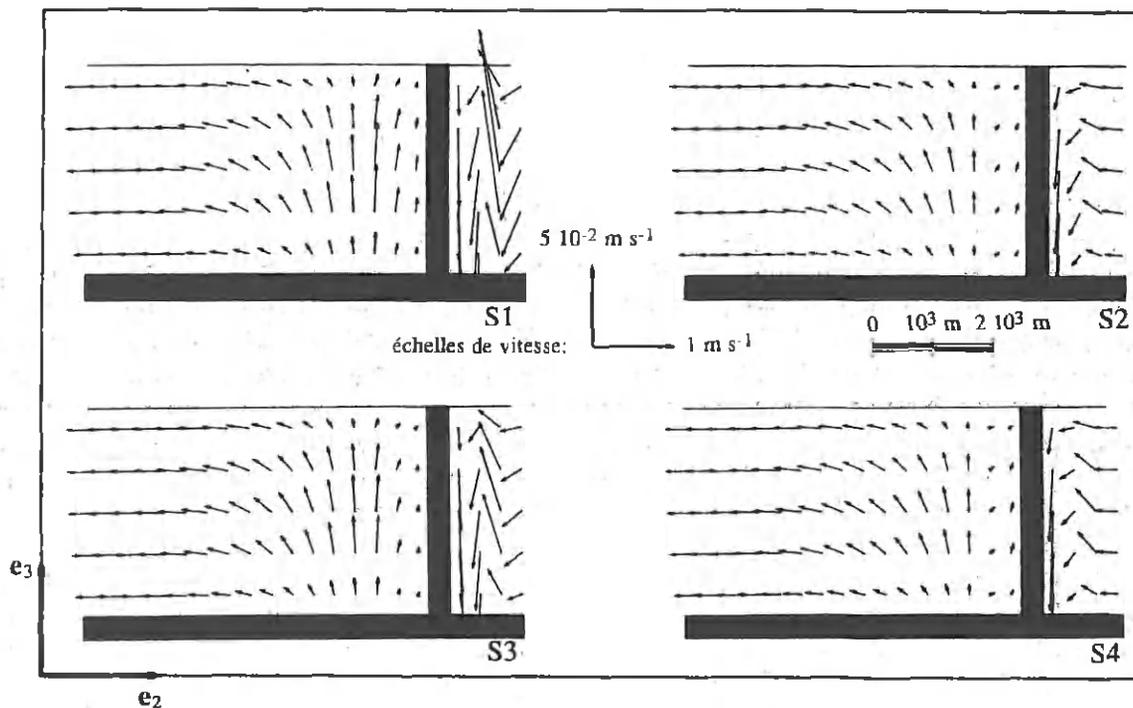


Figure 4. Vues en coupe — dans le plan de coupe indiqué sur la Figure 2 — de $u_2 e_2 + \bar{u}_3 e_3$ dans les différentes simulations.

Caractériser la variabilité horizontale de \bar{u}_3 par un seul nombre s'avère très commode pour la discussion des résultats, surtout si ce nombre est une longueur caractéristique horizontale de variation — que l'on note $\mathcal{L}(\bar{u}_3)$. L'opérateur $\langle \rangle$ symbolisant la moyenne sur le domaine d'intérêt de l'espace σ , une mesure globale de $\bar{u}_3 - \langle \bar{u}_3 \rangle$ et $\|\bar{\nabla}_h \bar{u}_3\|$ est donnée par $\mathcal{U}(\bar{u}_3) = \langle (\bar{u}_3 - \langle \bar{u}_3 \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ et $\mathcal{G}(\bar{u}_3) = \langle \|\bar{\nabla}_h \bar{u}_3\|^2 \rangle^{1/2} / 2^{1/2}$. D'après Powell (1989), on peut alors définir $\mathcal{L}(\bar{u}_3)$ comme suit:

$$\mathcal{L}(\bar{u}_3) = \mathcal{U}(\bar{u}_3) / \mathcal{G}(\bar{u}_3). \quad (18)$$

Dans la Table 3, on voit que, de S1 à S3 et de S2 à S4, $\mathcal{U}(\bar{u}_3)$ et $\mathcal{G}(\bar{u}_3)$ diminuent dans de semblables proportions si bien que $\mathcal{L}(\bar{u}_3)$ n'augmente que de moins de 10%. Comment l'expliquer? Les deux dernières lignes de la Table 1 indiquent que les taux de décroissance temporelle de $(H\bar{u}_3)^2/2$ et de $\|\bar{\nabla}_h(H\bar{u}_3)\|^2/2$ sont du même ordre de grandeur. Il est donc concevable que la variation relative de $\mathcal{U}(\bar{u}_3)$ et $\mathcal{G}(\bar{u}_3)$ sous l'effet d'une modification de \mathcal{K} puisse être similaire. Mais, en s'inspirant des paramétrisations de Smagorinsky (1963) et Deardorff (1971), on pourrait faire dépendre \mathcal{K} et \mathcal{K}' des conditions locales de l'écoulement plutôt que de se contenter de valeurs constantes. La paramétrisation de la dispersion horizontale de quantité de mouvement deviendrait non-linéaire; dans ce cas, $\mathcal{U}(\bar{u}_3)$ et $\mathcal{G}(\bar{u}_3)$ pourraient se comporter différemment lors d'une variation de \mathcal{K} , aboutissant, peut-être, à un meilleur contrôle de $\mathcal{L}(\bar{u}_3)$.

La Table 3 montre que $\mathcal{L}(\bar{u}_3)$ est proche de Δx alors que les longueurs caractéristiques horizontales de u_1 et u_2 sont nettement plus grandes. Ceci est en accord avec (17) mais indique, une fois de plus, le manque de résolution horizontale du modèle numérique. Effectuer les mêmes simulations avec une résolution horizontale plus fine serait donc utile.

Table 3. Evaluation de la variabilité de u_1 , u_2 et \bar{u}_3 .

simulation	$\mathcal{A}(u_1)$ (10^2 m)	$\mathcal{A}(u_2)$ (10^2 m)	$\mathcal{A}(\bar{u}_3)$ (10^{-3} ms $^{-1}$)	$\mathcal{G}(\bar{u}_3)$ (10^{-5} s $^{-1}$)	$\mathcal{A}(\bar{u}_3)$ (10^2 m)
S1	5.73	5.81	7.83	2.87	2.73
S2	5.99	6.10	3.68	1.59	2.32
S3	5.73	5.81	6.10	2.08	2.93
S4	5.99	6.10	4.05	1.87	2.16

La dépendance de \bar{u}_3 selon \bar{x}_3 ne pose aucun problème. Tous les profils verticaux de \bar{u}_3 sont très réguliers car la dispersion verticale de quantité de mouvement lisse les irrégularités du profil vertical de \hat{u} alors que, selon l'horizontale, le lissage produit par la dispersion horizontale est beaucoup moins efficace. Tout se passe comme si \hat{u} pouvait s'écrire comme le produit d'une fonction *smooth* de \bar{x}_3 et d'une fonction très variable des coordonnées horizontales. D'autre part, dans nos simulations, la diffusivité turbulente \bar{v} est paramétrisée de façon simple (Deleersnijder *et al.*, 1989), viz. $\bar{v} = \|\tau^b\|^{1/2} H \xi(\bar{x}_3/L)$ où τ^b désigne la tension de fond et ξ , une fonction sans dimension de \bar{x}_3/L uniquement. Par conséquent, \bar{v} n'est pas directement sensible au gradient vertical de \hat{u} comme c'est le cas dans une fermeture turbulente plus réaliste. Un mécanisme non-linéaire faisant intervenir \hat{u} manque donc. Il serait sans doute fort instructif d'analyser l'effet de la fermeture turbulente sur \hat{u} et donc sur \bar{u}_3 .

Au-delà des expériences numériques supplémentaires que nous venons de suggérer, il faudrait analyser toutes les données disponibles concernant le transport de constituants dissous ou de particules en suspension pour en extraire le plus d'informations possible sur la vitesse verticale *in situ* car, en définitive, seule compte la comparaison d'une solution numérique avec les observations faites sur le terrain et non avec une autre solution numérique.

Remerciements

Eric Wolanski exprime sa gratitude à Jacques Nihoul pour son accueil lors de sa visite au GHER. Eric Deleersnijder remercie le F.N.R.S. et le Professeur Nihoul pour la confiance qu'ils lui témoignent. André Joris a élaboré les figures avec son habileté coutumière.

Références

- Alpert, J. and J. Neumann, 1984, *On the enhanced smoothing over topography in some mesometeorological models*, Bound-Layer Meteorol., 30, pp 293-312
- Backhaus, J.O., Crean, P.B. and D.K. Lee, 1987, *On the application of a three-dimensional numerical model to the waters between Vancouver Island and the mainland coast of British Columbia and Washington State*, in: Three-Dimensional Coastal Ocean Models, N.S. Heaps (Ed.), Coastal and Estuarine Sciences (Vol. 4), American Geophysical Union, Washington, D.C., pp 149-175
- Beckers, J.-M., *Application of a 3D model to the Western Mediterranean*, à paraître dans le Journal of Marine Systems
- Bedford, K.W., Dingman, J.S. and W.K. Yeo, 1987, *Preparation of estuary and marine model equations by generalized filtering methods*, in: Three-dimensional models of marine and estuarine dynamics, J.C.J. Nihoul and B.M. Jamart (Eds.), Elsevier, pp 113-125
- Black, K. and S. Gay, 1987, *Eddy formation in unsteady flows*, J. Geophys. Res. (C), 92, pp 9514-9522
- Bleck, R. and L.T. Smith, 1990, *A wind-driven isopycnic coordinate model of the north and equatorial Atlantic Ocean. 1. Model development and supporting experiments*, J. Geophys. Res. (C), 95, pp 3273-3285
- Blumberg, A.F. and H.J. Herring, 1987, *Circulation modelling using orthogonal curvilinear coordinates*, in: Three-dimensional models of marine and estuarine dynamics, J.C.J. Nihoul and B.M. Jamart (Eds.), Elsevier, pp 55-88
- Blumberg, A.F. and G.L. Mellor, 1987, *A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model*, in: Three-Dimensional Coastal Ocean Models, N.S. Heaps (Ed.), Coastal and Estuarine Sciences (Vol. 4), American Geophysical Union, Washington, D.C., pp 1-16
- Boudra, D.B., Bleck, R. and F. Schott, 1987, *Study of transport fluctuations and meandering of the Florida Current using an isopycnic coordinate numerical model*, in: Three-dimensional models of marine and estuarine dynamics, J.C.J. Nihoul and B.M. Jamart (Eds.), Elsevier, pp 149-168
- Davies, A.M., 1987, *Spectral models in continental shelf sea oceanography*, in: Three-Dimensional Coastal Ocean Models, N.S. Heaps (Ed.), Coastal and Estuarine Sciences (Vol. 4), American Geophysical Union, Washington, D.C., pp 71-106
- Deardorff, J.W., 1971, *On the magnitude of the subgrid scale eddy coefficient*, J. Comput. Phys., 7, pp 120-133

- Deleersnijder, E., 1989, *Upwelling and upwelling in three-dimensional marine models*, Appl. Math. Model., 13, pp 462-467
- Deleersnijder, E., Wolanski, E. and A. Norro, 1989, *Numerical simulation of the three-dimensional tidal circulation in an island's wake*, in: Computers and Experiments in Fluid Flow (Proceedings of the fourth International Conference on Computational Methods and Experimental Measurements, Capri, Italy, May 1989), G.M. Carlomagno and C.A. Brebbia (Eds.), Computational Mechanics Publications & Springer-Verlag, pp 355-381
- Falconer, R.A., Wolanski, E. and L. Mardapitta-Hadjipandeli, 1986, *Modeling tidal circulation in an island's wake*, J. Waterw. Port Coastal Ocean Eng., 112, pp 234-254
- Ferziger, J.H., 1983, *Higher-level simulations of turbulent flows*, in: Computational Methods for Turbulent, Transonic, and Viscous Flows, J.A. Essers (Ed.), Hemisphere Publishing Corporation, pp 93-182
- Freeman, N.G., Hale, A.M. and M.B. Danard, 1972, *A modified sigma equations' approach to the numerical modeling of Great Lakes hydrodynamics*, J. Geophys. Res., 77, pp 1050-1060
- Holland, W.R., 1978, *The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean - Numerical experiments using a wind-driven quasi-geostrophic model*, J. Phys. Oceanogr., 8, pp 363-392
- Leendertse, J.J., 1989, *A new approach to three-dimensional free-surface flow modelling*, The RAND Corporation (RAND/R-3712-NETH/RC), 51 p
- Liu, S.-K. and J.J. Leendertse, 1987, *Modeling the Alaskan Continental Shelf Waters*, The RAND Corporation (RAND/R-3567-NOAA/RC), 136 p
- Mellor, G.L. and A.F. Blumberg, 1985, *Modeling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system*, Mon. Weather Rev., 113, pp 1379-1383
- Mellor, G.L. and T. Yamada, 1982, *Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems*, Rev. Geophys. Space Phys., 20, pp 851-875
- Monin, A.S. and R.V. Ozmidov, 1985, *Turbulence in the Ocean*, Reidel, 247 p
- Nihoul, J.C.J., 1975a, *Marine systems analysis*, in: Modelling of Marine Systems, J.C.J. Nihoul (Ed.), Elsevier, pp 3-39
- Nihoul, J.C.J., 1975b, *Hydrodynamic models*, in: Modelling of Marine Systems, J.C.J. Nihoul (Ed.), Elsevier, pp 41-67
- Nihoul, J.C.J., 1980, *Basic equations of geophysical fluid dynamics and their application to ocean-atmosphere weather and climate models*, University of London (Special University Lecture, Belgian Visiting Professorship 1980-1981, Department of Mathematics, Imperial College), 61 p
- Nihoul, J.C.J., Deleersnijder, E. and S. Djenidi, 1989, *Modelling the general circulation of shelf seas by 3D k-ε models*, Earth-Sci. Rev., 26, pp 163-189
- Nihoul, J.C.J. and S. Djenidi, 1987, *Perspective in three-dimensional modelling of the marine system*, in: Three-dimensional models of marine and estuarine dynamics, J.C.J. Nihoul and B.M. Jamart (Eds.), Elsevier, pp 1-33
- Nihoul, J.C.J., Walleffe, F. and S. Djenidi, 1986, *A 3D-numerical model of the Northern Bering Sea*, Environ. Softw., 1, pp 76-81
- Okubo, A., 1980, *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*, Springer-Verlag, 254 p
- Owen, A., 1980, *A three-dimensional model of the Bristol Channel*, J. Phys. Oceanogr., 10, pp 1290-1302
- Pedlosky, J., 1984, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 624 p
- Peraire, J., Zienkiewicz, O.C. and K. Morgan, 1986, *Shallow water problems: a general explicit formulation*, Int. J. Numer. Methods Eng., 22, pp 547-574
- Phillips, N.A., 1957, *A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting*, J. Meteorol., 14, pp 184-185
- Pielke, R.A. and C.L. Martin, 1981, *The derivation of a terrain-following coordinate system for use in a hydrostatic model*, J. Atmos. Sci., 38, pp 1707-1713
- Powell, T.M., 1989, *Physical and biological scales of variability in lakes, estuaries, and the coastal ocean*, in: Perspectives in Ecological Theory, J. Roughgarden, R.M. May and S.A. Levin (Eds.), Princeton University Press, pp 157-176
- Rodi, W., 1984 (2nd edition), *Turbulence models and their application in hydraulics - A state of the art review*, International Association for Hydraulic Research, 104 p
- Ronday, F.C., 1975, *Influence du cisaillement des courants sur l'anisotropie des coefficients de diffusion-dispersion*, Bull. Soc. R. Sci. Liège, 11-12, pp 609-624
- Schlichting, H., 1979 (7th edition), *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, 817 p
- Smagorinsky, J., 1963, *General circulation experiments with the primitive equations, I. The basic experiment*, Mon. Weather Rev., 91, pp 99-164
- Stappeler, J., 1989, *A three dimensional global weather prediction model using a finite element scheme for vertical discretization*, Int. J. Numer. Methods Eng., 27, pp 129-144
- Wolanski, E., Imberger, J. and M.L. Heron, 1984, *Island wakes in shallow coastal waters*, J. Geophys. Res.(C), 89, pp 10553-10569
- Wolanski, E., 1988, *Island wakes in shallow waters*, J. Geophys. Res. (C), 93, pp 1335-1336

